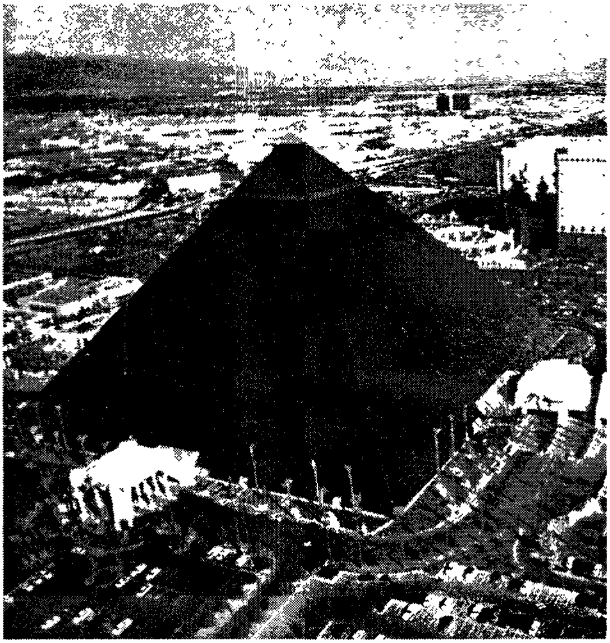
INDICE

Reseña Histórica y conceptos previos.. 14
Conceptos topológicos... 44
Línea recta, segmento y ángulo.. 86
Congruencias de figuras.. 128
Triángulos.. 162
Cuadriláteros.. 224
Polígonos.. 260
Circunferencias.. 292
Figuras inscritas y circunscritas.. 342
Puntos notables... 392
Proporcionalidad de segmentos... 440
Teorema de configuración.. 488
Transformaciones geométricas... 530
Semejanza de figuras.. 586
Relaciones métricas... 626
Potencia eje radical.. 752
Polígonos regulares.. 790
Áreas de regiones poligonales.. 832

Capítulo

Reseña histórica y conceptos previos



El hotel Luxor (Las Vegas) cuenta con una altura de 107 m y fue diseñado en vidrio negro, como una réplica de la gran pirámide de Gizeh, cuya altura es de 147 m.

Reseña histórica y conceptos previos

OBJETIVOS

- Conocer el desarrollo histórico de la Geometría.
- Comprender la evolución de la Geometría en el proceso social de la humanidad.
- Entender por qué y para qué estudiamos Geometría.
- Conocer los conceptos básicos como figura geométrica, segmento, espacio métrico.

INTRODUCCIÓN

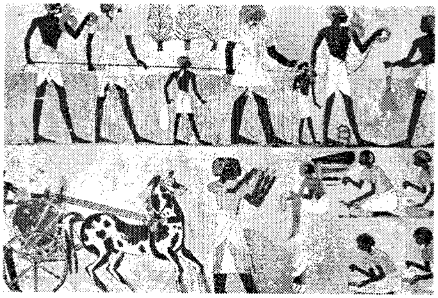
Si quisiéramos explicar qué es o qué estudia la Geometría no bastaría con presentar todas las geometrías elaboradas por el hombre desde hace dos mil quinientos años, pues estas han ido cambiando de acuerdo a nuestra evolución cultural. Al inicio, para Euclides solo representaba la ciencia de la extensión y de la medida (*Geo* = tierra; *metrón* = medida), mas en el siglo XVII, asombrados con la naciente álgebra, los geómetras – Fermat y Descartes inventan la llamada Geometría Analítica para dar lugar en el siglo XIX a la Geometría infinitesimal que se basó en los trabajos de Monge (el inventor de la Geometría Descriptiva).

Es con Poncelet que surge la Geometría sintética mientras que la mixta es desarrollada por Gergonne y Steiner. Posteriormente aparecen las geometrías no euclidianas.

Nuestra intención es esbozar una introducción del método axiomático, que es empleado por los geómetras contemporáneos, y para un mejor entendimiento del largo recorrido de la geometría por los diferentes métodos, reseñaremos los sucesos más importantes sin ignorar a los personajes con mayor influencia y definiremos algunos conceptos necesarios para el desarrollo de los siguientes capítulos.

RESEÑA HISTÓRICA

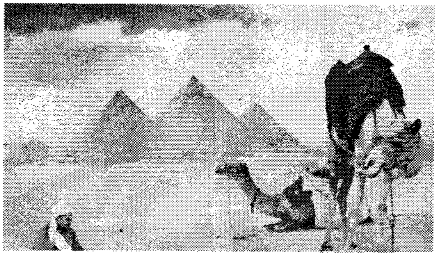
El inicio de la geometría data desde mucho antes que la historia escrita, como una acumulación gradual de nociones intuitivas sobre la realidad objetiva (espacio físico y formas) que fueron resultado de simples observaciones.



Agrimensores midiendo un campo con una cuerda (Tensores de cuerdas).

A este periodo inicial de la geometría se le denomina primitivo, debido a que se realizaba en el transcurso de la lucha del hombre por su existencia y trataba de solucionar ciertas dificultades como la medición de parcelas de tierra, volúmenes de cuerpos, etc.

Herodoto (485 - 425 a.n.e.) es considerado el padre de la historia porque su trascendencia va mas allá de la simple narración de hechos, ya que no solo se dedicó a escribir lo que le contaban sino que fue un incansable viajero que recorrió todo el Egipto, la magna Grecia, etc. para poder interpretar la realidad.



Pirámides de Egipto

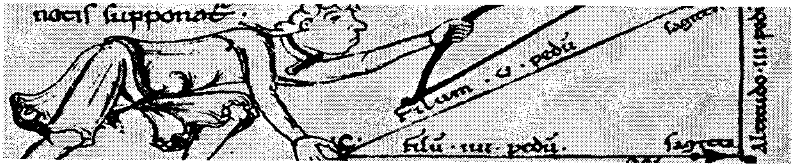
Debido a sus aportes es también considerado uno de los primeros científicos, con respecto a las necesidades del hombre. Herodoto cuenta que **Sesostris**, rey de Egipto, repartió las tierras dando a cada egipcio una parcela, según un sorteo, para que sean pagadas anualmente. Si una de las parcelas era inundada por el Nilo, su dueño se dirigía al rey y este enviaba a los **tensores de cuerdas**, también conocidos como **agrimensores** (considerados ahora como primeros **geómetras**), quienes medían en cuánto disminuyó la parcela. Es sobre la base de estos resultados que se reducían los impuestos. Herodoto nos relata además que al primer rey de Egipto unificado, **Menes**, se le atribuyen los conocimientos geométricos necesarios para realizar trabajos de nivelación de su territorio (hecho que se remonta a 3 000 años a.n.e.) así como el almacenamiento de la cosecha recogida de las parcelas.

El Papiro de Rhind (1650 a.n.e) es una de las primeras recopilaciones de problemas matemáticos.

Las fuentes principales de información relacionadas con la geometría egipcia antigua son los papiros de **Moscú** (1850 a.n.e.) y **Rhind** (1650 a.n.e.), posiblemente escrito por **Ahmes**, que contienen 25 y 85 problemas respectivamente. También encontramos en el museo de Berlín, el más antiguo instrumento astronómico y topográfico existente, de una **combinación plomada** y **vara de agrimensor** que provienen del Egipto antiguo aproximadamente 1950 a.n.e.

Hasta donde la historia nos permite investigar el pasado, se descubre todavía presente una gran cantidad de material que puede llamarse geometría práctica o científica.

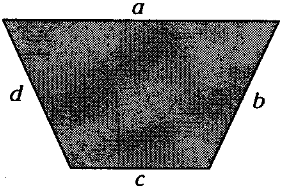
Los registros existentes más antiguos de la actividad del hombre en el campo de la geometría son unas tablas inscritas de arcilla cocida enterradas en Mesopotamia y que probablemente datan de los tiempos de los sumerios (aproximadamente 300 a.n.e.). También hay tablas cuneiformes babilónicas de la era del rey de **Hammurabi**, el imperio Nuevo Babilónico de **Nabucodonosor** y las eras siguientes persas y seleúcidas. De estas tablas se puede distinguir que la geometría antigua babilónica está muy relacionada con la medición práctica. Con los registros se puede deducir que no solo sabían calcular el área de una región rectangular, triangular (rectangular, isósceles), trapecio rectangular, sino también el volumen de un prisma recto con base trapecial rectangular. La longitud de la circunferencia se obtuvo al triplicar el diámetro y el área del círculo como un doceavo del cuadrado de la longitud de la circunferencia (ambos correctos para $\pi = 3$) y el volumen de un cilindro circular recto al calcular el producto del área de la base por la altura. También hay cierta evidencia de que los babilonios antiguos utilizaban algunas fórmulas de manera incorrecta, por ejemplo:



El triángulo rectángulo era bastante estudiado en la Edad Media por los astrólogos (Geometría de la astrología, siglo XII).

ÁREA DE LA REGIÓN CUADRANGULAR

Los griegos consideraban al cuadrilátero como una región cuadrangular.



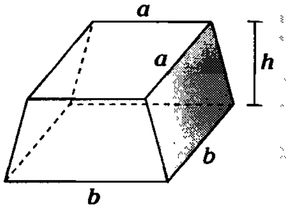
$$A = \frac{(a+c)(b+d)}{4}$$

donde a, b, c y d son las longitudes de los lados del cuadrilátero como una región cuadrangular.

Astrónomos árabes estudiando el movimiento de los astros en el observatorio de Estambul (siglo XVI).

En la Edad Media, los árabes siguieron estudiando la matemática sobre la base en los conocimientos griegos.

VOLUMEN DE UN TRONCO DE PIRÁMIDE DE BASE CUADRADA



$$V = \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

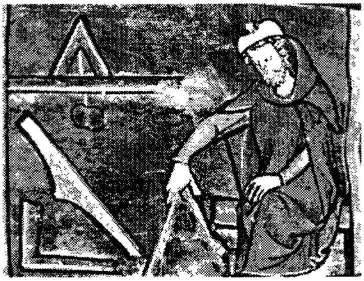
donde h es la longitud de la altura, a y b son las longitudes de los lados de las bases (bases cuadradas).

En la matemática egipcia de aquel entonces no había definiciones, axiomas, teoremas ni sus demostraciones, la exposición de los conocimientos matemáticos se reducía a ejemplos y prescripciones destinadas a la solución de problemas aislados.

Sin embargo, el desarrollo de la geometría como ciencia tuvo lugar principalmente en la Grecia antigua, ahí se iba acumulando datos sobre las relaciones métricas en los triángulos, sobre las mediciones de áreas y volúmenes, relación de semejanza y de las proporciones de figuras, secciones cónicas y problemas de construcción. Son los faraones de Egipto quienes edificaron sus tumbas en forma de pirámide, por lo cual los agrimensores necesitaron conocer ciertas propiedades geométricas de los cuerpos que usaban en la construcción.

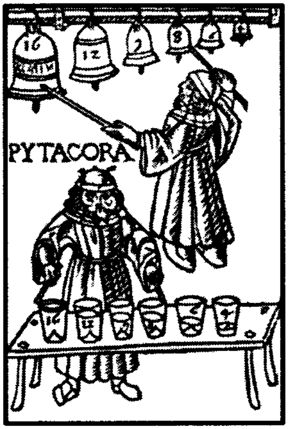
Atenas, cuna del conocimiento griego.

A **Tales de Mileto** (aproximadamente 625-547 a.n.e.), filósofo y matemático griego, se le vincula la aparición de las primeras demostraciones de algunos teoremas de geometría. Es correcto señalar que Tales utilizaba los conocimientos teóricos para resolver problemas prácticos, como la medición de la altura de una pirámide según la sombra que producía o la determinación de la distancia de un barco al litoral. De este modo inicia la formación científica de la geometría.



Sabios europeos del siglo XIII comienzan a traducir e ilustrar numerosos manuscritos griegos y árabes de matemática.

El trabajo iniciado por Tales fue continuado posteriormente por **Pitágoras de Samos** (aproximadamente 580-500 a.n.e.) quien fundó la **Escuela Itálica** al sur de Italia (Crotona). Son sus miembros, denominados **los Pitagóricos**, quienes opinaban que los ***números gobiernan el mundo***; con esto manifestaban que todos los fenómenos de la naturaleza se podían expresar mediante leyes matemáticas. Otros continuadores son:



Las pruebas de las cuerdas de tensión.

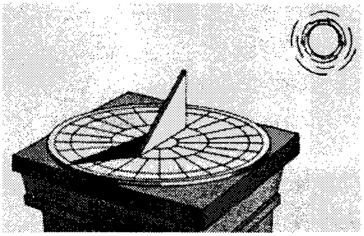
Las pruebas de las columnas de aire.

Hipócrates de Quios (hacia el año 470 a.n.e.), que no es aquel famoso médico del mismo nombre sino quien intentó resolver la cuadratura del círculo y realizó aportes respecto al problema de la duplicación del cubo. Hipócrates se encargó de demostrar la fuerza del método indirecto **(reductio ad absurdem)** y reducción al absurdo o deducción de una contradicción partiendo de una hipótesis supuesta que se quiere refutar. La validez universal de este método permaneció inalterable hasta el siglo XX, cuando se hicieron objeciones en su uso sin razonar sobre las clases infinitas.

Contemporáneo de Platón y dedicado a la matemática así como a la astronomía, **Eudoxio de Cnido** (aproximadamente 408 - 355 a.n.e.) aportó en la teoría geométrica de la proporcionalidad. A pesar de no ser muy reconocido fue quien trató de explicar el movimiento planetario con un sistema de esferas.

La Edad Media es el periodo que comprende entre el fin de la Era Antigua en el siglo V hasta el **Renacimiento** en el siglo XIV. Este periodo cuya mayor parte fue denominada Oscurantismo retrasa el desarrollo científico debido al **Cristianismo** que gobernó casi sin mayor restricción en Europa.

A **Euclides** (aproximadamente 365 - 300 a.n.e.) se le considera el padre de la geometría debido a su obra fundamental denominada ***Elementos*** cuyos trece tomos contienen 465 proposiciones. Muchas de estas tratan, no de geometría, sino de teoría de los números y álgebra griega (geométrica). Debemos destacar que no solo realizó trabajos de matemática, sino también de física, astronomía y música, además es en Venecia (1482) donde aparece la primera edición impresa de sus obras al traducirse del árabe al latín.



El reloj del sol fue empleado por primera vez hace unos 5000 años. La sombra del indicador vertical cae sobre una superficie graduada y se va moviendo con el paso de las horas.

Durante dos mil años la geometría fue estudiada por los elementos de Euclides por ser el único manual de geometría en las escuelas de todo el mundo.

En esta misma época vivió **Arquímedes de Siracusa** (287 - 212 a.n.e.) que es considerado el intelecto científico y matemático más excelso del Mundo Antiguo y también, en virtud de la libertad de sus métodos, el primer matemático moderno. Luego de estudiar en Alejandría, volvió a su patria para dedicarse a la Geometría, Mecánica, Física e Ingeniería. Demostró que la superficie de una esfera es cuatro veces la de uno de sus círculos máximos y que el área de un casquete esférico es igual a la superficie de un círculo que tiene por radio la recta que une el centro del casquete con un punto de la circunferencia basal.

El astrolabio es un instrumento para medir la altura de los astros. Mediante el astrolabio se podían aplicar las tablas de declinación del Sol.

El problema al cual le atribuía gran importancia se encontraba en demostrar que ***el volumen de una esfera inscrita en un cilindro es igual a los 2/3 del volumen del cilindro.***

Arquímedes es el primero que hizo un intento verdaderamente positivo sobre el cálculo de **(pi)** asignándole un valor de 3 (10/71) $\approx$ 3,141.

En esta época vivió también el maestro supremo del método sintético en geometría **Apolonio de Perga** (260 - 220 a.n.e.). En ese método dejó muy poco que hacer a sus sucesores, así como también en la geometría métrica de las cónicas. Apolonio estudió en Alejandría y luego visitó Pergamo en donde habían construido una biblioteca y una universidad semejantes a la de Alejandría. Es allí donde Apolonio escribió la primera edición de su famoso libro *Secciones cónicas*, que consta de 8 libros.

René Descartes
(1596-1650)

Fue en el siglo XVII que se retomó con mayor intensidad el desarrollo de las ciencias y las artes en Europa de la geometría. En la primera mitad de siglo XVII, **René Descartes** (1596-1650) filósofo, matemático, físico y fisiólogo francés, propuso un enfoque completamente nuevo a la solución de los problemas de geometría. Las investigaciones matemáticas de Descartes están estrechamente ligadas a sus trabajos filosóficos y de física. Al crear el método de coordenadas, permitió introducir en la geometría los métodos del álgebra y posteriormente del análisis. En 1637, Descartes introdujo por primera vez en la geometría las nociones de variable y de función, ya que para él la variable se expresa como un segmento de variable longitud e invariable dirección y como una variable numérica continua que recorre un conjunto de números que forman un segmento de coordenadas. La imagen de variable doble acondicionó la penetración recíproca de la geometría y del álgebra a la cual aspiraba.

Pierre Fermat
(1601-1665)

La variable cartesiana fue el punto de viraje en la matemática, debido a ella el movimiento y por lo tanto la dialéctica forman parte de las matemáticas. A partir de este momento, la geometría se desarrolla impetuosamente y aparece la geometría analítica, en la cual por ecuaciones algebraicas se investigan las líneas curvas y las superficies. El método de coordenadas creado por Descartes se considera como su logro principal en la geometría analítica, ciencia que fue elaborada por él y su compatriota **Pierre Fermat** (1601 - 1665).

Blais Pascal
(1623-1662)

La geometría proyectiva sintética después de que la inventaran los franceses **Guirard Desargües** (1593-1662) y **Blais Pascal** (1623-1662) languideció hasta principios del siglo XIX, periodo en el que se hizo muy popular entre los geómetras que no gustaban del análisis. Esta geometría estuvo descuidada durante el siglo XVIII hasta que **Lazare N. M. Carnot** (1753-1823), de origen francés, dio grandes aportes en sus obras ***Geometrie de position*** (1803) y en el ***Essair sur les transversales*** (1806). Este genio militar en 1793 salvó a la Revolución francesa de la coalición de reaccionarios de Europa.

En 1748, el suizo **Leonard Euler** (1703-1783) codificó y amplió la obra de sus predecedores, tanto la geometría plana como la del espacio, quedando prácticamente perfectas, salvo la introducción en 1827 de las coordenadas homogéneas, aporte de Monge, que ahora se denominan ecuaciones diferenciales.

Leonard Euler (1703-1783)

Otros de los inventos del francés **Gaspard Monge** (1746-1818) fue la geometría descriptiva, que tiene menos intereses matemáticos (análisis de ecuaciones diferenciales) pero cuya importancia radica en lo tecnológico. El plan de Monge de representar los cuerpos sólidos en un diagrama plano por medio de dos proyecciones *planta y elevación* situados sobre planos que originalmente formaban ángulo recto entre sí antes de ser abatidos facilitó la percepción de las relaciones espaciales, y proporcionó un sistema gráfico uniforme para resolver problemas como el de determinar las curvas que forman dos o más superficies al ser intersecadas. Se concluye que Euler y Monge echaron las bases de la geometría diferencial.

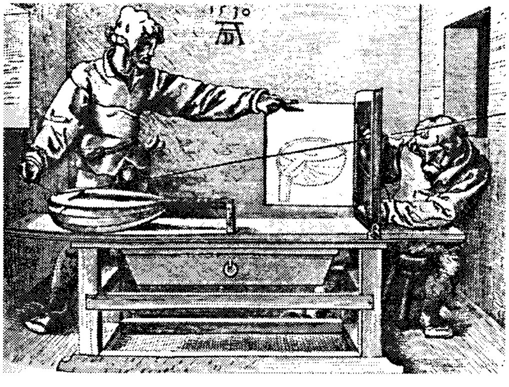
Carl F. Gauss (1777-1855)

El alemán **Carl Friedrich Gauss** (1777 - 1855) es considerado uno de los matemáticos más grandes de la historia por su aporte en la geometría al intentar demostrar el quinto postulado de Euclides. Sin saberlo, estaba dando inicio a otras geometrías no euclidianas.

La geometría comenzaba a dar sus pasos como ciencia y sus primeros resultados describían las propiedades de las magnitudes físicas observadas. Hasta la segunda mitad del siglo XIX, la geometría se dedicó a las relaciones y las formas de los cuerpos del espacio, cuyas propiedades se definían por medio de axiomas formulados por Euclides.

Entre estos axiomas, el axioma de las paralelas (Quinto postulado) fue con frecuencia reconocido como la mancha negra en la obra genial de Euclides por dividirla en dos partes. Una parte consta de teoremas que no dependen del quinto postulado, mientras que la otra sí, esta contiene teoremas, cuyas demostraciones se basan directamente en el axioma de las paralelas o bien en los teoremas demostrados.

Naturalmente surgía la pregunta si no era posible librarse del quinto postulado como axioma o demostrarlo.



Grabado (1525) de Alberto Durero que muestra a un pintor que utiliza la homotecia para reproducir objetos en sus cuadros.

Las tentativas de demostrar el axioma de las paralelas duraron más de dos mil años. Casi todos los eminentes matemáticos probaron sus fuerzas en la solución de este problema, mas el problema quedaba sin resolver. Para salir de esta situación y encontrar una vía correcta a la solución del problema era necesario no temer a enfrentarse a las personalidades de prestigio, tener un espíritu revolucionario y una gran audacia científica.

Nikolai I. Lobachevski (1792-1856)

El matemático ruso **Nikolai I. Lobachevski** (1792-1856) resultó ser el revolucionario de la ciencia. Por primera vez, N. I. Lobachevski se inclinó por establecer rigurosa y científicamente la infructuosidad de las tentativas de demostrar el axioma de las rectas paralelas, además de demostrar que es imposible deducir la afirmación de estos a partir de los axiomas de Euclides.

En 1826 N.I., Lobachevski construyó la geometría que tiene por base un sistema de axiomas que se diferencia del sistema de axiomas de Euclides, solo en el axioma de las rectas paralelas.

Como resultado apareció una geometría lógicamente no contradictoria, que se diferencia sustancialmente de la euclidiana.

Bernhard Riemann (1826-1866)

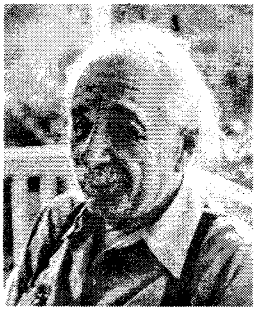
Las ideas de N. I. Lobachevski eran tan originales e inesperadas y por estar adelantadas a su siglo, no fueron comprendidas incluso por los grandes matemáticos de aquel tiempo.

Lobachevski, insigne profesor y rector de la universidad de Kazan, se ocupaba incansablemente de todos los asuntos de la universidad. Trabajaba constantemente por mejorar la enseñanza de las matemáticas en las escuelas, escribió manuales de álgebra y geometría, condenó siempre a las personas que no deseaban trabajar debidamente y aportar lo máximo posible a la sociedad.

David Hilbert (1862-1943)

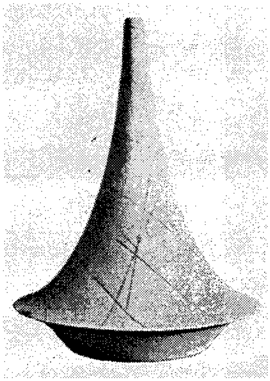
Después de que las ideas de Lobachevski ganaron notoriedad, su geometría empezó a desarrollarse impetuosamente, especialmente en los trabajos del alemán **Bernhard Riemann** (1826-1866), **A. Kelly** (1821-1895), **Felix Klein** (1849-1925) y **David Hilbert** (1862-1943).

Los trabajos de B. Riemann adquirieron un significado especial porque tanto sus ideas como las de N. I. Lobachevski constituyeron la base matemática para **Albert Einstein** (1879-1955) y su teoría de la relatividad.



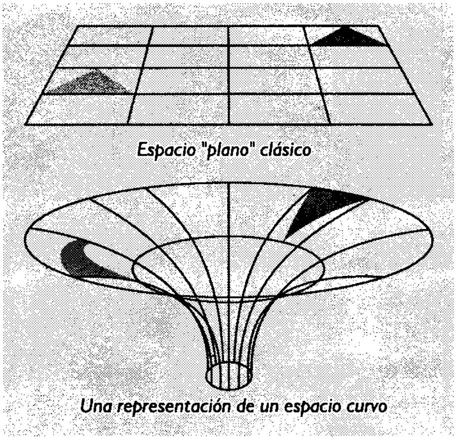
Albert Einstein (1879-1955)

En 1854, Riemann inventó la **geometría esférica**, en la que se realizaban las hipótesis del ángulo obtuso de **Gerolamo Sacheri** (1667-1886).



Superficie de Riemann

Las geometrías no euclidianas de Lobachevski y de Riemann integran la ciencia moderna y encuentran aplicación en la solución de los complicados problemas teóricos y prácticos de la matemática, de la física y de las técnicas modernas. No obstante, la geometría de Euclides conserva su importancia en lo que se refiere a la práctica, en la construcción, en la técnica y por lo tanto, es objeto de estudio en las escuelas de enseñanza general y de peritaje.



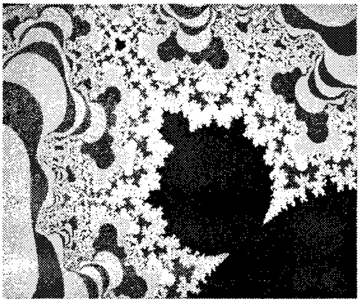
Espacio "plano" clásico

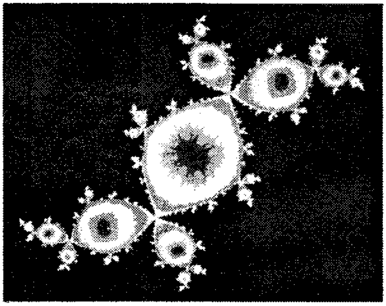
Una representación de un espacio curvo

Con lo planteado podemos decir que la geometría no tiene fin debido a que en el transcurso del tiempo, el hombre se encuentra con una serie de dificultades nuevas y al querer solucionarlas crea nuevas herramientas, lo cual da origen al surgimiento de diferentes geometrías (euclidiana, no euclidiana, proyectiva, descriptiva, analítica y diferencial). Actualmente, vemos una nueva geometría denominada **geometría fractal** que fue descubierta por el polaco **Benoit Mandelbrot** (1924- ....) en el año 1975 con ayuda de la ciencia (computadora). Esta geometría está abarcando varios campos como la anatomía, economía, lingüística, etc.

El desarrollo de la geometría y sus aplicaciones en las distintas ramas de las matemáticas y de las ciencias naturales evidencian la importancia de la geometría como uno de los medios más profundos y fecundos, por las ideas y por los métodos, en el conocimiento de la realidad objetiva.

La ciencia matemática soviética siempre prestó gran atención al desarrollo de la geometría logrando en esta rama del saber notables éxitos.





Figuras fractales obtenidas por la computadora

CONCEPTOS PREVIOS

FIGURA GEOMÉTRICA

Denominamos figura geométrica a la abstracción que se obtiene de la forma de un objeto real o inexistente, cuando nos referimos a inexistentes mencionamos los casos del punto, la recta, el plano, la bisectriz, el diedro, el triedro, etc. Figuras que sin embargo podemos representarlas.

Una vez realizado el proceso de abstracción, para obtener una figura geométrica, esta se puede representar sobre alguna superficie física o en el mismo espacio euclidiano. En cualquier texto podemos observar representaciones de figuras geométricas, inclusive al observar un cuadro artístico bastante complejo podría dar como resultado en nuestro pensamiento una figura geométrica.

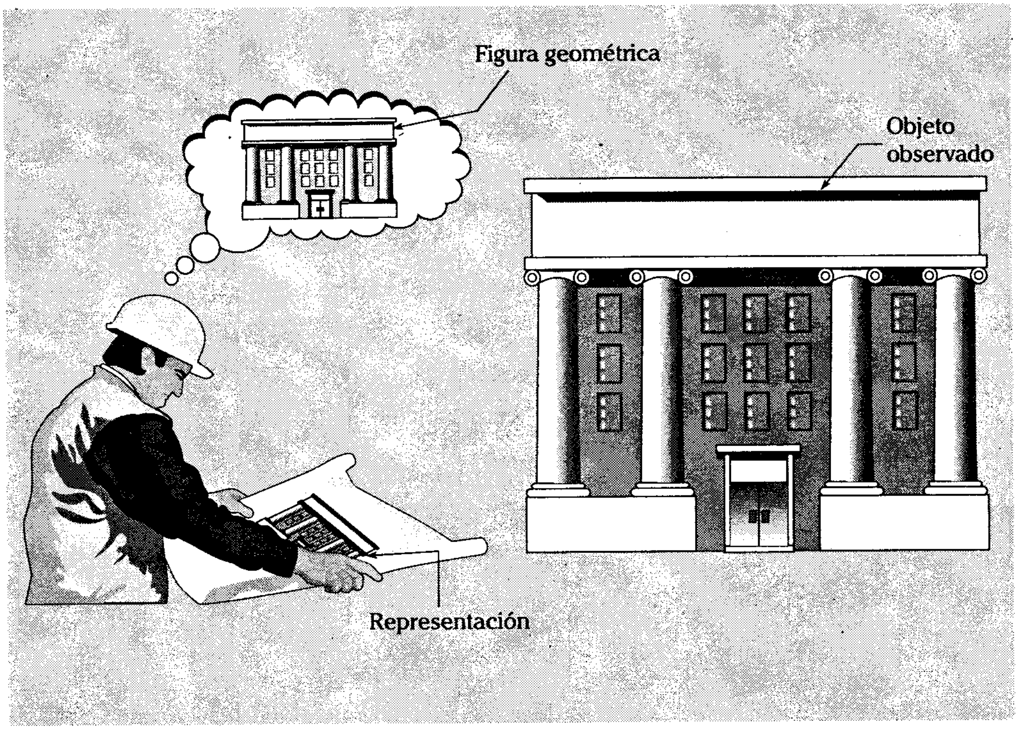
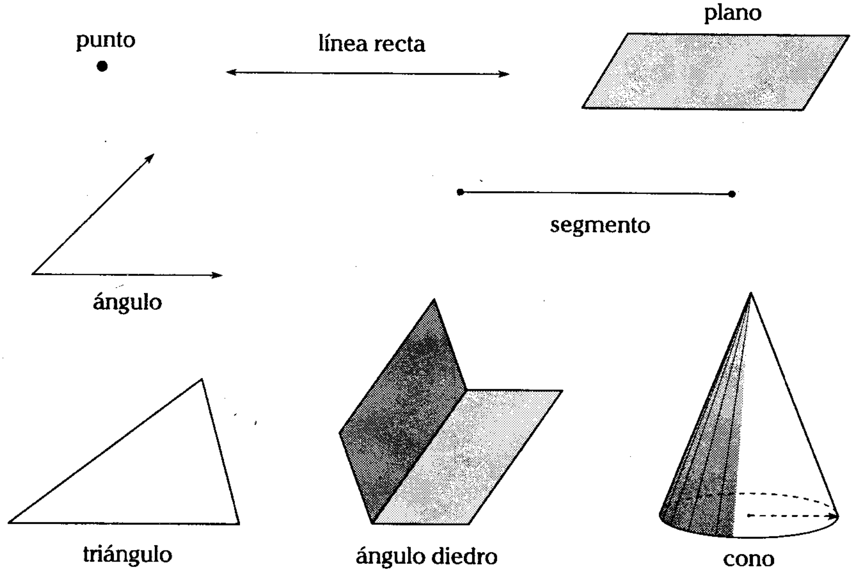


Figura 1.1

Ejemplo de figuras geométricas abstractas.

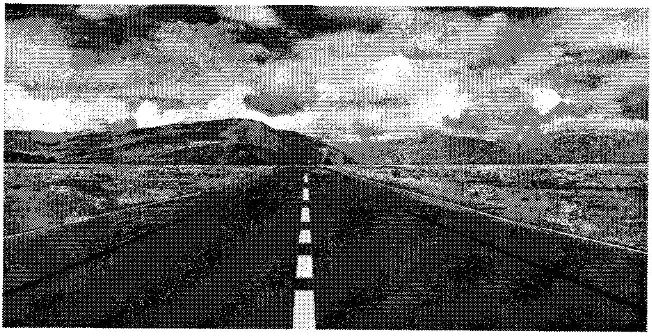


Las primeras figuras que el hombre ha podido abstraer son el punto, la recta y el plano. Es a partir de ellas que se generan las demás, como el segmento, el ángulo, el triángulo, etc.

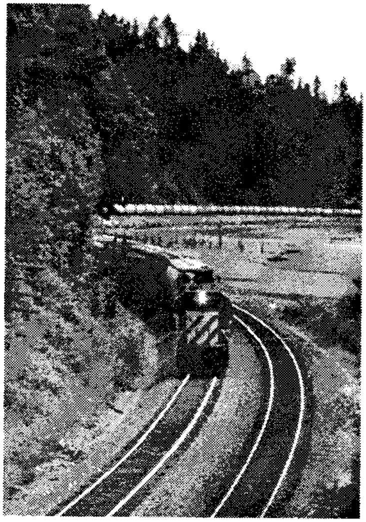
Figura 1.2

SEGMENTO DE LÍNEA RECTA

Al observar las líneas pintadas de blanco en una pista, el poste de alumbrado público o un lápiz, abstraemos la noción de una figura geométrica que es denominada **segmento**.



Al observar la carretera notamos que los márgenes tienden a juntarse en el infinito, sin embargo las rectas paralelas no se intersecan.



Los rieles de un ferrocarril nos da una idea de líneas paralelas.

DEFINICIÓN DE SEGMENTO

Es la porción de línea recta comprendida entre dos puntos A y B de dicha recta $(A \neq B)$.

El segmento de extremos A y B es el conjunto de puntos que se encuentran entre A y B, además de dichos puntos.

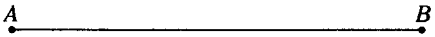


Figura 1.3

Notación

$\overline{AB}$: se lee segmento de extremos A y B.

Importante

EL VOCABULARIO DEL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO

Las nociones fundamentales: cuya existencia se admite sin demostración; aunque a veces se da una definición de las mismas. El punto, el plano, la perpendicularidad o el paralelismo son ejemplos de nociones fundamentales.

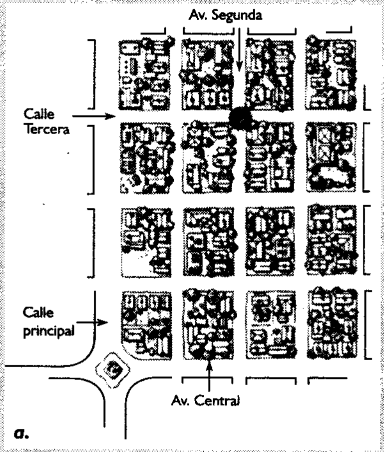
Los axiomas (o postulados): hechos indemostrables que se admiten sin más justificación. ***Ejemplo:*** por cada par de puntos pasa una recta y solo una.

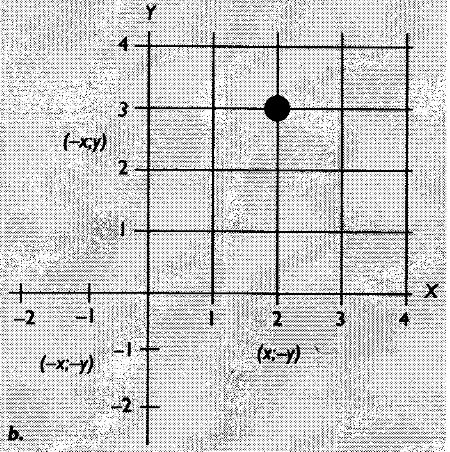
Los teoremas: conjuntos de hipótesis-conclusiones que exigen una demostración o prueba.
Los matemáticos distinguen varias categorías de teoremas:

- Los teoremas fundamentales.
- Los lemas; auxiliares cuya demostración se antepone y hace posible la de los teoremas más generales.
- Los corolarios; teoremas anexos, deducibles inmediatamente de teoremas más generales.

Un ejemplo especialmente importante es la demostración por reducción al absurdo: método matemático que demuestra que una afirmación es falsa deduciendo de ella un absurdo manifiesto.
Una teoría matemática es un conjunto de teoremas que se enlazan lógicamente, y que se apoyan sobre las nociones fundamentales y los axiomas.
La modelización consiste en asociar un modelo abstracto matemático a una situación real dada. Si el modelo es adecuado, comporta un notable ahorro de esfuerzos y permite anticipar predicciones sobre el desarrollo del fenómeno real.

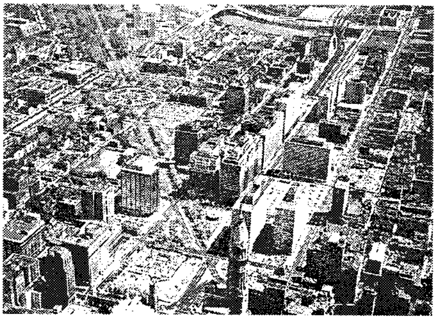
ESPACIO MÉTRICO EUCLIDIANO





a. ***Cómo encontrar una fuente.*** *Este mapa demuestra en forma gráfica cómo la intersección de dos calles puede localizar un lugar. Sin peligro de confusión, dos amigos pueden citarse diciendo simplemente: "Nos vemos en la fuente que está en la avenida Segunda y la calle Tercera".*

b. ***Allí está el punto.*** *Una rejilla similar a las calles sitúa un punto. Los matemáticos dicen que el punto que se ve aquí está en 2, 3. El primer número representa la distancia a lo largo del eje horizontal, o eje de la X, y el segundo la distancia a lo largo del vertical, o Y.*



Las calles de una ciudad nos muestran un ejemplo de plano cartesiano que es un tipo de espacio métrico.

En la geometría euclidiana, la noción de distancia entre pares de puntos desempeña un papel muy importante, pues fue sin duda uno de los conceptos geométricos que inicialmente se estudiaron.

El hombre primitivo al efectuar un viaje considerando el tiempo estableció que el segmento de línea recta constituye la trayectoria más corta de un lugar a otro. En efecto, la mayoría de animales instintivamente también se percatan de esto.

Es necesaria la abstracción para estudiar ciertas correspondencias una a una, que se pueden establecer entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de una línea recta. Estas correspondencias las relacionaremos con números y puntos, de manera que un par de números proporcione información de la distancia entre un par de puntos.

En la figura 1.4, $\mathbb{R}$ es un campo unidimensional y $\mathscr{L}$ es una recta dada cualesquiera, independiente de $\mathbb{R}$.

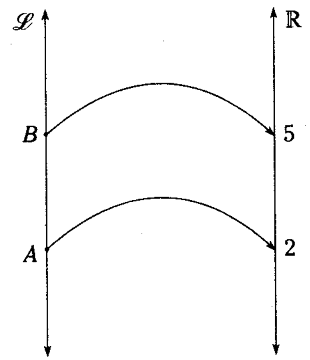


Figura 1.4

Nota

$\mathbb{R}$ puede ser un campo unidimensional, bidimensional de dimensión n.

A es un punto de la línea recta, al cual consideramos que le corresponde el numeral 2 y de igual modo se establece que a B le corresponda el numeral 5; la distancia entre A y B resultará equivalente a la distancia entre 2 y 5.

El término distancia es aplicable cuando se trata de puntos distintos sin embargo, hemos de establecer que entre el punto A y el mismo punto A no existe distancia alguna.

Por consiguiente, indicamos que a cada número real le corresponde uno y solo un punto de la línea recta y cada punto de la línea recta es imagen de un número real. Esa es la razón por la cual el conjunto es continuo, es decir, no existe ningún vacío entre sus elementos.

$d(A; B) = |B - A|$ distancia entre A y B.

DEFINICIÓN DE ESPACIO MÉTRICO (MÉTRICA)

Un espacio métrico es un conjunto M no vacío, de elementos denominados puntos vinculados a un número real $d\ (P; Q)$; denominado función de distancia o métrica del espacio, asociado con cada par de puntos P y Q del conjunto M, que cumpla los postulados siguientes:

Postulado 1 $d(P; Q) > 0$, si y solo si $P \neq Q$

Postulado 2 $d(P; Q) = 0$, si y solo si $P = Q$

Postulado 3 $d(P; Q) = d(Q; P)$

Lo cual nos permite demostrar el siguiente teorema.

Teorema

$$d(P; Q) \leq d\ (P; S) + d(S; Q)$$

Donde P, Q y S son tres puntos cualesquiera del conjunto M, no necesariamente distintos. A dicha relación se denomina **desigualdad triangular de la distancia**.

Demostración

$d(P; Q) = |Q - P|$ definición

$d(P; Q) = |S - P + Q - S|$ propiedad de la adición

Usando el Teorema de Schwartz

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|(S - P) + (Q - S)| \leq |S - P| + |Q - S|$$

$$d(P; Q) \leq \underbrace{|S - P|}_{d(P;\,S)} + \underbrace{|Q - S|}_{d(S;\,Q)}$$ propiedad transitiva

$\therefore\ d(P; Q) \leq d(R; S) + d(S; Q)$ l.q.q.d.

> **Nota**
>
> El teorema de Schwartz es aplicable en todos los campos del espacio métrico euclidiano.

La función distancia o métrica más usual es la distancia euclidiana que en $\mathbb{R}^n$ se establece como

$$d(P;Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...+(x_n-y_n)^2}$$

siendo

$$P=(x_1;x_2;x_3;\ldots;x_n) \text{ y } Q=(y_1;y_2;y_3;\ldots y_n)$$

Si $n=1$, en **R**

$$d(P;\ Q)=|x_1-y_1|$$

Si $n=2$, en $\mathbf{R}^2$

$$d(P;Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

Si $n=3$, en

$$d(P;Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

> **Importante**
>
> **Datos históricos**
>
> En 1906, el matemático francés **Maurice Fréchet** generalizó la noción precedente de distancia a conjuntos enteramente arbitrarios de elementos. Fréchet se refirió a $d(P;\ Q)$ como la separación de P y Q; el espacio métrico parece haber sido empleado por primera vez por **Felix Hausdorff**.
>
> **Felix Hausdorff** (Breslan 1868 - Bonn 1942) fue un matemático alemán que publicó el libro ***Fundamentos de la Teoría de conjuntos***. En esta obra Hausdorff inicia su exposición a partir de la noción de entorno, hasta completar un estudio topológico, cuyo objetivo fundamental es hacer de la topología una ciencia abstracta deductiva.

Aplicación 1

Sea el conjunto no vacío M de todos los números reales, además los puntos $P=x$ y $Q=y$ pertenecen a M, demuestre que la función de distancia definida por $d(P;\ Q)=|x-y|$ (distancia euclidiana) es una métrica.

Resolución

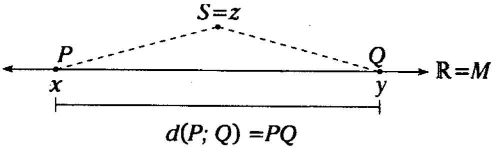


Figura 1.5

Si la función $d(P;Q)$ es una métrica, debe cumplir con los postulados establecidos en la definición.

Postulado 1

$d(P;Q)>0$

$|x-y|=0$ si y solo si $x\neq y$ definición de valor absoluto

Postulado 2

$d(P;Q)>0$

$|x-y|=0$ si y solo sí $x=y$ definición de valor absoluto

Postulado 3

$d(P;Q)>0$

$|x-y|=|y-x|$ teorema del valor absoluto

Teorema

$d(P;Q)\leq d=d(P;Q)+d(S;Q)$

Si $(S=Z)\in M$, entonces $|x-y|=|x-y-z|$

$$\underbrace{|x-y|}_{d(P;Q)}\leq\underbrace{|x-z|}_{d(P;S)}+\underbrace{|z-y|}_{d(S;Q)}$$

Dado que $d(P;\ Q)=|x-y|$ cumple con los postulados establecidos, entonces $d(P;\ Q)$ es una métrica. También se puede señalar que el par $(M;d)$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1

Si $P = 2$; $Q = 5$

Figura 1.6

$d(P; Q) = |2-5| = |5-2| = 3$ que representa la distancia euclidiana de P a Q.

Aplicación 2

Si los puntos $P=(x_1; x_2)$ y $Q=(y_1; y_2)$ pertenecen a M que es el conjunto no vacío de todos los pares ordenados de números reales, demuestre que la función de distancia definida por $(P; Q) = |x_1 - y_1| = |x_2 - y_2|$ es una métrica.

Resolución

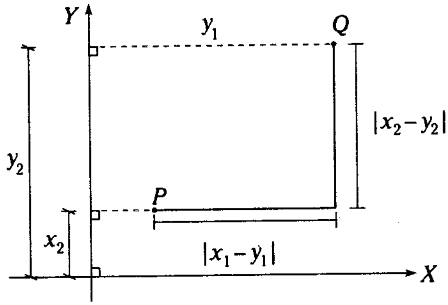


Figura 1.7

Si $d(P; Q) = |x_1 - y_1| = |x_2 - y_2|$ es una métrica, debe de cumplir con los postulados establecidos en la definición.

Postulado 1

$d(P; Q) > 0$ por ser suma de valores absolutos y $P \neq Q$.

Postulado 2

$d(P; Q) = 0$

$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$

para que dicha igualdad se cumpla, ocurre que

$|x_1 - y_1| = 0 \wedge |x_2 - y_2| = 0$

$\rightarrow x_1 = y_1, \; x_2 = y_2$ es decir $P = Q$

Postulado 3

$d(P; Q) = d(Q; P)$

$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$, la igualdad se establece por los valores absolutos.

Teorema

$d(P; Q) \leq d(P; S) + d(S; Q)$

Si $(S = (z_1; z_2)) \in M$

y $|x_1 = y_1| = |x_1 - z_1 + z_1 - y_1|$,

entonces $|x_1 - y_1| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|$ (I)

También

$|x_2 - y_2| = |x_2 - z_2 + z_1 - y_1|$

$|x_2 - y_2| \leq |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$ (II)

Sumando las inecuaciones (I) $\wedge$ (II) tenemos

$$\underbrace{|x_1-y_1|+|x_2-y_2|}_{d(P;Q)} \leq \underbrace{|x_1-z_1|+|x_2-z_2|}_{d(P;S)} + \underbrace{|z_1-y_1|+|z_2-y_2|}_{d(S;Q)}$$

Dado que $d(P; Q) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ cumple con los postulados establecidos, entonces $d(P; Q)$ es una métrica.

Ejemplo 2

Utilizando la función distancia

$d(P; Q) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$,

determine la distancia de P a Q, si

$P = (x_1; x_1) = (1; -1)$, $Q = (x_2; y_2) = (4; 3)$

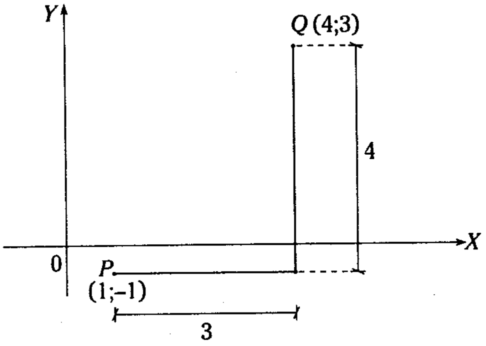


Figura 1.8

$d(P; Q) = |1-4| + |-1-3| = |-3| + |-4|$

$d(P; Q) = 7$

Observación

En $\mathbb{R}^2$, la distancia euclidiana de P a Q del ejemplo anterior es

$$d(P;Q)=\sqrt{(1-4)^2+(-1-3)^2}$$

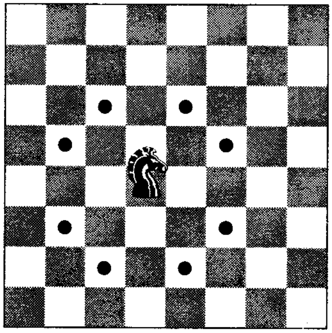
$$d(P;Q)=5$$

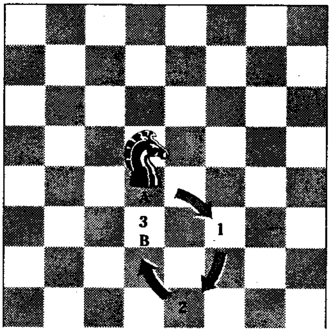
Podemos luego concluir que la distancia entre dos puntos no es única sino mas bien depende de la métrica (función distancia) con la que se este considerando.

Comentario

En $\mathbb{R}^2$, la función distancia $d(P;\,Q)\;=\;|x_1-y_1|\;+\;|x_2-y_2|$ en el plano cartesiano es denominada ***espacio de taxi***, debido a que este espacio métrico establece la distancia recorrida por un automóvil en una ciudad con calles perpendiculares.

Importante





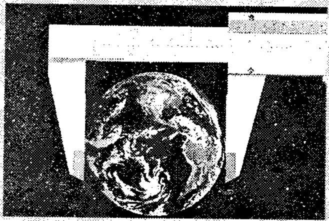
DISTANCIA ENTRE CASILLAS

El desplazamiento de un caballo en un tablero de ajedrez puede definirse de la siguiente manera: el caballo va siempre de una casilla negra a una blanca (o viceversa) avanzando en L (3×2). Así, el caballo del tablero superior puede alcanzar, en un movimiento, cualquiera de las ocho casillas señaladas por un punto. El diagrama siguiente nos muestra que se necesitan por lo menos tres saltos para que el caballo pase de la casilla A a la casilla B.

Puede decirse que la distancia entre estas dos casillas o un paso entre A y B es igual a 3 para el caballo. Hay que considerar que la menor distancia entre dos puntos se puede tomar de diferentes maneras, quizás la más conocida es la **Euclidea**. La noción matemática de distancia es la formalización de una noción intuitiva porque permite medir el alejamiento de dos elementos de un conjunto definido por sus propiedades.

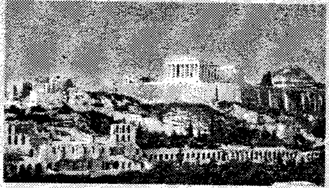
LECTURA

FORMAS Y MEDIDAS, EL UNIVERSO HECHO NÚMEROS

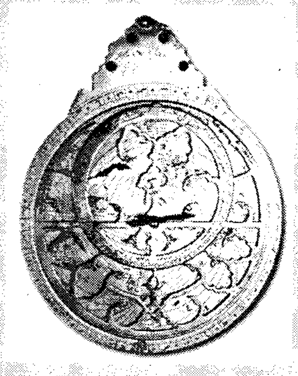


La geometría, que nació hace más de 2300 años en la próspera ciudad de Alejandría, continúa siendo en nuestros días una vía para entender el mundo que nos rodea. Sin embargo, en el departamento de Geometría y Topología de la universidad de Granada (España), los investigadores van más allá al abrir las puertas de universos que no alcanzamos imaginar.

Cuenta la historia que sobre la entrada a la Academia de Platón rezaba un cartel: *Que nadie que no sepa geometría traspase mis puertas*. En aquella época, cuando la cultura griega clásica florecía, la geometría (la medición de la Tierra) era una ciencia matemática que se relacionaba más con la mística y la filosofía. Al tiempo que ayudaban a mejorar la comprensión del mundo, los geómetras se ocupaban también de resolver problemas más técnicos y muy cercanos a la vida cotidiana, como diseñar un templo con unas determinadas dimensiones o hallar extensión de un campo de cultivo. Hoy en día, ese tipo de tareas la realizan ingenieros, arquitectos, sin que eso impida la vigencia de la geometría porque, como explica Alfonso Romero, *seguimos estudiando objetos, pero si antes eran cubos o prismas, ahora son figuras que no se pueden ver y cuya existencia se da matemáticamente en un papel, a pesar de que no podemos percibir por los sentidos porque tienen más dimensiones que nuestro mundo.*

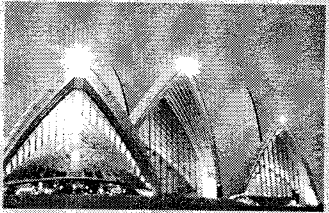


Los geómetras griegos se ocupaban de resolver problemas más técnicos como diseñar templos.

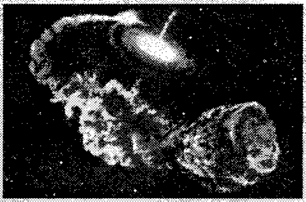


El astrolabio es un instrumento para medir la altura de los astros empleado por los marinos en el siglo XV para calcular la latitud.

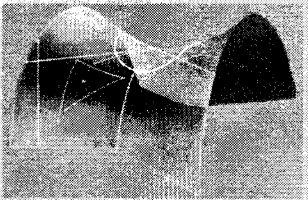
Así, la geometría sigue describiendo los objetos caracterizándolos a través de sus aspectos medibles: longitudes, ángulos, áreas, volúmenes, etc. y tal vez por eso no se le da importancia que realmente guarda, porque puede parecer que ya está todo hecho. Como pasa en muchas áreas de la matemáticas, estas investigaciones no tienen una aplicación inmediata, pero sí pueden ser en ocasiones potencialmente aplicables a otras disciplinas como la Física. Por ejemplo, la historia de la ciencia nos enseña que antes de que Edwin Hubble descubriera experimentalmente la expansión de las galaxias, otros dos científicos ya habían planteado un comportamiento no estático del universo con argumentos propios de la geometría.



El físico ruso **Alexander Fridmann** y el matemático belga **Georges Lemaitre**, en 1922 y 1927 respectivamente, afirmaron que las galaxias debían estar separándose una de otra, a pesar de que eso iba en contra de la intuición y la observación inmediata. Que un resultado teórico, a primera vista peculiar, se compruebe más tarde experimentalmente no es algo poco común y por eso no resulta usual pensar que lo que estos investigadores granadinos estudian hoy, con lápiz y papel puede servir mañana para comprender mejor la estructura global del universo.



Agujero negro donde existen poderosas fuerzas gravitatorias actuando en espacios marcadamente reducidos.



Estructura del universo del modelo de la geometría hiperbólica.

Stephen Hawking

Otro ejemplo reciente de cómo ayuda la geometría a la Física, lo tenemos en el físico **Stephen Hawking** que se hizo popular al probar que las estrellas tienen una vida parecida a la de un ser vivo, es decir, que nacen, crecen y finalmente desaparecen. ¿Cómo puede llegar a estas conclusiones, si el tiempo de vida de una estrella supera a cualquier observación humana? La respuesta esta de nuevo en la geometría. De igual manera, no se puede observar un agujero negro, por ser una estrella tan densa y con una gravedad tan intensa. Sin embargo, lo que no se puede ver con los sentidos sí se puede deducir de los resultados teóricos. La primera prueba de la existencia de los agujeros negros fue puramente matemático y lo que realmente hizo Hawking fue emplear una geometría muy aplicada.

Membranas biológicas

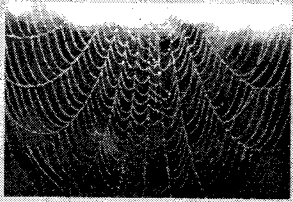
Estos modelos no solo se aplican a la Física del cosmos sino que son útiles en aspectos tan cercanos a nosotros como algunas formas que se dan dentro de nuestro cuerpo. Por ejemplo, las llamadas superficies de Wilmore, que suscitaron gran interés en los años 90, explican la existencia en los organismos de la membranas y vesículas biológicas en forma de toro, es decir, como un neumático o un donut. Una vez enunciada esta posibilidad matemática, se observó en la naturaleza que ciertos polímeros formaban efectivamente vesículas tóricas, en contra de la creencia general de que estas membranas eran esencialmente esféricas.

Pompas de jabón

Volviendo a la geometría clásica y al espacio tridimensional que no es familiar, son particularmente interesantes aquellas superficies cuya forma es óptima en algún sentido, ya que suelen darse en la naturaleza porque minimizan la energía de los sistemas físicos. Un ejemplo conocido representan las pompas de jabón, que adoptan la forma que minimiza su área, y por tanto su energía y por eso tienden a ser esféricas.

En la universidad de Granada varios geómetras se dedican a construir y estudiar estas películas jabonosas porque, por extraño que suene, no solo se interesan en la relatividad general, sino también en la descripción de los espacios tridimensionales posibles.

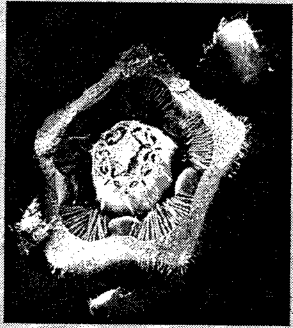
¿POR QUÉ ESTUDIAMOS GEOMETRÍA?

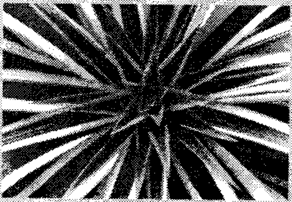


Es la pregunta que muchos nos hacemos al empezar a estudiar geometría, no hay duda que es una pregunta objetiva y de sensibilidad crítica.

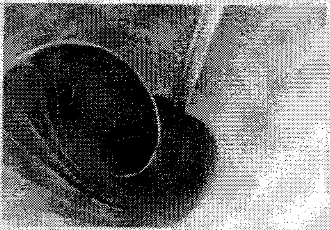
A continuación veremos el por qué y beneficios de esta asignatura:

1. La geometría surge de una necesidad del hombre para su desarrollo en la sociedad.
2. La geometría nos enseña a razonar, y el hábito adquirido en su estudio es provechoso.
3. Su estudio nos da formación lógica y permite realizar lecturas con mayor comprensión.
4. Estaremos más aptos para apreciar trabajos humanos y lo que nos ofrece la naturaleza.
5. Nuestra visión del arte y de la arquitectura resultará amplia, con el dominio de los teoremas de las figuras geométricas que guardan diferentes tipos de relaciones entre ellas.
6. En la naturaleza podemos apreciar infinidad de figuras geométricas. Admirar el prodigio de las celdas de una colmena en hexágono regular perfecto o la telaraña, con sus millares de finos hilos rigurosamente paralelos.





La simetría central de las flores y plantas.

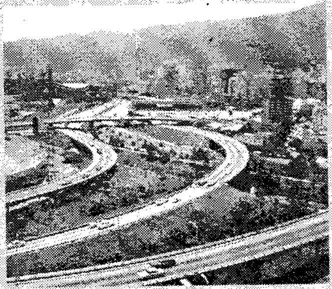


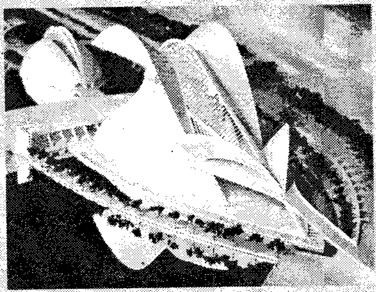
Una superficie de espiral de las hojas en crecimiento (filotaxia).

Simetría axial de un paisaje reflejado en un lago.

Valores prácticos

Muchas personas aprenderán geometría por su valor práctico. Quien quiera llegar a ser artista, dibujante, maquinista, carpintero, ornamentador en piedra o en metales, etc. recibirá mucha utilidad de los hechos aprendidos en geometría; lo mismo para quienes orienten su vida por la ingeniería, la arquitectura, las artes de la guerra, la ciencia o las matemáticas, la navegación, etc. El éxito en estas profesiones demanda conocimientos geométricos y muchas veces reposa casi enteramente en ellos.





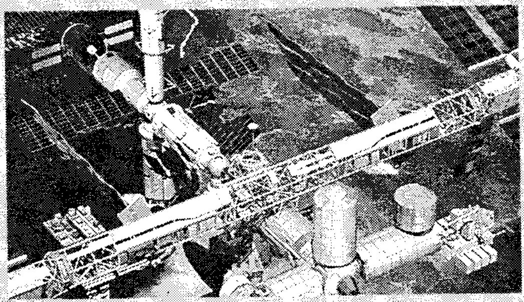
Geometría aplicada por los ingenieros y arquitectos.

Imagínese cuántas veces el marino salva su vida anticipándose del naufragio, con la oportuna determinación de la longitud y la latitud. Estos conocimientos se basan en las teorías concebidas hace más de veinte siglos por hombres de ciencia.

No hubiera sido posible medir la magnitud del mundo que habitamos sin las normas de Euclides, Arquímedes y Apolonio, Y como actuar sin ellas en el misterio recóndito del universo.

Conexiones de la geometría

Las aplicaciones de la geometría abarcan un dilatado radio. Ellas se relacionan con la aeronáutica, arquitectura, aviación, en la ingeniería en todas sus ramas, con las ciencias físicas y con una miscelánea de situaciones cada vez más complejas.



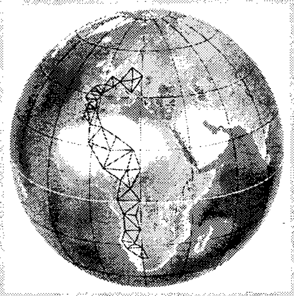
Las matemáticas y la ciencia están estrechamente interrelacionadas

A veces el avance de la ciencia debe esperar el desarrollo de las matemáticas, pero más a menudo ocurre que los desarrollos de modelos matemáticos se anticipan al avance científico, y por ende se requieren de científicos capaces de elaborar las aplicaciones de modelos matemáticos para cosechar sus resultados. La predicción es probablemente uno de los más importantes servicios que las matemáticas rinden a la ciencia.

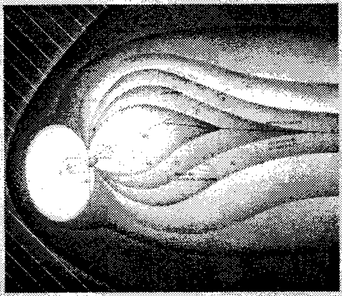
Las leyes elaboradas, que en las ciencias exactas están escritas en ecuaciones diferenciales o en otras fórmulas matemáticas, son medios para llegar a pronósticos exactos.

El caso más ilustrativo de la predicción, en el orden de la Física, es el de la fórmula de Albert Einstein $E = mc^2$, cuya historia es breve:

El egregio sabio fallecido en 1955, quien no era un experimentador, indicó, en 1905, que la masa y la energía son la misma cosa en diversos estados. La materia que forma el núcleo o el corazón del átomo, que prácticamente es toda la materia que existe, es un paquete de energía de alta concentración. Para la conversión de la masa en energía, Einstein escribió la formula: $E=mc^2$ y de acuerdo con esta, la fuerza o energía producida es igual a la masa desintegrada multiplicada por el cuadrado de la velocidad de la luz (300 mil kilómetros por segundo reducido a centímetros). Un kilo de materia equivale, según esto, a veinticinco mil millones de kilovatios - hora de energía. Podemos mencionar también que en este campo de la física Albert Einstein aplica la geometría en un estado no euclidiano donde puede distinguirse que hay interrelación entre física y geometría.



Geodesia, red de rectángulos curvilíneos para la medida de la longitud de un arco de meridiano.



Geofísica, en la imagen se muestra un mapa de magnetosfera terrestre y su interacción con el viento solar.

MUNDO PLANO DE EUCLIDES

Cuando Euclides (aproximadamente siglo IV a.n.e.) escribió su obra *Elementos de geometría*, presentó cinco postulados, que se aceptan sin demostración porque resultaban evidentes. A partir de estas se deducen todas las consecuencias y teoremas posibles. Hay un postulado polémico de las paralelas, como se conoce normalmente, que indica: *Por un punto exterior a una recta solamente pasa una paralela a esa recta*, aunque no fue con esas palabras, por lo cual a esta geometría en base a lo que se ha mencionado es llamada **GEOMETRÍA PARABÓLICA**.

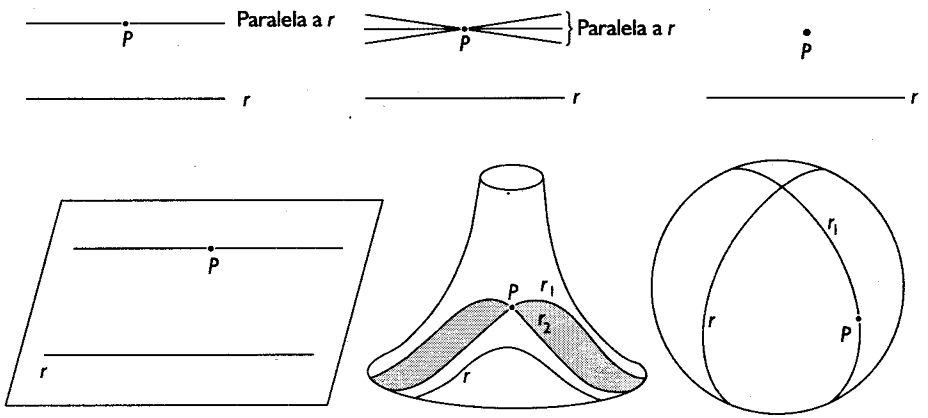
En los siglos venideros, la geometría euclidea se convierte en básica para cualquier matemático, aunque al mismo tiempo muchos dedican sus esfuerzos para demostrar que el **V postulado**, que no gustaba demasiado al propio Euclides por su poco sustento sólido, puede deducirse de los otros cuatro.

La geometría euclidea nos puede parecer perfectamente lógico, mas solo define un tipo de universo muy particular, es decir, el universo plano en el que nos movemos y con el que estamos familiarizados.

No fue hasta 1817 cuando el brillante matemático Karl F. Gauss descubrió que si negaba el V postulado, permitiendo que se trazara más de una paralela por un punto dado, se obtendría una geometría totalmente consistente. Esta idea olvidada durante un siglo fue retomada por Janos Bolyai y Nikolai I. Lobachevski, este último planteó que ***por un punto exterior pasan infinitos paralelos a una recta***, y dio lugar a la **GEOMETRÍA HIPERBÓLICA**. A mediados del siglo XIX, Bernhard F. Riemann planteó la **GEOMETRÍA ELÍPTICA**, esta indica que ***no existe ninguna paralela a la recta que pase por el punto exterior***.

Bernhard F. Riemann

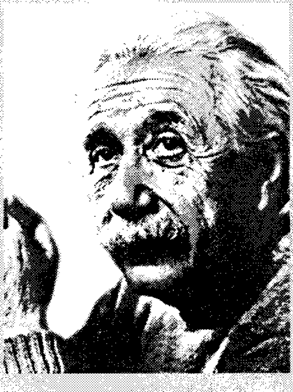
Nikolai I. Lobachevski



Geometría parabólica   Geometría hiperbólica   Geometría elíptica

Las geometrías no euclidianas, tan desconcertante para el profano, fueron utilizadas en la práctica por primera vez, y de manera espectacular, por el célebre físico Albert Einstein (1879 - 1955).

En 1915, Einstein plantea su teoría de la relatividad explicando que no solo actúa la gravedad, sino que es la curvatura aquella que ejerce una masa en el espacio, deformándola, y que hace que otros cuerpos se sientan atraídos hacia ella. De esta manera, la geometría nos enseña que nuestro universo no es PLANO, sino que posee una forma similar a la de una silla de montar.



Albert Einstein

FUENTE: Enciclopedia Salvat de Estudiante. Tomo X (1984)

BIOGRAFÍA

NIKOLAI LOBACHEVSKI (1792 - 1856)

Nikolai Ivánovich Lobachevski nació el 20 de noviembre de 1792 en la familia de un funcionario pobre, quien conjuntamente con sus dos hermanos quedaron prematuramente a cargo de su madre, que prefirió llevarlos a estudiar en el gimnasio de Kazan - Rusia.

N. I. Lobachevski estudió en el gimnasio de Kazan desde 1802 hasta 1807 y en la universidad de Kazan, desde 1802 hasta 1811, cursando exitosamente los estudios en la universidad. Esto le valió para ser catedrático en 1816.

Asumió ciclos de conferencias no solo de matemáticas sino también de mecánica, física, astronomía, geodesia, topografía.

Fue elegido, en 1827, rector de la Universidad de Kazan y durante los 20 años de función convirtió a la universidad de Kazan en un centro modelo de enseñanza superior.

Su actividad científica dio a Lobachevski fama mundial. Inmortalizó su nombre con la creación de la geometría no euclidiana, hoy conocida como **geometría de Lobachevski**.

El 11 de febrero de 1826 intervino en una conferencia físico - matemática en la que por primera vez informó acerca de la geometría no euclidiana. Bajo el título *Sobre los fundamentos de la geometría* fue publicada tres años después en el Boletín de Kazan.

El invento de Lobachevski no fue concebido por la mayoría de sus contemporáneos, sus trabajos respecto a la geometría recibieron juicios negativos tanto en Rusia como en el extranjero debido a que sus ideas era demasiado audaces y diferían ostensiblemente con los puntos de vista que entonces predominaban en la ciencia.

Precisamente por esto transcurrió mucho tiempo antes de que dichas ideas se ganaran el reconocimiento común que vino solamente después de su muerte.

Los criterios filosóficos de Lobachevski tenían tendencias materialistas destacables, y este consideraba que el medio más seguro de comprobación de las deducciones teóricas era la experiencia práctica. Lobachevski exigía una enseñanza de las matemáticas que permitiera tras las operaciones matemáticas los fenómenos reales de la vida.

En el año 1846, Lobachevski fue destituido de su trabajo en la universidad ascendiéndole a curador del distrito de enseñanza de Kazan. De esta manera se logran deshacerse del rector que, por ser de orientación progresista, les era indeseable. Diez años después, Lobachevski fallece.

BIOGRAFÍA

DAVID HILBERT (Könisberg 1862 - Göttingeng 1943)

Este notable matemático nació en Königsberg en 1802 y murió en Göttingeng en 1943. Se graduó en la universidad de su ciudad natal y fue profesor de la misma, para luego desarrollar su actividad científica en la universidad de Göttingeng hasta su muerte.

En 1899 se publicó su libro *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de la geometría), en cuya introducción sintetiza el carácter del libro: *La Geometría, lo mismo que la Aritmética, necesita solamente para su consecuente construcción pocas y sencillas proposiciones fundamentales.*

Estas proposiciones fundamentales se llaman axiomas de la geometría, y el poner de manifiesto los axiomas de la geometría para averiguar sus conexiones es algo que se discute desde tiempos de Euclides en numerosos y excelentes tratados de la literatura matemática. El problema citado queda reducido al análisis lógico de nuestras intuiciones espaciales.

La presente investigación es un nuevo ensayo para construir la geometría sobre un sistema completo de axiomas, lo más sencillo posible, deduciendo de él los más importantes teoremas de manera que en ese proceso aparezcan con la máxima claridad la interpretación de los distintos grupos de axiomas y el alcance de las consecuencias que aisladamente se deriven de cada uno de ellos.

En agosto de 1900, tuvo lugar en París el 2do Congreso Internacional de Matemáticas, en el que Hilbert participó activamente en dos de sus secciones: **Aritmética y Álgebra**, que presidió, y **Enseñanza y Metodología de la Matemática**, donde presentó un informe que se hizo célebre (*David Hilbert - problemas matemáticos*), aporte en el cual se le reconoce su vasta erudición y su concepción de las matemáticas. Los 23 problemas abiertos propuestos en el informe, dieron impulso a diferentes áreas de la matemática en el presente siglo.

BIOGRAFÍA

BENOIT MANDELBROT

Nació en Warsaw, una localidad de Polonia (1924). Sus progenitores, de origen judío lituano, se ven obligados a trasladarse a París en 1936 por la gran situación política y social que en esos momentos se vive en Polonia.

Su afición matemática no es casual; su tío, el matemático Saolem Mandelbrot, que ejercía la docencia en el College de France y fue sucesor de Hadamardost en este puesto toma responsabilidad de su educación. De hecho la influencia de Saolem Mandelbrot era positiva y negativa puesto que él era un gran admirador de la filosofía robusta de las matemáticas. Esto hizo que reaccionara Benoit contra las matemáticas puras, aunque como Benoit dijo: *Lo entiendo como robusta, profundamente temeroso que las matemáticas aplicadas, en las manos incorrectas, se pudieran utilizar negativamente en la época de la guerra*. Mandelbrot acudió al Lyce Rolm en París, hasta el comienzo de la Segunda Guerra Mundial.

La guerra, la amenaza constante de la pobreza y la necesidad de sobrevivir lo mantuvieron ausente en la escuela y la universidad. A pesar de que reconoce que sus profesores de la escuela secundaria fueron maravillosos, en gran parte fue autodidacta.

Benoit Mandelbrot ahora atribuye mucho de su éxito a esta educación poco convencional que le permitió desarrollar un acercamiento altamente geométrico a las matemáticas. Su intuición y visión geométrica notable comenzaron a darle análisis profundo en problemas matemáticos.

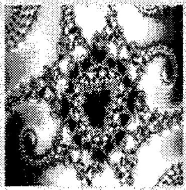
Después de estudiar en Lyon, Mandelbrot decide presentarse a los exámenes de ingreso de la École Normale y la École PolyTechnique.

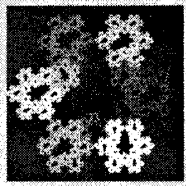
Mandelbrot fue a los EE.UU. en donde visitó a **California Institute of Technology** para obtener posteriormente el doctorado en matemáticas en la Universidad de París en 1952.

Volvió a Francia en 1955 y trabajó en el Centro National de Recherche Scientific.

Después de retirarse de la IBM, encontró oportunidades similares en la Universidad de Yale, donde actualmente ejerce como profesor de ciencias matemáticas.

Con la ayuda de los gráficos de la computadora Mandelbrot trabajó en el centro de investigación de Watson de la IBM.

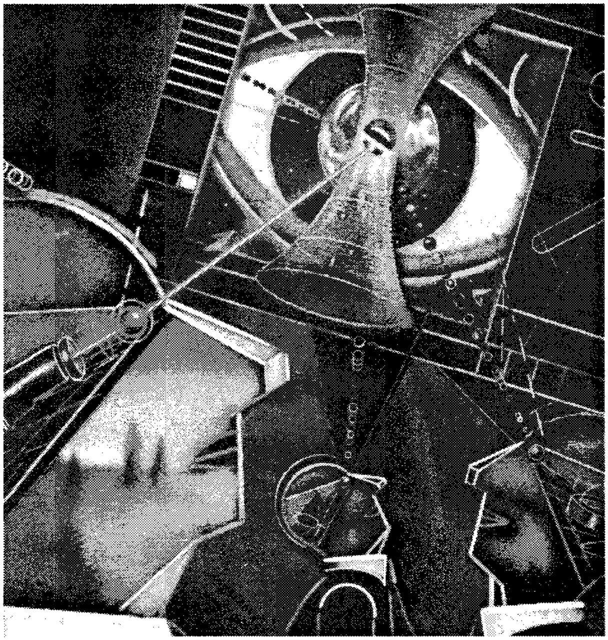




En los recuadros podemos apreciar imágenes obtenidas con la ayuda de la computadora de procesos iterativos de ecuaciones complejas obtenidas por Benoit Mandelbrot.

Capítulo II

Conceptos topológicos



Solo un alto grado de abstracción permitió el desarrollo de los conceptos topológicos. Por consiguiente, dentro de la matemática moderna, la topología representa un tipo especial de geometría, referida a la transformación de una figura en otra distinta, sin que se alteren sus propiedades.

Conceptos topológicos

OBJETIVOS

- Conocer los conceptos topológicos básicos.
- Estudiar el conjunto convexo y no convexo.
- Definir el conjunto conexo y no conexo (inconexo).
- Diferenciar de manera gráfica los diversos conjuntos que se han planteado.

INTRODUCCIÓN

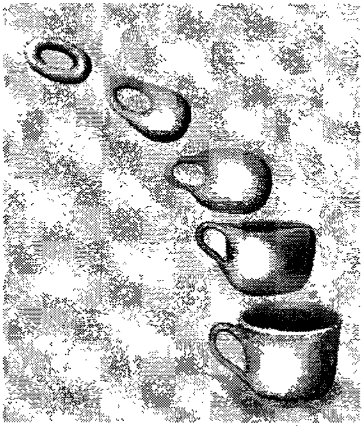
La topología es una de las ramas más activas de las matemáticas contemporáneas. En el presente texto desarrollamos las ideas generales de la naturaleza de ciertos conceptos topológicos.

Las grandes divisiones de la topología son:

La topología combinatoria (o algebraica) que tiene aplicaciones importantes en la teoría de las ecuaciones.

La topología general, un aspecto particular de la cual es la topología de los conjuntos, creada por Cantor (1879). A partir de los trabajos de Cantor se desarrolló la topología de los espacios abstractos, creada por Frechet (1914).

El topólogo considera los mismos objetos que el geómetra, pero de modo distinto, no se fija en las distancias o los ángulos, ni siquiera en la alineación de los puntos. Para un topólogo una circunferencia es equivalente a una elipse; una esfera no se distingue de un cubo, se dice que estas figuras son objetos topológicamente equivalentes, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua y reversible, en otras palabras, hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada.



Para un topólogo, una rosquilla tiene iguales características que una taza.

ESPACIO TOPOLÓGICO

DEFINICIÓN

Sea C un conjunto no vacío. Un conjunto T de subconjuntos de C define una topología de C, si T verifica los siguientes axiomas:

Axioma 1

La unión de cualquier número de elementos de T es un elemento de T.

Axioma 2

La intersección de dos elementos cualesquiera de T es un elemento de T.

Axioma 3

El conjunto C y el vacío pertenecen a T. Luego, C conjuntamente con el conjunto T, es decir, el par (C,T) es un espacio topológico.

Ejemplo 1

Sea el conjunto $C=\{1;2;3;4;5\}$ luego, podemos establecer 32 subconjuntos de C de los cuales elegimos los siguientes:

$$\phi,\ C,\ x_1=\{1;2\},\ x_2=\{3;4\},$$
$$x_3=\{1;2;3;4\},\ x_4=\{3;4;5\}$$

y con ello formamos el conjunto T, es decir

$$T=\{\phi;C;x_1;x_2;x_3;x_4\}.$$

¿Es (C,T) un espacio topológico?

Para establecer que el par (C,T) es un espacio topológico, entonces, en T deberán de verificarse los tres axiomas establecidos en la definición.

- ***Axioma 1***
  La unión de cualquier número de elementos de T es un elemento de T. En nuestro caso
  $$x_1\cup x_2=\{1;2;3;4\}=x_3;$$
  $$x_1\cup x_2\cup x_4=\{1;2;3;4;5\}=C$$
  Con ello notamos que se cumple el axioma 1.

- ***Axioma 2***
  La intersección de dos elementos cualesquiera de T es un elemento de T.
  En nuestro caso $x_3\cap x_4=\{3;4\}=x_2$; $x_1\cap x_2=\phi$
  Con ello, notamos que se cumple el axioma 2.

- ***Axioma 3***
  El conjunto C y el vacío pertenecen a T puesto que en T se cumplen los tres axiomas, por lo tanto, el par (C,T) es un espacio topológico, también es posible decir que T es una topología de C o T confiere a C estructura topológica.

CONJUNTO ABIERTO

Sea (C,T) un espacio topológico. A los subconjuntos de C que forman la topología T se les denomina los abiertos de C a los T abiertos.

CONJUNTO CERRADO

Sea (C,T) un espacio topológico. Se denomina cerrado o T cerrado a todo subconjunto de C cuyo complemento sea un elemento de T.

Ejemplo 2

Sea el espacio topológico (C,T), donde

$$C=\{1;2;3\}\wedge T=\{\phi,C,\{1\},\{3\},\{1;3\},\{2;3\}\},$$

mencione los conjuntos abiertos y cerrados del espacio topológico (C,T).

1. Por definición, los conjuntos abiertos de la topología T en C son
   $$\phi,\ C,\ \{1\},\ \{3\},\ \{1;3\},\ \{2;3\}$$
2. De los siguientes subconjuntos de C, se ha de establecer los cerrados de T, así por ejemplo:
   $\{1\}$: es cerrado de T, puesto que su complemento $\{2;3\}$ se encuentra en T.
   $\{2\}$: es cerrado de T, puesto que su complemento $\{1;3\}$ se encuentra en T.

{3}: no es cerrado de T, puesto que su complemento {1;2} no se encuentra en T.

{2;3}: es cerrado, puesto que su complemento {1} se encuentra en T.

C: es cerrado de T, puesto que su complemento el ϕ se encuentra en T.

ϕ: es cerrado de T, puesto que su complemento es C el cual se encuentra en T.

Luego los conjuntos cerrados de la topología T en C son {1}, {2}, {2;3}, C, ϕ.

Observación

1. Del ejemplo anterior de todos los subconjuntos de C son
   {1}, {2}, {1;2}, {1;3}, {2;3}, C, ϕ
   de los cuales algunos son abiertos y cerrados a la vez como {1}, {2;3}, C, ϕ mientras que otros no figuran ni entre los abiertos ni entre los cerrados como
   {1;2}, {1;3}
2. En un conjunto no vacio C, puede definirse más de una topología.

CONCEPTOS TOPOLÓGICOS

Sea el conjunto S formado por todos los subconjuntos del conjunto no vacío C. Se observa que S cumple los axiomas y es por consiguiente una topología de C. Esta es la topología discreta de C y en este caso el par (C,S), es un espacio topológico discreto o simplemente un espacio discreto.

Por el axioma 3 toda topología de un conjunto no vacío C ha de contener los conjuntos C y ϕ. Luego $J=\{C;\phi\}$, que consta únicamente de C y ϕ es una topología de C. Esta es la topología trivial o topología indiscreta de C y en este caso el par (C,J) es un espacio topológico indiscreto o simplemente un espacio discreto.

INTERIOR, EXTERIOR Y FRONTERA DE UN CONJUNTO

1. En R

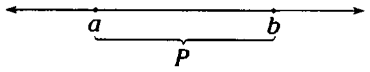


Figura 2.1

Sea el conjunto de puntos P cuyos extremos son los puntos a y b. Al intervalo $\langle a;b\rangle$ se le denomina interior de P, y al intervalo $\langle -\infty;a\rangle \cup \langle b;+\infty\rangle$ se le denomina exterior de P. La frontera es el conjunto de los puntos extremos, es decir a y b.
El conjunto clausura de P es la unión del interior con la frontera de P, es decir, $[a;b]$.

2. En R^2

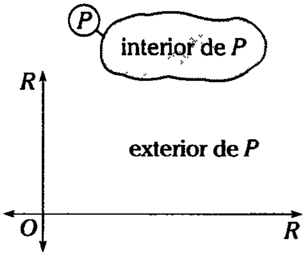


Figura 2.2

3. En R^3

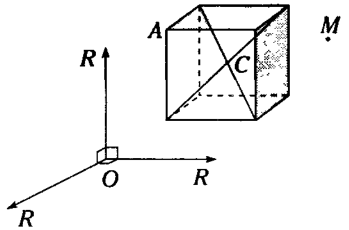


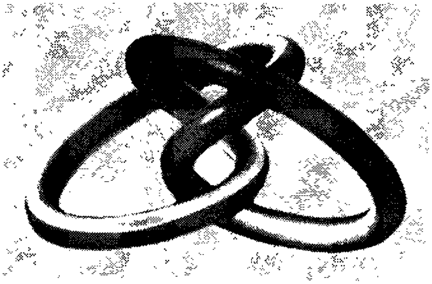
Figura 2.3

C se encuentra en el interior del cubo.
A se encuentra en la frontera del cubo.
M se encuentra en el exterior del cubo.

CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA DE LAS SUPERFICIES

La mayor parte de los objetos, topológicamente pueden transformarse, es decir, sufrir variaciones en la forma de su superficie pero dejando inalteradas ciertas propiedades básicas.

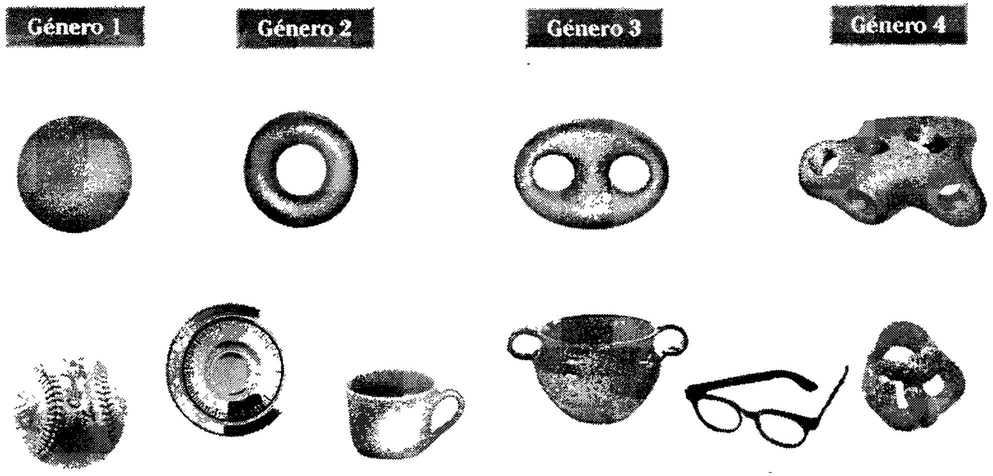
Todas las transformaciones topológicas como la mostrada en la parte derecha comprenden una propiedad denominada **el género**. Este se define por el número de agujeros que tienen el objeto o, como dicen los topólogos, por el número de cortes circulares cerrados sin intersección o completamente circulares que pueden hacerse en dicha superficie sin romperla en dos partes.



La teoría de nudos es una rama de la topología que tiene todavía muchos problemas por resolver. Un nudo se puede considerar como una curva sencilla, hecha de goma y que se puede retorcer, alargar o deformar de cualquier forma en un espacio tridimensional, aunque no se puede romper.

GÉNERO DE UNA SUPERFICIE

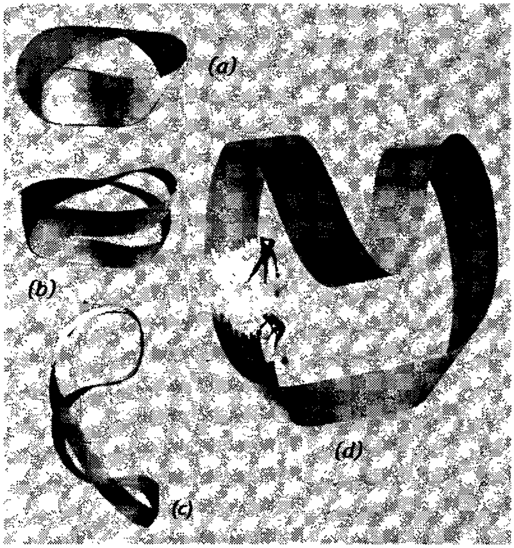
Pueden ser de género 0; 1; 2; 3 ó más. Para un mayor entendimiento se muestra las siguientes figuras.

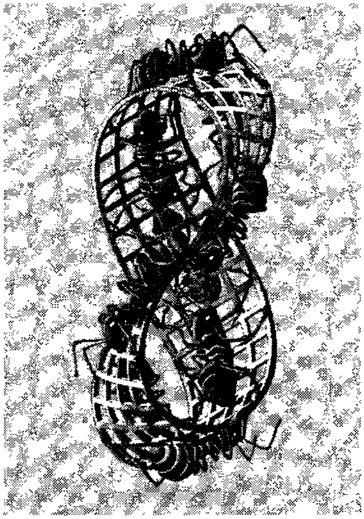


SUPERFICIES UNILATERALES

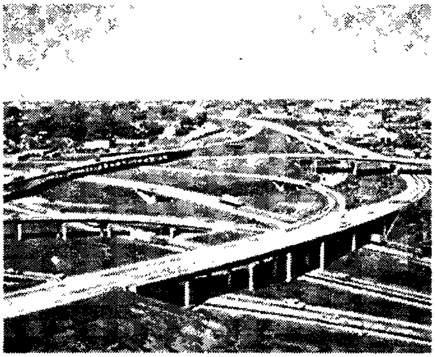
Una superficie ordinaria tiene siempre dos caras. El matemático astrónomo alemán Augustus F. Möbius (1790-1868) hizo el descubrimiento sorprendente de que existen superficies de una **sola cara**. La más sencilla de dichas superficies, llamada cinta o banda de Möbius, se forma tomando una tira larga y rectangular de papel y pegando sus dos extremos después de darle media vuelta, como se indica en la figura (a). Otra superficie unilateral interesante es la **botella de Klein**, descubierto por el matemático alemán Félix Klein (1849 - 1925).

(a) La cinta de Möbius con un solo lado.
(b) "División" de una cinta de Möbius. Cuando se hace un corte por la mitad de una cinta de Möbius podría esperarse dividir la tira en dos. Pero cuando se hace el corte por una línea imaginaria por el medio de la cinta.
(c) El resultado no es dos tiras sino una tira de dos lados. Una cinta de Möbius solo tiene un borde; el corte añade un segundo borde y un segundo lado.
(d) Dando color a una cinta de Möbius. Cualquiera puede pintar un anillo de papel ordinario de un color por un lado y otro por el otro lado. Pero no se podría hacer esto con una cinta de Möbius. Si alguien lo intentará vería que la tira tiene únicamente un lado en el que coinciden ambos colores.

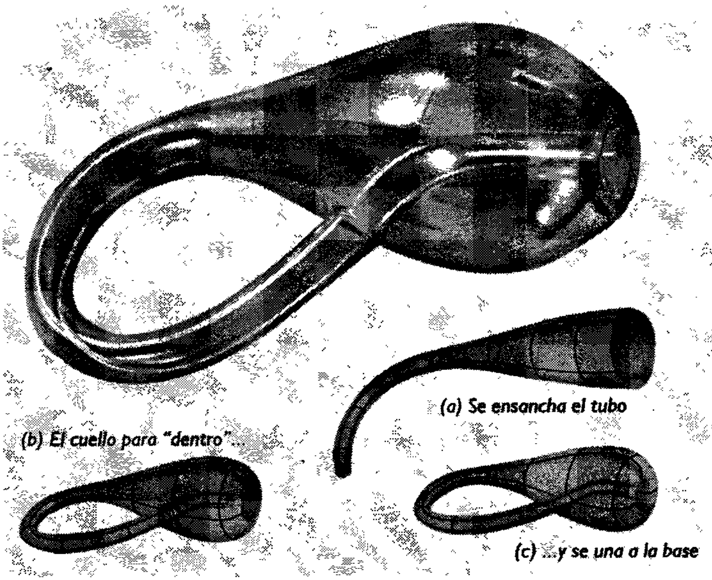




Cinta de Möbius II, 1963, xilografía en tres tintes.



Al diseño de los modernos cruces de autopistas ha contribuido una rama de la matemática que recibe el nombre de TOPOLOGÍA.



Botella de Klein (1882).

CONSTRUCCIÓN DE LA BOTELLA DE KLEIN. *Los tres diagramas de la figura superior ilustran cómo se hace la botella de Klein (a) Un extremo del tubo se convierte en el cuello, el otro en la base; (b) el cuello atraviesa el lado de la botella; (c) el cuello y la base se unen, transformando en una sucesión continua el interior y exterior.*

LA BOTELLA QUE NO TIENE INTERIOR. *Este modelo de botella de Klein, que no tienen ningún interior, pertenece al topólogo Albert W. Tucker, de la universidad de Princeton. Nadie verá jamás una verdadera botella de Klein ya que ésta sólo existe en la imaginación del topólogo. La botella de Klein se atraviesa a si misma sin que haya ningún agujero.*

Félix Klein (Düsseldorf 1849 - Gotinga 1925), en 1872 presentó una notable clasificación de la geometría, el "Programa de Erlangen" poniendo fin a la escisión entre geometría pura y geometría analítica.

Nota

La botella de Klein es una superficie cerrada con una sola cara y sin interior. Dos cintas de Möbius unidas por los costados forman una botella de Klein.
Tanto la banda de Möbius como la botella de Klein son ejemplos de "superficies no orientadas" la primera con borde y la segunda sin el.
La botella de Klein fue inventada en 1882 por Félix Klein.

Importante

CAMINOS Y ENCRUCIJADAS

Una variante de la topología es dar solución a viejos problemas que consisten en reproducir una figura sin levantar el lápiz del papel, con un solo trazo ininterrumpido y sin pasar dos veces por el mismo sitio.

La topología nos permite decidir a priori, sin recurrir a tanteos, si dada una figura determinada es posible o imposible dibujarla de un solo trazo, de qué manera podemos determinar el número de trazos necesarios y como debemos proceder para realizarlos.

Empecemos por definir algunos términos que se utilizan en este ácapite.

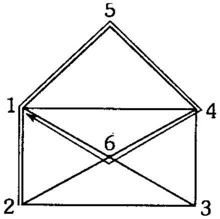
RED (o grafo): figura formada por un número arbitrario de puntos dispuestos de un modo cualquiera en el espacio (o en el plano) y unidos entre sí por líneas rectas o curvas.

CAMINO (o lado): línea, recta o curva, que une dos puntos de una red.

CRUCE (o encrucijada o también vértice): punto de una red.

GRADO: número de caminos que un cruce conecta entre sí. Hablaremos esencialmente de cruces de grado par y de grado impar.

TRAZO: sucesión continúa de caminos distintos. Un trazo posee un cruce de salida y otro de llegada que pueden coincidir. El recorrido verificado con un solo *trazo de lápiz* es un trazo.



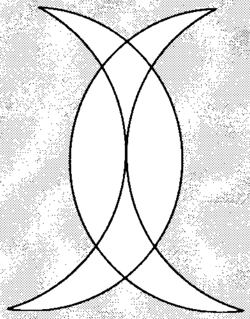
El sobre abierto

Se trata de una red que consta de 6 cruces y 10 caminos; 4 cruces son de grado par (1, 6, 4, 5) y dos de grado impar (2 y 3).

2-1-5-4-6-1 es un trazo.

DATOS HISTÓRICOS

- El nombre de topología que en nuestros días se asigna a la disciplina de una rama de la geometría que se ocupa únicamente de aquellas propiedades de las figuras geométricas que no cambian cuando éstas se deforman, independientemente del tamaño, fue llamada por primera vez en 1679 por el filósofo y científico alemán Leibniz como *Analysis situs* (análisis de la situación). Posteriormente es Félix Klein quien la denomina Topología.
- Las medias lunas de Mahoma
  Una leyenda afirma que Mahoma, el profeta, dibujada su firma compuesta de dos medias lunas opuestas de un solo trazo con la punta de su cimitarra.



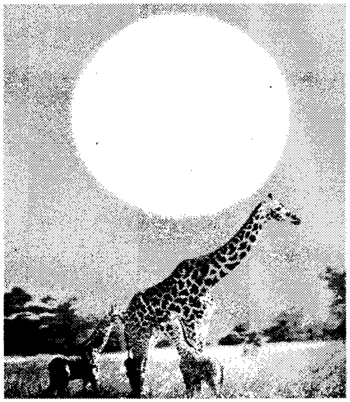
La firma de Mahoma

- Félix Klein probó la independencia de la geometría proyectiva del axioma de Euclides de las paralelas, demostrando así que, tanto la geometría euclidiana como la no euclidiana se encontraban comprendidas en la geometría proyectiva y que eran igualmente verdaderas con respecto a una métrica particular.

CONJUNTO CONVEXO

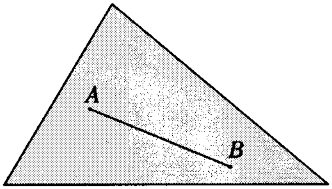
DEFINICIÓN

Un conjunto de punto P se denomina convexo, si para dos puntos cualesquiera A y B del conjunto P, el segmento de extremos A y B ($\overline{AB}$) se encuentra contenido en el conjunto P.



La abstracción del Sol es representada como un círculo en el plano o una esfera en el espacio ambas representaciones son ejemplos de conjunto convexo.

Ejemplo 3

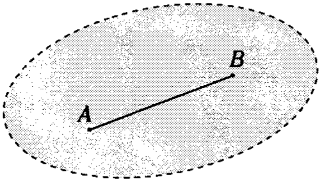


Región triangular (conjunto P)

Figura 2.4

De la figura 2.4, $\forall$ A, B $\in$ P tal que $\overline{AB} \subset P$ entonces, P es un conjunto convexo.

Ejemplo 4

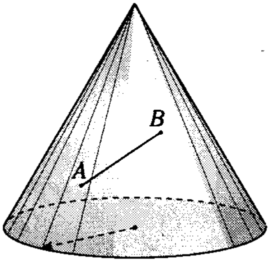


Región interior de una curva simple cerrada (conjunto Q)

Figura 2.5

De la figura 2.5, si $\forall$ A, B $\in$ Q, tal que $\overline{AB} \subset Q$, entonces Q es un conjunto convexo.

Ejemplo 5



Cono de revolución (conjunto S)

Figura 2.6

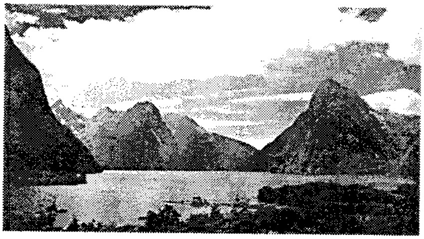
De la figura 2.6, si $\forall$ A, B $\in$ S tal que $\overline{AB} \subset S$, entonces S es un conjunto convexo.

En cada uno de los ejemplos anteriores, notamos que es posible ir de un punto A cualquiera a otro punto B cualquiera, si se mueve a lo largo de un segmento de recta, sin salir del conjunto en mención y a los cuales se les denomina convexos.

CONJUNTO NO CONVEXO

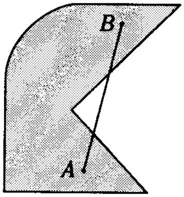
DEFINICIÓN

Un conjunto de puntos P, es denominado no convexo cuando existe por lo tanto dos puntos A y B del conjunto P, tal que el segmento de extremos A y B ($\overline{AB}$) no se encuentra contenido en el conjunto P.



La superficie de un lago nos da idea de conjunto no convexo.

Ejemplo 6

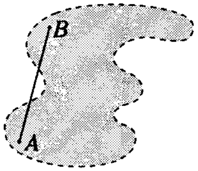


Conjunto P

Figura 2.7

En la figura 2.7, si $A \in P, B \in P$ y $\overline{AB} \subset P$, entonces P es un conjunto no convexo.

Ejemplo 7

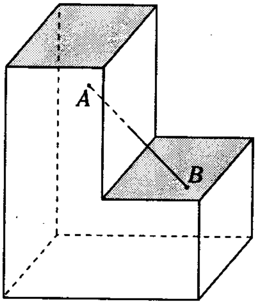


Región interior de una curva simple cerrada (conjunto Q)

Figura 2.8

En la figura 2.8, si $A \in Q, B \in Q$ y $AB \not\subset Q$ entonces Q es un conjunto no convexo.

Ejemplo 8



Conjunto L

Figura 2.9

En la figura 2.9, si $A \in L$, $B \in L$ y $AB \not\subset L$ entonces L es un conjunto no convexo.

En cada uno de los ejemplos anteriores notamos que existen segmentos que se encuentran contenidos en los conjuntos P, Q y L, pero también observamos la existencia de por lo menos un segmento ($\overline{AB}$) que no se encuentra contenido en dichos conjuntos en mención, a los cuales se les denomina conjuntos no convexos.

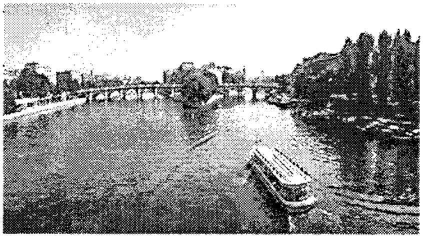
Nota

Línea curva continua: Es aquella curva que resulta de la transformación topológica de una recta, un segmento de recta o una circunferencia.

CONJUNTO CONEXO

DEFINICIÓN

Un conjunto de puntos es denominado conjunto conexo, si para todo par de puntos del conjunto existe una línea curva continua contenida en dicho conjunto que contiene a dichos puntos. *Una idea intuitiva de un conjunto conexo es que está "hecho de una pieza".*



La superficie de un río nos da idea de un conjunto conexo.

Ejemplo 9

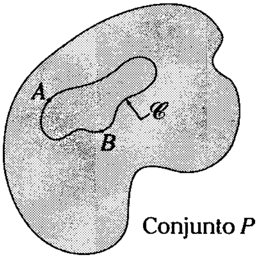
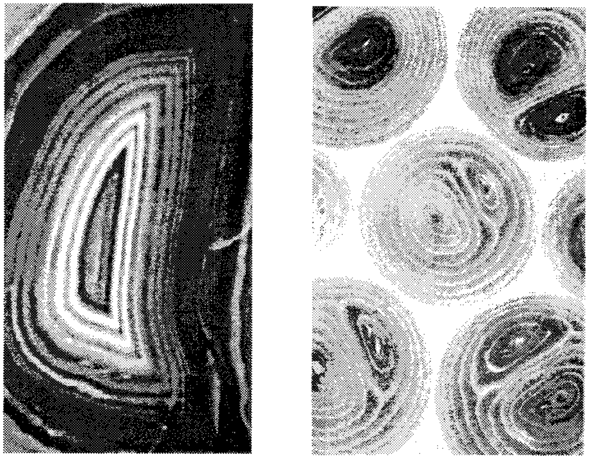


Figura 2.10

De la figura 2.10, $\mathscr{C}$ es una curva continua del conjunto P, observamos que la curva $\mathscr{C}$ se encuentra contenida en el conjunto P y contiene a todo A y B del conjunto P. Resulta así que el conjunto P es un conjunto conexo.



(a) (b)

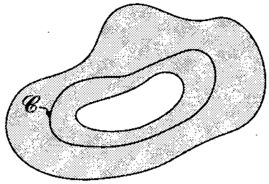
En la naturaleza encontramos ejemplos de conjuntos conexos como (a) la distribución molecular de los minerales, (b) las capas concéntricas de los tejidos en los cuerpos vegetales, y los anillos de crecimiento de un árbol, los cuales nos dan ideas de curvas contractibles en un punto.

> **Nota**
>
> **Curva simple abierta**: Es aquella que resulta de la transformación topológica de un segmento de recta.
>
>
>
>
> *Figura 2.11*

CONJUNTO MULTIPLEMENTE CONEXO

Esta categoría se establece a todo conjunto de puntos del plano en el cual existe por lo menos una curva simple cerrada que no es contractible en un punto.

Ejemplo 10

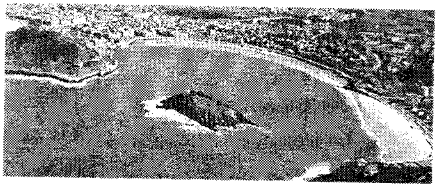


Conjunto Q

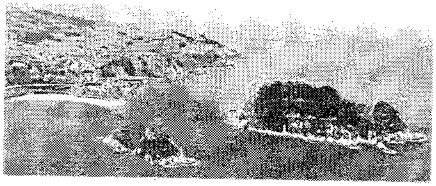
Figura 2.12

De la figura 2.12, $\mathscr{C}$ es una curva simple cerrada, que puede deformarse, contrayéndose continuamente, menos en un punto. Obviamente no puede dejar de estar contenido en el conjunto Q.

Luego se dice que Q es no simplemente conexo. La categoría de conjunto no simplemente conexo, doblemente conexo, triplemente conexo se establece por la cantidad de agujeros que tiene el conjunto (uno, dos, tres, agujeros respectivamente).



La superficie de un lago con una isla nos da idea de conjunto conexo o no simplemente conexo.



Idea de conjunto doblemente conexo.

La superficie de un lago con varias islas nos da la idea de conjunto multiplemente conexo.

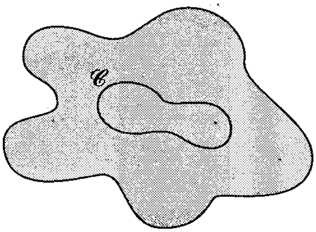
> **Nota**
>
> **Curva simple cerrada:** Es aquella curva que resulta de la transformación topológica de una circunferencia.
>
>
>
>
> *Figura 2.13*

ORDEN DE CONEXIÓN

Conjunto Simplemente conexo

Esta categoría se establece a todo conjunto de puntos del plano, en el cual todas las curvas cerradas contenidas existentes son contráctiles en un punto.

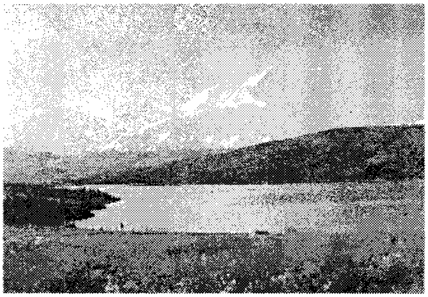
Ejemplo 11



Conjunto P

Figura 2.14

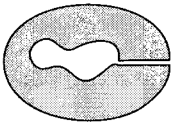
De la figura 2.14, $\mathscr{C}$ es una curva simple cerrada que puede deformarse, contrayéndose continuamente hasta reducirse y convertirse en un punto. Obviamente no puede dejar de estar contenido en el conjunto P.
Luego, se dice que el conjunto P es simplemente conexo.



La superficie de un lago sin islas nos da la idea de un conjunto simplemente conexo.

Observación

Si al conjunto Q del ejemplo conjunto conexo se le hace un corte en la forma que se aprecia en la figura, este se convierte en simplemente conexo.



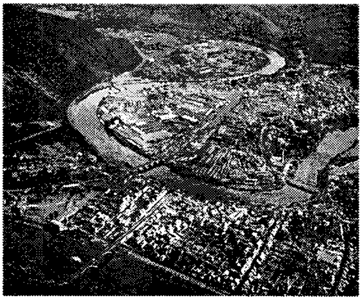
Conjunto Q

Figura 2.15

CONJUNTO NO CONEXO O INCONEXO

Definición

Un conjunto de puntos del plano es no conexo, si existe por lo menos una curva continua no contenida en el conjunto dado.



Un río separado por puentes nos da idea de conjunto no conexo o inconexo.

Ejemplo 12

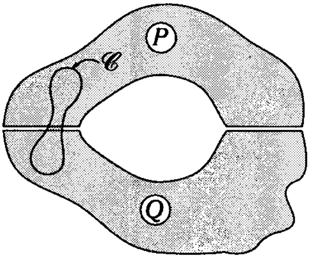


Figura 2.16

De la figura 2.16, sea $H = P \cup Q$.
Si $\mathscr{C}$ es una curva del conjunto H, observamos que la curva $\mathscr{C}$ no se encuentra contenida en H.
Luego, el conjunto H es no conexo o inconexo.

Nota

- **Disco cerrado:** Es un conjunto de puntos, conformado por todos los puntos del círculo, incluidos los puntos de su respectiva circunferencia.

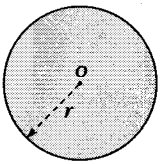


Figura 2.17

Notación: Disco cerrado con centro en O y radio r: $D_r(O)$.

- **Disco abierto:** Es un conjunto de puntos conformado por todos los puntos del círculo, pero excluyendo todos los puntos de su respectiva circunferencia.

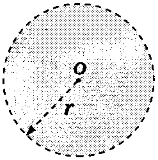


Figura 2.18

Notación: Disco abierto con centro en O y radio r: $D_r(O)$.

- **Punto interior de un conjunto:** En el plano euclidiano (R^2), A es un conjunto de puntos contenidos en R^2 y P un elemento de A. Se dice que P es un punto interior de A si y solo si el disco abierto de centro P y radio r ($r < 0$) se encuentre contenido en A.

  Del gráfico, P es en un punto interior de A, puesto que $\exists\, r>0$, tal que $P \in D_r(P) \subset A$.

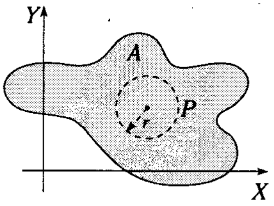


Figura 2.19

Noción de Homeomorfismo: Consideremos un hilo elástico en forma de circunferencia y marquemos en el mismo, tres puntos A, B y C. Si lo deformamos estirando algunas de sus partes, obtendremos contornos diversos: la circunferencia se transformará en cuadrado, en polígono, en elipse, en una línea cerrada sinucsa, pero, en todos los casos, B estará siempre entre A y C y un insecto que se desplazará sobre este hilo pasaría primeramente por A después por B y por último por C, o bien sucesivamente, por C, B y A. Entre la circunferencia inicial y la curva deformada, existen numerosas diferencias, pero subsiste una propiedad que permanece invariante en la deformación: el contorno dibujado por el hilo siempre es un **contorno cerrado.**

A las propiedades, que se mantienen así invariantes se llaman topológicas y atañen no a su medida sino a su continuidad: dos puntos a y b contiguos en la línea inicial (puede ser también superficie) pasan a ser unos puntos a y b contiguos en la línea transformada, y a todo punto de la primera corresponde un punto y solo uno de la segunda.

La transformación que consesrva asi la cualidad de las figuras se llama **homeomorfismo.**

Homeomorfismo: es una correspondencia **biunívoca** y **bicontinua** entre las dos figuras consideradas antes y después de la transformación.

Es posible dar una definición axiomática de los homeomorfismos y demostrar que constituyen un grupo, que es el grupo fundamental de la topología.

LECTURA

LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG

En esta sección pretendemos dar algunas consideraciones generales y algunos ejemplos que nos permitirán ir concibiendo las ideas intrínsecas de la topología.

Es conocido que la Geometría como ciencia axiomática tuvo su origen en la antigua Grecia, cuando Euclides escribe *Los elementos*, una monumental obra geometríca que dominó hasta el siglo XVII y de algún modo mantiene su vigencia hasta nuestros días. Se sabe que la geometría clásica estudia figuras geométricas como la recta, la circunferencia, las cónicas; es decir, se encarga del estudio de figuras simples.

Estimulados por la geometría no euclidiana del siglo XIX, (el siglo de la geometría y de la matemática en general), los matemáticos realizaron mayores conquistas geométricas. Así David Hilbert publica en 1989 un importante trabajo sobre la *axiomatización de la geometría*. Dentro del desarrollo geométrico, surge una nueva rama que estudia figuras extrañas como por ejemplo, las curvas que no tienen tangentes, las curvas que pasan por todos los puntos de un cuadrado y otras cosas novedosas. Este tipo de geometría, sustentada en la teoría de conjuntos, fue llamada *análisis situs* para después ser bautizada con el nombre de topología. A fin de comprender las características de la topología veamos algunos problemas objetivos, conocidos desde hace muchos años atrás como rompecabezas, pero que hoy en día los reconocemos como problemas topológicos.

Ejemplo: Problema de los siete puentes Königsberg.

Este problema consiste en atravesar los siete puentes que une a la tierra firme con dos islas, de manera que no se pase dos veces por un mismo puente.

Figura 2.20

Este problema fue tratado por Euler en 1735, quien demostró que tal travesía no era posible. En efecto, vemos el siguiente argumento.

La figura 2.20 es equivalente al siguiente gráfico.

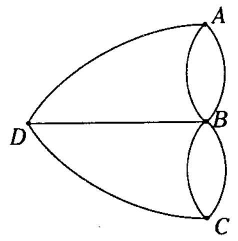


Figura 2.21

¿Es factible hacer la travesía en la figura 2.21?

Observe que en el análisis de este problema no interviene para nada la forma del río ni de las islas; tampoco depende de las dimensiones respectivas, sino de la posición de los puentes. Por esta razón, a las ramas de la matemática que nacían se les llamó análisis de la posición (o análysis situs) "Geometría de la goma elástica".

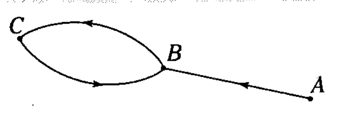


Figura 2.22

Con el objeto de encontrar alguna sentencias valederas en este tipo de problema, veamos el siguiente caso particular. Si partimos de *A* y de *B* podemos hacer un recorrido similar al del problema que tratamos. En cambio si partimos del punto *C*, tal recorrido no es factible.

¿A qué se debe esto?

Observe que *A* y *B* son vértices impares (en el sentido que concurren 1 y 3 caminos); en cambio *C* es un vértice par. Además, cuando tal paseo es factible, el vértice par *C* es de paso (es decir no es inicial ni final). El recíproco no es cierto, esto es, si el vértice es par, el no es necesariamente de paso por ejemplo.

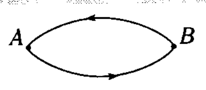


Figura 2.23

Además, observe que todo vértice impar no puede ser de paso (si lo fuera también sería par); el es inicial o final.

Ahora vamos a nuestro problema inicial. Miremos a la figura 2.23 razonemos así los vértices *A*, *B*, *C* y *D* son impares (bastaría asumir que existe tres vértices impares). Como se nos pide partir de un vértice (punto inicial) y llegar a otro (punto final), debemos necesariamente pasar por los otros vértices, que serían de paso y a la vez impares, lo que no es posible.

El termino topología fue usado por primera vez por J. B. Listing en 1836 en una carta a su antiguo profesor de la escuela primaria, y posteriormente en su libro *Vorstudien zur topologie* (Estudios previos de topología), publicado en 1847.

BIOGRAFÍA

GEORGE CANTOR (1845 - 1918)

De padres daneses, George Cantor lleva a cabo su labor científica en Alemania. Emigra a este país a los 11 años y allí adquiere sus conocimientos. Adelanta estudios de Ingeniería en Wiesbaden, de matemáticas en Zurich y de Filosofía en Berlín. Como estudiante de matemáticas, Cantor goza de maestros muy destacados como Kummer, responsable de importantes aportes al estudio de los números complejos, y de Weierstrass, quien introdujo cambios en las nociones sobre funciones elípticas. Desde el primer momento de su carrera como investigador, Cantor asume de las bases conceptuales de la geometría y de la teoría de números, donde se ubica la mayor parte de sus innovaciones, y logra enunciar los fundamentos teóricos de los números transinfinitos. Su trabajo también alcanza gran trascendencia en la teoría de conjuntos; de hecho, se le reconoce como el fundador de esa área de estudio. Por más de dos décadas Cantor es profesor de matemáticas en la universidad de Halle y es en 1883, cuando publica *Fundamentos de una teoría general de variedades*. Hacia el final de su vida se ve aquejado por una enfermedad mental de la cual nunca se puede sobreponer.

JOHANN BENEDICT LISTING

Nació en 1808 y murió en 1882 en Alemania. Su padre tiene el mismo nombre y fue un fabricante de cepillos; mientras que su madre, Caroline Friederike Listing fue descendiente de un campesino pobre. Listing era el único hijo de una familia que luchó a pesar de la dificultad económica. Era un muchacho brillante y sus talentos le sirvieron para que recibiera ayuda en su educación de varios benefactores incluyendo la fundación Städel, los partidarios del arte y los museos. En la escuela, él se interesó en ciencias y matemáticas, por influencia de su profesor Müller, pero además contaba con un talento verdadero para el arte, lo cual le permitió ayudar económicamente a sus padres a la edad de 13 años.

En el año 1825, Listing ingresa a un gimnasio, donde estudió 5 años. Dominó el inglés, francés, el italiano y el latín, y supo aprovecharlo para aumentar sus conocimientos de matemática y la ciencia en esa escuela. Como sus talentos fueron reconocidos, le concedieron una beca por la fundación Städel para estudiar matemáticas y arquitectura, que en su época no eran consideradas por separado. Ingresó en 1830 a la universidad de Göttingen, donde, además pudo tomar cursos en Astronomía, Anatomía, Fisiología, Botánica, Mineralogía, Geología y Química. Pronto atendió cursos de matemáticas de Gauss, quien se sorprendió por sus trabajos. Era de Gauss que Listing comenzó a aprender **conceptos topológicos**. Listing decidió resumir los pensamientos de su viejo profesor Müller en una palabra larga, la cual es **topología**.

Problemas Resueltos

Problema 1

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Si la región triangular ABC es R y en ella se traza la mediana $\overline{AM}$, entonces $R-\overline{AM}$ es un conjunto no convexo.

II. Si la circular R se le extrae un diámetro, entonces la resultante es un conjunto conexo.

III. La intersección de 2 conjuntos conexos siempre es conexo.

A) VFV B) FFV C) VVF
D) FVF E) VFF

Resolución

I. **VERDADERO**

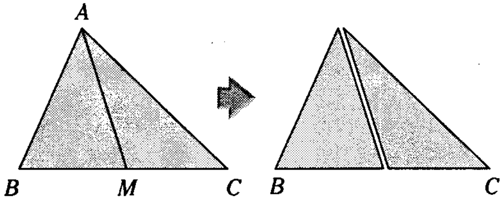


Figura 2.24

II. **FALSO**

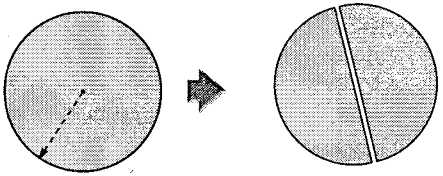
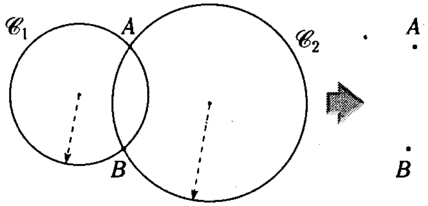


Figura 2.25

III. **FALSO**



$\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A; B\}$

Figura 2.26

CLAVE E

Problema 2

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. El interior de una circunferencia es una región convexa.

II. El interior de una esfera es un conjunto convexo.

III. Si P es un plano y $\mathscr{L}$ una recta de P, entonces $P-\mathscr{L}$ es un conjunto convexo.

A) FVF B) VVF C) FVV
D) VVV E) VFV

Resolución

I. **VERDADERO**

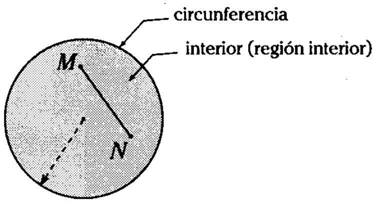


Figura 2.27

Sea I el interior de la circunferencia.
como $\overline{MN} \subset I$ entonces I es una región convexa.

II. **VERDADERO**

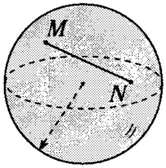


Figura 2.28

Si I es el interior de la esfera como $\overline{MN} \subset I$, entonces I es un conjunto convexo.

III. **FALSO**

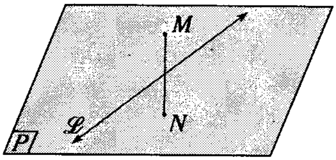


Figura 2.29

$\overline{MN} \subset \square P$, considerando $\mathscr{L} \subset \square P$
Dado que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \not\subset \square P\ (P-\mathscr{L}) \rightarrow \overline{MN} \not\subset \square P$, por lo cual $P-\mathscr{L}$ son dos semiplanos, es un conjunto no convexo.

CLAVE B

Problema 3

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Si P es un plano y A un punto de P, entonces $P-\{A\}$ es un conjunto convexo.
II. En una región triángular, si se omite el punto medio de un lado, siempre resulta una región convexa.
III. La región interior de un cuadrilátero equilátero es siempre convexa.

A) FVF B) FVV C) VFF
D) FFV E) VVF

Resolución

I. **FALSO**

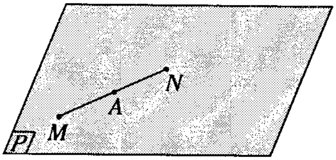


Figura 2.30

$\overline{MN} \subset \square P$, considerando $A \in \square P$ pero $A \notin \square P \rightarrow \overline{MN} \not\subset \square P$ por lo cual $P-\{A\}$ es un conjunto no convexo.

II. **FALSO**

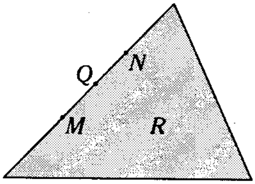


Figura 2.31

Sea la región triángular R, $\overline{MN} \subset R$ considerando $Q \in \overline{MN}$.
Pero $Q \notin R \rightarrow \overline{MN} \not\subset R$ por lo cual la región resultante es un conjunto no convexo.

III. **VERDADERO**

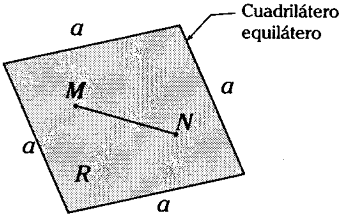


Figura 2.32

Sea R la región interior R del cuadrilátero equilátero y $\overline{MN} \subset R$, entonces la región interior es siempre convexa.

CLAVE D

Problema 4

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. El exterior de un plano es un conjunto convexo.
II. La intersección de un plano con una esfera es un conjunto convexo.
III. Si la intersección de dos conjuntos es un convexo, entonces dichos conjuntos siempre son conjuntos convexos.

A) VVV B) FFV C) FVF
D) FFF E) VFF

Resolución

I. **FALSO**

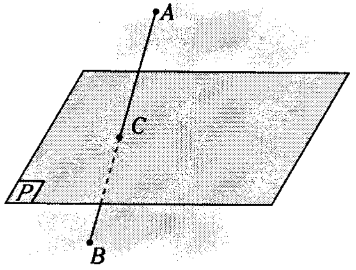


Figura 2.33

Se observa que A y B pertenecen al exterior del plano P, pero AB no está contenido en el exterior porque $C \in$ par ⏥ P.

II. **VERDADERO**

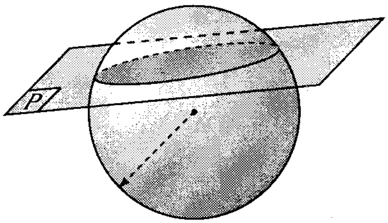
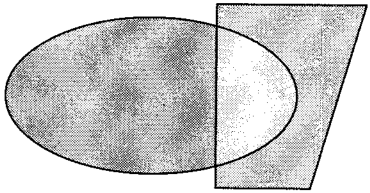


Figura 2.34

Si la intersección de un plano con una esfera es un círculo, un punto, o el vacío, entonces la intersección es un conjunto convexo.

III. **FALSO**



(a)

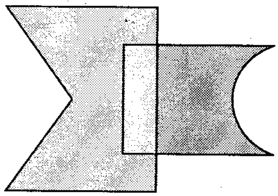


Figura 2.35

No solo la intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo, dichos conjuntos también pueden ser conjunto no convexos (cóncavos).

CLAVE C

Problema 5

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. La intersección de regiones circulares es siempre un conjunto convexo.
II. Sea R_1 la región poligonal convexa $ABCDE$ y $\overline{AC}$ una diagonal, entonces $R_1 \cap \overline{AC}$ es un conjunto convexo.
III. Un cuadrado $ABCD$ y un triángulo equilátero ABF siempre limitan una región $AFBCD$ convexa.

A) FFV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FVF

Resolución

I. **VERDADERO**

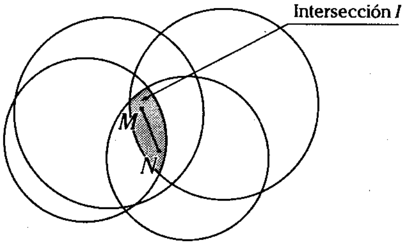


Figura 2.36

Si $\overline{MN} \subset I$, entonces I es siempre conjunto convexo.

II. **VERDADERO**

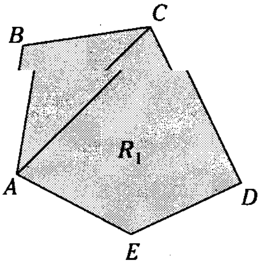


Figura 2.37

Si la región poligonal es R_1, por consiguiente $R_1 \cap \overline{AC} = \overline{AC}$ y $\overline{AC}$ es un conjunto convexo.

III. **FALSO**

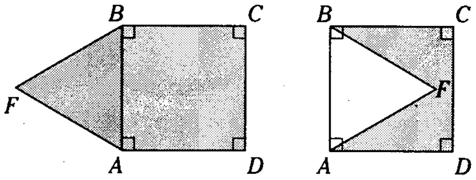


Figura 2.38

Según la proposición se tienen dos posibilidades, donde una es no convexa (considerándoles en un plano).

CLAVE B

Problema 6

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Si dos regiones circulares R_1 y R_2 son concéntricas de diferentes radios, entonces $R_1 \cup R_2$ es un conjunto convexo.
II. Si a una región triángular ABC; se le retiran los vértices A, B y C, entonces la región resultante no es conjunto convexo.
III. La intersección de dos regiones triangulares es un conjunto convexo.

A) VVF B) VFV C) VFF
D) FFV E) FFF

Resolución

I. **VERDADERO**

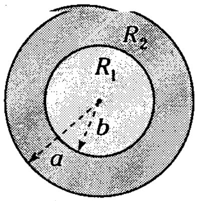


Figura 2.39

Sea

R_1: región circular de radio a.

R_2: región circular de radio b.

Puede concluirse del gráfico que $R_1 \cup R_2 = R_2$ y se sabe que el círculo es un conjunto convexo.

II. **FALSO**

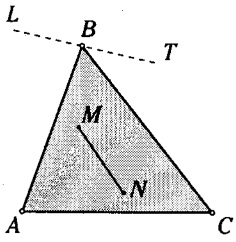


Figura 2.40

Sea R la región triangular ABC y S la región $R-\{A;B;C\}$. Si $M\in S$; $N\in S$ y para cualquier $\overline{MN}$ se tiene que $\overline{MN}\subset S$, entonces S es un convexo.

III. **VERDADERO**

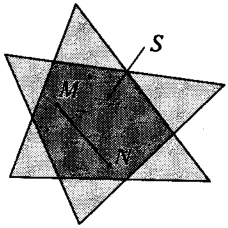


Figura 2.41

Sea S la intersección de las regiones triangulares, del gráfico se observa que siempre es un conjunto convexo al ser $\overline{MN}\subset S$.

CLAVE B

Problema 7

Si se une de una región no convexa con otra región convexa, de tal forma que la resultante sea un conjunto convexo, entonces dichas regiones podrían ser

A) una región cuadrangular y un círculo.
B) una región cuadrangular y una región triangular.
C) una región pentagonal y una región triangular.
D) solo B y C.
E) A, B y C.

Resolución

A) **FALSO**

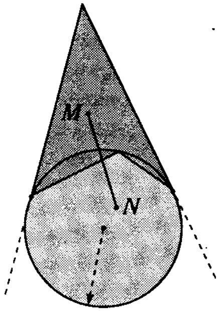


Figura 2.42

B) **VERDADERO**

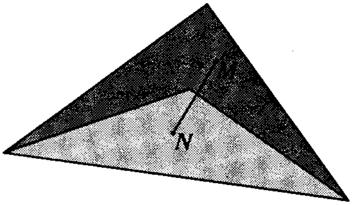


Figura 2.43

C) **VERDADERO**

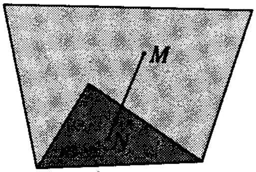


Figura 2.44

CLAVE E

Problema 8

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. El exterior de una línea recta es un conjunto convexo.

II. Si a una región triangular se le extrae una altura, entonces siempre se tiene un conjunto convexo.
III. Una región triangular al girar una vuelta alrededor de un eje coplanar, que contiene solamente a un vértice, genera una región no convexa.

A) VVV B) VFF C) FVV
D) FFV E) FVF

Resolución

I. **FALSO**

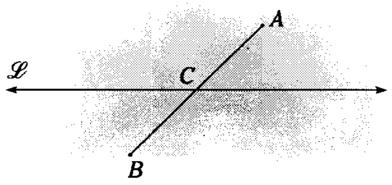


Figura 2.45

A y B pertenecen al exterior de la recta $\mathscr{L}$ pero $\overline{AB}$ no está contenido en el exterior debido a que $C \in \mathscr{L}$.

II. **FALSO**

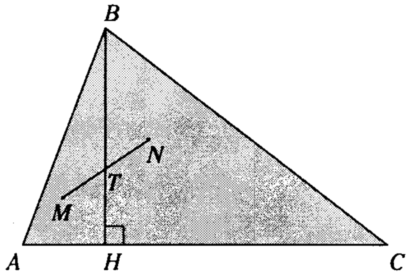


Figura 2.46

Si a la región triangular ABC le extraemos la altura BH, entonces la región resultante es un conjunto no convexo porque $\overline{MN}$ no está contenido en dicha región al pertenecer T a la altura BH.

III. **VERDADERO**

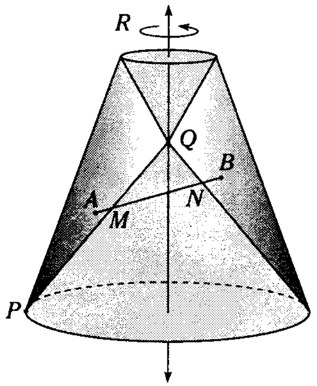


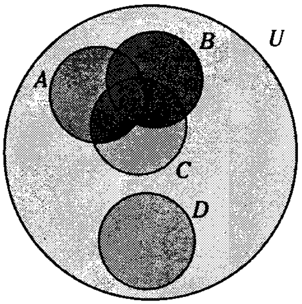
Figura 2.47

Al girar la región triangular PQR se determina un conjunto no convexo, ya que $\overline{AB}$ no está contenido en dicho conjunto.

CLAVE D

Problema 9

Según el gráfico, A, B, C, D y U son regiones circulares. Indique qué regiones son conjuntos doblemente conexos.



I. $A' \cup B' \cup C'$ II. $(A \cup D)'$ III. $A \cap U$
IV. $U \cup C'$ V. $(A \cup B \cup D)'$

A) I y IV B) II y V C) III
D) Ninguna E) Todas

Resolución

I. $A' \cup B' \cup C'$ es un conjunto conexo.

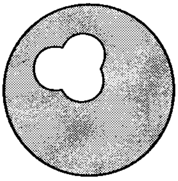


Figura 2.48

II. $(A \cup D)'$ es un conjunto doblemente conexo.

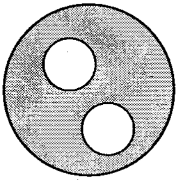


Figura 2.49

III. $A' \cap U$ es conjunto simplemente conexo.

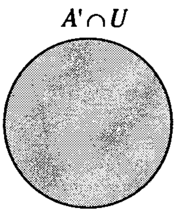


Figura 2.50

IV. $U \cap C'$ es un conjunto conexo.

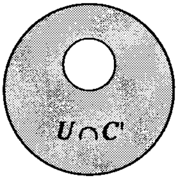


Figura 2.51

V. $(A \cup B \cup C \cup D)'$ es un conjunto doblemente conexo.

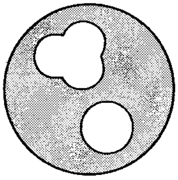
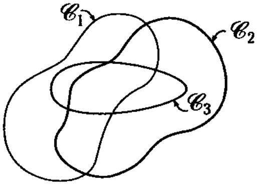


Figura 2.52

CLAVE B

Problema 10

Según la figura, se tienen las líneas curvas $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.



I. $(\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2) - \mathscr{C}_3$ es un conjunto conexo.
II. $(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2) - \mathscr{C}_3$ es un conjunto no conexo.
III. $(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2) - (\mathscr{C}_3 \cap \mathscr{C}_2)$ es un conjunto conexo.

A) VFV B) FVV C) FFV
D) FVF E) VVF

Resolución

I. **FALSO**

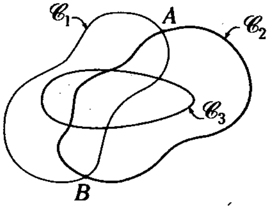


Figura 2.53

$\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A; B\}$ $(\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2) - \mathscr{C}_3 = \{A; B\}$
Así se tienen dos puntos A y B distintos que representan un conjunto no conexo.

II. **VERDADERO**

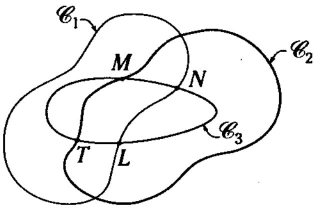


Figura 2.54

$(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2) - \mathscr{C}_3 = (\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2) - \{M; N; L; T\}$. Se comprueba que es un conjunto no conexo.

III. **FALSO**

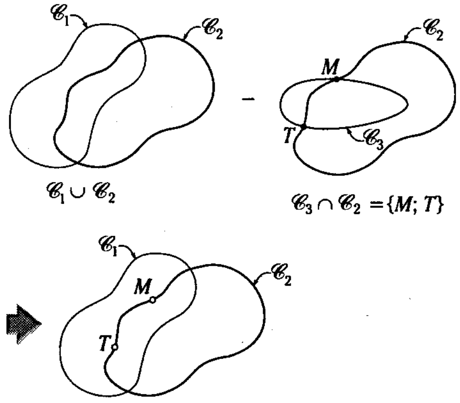


Figura 2.55

Dado que $\mathscr{C}_3 \cap \mathscr{C}_2 = \{M; T\}$ entonces se observa que es conjunto no conexo.

CLAVE D

Problema 11

Si $\mathscr{L}$ es una recta, $\mathscr{C}$ una circunferencia y P un plano que las contiene, determine el valor de verdad.

I. $P - \{\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \cup \mathscr{C}\}$ resulta ser la unión de un máximo de dos conjuntos convexos y dos conjuntos no convexos.

II. $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \cap \mathscr{C}$ puede ser un no vacío y convexo.

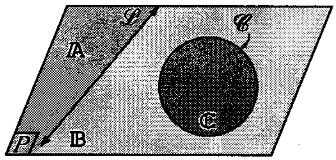
III. $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\mathscr{C}$ determina una partición en P con un mínimo de 3 elementos.

A) VVF B) FVV C) VFV
D) VVV E) FFF

Resolución

Para establecer el valor de verdad de las proposiciones dadas es necesario establecer las diferentes posiciones entre $\mathscr{L}$ y $\mathscr{C}$ en el plano P y establecer los tipos de conjuntos determinados en las diferentes posiciones.

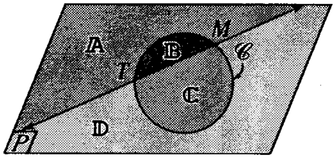
- Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \cap \mathscr{C} = \{\}$



(a)

$\mathbb{A}$: conjunto convexo.
$\mathbb{B}$: conjunto no convexo.
$\mathbb{C}$: conjunto convexo.

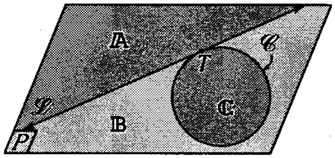
- Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \cap \mathscr{C} = \{T; M\}$



(b)

$\mathbb{A}$: conjunto no convexo.
$\mathbb{B}$: conjunto convexo.
$\mathbb{C}$: conjunto convexo.
$\mathbb{D}$: conjunto no convexo

- Si $T = \{\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \cap \mathscr{C}\}$



(c)

Figura 2.56

$\mathbb{A}$: conjunto convexo.
$\mathbb{B}$: conjunto no convexo.
$\mathbb{C}$: conjunto convexo.

Concluimos

I. **VERDADERO**

De los gráficos podemos concluir que de $P-\{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}\cup\mathscr{C}\}$ resulta la unión de 2 conjuntos convexos y 2 conjuntos no convexos como máximo. Figura 2.56 (a).

II. **VERDADERO**

La intersección en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\mathscr{C}$ puede ser no vacío y a la vez convexa. Figura 2.56 (b).

III. **VERDADERO**

De la figura 2.56 (c), podemos concluir que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\mathscr{C}$ determina en P una partición con un mínimo de elementos.

CLAVE D

Problema 12

Dados dos ángulos, cuyas regiones interiores se denotan por A y B; tal que $A\cap B\neq\phi$ y ninguna de ellas contiene a la otra, entonces se puede afirmar que

I. $A\cup B$ es un conjunto convexo.
II. $A-B$ es un conjunto no convexo.
III. $A\cap B$ es un conjunto convexo.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) II y III E) I y II

Resolución

I. **FALSO**

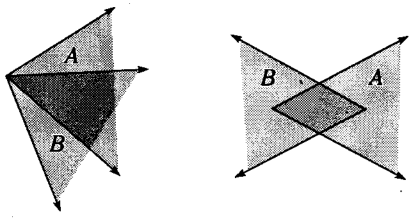


Figura 2.57

De la figura 2.57, podemos concluir que $A\cup B$ no siempre es un conjunto convexo.

II. **FALSO**

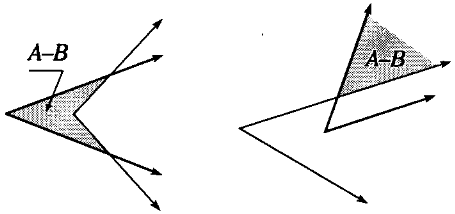


Figura 2.58

De la figura 2.58, podemos concluir que $A-B$ no siempre es un conjunto no convexo.

III. **VERDADERO**

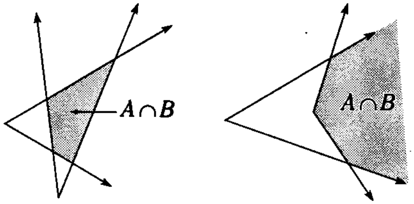


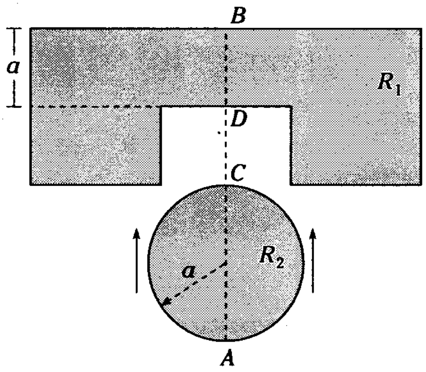
Figura 2.59

De la figura 2.59, y de los expuestos anteriormente podemos concluir que $A\cap B$ siempre es un conjunto convexo.

CLAVE C

Problema 13

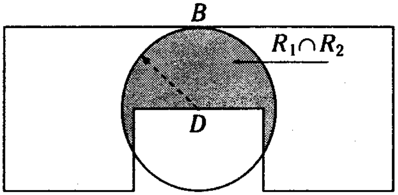
En el gráfico se muestran dos regiones R_1 y R_2. Al desplazarse R_2, como lo indican las flechas, ¿qué puede afirmar con respecto a la intersección?



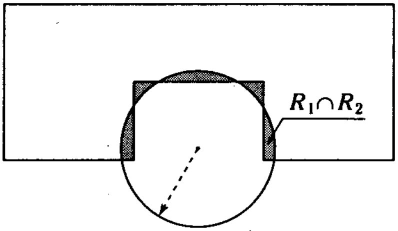
A) Siempre se determina un conjunto no convexo.
B) Cuando A llega a B, se determina un conjunto no convexo.
C) Cuando C llega a B, se determina un conjunto convexo.
D) Entonces se determina como máximo dos conjuntos convexos.
E) Cuando A llega a D, entonces se determina un conjunto convexo.

Resolución

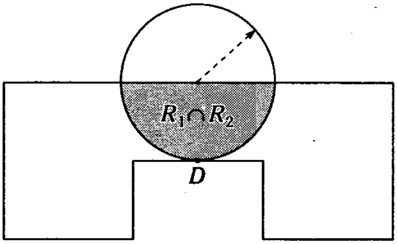
A) **FALSO**



(a)



(b)



(c)

Figura 2.60

Del gráfico $R_1 \cap R_2$, no siempre resulta un conjunto convexo.

B) **FALSO**

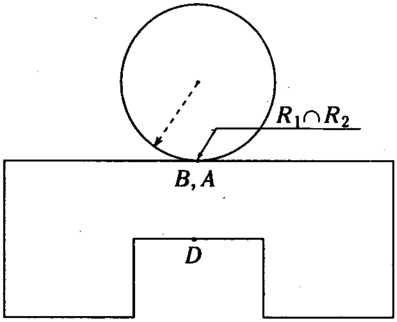


Figura 2.61

Cuando A llega a B, $R_1 \cap R_2$ es un punto y sabemos que un punto es un conjunto convexo.

C) **FALSO**

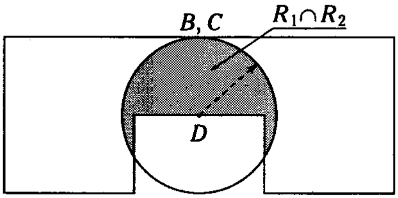


Figura 2.62

Cuando C llega a B se observa que $R_1 \cap R_2$ es un conjunto no convexo.

D) **FALSO**

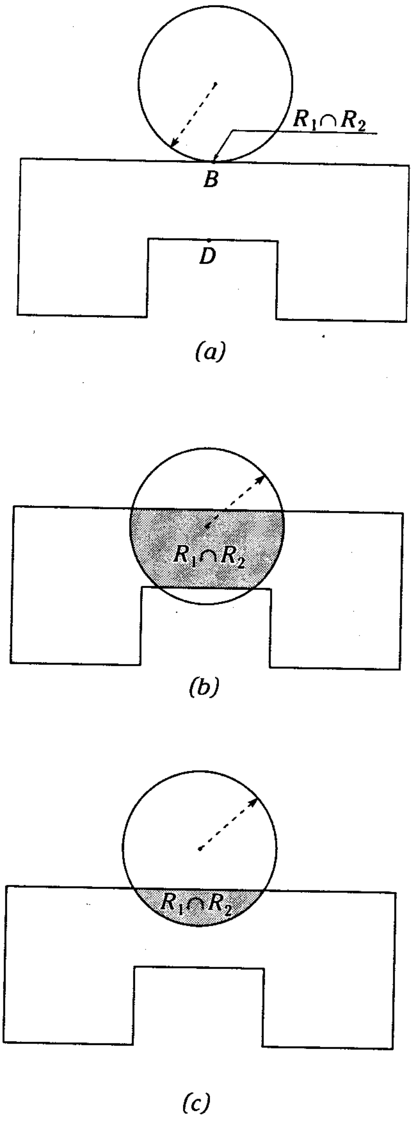


Figura 2.63

Se observa que $R_1 \cap R_2$ determina más de dos conjuntos convexos.

E) **VERDADERO**

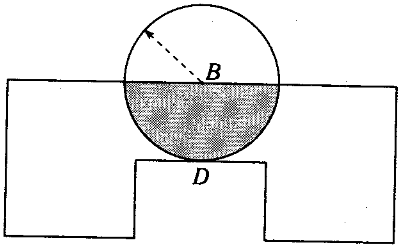


Figura 2.64

Cuando A llega a D, $R_1 \cap R_2$ es un conjunto convexo.

CLAVE E

Problema 14

Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Una región pentagonal sin 2 vértices puede ser una región convexa.
II. Tres puntos siempre determinan un conjunto convexo.
III. Tres rectas cualesquiera en el espacio siempre determinan un conjunto convexo.

A) FVF B) VVV C) FVV
D) VFF E) FFV

Resolución

I. **VERDADERO**

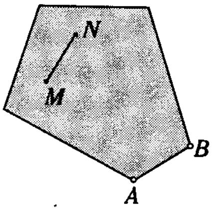


Figura 2.65

Sea la región pentagonal T y la región resultante $S=T-\{A; B\}$

Para este gráfico, cualquier $\overline{MN}$ donde $M \in S$ y $N \in S$ entonces puede ser región convexo (porque S también puede ser no convexo).

II. **FALSO**

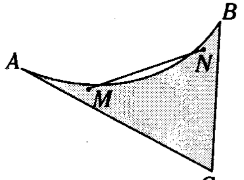


Figura 2.66

Se muestra una de tantas regiones que se determinan con A, B y C, donde $\overline{MN}$ no está contenida en la región y no siempre es un conjunto convexo.

III. **FALSO**

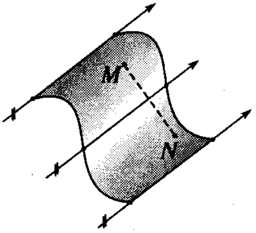


Figura 2.67

Se expone una superficie curva en el espacio donde M y N se encuentran en la superficie, pero $\overline{MN}$ no está contenida en ella concluimos así, que no siempre es un conjunto convexo.

CLAVE D

Problema 15

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Alguna diferencia de dos conjuntos no convexos es un conjunto convexo.

II. Sean A y B dos conjuntos convexos, entonces $A\Delta B$ es un conjunto convexo.

III. Una región pentagonal equilátera puede ser un conjunto no convexo.

A) VVF B) VVV C) FFF
D) FFV E) VFF

Resolución

I. **VERDADERO**

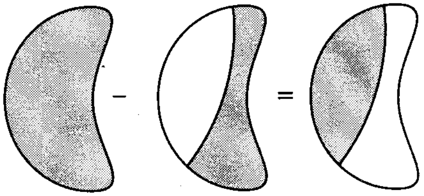


Figura 2.68

Como se muestra en la figura 2.68, la diferencia de conjuntos no convexos da un conjunto convexo, mas no por ello podemos generalizar.

II. **FALSO**

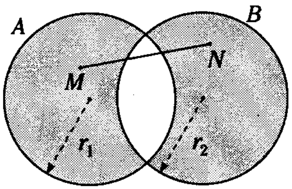


Figura 2.69

Sea A un círculo de radio r_1 y B un círculo de radio r_2. Ver figura 2.69.

Se sabe

$A \Delta B = A \cup B - A \cap B$

por lo cual $\overline{MN} \not\subset (A \Delta B)$ entonces es un conjunto no convexo.

III. **FALSO**

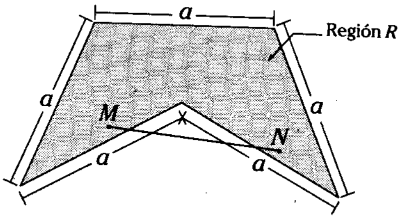


Figura 2.70

Se nota $\overline{MN} \not\subset R$ entonces la región sombreada (R) es un conjunto no convexo (pero puede ser convexo).

CLAVE E

Problema 16

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Una región circular de cuyo contorno se excluyen dos puntos diametralmente opuestos es una región convexa.

II. Un polígono convexo es un conjunto no convexo.

III. Una esfera menos un polo es una región no convexa.

A) VVF B) VFV C) FFV
D) VVV E) FFF

Resolución

I. **VERDADERO**

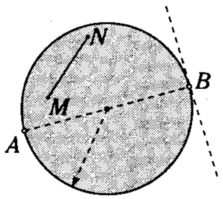


Figura 2.71

Sea la región circular R y la región resultante $S = R - \{A; B\}$ para cualquier M y $N \in S$ como $\overline{MN} \subset S$ afirmamos así, que S es un conjunto convexo.

II. **VERDADERO**

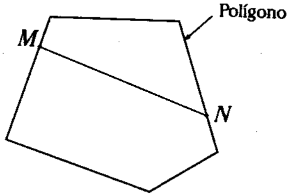


Figura 2.72

Sea el polígono L y $\overline{MN} \not\subset L$, entonces L es un conjunto no convexo.

III. **FALSO**

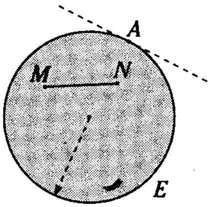


Figura 2.73

Sea la esfera E y la región resultante $E - \{A\} = S$, donde $M \in S$ y $N \in S$ como $\overline{MN} \subset S$, se concluye que S es un conjunto convexo.

CLAVE A

Problema 17

Dadas las siguientes proposiciones, indique el valor de verdad (V) o falsedad (F).

I. Si C es un polígono regular de 5 lados con su región interior.
L es una diagonal del polígono regular entonces, $C-L$ es una región convexa.

II. La diagonal de un rombo divide a este en dos regiones convexas.

III. Sea
Q: un triángulo con su región interior.
E: dos cevianas del triángulo.
Concluimos que E divide a Q en un máximo de tres regiones convexos.

A) FVF B) FFV C) VFF
D) FFF E) VVV

Resolución

Analizando las proposiciones enunciadas podemos concluir.

I. **FALSO**

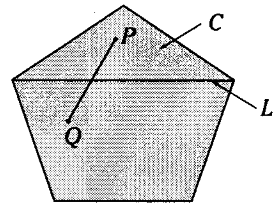


Figura 2.74

En la figura 2.74 se observa que $C-L$ resulta ser el conjunto de los puntos de la región C sin un segmento de su interior y es una región no convexa, puesto que $\overline{PQ} \not\subset \{C-L\}$.

II. **FALSO**

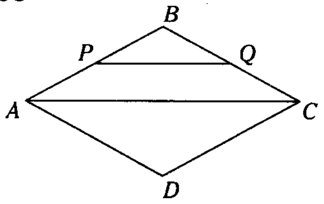


Figura 2.75

Efectivamente tal como se observa en la figura 2.75, la diagonal del rombo divide al rombo (no a la región rómbica) en dos regiones no convexas.

III. **FALSO**

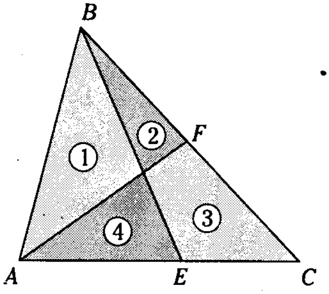


Figura 2.76

En la figura 2.76, dos cevianas en un triángulo determinan en la región triangular 4 regiones convexas como máximo.

CLAVE D

Problema 18

Señale el valor de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. Una región triangular de la que se han omitido los tres vértices es un conjunto convexo.

II. En un plano, la intersección de los dos semiplanos determinados por una recta contenida en el plano es un conjunto no vacío.

III. Un triángulo inscrito en una circunferencia contenida en un plano determina 4 conjuntos convexos sin considerar ni al triángulo ni a la circunferencia.

A) VVF B) VFV C) VFF
D) FFV E) VVV

Resolución

I. **VERDADERO**

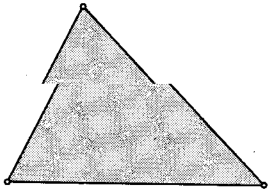


Figura 2.77

Ningún segmento puede unir dos puntos de la región triangular que contenga algún punto que no sea de la región.

II. **FALSO**

Según el postulado de la separación de los puntos del plano, la recta que determina a los dos semiplanos no está contenida en ninguno de ellos y por lo tanto al no tener puntos comunes, la intersección de estos semiplanos es un conjunto vacío.

III. **VERDADERO**

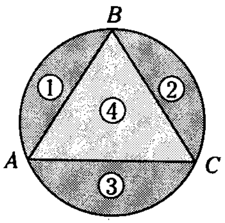


Figura 2.78

Los conjuntos de puntos determinados por el triángulo inscrito constituyen 4 conjuntos convexos (sin incluir los bordes), tal como lo muestra la figura adjunta.

CLAVE B

Problema 19

De las siguientes proposiciones, señale el valor de verdad (V) o falsedad (F).

I. Una región poligonal convexa de la que se han excluido sus vértices es un conjunto convexo.

II. Ninguna región convexa resulta de la reunión de dos regiones no convexas.

III. La reunión de los dos semiespacios, determinados por un plano de separación contenido en el espacio tridimensional, es una región convexa.

A) VVF B) VVV C) VFF
D) VFV E) FFF

Resolución

I. **VERDADERO**

Al excluirse los vértices de una región poligonal convexa, no existe un segmento que uniendo dos puntos de la región puede contener el punto excluido. Por lo tanto, la región permanece como región convexa.

II. **FALSO**

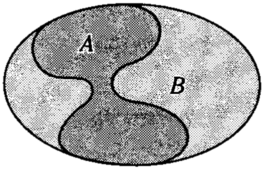


Figura 2.79

La figura 2.79 muestra la reunión de dos regiones no convexas A y B (con sombreados distintos). La reunión $(A \cup B)$ resulta ser convexa por tanto si existe alguna región convexa de dos regiones no convexas.

III. **FALSO**
Como el plano de separación de dos semiespacios no tiene puntos comunes con ninguno de ellos, entonces la reunión de estos semiespacios no es una región convexa, pues un segmento que una dos puntos de semiespacios diferentes contiene un punto que no pertenece a la reunión.

CLAVE C

Problema 20

De las siguientes proposiciones, dé el valor de verdad (V) o falsedad (F).

I. La función seno intersecado con la función coseno es un conjunto conexo.
II. Sea R región triangular ABC y $\triangle MNP$. Si $M \in \overline{AB}$; $N \in BC$ y $P \in \overline{AC}$, entonces $R - \triangle MNP$ es un conjunto conexo.
III. Si a una región triangular se le sustrae el segmento correspondiente a una altura del triángulo que limita la región triangular siempre será un conjunto no conexo.

A) VFF B) FVF C) FVV
D) FFF E) FFV

Resolución

I. **FALSO**

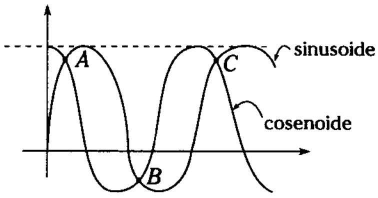


Figura 2.80

El conjunto conformado por los puntos A, B, C... no es un conjunto conexo.

II. **FALSO**

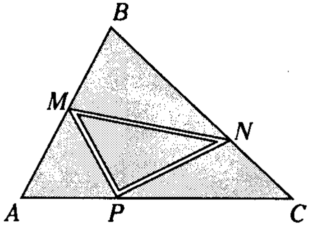
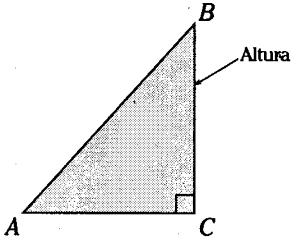


Figura 2.81

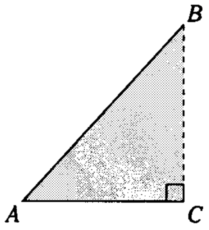
Si $R = \triangle ABC \cup I_{(\triangle ABC)}$ y $R - \triangle MNP$ no es un conjunto de una sola pieza; por lo tanto no es continuo (conjunto no conexo).

III. **FALSO**



(a)

Sea R la región triangular ABC
$\overline{BC}$: altura, $R - \overline{BC}$ es un conjunto de una sola pieza (conjunto conexo).



(b)

Figura 2.82

CLAVE D

Problema 21

Determine el valor de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. Si la intersección de dos regiones es convexa, las dos regiones también lo son.
II. La reunión de una circunferencia (con un punto de ella omitido) y su interior es una región convexa.
III. La proyección ortogonal de una región no convexa es siempre una región no convexa.

A) VFF B) FVF C) FVV
D) FFF E)VVV

Resolución

Analizando las proposiciones

I. **FALSO**

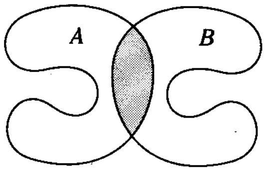


Figura 2.83

Si la intersección de dos regiones es convexa, entonces las dos regiones son convexas. Se determina así, que es falsa, porque $A \cap B$ puede ser convexa, pero ni A y B no lo son.

II. **VERDADERO**

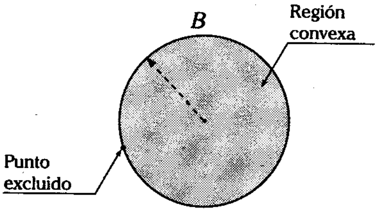


Figura 2.84

La reunión de una circunferencia (con un punto de ella omitido) y su interior es una región convexa. Se demuestra que es verdadera, puesto que la exclusión de un punto del contorno de una región convexa no elimina su convexidad.

III. **FALSO**

La proyección ortogonal de una región no convexa es siempre una región no convexa.
Lo anterior es falso, pues si la región no convexa que se proyecta es plana y está contenida en un plano perpendicular al plano de proyección, la proyección resulta ser un segmento que es una región convexa.

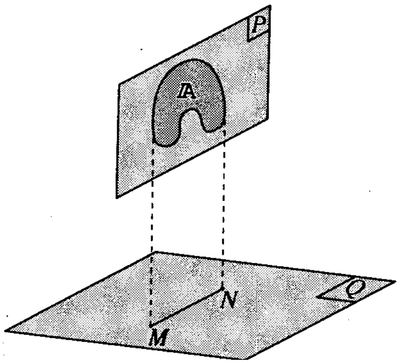


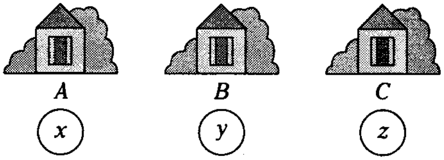
Figura 2.85

Región A no convexa $(A \subset P)$.
El plano P es perpendicular al plano Q.
La proyección de A sobre el plano Q es el segmento $\overline{MN}$ que es una región convexa.

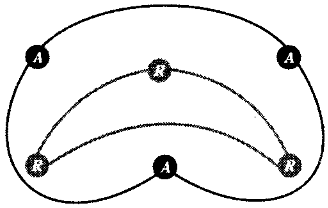
CLAVE B

Problemas Recreativos

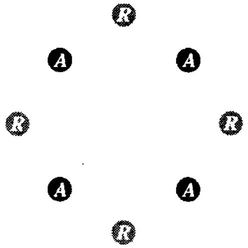
1. ¿Es posible unir cada uno de los puntos A, B, C, con cada uno de los puntos x, y, z mediante líneas que no se crucen?



2. **SIN CRUCE CAMINOS**
Se desea construir caminos de tal manera que estos no se crucen, pero que solamente unan las ciudades de azul y las ciudades de rojo como se muestra en la figura **(a)**. ¿Es posible construir dichos caminos bajo las condiciones anteriores para las ciudades de la figura **(b)**?

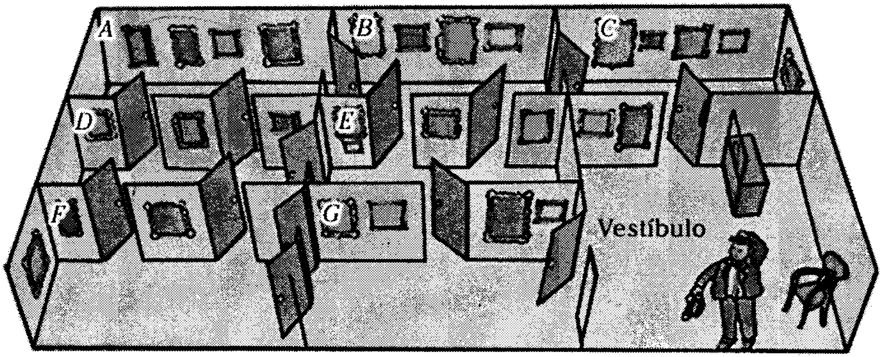


(a)



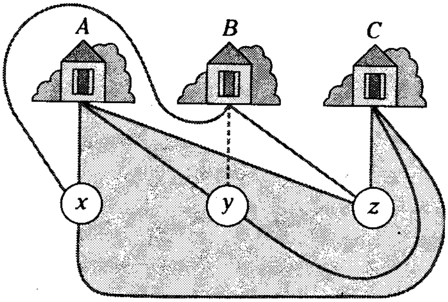
(b)

3. **UN VIGILANTE DE MUSEO ASOMBRADO**
Debajo aparece representado el plano de un museo de una pequeña ciudad comarcal. Una noche, el vigilante del museo encargado de cerrar todas las puertas de todas las salas decidió actuar de la siguiente manera: partiendo del vestíbulo de entrada, entró en una sala, cerró la puerta detrás de sí y prosiguió con su ronda, sin olvidar cerrar una puerta cada vez que pasaba de una sala a otra. ¿Qué le ocurrió al vigilante?



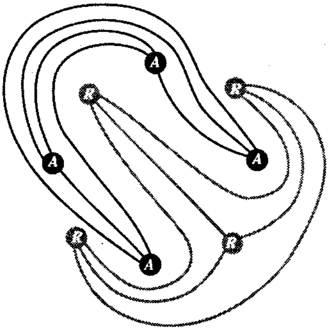
Resolución 1

Hagamos la prueba. Tras múltiples intentos, obtendremos siempre situaciones análogas a las de la figura, donde constatamos que el punto B se encuentra al exterior de la zona coloreada, mientras que el punto y se encuentra en su interior. Si una línea que una B con y tiene que cortar necesariamente otra línea trazada con anterioridad, es imposible resolver este problema.



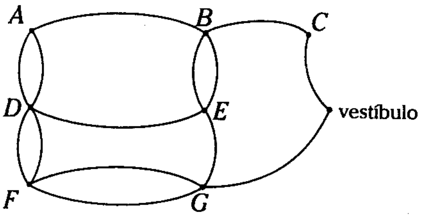
Resolución 2

Sí es posible resolver dicho problema, según la siguiente figura.



Resolución 3

Podemos sustituir el plano del museo por el siguiente esquema, en el que cada punto representa una sala y cada línea que une dos puntos una puerta.



Constatamos que dos salas poseen un número impar de puertas, o; en otras palabras, que dos puntos de esta red, A y D, son de grado impar (ver teoremas). Sabemos que es imposible recorrer esta red por entero de un solo trazo, así que podemos estar seguros de que en un momento dado, el vigilante del museo se encontrará encerrado en cualquiera de las salas A o D.

Teorema 1

Es posible reproducir con un solo trazo todas las redes que no tengan ninguna encrucijada de grado impar. El cruce de salida (el mismo que el de llegada) puede ser elegido arbitrariamente.

Teorema 2

Es posible reproducir con un solo trazo las redes que presentan dos cruces de grado impar.

El cruce de partida debe ser uno de los cruces de grado impar mientras que el otro será el cruce de llegada.

(ver demostración en las páginas 77 y 78 Enciclopedia Salvat del estudiante, tomo 10, Lingüística-Matemática)

Problemas Propuestos

1. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.
   I. La unión de dos segmentos consecutivos es siempre un conjunto convexo.
   II. La región triangular, cuyo incentro se ha omitido es un conjunto convexo.
   III. Si a una línea recta AB se le extrae el punto A, la resultante es conjunto convexo.

   A) VVF B) FVF C) FVV
   D) FFF E) FFV

2. Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones.
   I. Dos regiones triangulares determinan como máximo siete conjuntos convexos disjuntos, al superponerse entre sí.
   II. Un cilindro puede ser un conjunto convexo.
   III. Si a una región triangular se le extrae una altura, puede que sea un conjunto convexo.

   A) FVV B) VFF C) FFV
   D) VVF E) VVV

3. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.
   I. Ningún conjunto convexo resulta de la reunión de dos conjuntos no convexos.
   II. Toda reunión de dos conos de revolución que tienen la misma base es un conjunto convexo.
   III. Sea una región triangular R de ortocentro H, $R-\{H\}$ es un conjunto no convexo.

   A) VFF B) FVF C) VVV
   D) FVV E) FFF

4. Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones.
   I. Sea P un polígono regular de seis lados con su región interior y D una diagonal del polígono anterior, entonces $P-D$ es un conjunto convexo.
   II. Una semirecta es un conjunto convexo.
   III. La superficie de una esfera es un conjunto convexo.

   A) VFV B) FVF C) FFF
   D) VVF E) VFF

5. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.
   I. En un círculo C está inscrito un triángulo T; por lo tanto si al círculo se le extrae la región interior del triángulo T, resulta un conjunto convexo.
   II. La intersección de una recta secante con una corona circular puede ser conjunto convexo.
   III. La intersección de dos regiones cuadriláteras es una región convexa.

   A) FVF B) VVF C) FFF
   D) VFF E) VVV

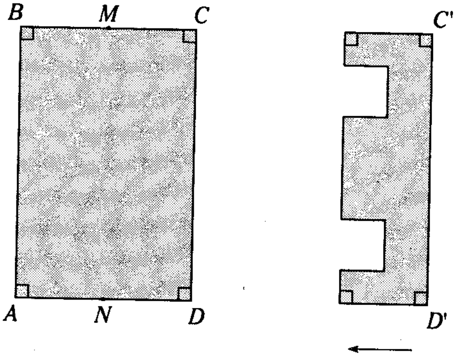
6. Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.
   I. Sea R_1 una región cuadrada y R_2 una región triangular, entonces $R_1 \cup R_2$ es un conjunto convexo.
   II. Dos regiones triangulares al superponerse determinan como máximo seis regiones parciales convexas.
   III. Si R_1 y R_2 son conjuntos no convexos, tales que $R_1 \cap R_2 \neq \phi$, entonces $(R_1 - R_2)$ no siempre es un conjunto no convexo.

   A) FVF B) VVF C) FFV
   D) FFV E) VVF

7. Si dos regiones exagonales, una convexa y otra no convexa, se intersecan, podemos deducir:
   I. como máximo se determinan ocho regiones triangulares convexas.
   II. como máximo se determinan nueve regiones convexas entre triangulares y cuadrangulares.
   III. la región común puede ser no convexa.

A) VFV B) FVV C) VVV
D) VVF E) FFV

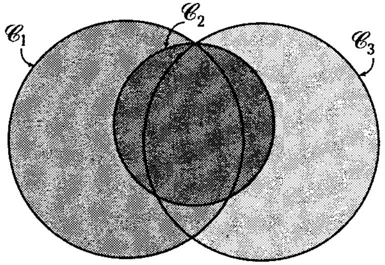
8. Del gráfico, $BM=MC=AN=a$ y $AB=C'D'$. Si la región no convexa se desplaza hacia la izquierda, podemos asumir.



   I. Cuando $\overline{AB}$ coincide con $\overline{C'D'}$, la región resultante es convexa.
   II. Cuando $\overline{MN}$ coincide con $\overline{C'D'}$, la región común entre ellas es no convexa.
   III. Cuando $\overline{CD}$ coincide con $\overline{C'D'}$, las dos regiones determinadas son no convexas.

A) VVV B) VFV C) FVV
D) FFF E) FFV

9. En la figura, se muestran los círculos $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$, así



   I. $(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_3) - \mathscr{C}_2$ resulta una región no convexa.
   II. $(\mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3) - \mathscr{C}_1$ resulta una región convexa.
   III. $(\mathscr{C}_2 \cap \mathscr{C}_3) - \mathscr{C}_1$ resulta una región no convexa.

A) FFV B) VVF C) VFV
D) FFF E) FVF

10. Si se tienen dos regiones cuadradas, ¿qué ocurre al intersecarse?
   I. Se determina como mínimo cuatro regiones parciales convexas.
   II. Se determina como máximo nueve regiones parciales convexas.
   III. La unión de ellas puede determinar un conjunto convexo.

A) FVF B) FVV C) VVV
D) VFV E) FFV

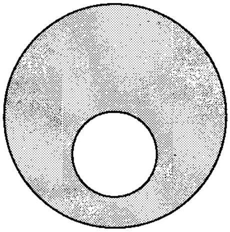
11. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.
   I. Si a un plano se le extrae un punto, el conjunto restante es convexo.
   II. Si a una región triangular se le extraen dos bisectrices interiores, la región obtenida puede ser un conjunto convexo.
   III. Todo ángulo es un conjunto convexo.

A) VVV B) FFV C) VFV
D) FFF E) FVV

12. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Si se trazan dos rectas secantes a una región cuadrangular convexa, las regiones parciales determinadas por dichas rectas son convexas.

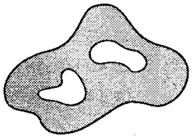
II. Al trazar dos tangentes a la circunferencia menor, estas rectas y la circunferencia menor determinan siempre dos conjuntos no convexos y un máximo de cuatro conjuntos convexos.



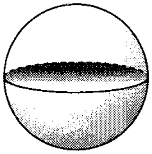
III. La circunferencia inscrita en un región triangular determina 3 regiones no convexas.

A) VVF B) FFV C) VVV
D) FFF E) VFF

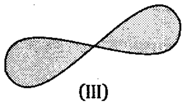
13. En los siguientes gráficos, seleccione cuáles son conjuntos conexos.



(I)



(II)



(III)

A) solo I B) solo I y III C) solo II
D) solo III E) todas

14. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

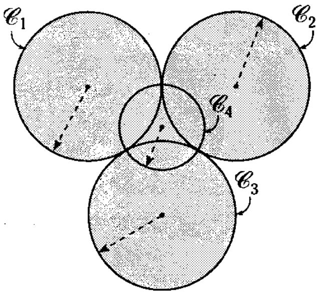
I. Si a una región triangular se le omite una mediana, se determina un conjunto inconexo.

II. Si a un círculo se le extrae la circunferencia que lo limita, se determina un conjunto inconexo.

III. Si el conjunto A es la unión de dos conjuntos no vacíos y separados, significa que es conexo.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FFF E) FVV

15. En el gráfico se muestran cuatro círculos. Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones.



I. El conjunto $(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3 \cup \mathscr{C}_4) - \mathscr{C}_4$ es simplemente conexo.

II. El conjunto $\mathscr{C}_3 - \mathscr{C}_4$ es conexo.

III. El conjunto $\mathscr{C}_4 - (\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3)$ es un conjunto no simplemente conexo.

A) FFV B) VVF C) FFF
D) VFF E) VFV

16. Si la reunión de una región no convexa (cóncava) con una región convexa, de tal forma que no se intersequen, resulta una región cóncava; entonces dichas regiones son.

A) una región cuadrangular y un círculo.
B) una región cuadrangular y una región triangular.
C) una región pentagonal y una región triangular.
D) A y B.
E) B y C.

17. Dadas las siguientes proposiciones, dé el valor de verdad (V) o falsedad (F).

I. La unión de dos regiones convexas resulta una región convexa.
II. Una recta secante a una región convexa determina en ella dos regiones convexas.
III. La intersección de dos regiones no convexas puede ser una región convexa.

A) VFF B) FVV C) VVF
D) FFV E) FVF

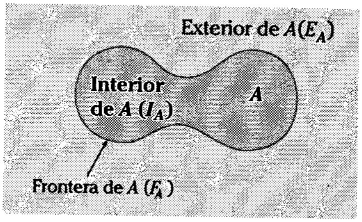
18. Indique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.

I. El círculo es un conjunto conexo.
II. En un triángulo ABC, se traza la mediana AM, si R es la región triangular ABC; entonces $R\text{–}\overline{AM}$ no es un conjunto conexo.
III. La intersección de dos conjuntos conexos siempre es conexo.

A) VFF B) FVV C) VVV
D) FFV E) VVF

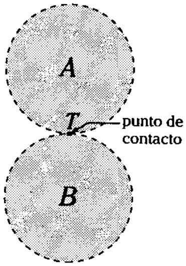
19. Determine si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones.

I. Un subconjunto de la recta euclidiana es conexo si y solo si es un segmento de ella.
II.



$F_A = C(I_A \cup E_A)$; C: complemento

III.



Siendo A, conjunto A y B conjunto B.
Si $A \cup T \cup B = E$, E es un conjunto conexo.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVV E) FVF

20. De las siguientes proposiciones, señale su condición verdadera o falsa.

I. El vacío es un conjunto convexo.
II. El punto es un conjunto convexo.
III. El punto es un conjunto conexo.
IV. Infinitos puntos consecutivos forman un conjunto conexo.

A) VVFF B) VFVF C) FVFV
D) FFVV E) FVVF

1	D	11	D
2	E	12	C
3	E	13	E
4	B	14	C
5	A	15	B
6	D	16	A
7	E	17	B
8	C	18	E
9	C	19	A
10	B	20	A

Claves

Capítulo III

Línea recta, segmento y ángulo

Los geoglifos gigantes de Nasca son líneas trazadas en el suelo de diversas formas; como el "colibrí", que se encuentra ubicado a unos 400 km al sur de Lima.

Línea recta, segmento y ángulo

OBJETIVOS

- Conocer la diferencia entre línea, línea recta, segmento y segmento de recta.
- Diferenciar entre ángulo y par angular.
- Establecer las posiciones relativas de dos rectas en el plano y las propiedades de los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal.

INTRODUCCIÓN

Si nos remontamos a la prehistoria, es posible que el hombre con sus conceptos primitivos sobre número y medida haya contado con los dedos u otros objetos que lo rodeaban. Respecto a las medidas longitudinales de ciertas líneas, pudo conseguirlas al compararlas con ciertas partes del cuerpo: codos, pies, palmas, etc. (medición antropométrica).

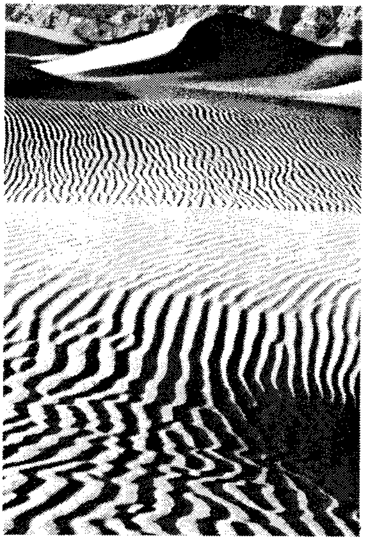
Franja de línea que se observa en algunos animales, como en la cebra.

Todo esto nos indica que ya se tenía la idea de línea, la cual fue perfeccionada hasta lograr una mayor precisión en el desarrollo de la humanidad. Podemos comprobar lo mencionado no solo en la construcción de las pirámides, templos, palacios efectuada por los egipcios; sino también en lo hecho por los incas (andenes, templos y canales de irrigación).

La idea de ángulo ya se encontraba presente y sirvió para dar forma a las figuras cerradas que se usaban para delimitar los terrenos de cultivo y a los bloques de ladrillos para sus edificaciones.

En la actualidad podemos notar el uso de estas figuras en el diseño de ciertos objetos, como ventanas, puertas, mesas, piezas de máquinas, etc.

Candelabro. *Geoglifo de más de 120 m de extensión ubicado al noroeste de la Bahía de Paracas, conocido también como Tres Cruces o Tridente. Algunos aseguran que es un cactus, un símbolo de Chavín.*



Líneas dejadas por el viento en una duna de arena.

NOCIONES PREVIAS

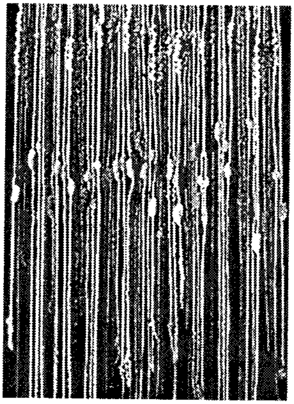
Dentro de los primeros principios de Euclides y enunciados de las proposiciones del libro I[1] podemos recoger las explicaciones y definiciones iniciales:

- Un punto es lo que no tiene partes o dimensión.
- Una línea es una longitud sin anchura.
- Una recta es una línea que tiene todos sus puntos en la misma dirección.
- Un ángulo plano es la inclinación entre sí de dos líneas de un plano si estas se cortan y no están en una misma recta.
- Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se dice que es rectilíneo.
- Rectas paralelas son las que, estando en el mismo plano y prolongándolas indefinidamente en ambos sentidos, no se cortan ni en uno ni en el otro sentido.

1 ***The thirteen books of Euclid's elements*** (dover publications).

Por citar algunas de las 23 definiciones que aparecen en dicho libro, así también de los 5 postulados de Euclides, podemos mencionar:

1. Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro.
2. Una recta finita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada o indefinida.
3. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
4. Por un punto cualesquiera como centro y radio arbitrario se puede trazar una circunferencia.
5. Si una recta que corta a otras dos forma uno de estos ángulos interiores del mismo lado de ella, que sumados sean menores que dos rectos, las dos rectas, al prolongarse indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos.



Quipu incaico. *Los quipus eran un instrumento básico en la comunicación y contabilidad. Las cuerdas y sus nudos (líneas y puntos) para cuantificar cosechas, censar la población, ganado, etc. El color equivalía al género y el nudo a la cantidad.*

Se presumió que el quinto postulado se podía demostrar a partir de los 4 anteriores, es decir, para muchos matemáticos el postulado de las paralelas presentaba un verdadero problema sin resolver.

En 1733, el matemático y lógico jesuita Saccheri (1667-1733) emprendió la tarea de demostrar en su obra maestra *Euclides libre de toda mancha*, que el sistema geométrico de Euclides, con su postulado de paralelas es el único posible en la lógica y la experiencia.

Hoy en día muchos conceptos han cambiado; así podemos citar los postulados de Hilbert para la geometría euclidiana plana.

Grupo I Postulados de conexión

- Hay una y solo una recta que pasa por dos puntos distintos dados.
- Toda recta contiene al menos dos puntos distintos, y respecto a una recta hay al menos un punto que no esta en ella.

LÍNEA RECTA

CONCEPTO

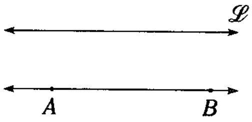
Es un elemento de la geometría y a su vez es un ente[2] matemático constituido por infinitos puntos que tienen una misma dirección.

Representación

Figura 3.1

Notación

A la línea recta se le denota de dos maneras:

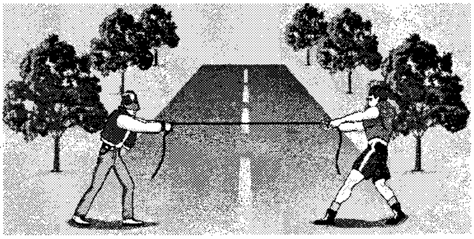


Línea recta $\mathscr{L}$: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

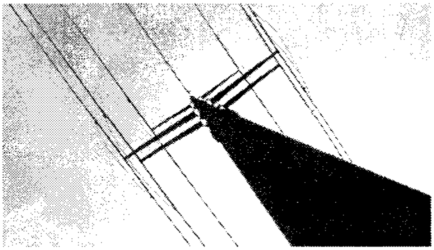
Línea recta AB: $\overleftrightarrow{AB}$

Figura 3.2

2 Ente, lo que existe o puede existir. El que no tiene que ser real y verdadero y solo existe en el entendimiento.



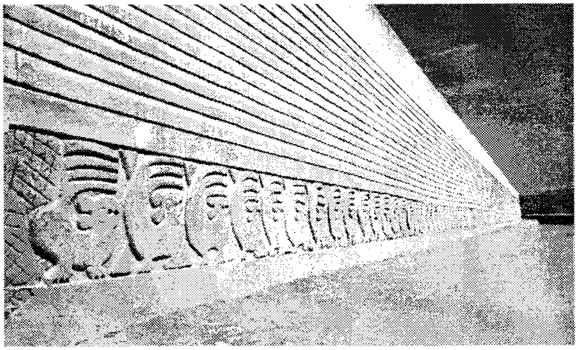
Una soga bien tensada nos da la idea de una porción de línea recta.



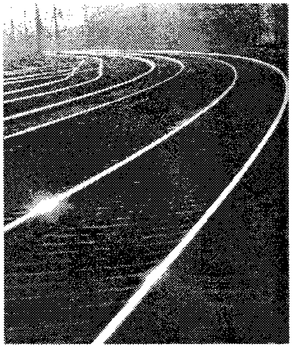
Los cables de un poste de alumbrado o de alta tensión nos da idea de línea recta.

Observación

La línea recta carece de extremos por lo tanto es infinita, es decir, no es medible.



La cultura Chimú utilizó las líneas como decoración de sus unidades arquitectónicas (muros de barro) - Ciudadela Chan-Chan.



Los rieles de los ferrocarriles son ejemplos de líneas paralelas, de gran utilidad para el transporte.

RAYO

Es cada una de las porciones determinadas en una recta por cualquiera de sus puntos, considerándolos a estos.

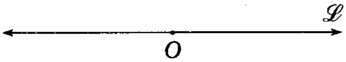


Figura 3.3

Así en la figura 3.3 se muestran la recta $\mathscr{L}$ y el punto O que pertenece a ella, el cual determina dos porciones de recta. Al considerar el punto O en dichas porciones, estas reciben el nombre de rayo.

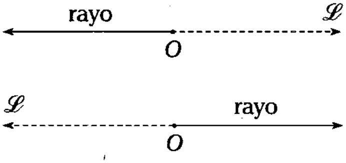


Figura 3.4

Representación

Se le representa como una porción de recta limitada en un extremo e ilimitada en el otro.

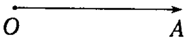
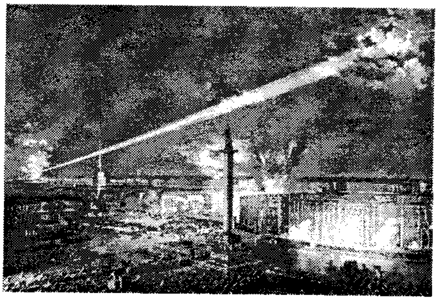


Figura 3.5

Notación

Rayo OA: $\overrightarrow{OA}$



Un rayo de luz representando el inicio de un nuevo poder y el momento culminante de la revolución bolchevique.

Observación

Semirrecta. Es cada una de las porciones determinadas en una recta por cualquiera de sus puntos, sin considerar a estos.

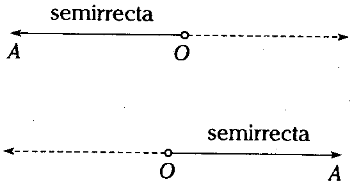


Figura 3.6

Notación

Semirrecta OA: $\overrightarrow{OA}$

SEGMENTO DE RECTA

Porción de línea recta comprendida entre dos puntos de ella, a los cuales se les denomina extremos.

En la figura 3.7, se muestra una recta $\mathscr{L}$ y los puntos A y B, los cuales determinan el segmento AB.

Figura 3.7

Representación

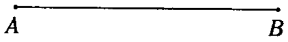


Figura 3.8

Notación

Segmento de recta de extremos A y B: $\overline{AB}$

La estela de fuego dejada por un cohete en el despegue representa un segmento de recta.

LONGITUD DE UN SEGMENTO DE RECTA

En la métrica euclidiana, al valor numérico de la función distancia se le denomina también longitud del segmento.

La longitud del segmento es un número real positivo y resulta nulo solo en el caso en que los extremos del segmento coincidan, esto es, cuando el segmento se reduce a un punto. Por tanto, cualquier segmento no reducido a un punto tendrá longitud positiva.

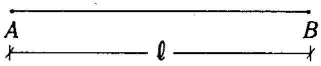


Figura 3.9

De la figura 3.9, la longitud de $\overline{AB}$ es ℓ: $AB=\ell$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Es aquel punto que pertenece a un segmento de recta y que determina con los extremos de este dos segmentos de igual longitud.

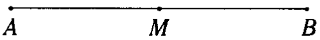


Figura 3.10

Si $M\in\overline{AB}$ y $AM=MB$, si y solo si M es punto medio de $\overline{AB}$.

Nota

Todo segmento de línea tiene un único punto medio.

OPERACIONES CON LAS LONGITUDES DE LOS SEGMENTOS

Puesto que se puede asociar a la longitud de todo segmento un número real positivo, podemos realizar las siguientes operaciones matemáticas con dichas longitudes.

Adición

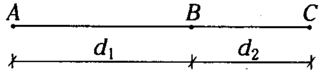


Figura 3.11

Si $AB=d_1$ y $BC=d_2$, entonces $AC=d_1+d_2$.

Sustracción

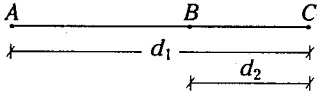


Figura 3.12

Si $AC=d_1$ y $BC=d_2$, entonces $AB=d_1-d_2$

RAZÓN DE LONGITUDES DE DOS SEGMENTOS

La razón $\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$ se lee AB es a BC como 2 es a 3, es decir, $AB=2n$ y $BC=3n$

El cual gráficamente representaría

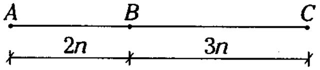


Figura 3.13

AXIOMA DE ORDEN EN LA LÍNEA RECTA

Si los puntos A, B y C son colineales y $AB+BC=AC$, entonces se dice que B está entre A y C o B está entre C y A.

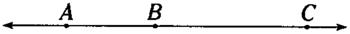


Figura 3.14

Importante

Los postulados y axiomas de Euclides. Euclides basó su geometría en tres clases de enunciados: las definiciones, los postulados y los axiomas (en la actualidad no se establecen diferencias entre axioma y postulado).

Cinco de ellos son comunes a todas las ciencias que estudian magnitudes:

1. Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.
2. Si añadimos a dos cantidades iguales otras dos cantidades iguales, los totales que se obtienen son iguales.
3. Si restamos de dos cantidades iguales otras dos cantidades iguales, las diferencias que se obtienen son iguales.
4. Las cosas que pueden superponerse unas a otras son iguales.
5. La totalidad es mayor que la parte.

Los otros cinco son postulados específicos de la geometría:

I. Siempre podemos trazar una recta entre dos puntos.
II. Siempre podemos prolongar las dos extremidades de un segmento rectilíneo para obtener una recta infinita y continua.
III. Para determinar un círculo, basta con indicar su centro y cualquiera de sus radios.
IV. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
V. Por un punto exterior a una recta, podemos trazar una paralela a esta recta y solamente una.

Este último postulado es doblemente célebre. Primero, por las inútiles tentativas que se han hecho para demostrarlo a partir de los postulados anteriores y segundo, en razón de las consecuencias que tuvo para el desarrollo de la geometría su sustitución por uno cualquiera de los axiomas siguientes:

- Por un punto exterior a una recta podemos trazar una infinidad de paralelas a esta recta (geometría de Lobachevski).
- Por un punto exterior a una recta, no podemos trazar ninguna paralela a esta recta (geometría de Riemann).

ÁNGULO

Es la figura geométrica formada por un par de rayos que tienen el mismo origen y que no están en línea recta.

La fotografía muestra claramente el desplazamiento de la luz en línea recta y cómo los haces de luz forman ángulos.

Representación

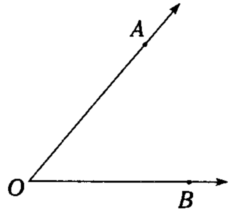


Figura 3.15

En la figura 3.15, se muestran los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ denominados lados del ángulo y al origen común O que se le denomina vértice. (Los lados y el vértice constituyen los elementos de un ángulo).

Notación

Ángulo AOB de vértice O: $\measuredangle AOB$

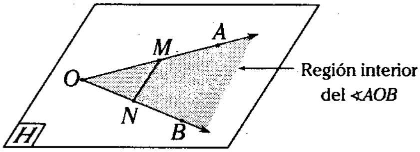
Es necesario tener presente que al denotar un ángulo, la letra intermedia corresponde al vértice.

Según Hilbert

Por ángulo se indica un punto (llamado vértice del ángulo) y dos rayos (llamados lados del ángulo) que emanan del punto.

REGIONES DETERMINADAS POR UN ÁNGULO EN EL PLANO

Dado un ángulo AOB que está contenido en un plano H, si luego en $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ se ubican los puntos M y N respectivamente ($M \neq O$ y $N \neq O$); la porción del plano H en la que está contenido el segmento de recta MN, excepto sus extremos, es la región interior del $\measuredangle AOB$.

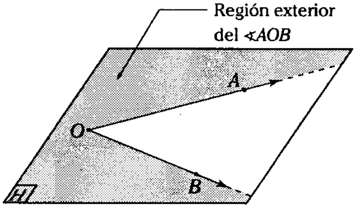


$\measuredangle AOB \subset ▱H$

Figura 3.16

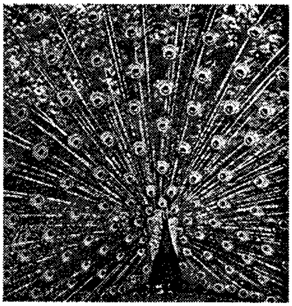
Región exterior de un ángulo

Es el conjunto de todos los puntos del plano que contienen a un ángulo y que no están en el ángulo ni en su interior.



$\measuredangle AOB \subset ▱H$

Figura 3.17



Las plumas de un pavo real forman ángulos y la región comprendida por estas es la región interior del ángulo.

Nota

A la región exterior de un ángulo se le conoce por cuestiones prácticas como exterior de un ángulo.

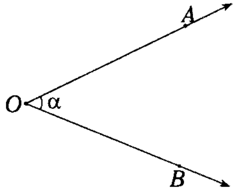
MEDIDA DE UN ÁNGULO

Usualmente llamamos medida de un ángulo a la medida de la amplitud de un ángulo[3].

A la amplitud de un ángulo se le asigna un número real entre 0° y 180° al que llamaremos medida del ángulo (sistema sexagesimal).

Si la medida del $\measuredangle AOB$ es denotada por $m\measuredangle AOB$, entonces $m\measuredangle AOB = \alpha$

α: Es un número que indica cuántas veces el $\measuredangle AOB$ contiene al ángulo unitario (ángulo cuya medida es 1°[4] y que convencionalmente se mide en su interior).



$0° < \alpha < 180°$

Figura 3.18

POSTULADO DE LA CONSTRUCCIÓN DE ÁNGULOS

Sea $\overrightarrow{OB}$ un rayo y H_1 uno de los semiplanos determinados por la $\overleftrightarrow{OB}$. Para cada número real α entre 0° y 180°, hay exactamente un rayo $\overrightarrow{OA}$ con A en H_1, tal que $m\measuredangle AOB = \alpha$.

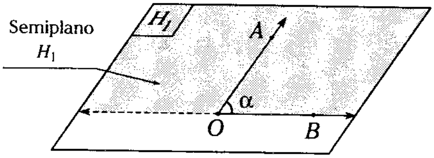
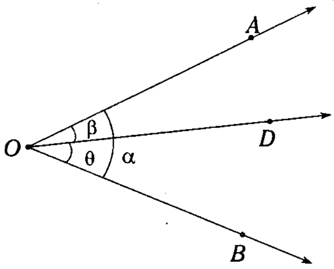


Figura 3.19

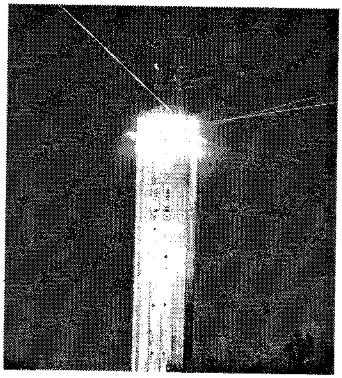
POSTULADO DE LA ADICIÓN DE LAS MEDIDAS DE ÁNGULOS

Si D está en el interior del $\measuredangle AOB$, entonces $m\measuredangle AOB = m\measuredangle AOD + m\measuredangle DOB$.



$\alpha = \beta + \theta$

Figura 3.20



Un haz láser es una línea recta de luz – mucho más intensa que los focos normales. El efecto que producen, especialmente de noche, permite formar con ellos ángulos consecutivos.

(3) Se llama amplitud de un ángulo a la separación existente entre sus lados.
(4) El sistema a utilizar en la medición del ángulo es el Sistema Sexagesimal.

ÁNGULOS CONGRUENTES

Dos ángulos son congruentes cuando sus medidas son respectivamente iguales.

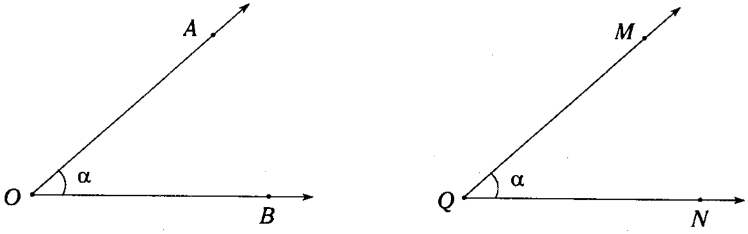


Figura 3.21

Si $\sphericalangle AOB$ es congruente con $\sphericalangle MQN$ ($\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle MQN$), entonces $m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle MQN = \alpha$.

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Es aquel rayo cuyo origen es el vértice de un ángulo, y sus demás puntos al estar en el interior del ángulo, forman con sus lados ángulos congruentes.

En la figura 3.22, P está en el interior de $\sphericalangle AOB$. De la figura, $m\sphericalangle AOP = m\sphericalangle POB = \theta$, si y solo si $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz de $\sphericalangle AOB$.

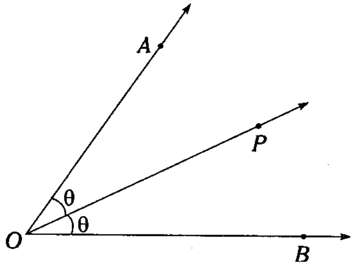


Figura 3.22

CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS

De acuerdo a su medida

Ángulo agudo. Es aquel ángulo cuya medida es mayor que 0°, pero menor que 90°.
Ángulo recto. Es aquel ángulo cuya medida es 90°.
Ángulo obtuso. Es aquel ángulo cuya medida es mayor que 90°, pero menor que 180°.

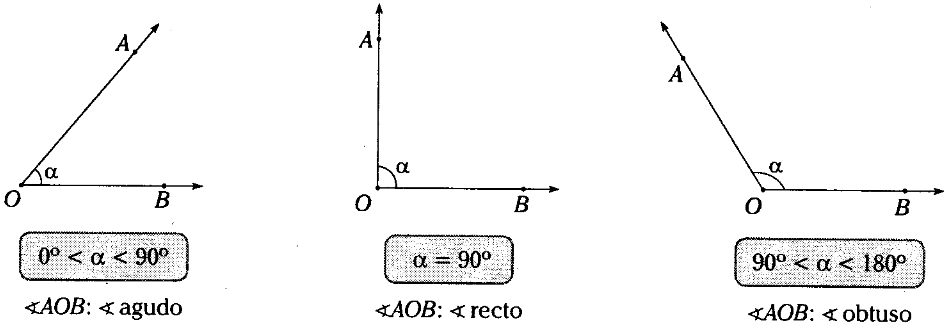


Figura 3.23

De acuerdo a la posición de sus lados

Ángulos adyacentes

Dos ángulos son adyacentes si tienen un lado común, sus interiores son disjuntos[5] y están contenidos en un mismo plano.

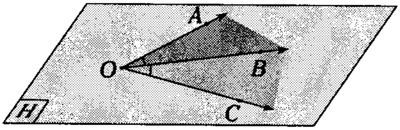


Figura 3.24

$\sphericalangle AOB \subset \square H$ y $\sphericalangle BOC \subset \square H$

Según la figura 3.24, $\sphericalangle AOB$ y $\sphericalangle BOC$ son adyacentes (el lado común es $\overrightarrow{OB}$).

Los ángulos AOB y AOC tienen un lado común $\overleftrightarrow{OA}$, pero no son adyacentes, ya que sus interiores no son disjuntos.

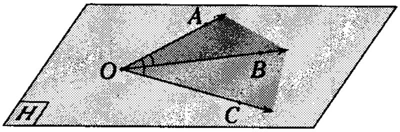


Figura 3.25

$\sphericalangle AOB \subset \square H, \sphericalangle AOC \subset \square H$

Sea:

$I_{(AOB)}$: Interior del $\sphericalangle AOB$

$I_{(AOC)}$: Interior del $\sphericalangle AOC$

Donde:

$I_{(AOB)} \cap I_{(AOC)} \neq \phi$, entonces sus interiores no son disjuntos.

Ángulos consecutivos

Son aquellos ángulos con el mismo vértice que están contenidos en un mismo plano, sus interiores son disjuntos que al ser tomados uno a continuación del otro presentan un lado común.

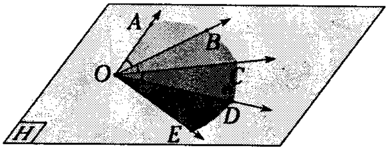


Figura 3.26

Los ángulos AOB, BOC, COD y DOE están contenidos en el plano H. Si sus interiores son disjuntos (no se intersecan) y están uno a continuación del otro, significa entonces que dichos ángulos son consecutivos.

Las copas de los árboles impiden el paso de los rayos del Sol en un bosque denso y aquellos que logran pasar a través de un claro forman ángulos consecutivos.

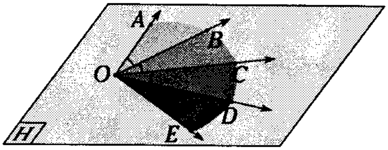
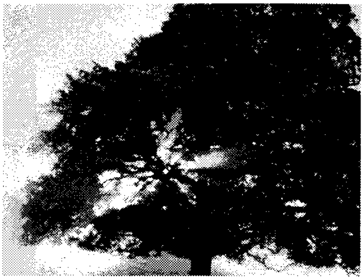


Figura 3.27

5 **Conjunto disjunto**: Un par de conjuntos cuya intersección resulta vacío.

Los ángulos *AOB*, *COD* y *EOF* están contenidos en el plano *H*, sus interiores son disjuntos y están uno a continuación del otro sin ser consecutivos. En la figura, se puede apreciar que $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle COD$ no presentan un lado en común.



La fotografía muestra cómo los rayos de luz atraviesan las hojas de los árboles y forman ángulos uno a continuación del otro, sin ser consecutivos.

Ángulos opuestos por el vértice

Son dos ángulos que tienen el mismo vértice en donde los lados de uno de ellos son los rayos opuestos del otro.

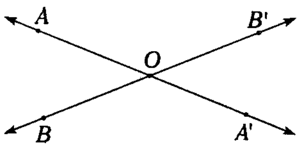


Figura 3.28

$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$; $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OB'}$: si son rayos opuestos, $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle A'OB'$ son ángulos opuestos por el vértice.

Nota

Dos rayos opuestos son aquellos que tienen el mismo origen y cuya reunión es una línea recta.

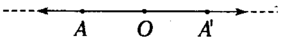


Figura 3.29

$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ son rayos opuestos.

PAR LINEAL

Si $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{OB}$ un rayo arbitrario, entonces los ángulos *AOB* y *BOA'* forman un par lineal.

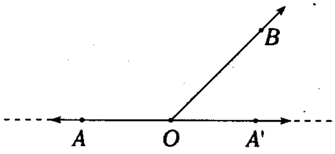


Figura 3.30

POSTULADO DEL PAR LINEAL

Si dos ángulos forman un par lineal, entonces la suma de sus medidas es 180°. Así en la figura 3.30, $m\measuredangle AOB + m\measuredangle BOA' = 180°$.

Teorema

Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes.

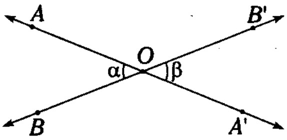


Figura 3.31

Si $m\measuredangle AOB$ y $m\measuredangle A'OB'$ son opuestos por el vértice, entonces:

$$\measuredangle AOB \cong \measuredangle A'OB' \rightarrow \alpha = \beta$$

Demostración

I. Si los ángulos AOB y BOA' forman un par lineal, $m\measuredangle AOB + m\measuredangle BOA' = 180°$.

II. Si los ángulos BOA' y $A'OB'$ forman un par lineal, $m\measuredangle BOA' + m\measuredangle A'OB' = 180°$

De (I) y (II), si se obtiene que

$$m\measuredangle AOB + m\measuredangle BOA' = m\measuredangle BOA' + m\measuredangle A'OB',$$

entonces $m\measuredangle AOB = m\measuredangle A'OB'$

$\therefore$ $\boxed{\measuredangle AOB \cong \measuredangle A'OB'}$ $\rightarrow$ $\boxed{\alpha = \beta}$ lqqd

Observación

Si prolongamos uno de los lados de un ángulo en sentido opuesto, entonces el $\measuredangle A'OB$ forma un par lineal con el $\measuredangle AOB$.

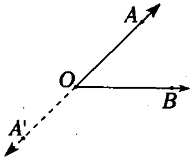
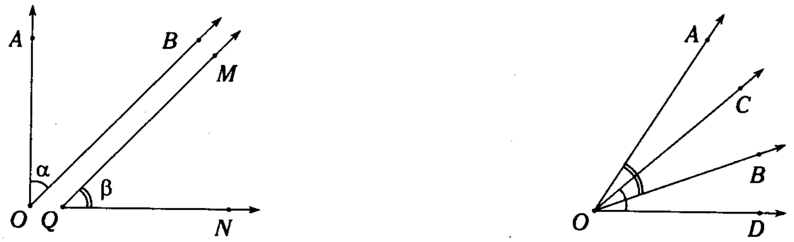


Figura 3.32

DE ACUERDO A LA SUMA DE SUS MEDIDAS

Ángulos complementarios

Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°.



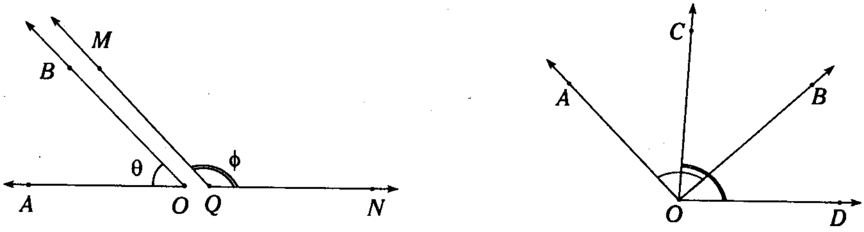
Si $m\measuredangle AOB + m\measuredangle MQN = 90°$,
$\rightarrow$ $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle MQN$ son complementarios.

Si $m\measuredangle AOB + m\measuredangle COD = 90°$,
$\rightarrow$ $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle COD$ son complementarios.

Figura 3.33

Ángulos suplementarios

Dos ángulos son suplementarios, si la suma de sus medidas es 180°.



Si $m\measuredangle AOB + m\measuredangle MQN = 180°$,
$\rightarrow$ $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle MQN$ son suplementarios.

Si $m\measuredangle AOB + m\measuredangle COD = 180°$,
$\rightarrow$ $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle COD$ son suplementarios.

Figura 3.34

Observación

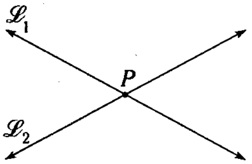
- $C(\alpha)$: Es la medida del ángulo complementario al ángulo de medida α ($0° < \alpha < 90°$).
  Así $C(\alpha) = \beta \rightarrow \alpha + \beta = 90°$
- $S(\theta)$: Es la medida del ángulo suplementario al ángulo de medida θ ($0° < \theta < 180°$).
  Así $S(\theta) = \phi \rightarrow \theta + \phi = 180°$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL PLANO

Dos rectas en un plano adoptan solo dos posiciones: secantes o paralelas.

Rectas secantes

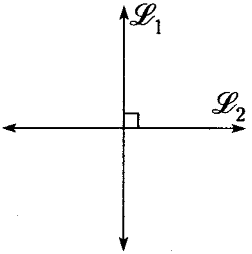
Son aquellas rectas que tienen un solo punto en común, al cual se denomina punto de intersección.



(a)

En la figura, se muestran las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ que tienen un punto común *P*; por lo tanto, dichas rectas son rectas secantes y *P* es el punto de intersección.

Si las rectas secantes determinan ángulos rectos, a dichas rectas se les denomina rectas perpendiculares.



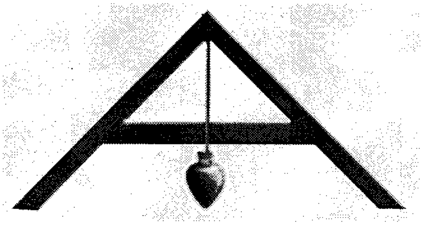
(b)

Figura 3.35

En la figura 3.35, si las rectas secantes $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ determinan cuatro ángulos rectos, implica que dichas rectas son perpendiculares.

Notación

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$



Plomada egipcia utilizada por los constructores egipcios para hallar la vertical al cortar o al colocar ladrillos y piedras. Las piedras de la gran pirámide tienen solo una variación media respecto a una línea recta de 0,25 mm y se unieron con una aproximación de 0,05 mm.

Rectas paralelas

Dos rectas coplanares, es decir, que están en un mismo plano, se denominan paralelas cuando dichas rectas no se intersecan. Por consiguiente, dichas rectas no tienen un punto en común.

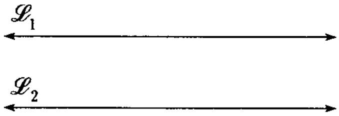


Figura 3.36

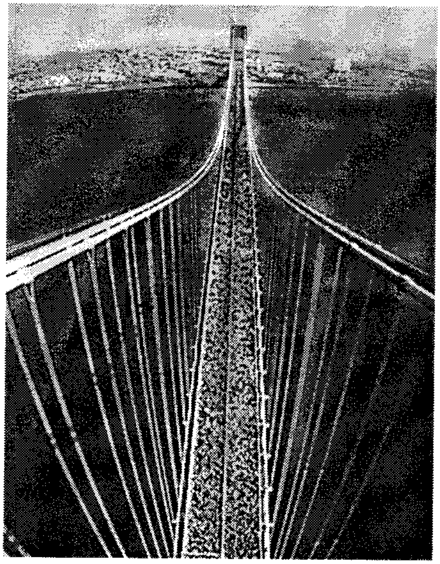
En la figura 3.36, si las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ no logran intersecarse, se denominan rectas paralelas.

Notación

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

Se lee: La recta $\mathscr{L}_1$ es paralela a la recta $\mathscr{L}_2$.

Los surcos de un sembrío están dispuestos en rectas paralelas pára su irrigación.



Los cables de acero del puente de Nueva York están dispuestos en forma paralela entre sí, pero perpendiculares al piso de dicho puente.

ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS Y UNA SECANTE A ELLAS

Dadas las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, se dice que la recta $\mathscr{L}$ es una secante a ellas cuando la recta $\mathscr{L}$ tiene un punto en común con cada una de las rectas.

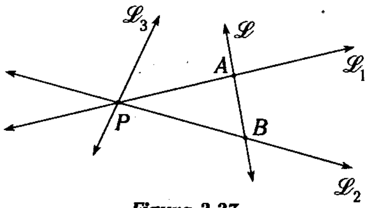


Figura 3.37

En la figura 3.37, las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son intersecadas por la recta $\mathscr{L}$ en los puntos A y B y por la recta $\mathscr{L}_3$ en el punto P.

Cuando una recta es secante a dos rectas cualesquiera, dicha recta forma con cada una de ellas cuatro ángulos.

REGIONES DETERMINADAS POR DOS RECTAS EN UN PLANO

Se tienen las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ contenidas en un plano P, tal que $A \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $B \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$. A la porción del plano P que contiene al segmento AB, excepto los extremos, se le denomina región interior entre las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ con respecto al $\overline{AB}$, mientras que a la porción del plano restante, excepto las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, se le denominará región exterior.

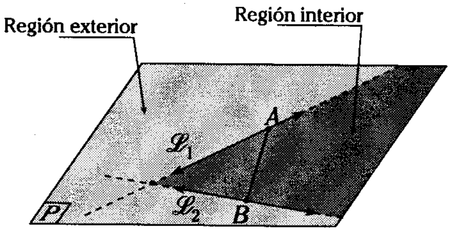


Figura 3.38

En la figura 3.38, se observan las regiones determinadas por dos rectas secantes con respecto al segmento AB.

Si las rectas fuesen paralelas, se obtendrían las mismas regiones con respecto a un segmento dado. En la figura 3.39, se muestran dichas regiones.

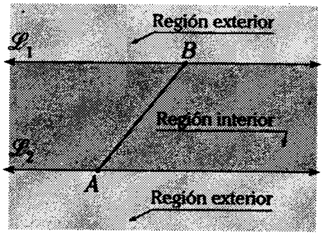


Figura 3.39

Importante

Semiplano

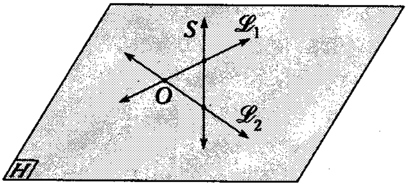
Es cada una de las porciones determinadas en un plano por cualquiera de las rectas contenidas en dicho plano.

Figura 3.40

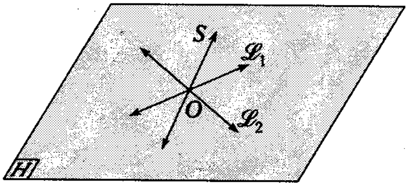
En la figura 3.40, se muestran el plano P y la recta $\overleftrightarrow{AB}$ contenida en ella, la cual determina dos semiplanos uno a cada lado de la recta.

RECTA SECANTE A DOS RECTAS COPLANARES

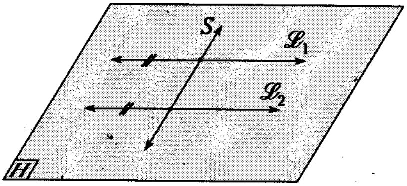
Dadas dos rectas contenidas en un plano, al trazar una tercera contenida en el mismo plano, que sea secante a las dos anteriores, se presentan los siguientes casos:



(a)



(b)



(c)

Figura 3.41

En la figura 3.41, se muestra $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \subset \square H$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \subset \square H$, donde S es la recta secante a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

Cuando una recta es secante a dos rectas coplanares en puntos diferentes, dicha recta forma con cada una de las rectas dadas cuatro ángulos.

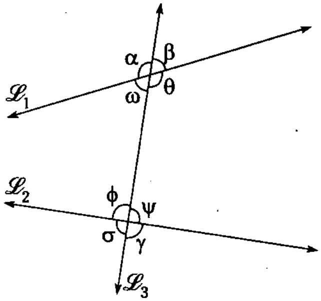


Figura 3.42

En la figura 3.42 se exponen los ángulos formados por la recta $\mathscr{L}_3$ al intersecar a las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

A los ángulos de medida ω, θ, ϕ, ψ se les denomina internos y a los de medida α, β, γ, σ externos; debido a la región donde se encuentran.

Ángulos alternos

Sean dos ángulos, ambos internos o externos, que son tomados uno por cada recta dada, cuyas regiones interiores de dichos ángulos están en diferentes semiplanos, es decir, sus interiores son disjuntos.

De la figura 3.42, θ y ϕ son las medidas de dos ángulos alternos internos, así como también lo son ω y ψ.

β y σ son las medidas de dos ángulos alternos externos, así como también lo son α y γ.

Ángulos correspondientes

Son dos ángulos, uno interno y el otro externo, tomados uno por cada recta dada, cuyas regiones interiores de dichos ángulos están en un mismo semiplano.

De la figura 3.42, β y ψ; α y ϕ; ω y σ; θ y γ son las medidas de dos ángulos correspondientes respectivamente.

Ángulos conjugados

Son dos ángulos, ambos internos o externos, tomados uno por cada recta dada, cuyas regiones interiores están en un mismo semiplano.

De la figura 3.42, θ y ψ son las medidas de dos ángulos conjugados internos; así como también lo son ω y ϕ, mientras que α y σ son las medidas de dos ángulos conjugados externos, así como también lo son β y γ.

Postulado de los ángulos correspondientes

Las medidas de dos ángulos correspondientes formados por una recta secante a dos rectas paralelas son iguales.

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 \rightarrow$ $\boxed{\alpha = \beta}$

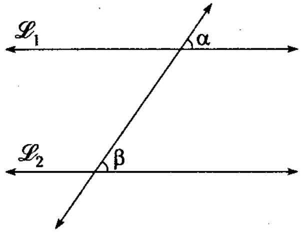
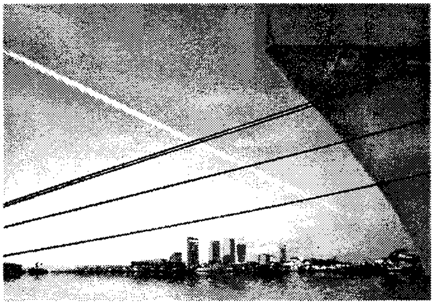


Figura 3.43

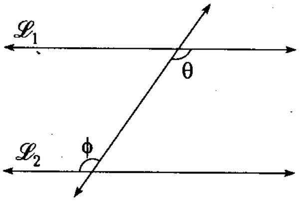


Una estela dejada por una nave, en el cielo pareciera intersecar a las amarras de un barco formando con ellas diversos tipos de ángulos.

Teorema

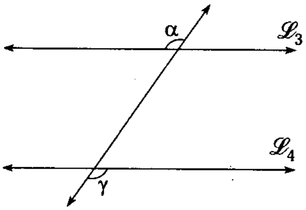
Los ángulos alternos (internos o externos) formados por una recta secante a dos rectas paralelas comparten la misma medida.

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \rightarrow \boxed{\theta = \phi}$



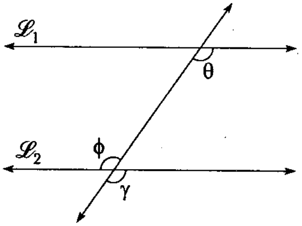
(a)

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4} \rightarrow \boxed{\alpha = \gamma}$



(b)

Demostración



(c)

Figura 3.44

En la figura, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\phi = \gamma$ son las medidas de dos ángulos opuestos por el vértice.

$\rightarrow \ \phi = \gamma$ (I)

Por el postulado de los ángulos correspondientes

$\gamma = \theta$ (II)

De (I) y (II)

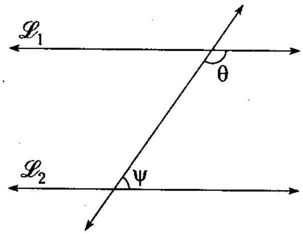
$\phi = \theta$ lqqd

En forma análoga se exhibe la congruencia de los ángulos alternos externos.

Teorema

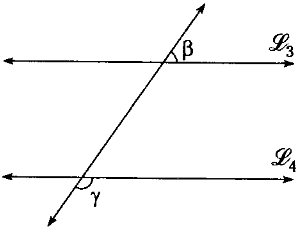
Los ángulos conjugados (internos y externos) formados por una recta secante a dos rectas paralelas son suplementarios.

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \rightarrow \boxed{\psi + \theta = 180°}$



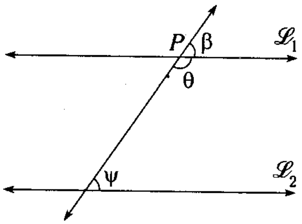
(a)

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4} \rightarrow \boxed{\beta + \gamma = 180°}$



(b)

Demostración



(c)

Figura 3.45

De la figura 3.45, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ β y ψ son las medidas de dos ángulos correspondientes, por el postulado correspondiente.

$\rightarrow\ \beta = \psi$ (I)

En P se observa que

$\beta + \theta = 180^o$ (II)

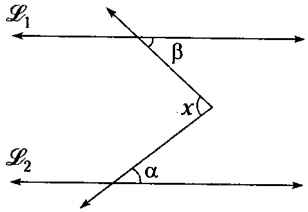
Reemplazando (I) en (II)

$\psi + \theta = 180^o$ lqqd

En forma análoga se demuestra que los ángulos conjugados externos son suplementarios.

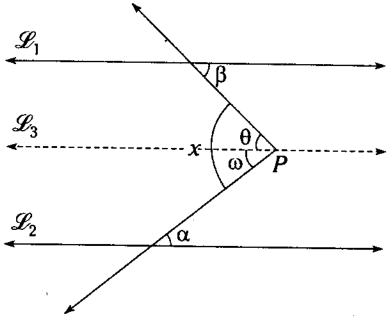
Propiedades

1. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ $\rightarrow$ $\boxed{x = \alpha + \beta}$



(a)

Demostración



(b)

Por P trazamos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ se observa que

$x = \theta + \omega$ (I)

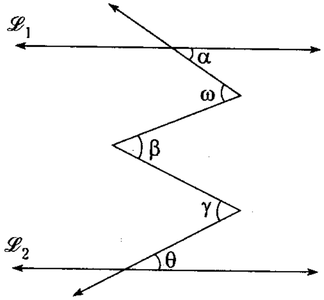
Por el teorema de los ángulos alternos

$\beta = \theta$ y $\alpha = \omega$ (II)

Reemplazando (II) en (I)

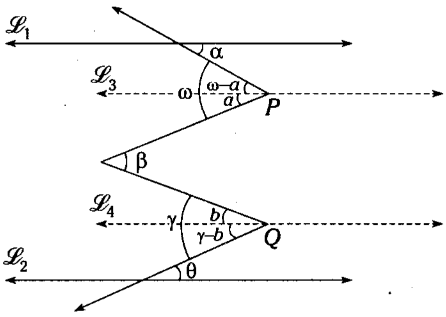
$x = \alpha + \beta$ lqqd

2. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ $\rightarrow$ $\boxed{\alpha + \beta + \theta = \omega + \gamma}$



(c)

Demostración



(d)

Figura 3.46

Por P y Q trazamos respectivamente $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$ // $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_4$ tal que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$ // $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_4$ // $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ // $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

Por la propiedad anterior

$\beta = a + b$ (I)

Por el teorema respecto a los ángulo alternos.

$\alpha = \omega - a$ (II)

$\theta = \gamma - b$ (III)

(II)+(III)

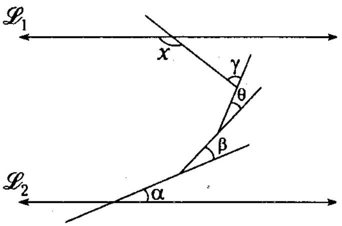
$\alpha + \theta = \omega + \gamma - (a+b)$ (IV)

(I) en (IV)

$\alpha + \theta = \omega + \gamma - \beta$

$\therefore \quad \alpha + \beta + \theta = \omega + \gamma$ l.q.q.d.

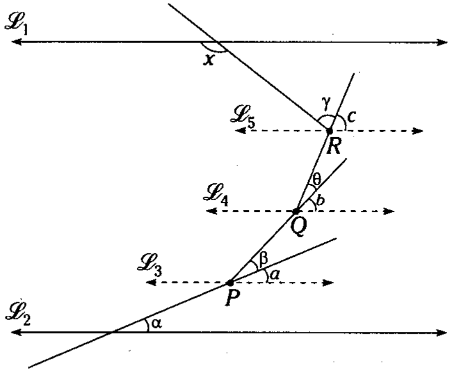
3. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ // $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$



(a)

$x = \alpha + \beta + \theta + \gamma$

Demostración



(b)

Figura 3.47

Por P, Q y R se trazan respectivamente $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_4$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_5$ tal que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$ // $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_4$ // $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_5$ // $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ // $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

Por el postulado de los ángulos correspondientes

$a = \alpha$ (I)

$b = \beta + a \;\rightarrow\; b = \beta + \alpha$ (II)

$c = \theta + b \;\rightarrow\; c = \theta + \beta + \alpha$ (III)

Por el teorema de los ángulos alternos

$x = \gamma + c$ (IV)

(III) en (IV)

$x = \gamma + \theta + \beta + \alpha$ lqqd

Observación

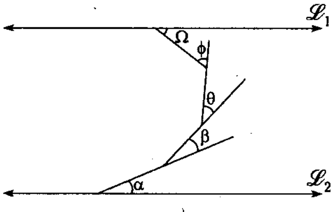


Figura 3.48

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ // $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

$\rightarrow$ $\alpha + \beta + \theta + \phi + \Omega = 180°$

PAR ANGULAR

Es la figura formada por un par de segmentos cuyo extremo es común y que no están en línea recta.

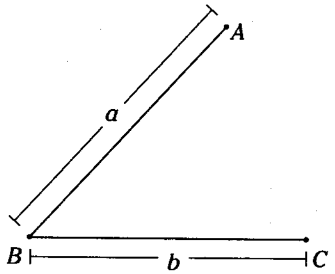


Figura 3.49

En la figura 3.49, se observa un par de segmentos AB y BC, de extremo común B, que forman el par angular ABC, donde A y C son los extremos libres.

Notación: $\angle ABC$
Par angular ABC de vértice B.

Los segmentos AB y BC son los lados del $\angle ABC$.

Los lados y el vértice constituyen los elementos del par angular.

En forma similar a un ángulo la letra intermedia de la notación corresponde al vértice.

La medida de un par angular es igual a la medida de la amplitud de sus lados (separación entre lados).

Observación

Todo par angular determina un ángulo y la medida del ángulo determinado es la medida del par angular.

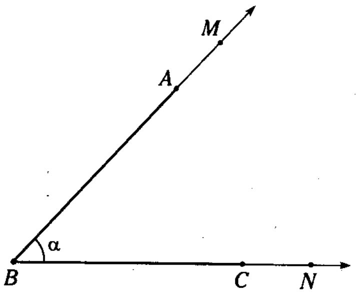


Figura 3.50

En la figura 3.50, el $\angle ABC$ determina $\measuredangle MBN$, si $\alpha = m\measuredangle MBN$
$\rightarrow \alpha = m\angle ABC$

MEDIDA LONGITUDINAL DE UN PAR ANGULAR

Es la suma de las longitudes de los lados de un par angular.

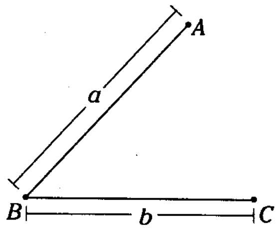


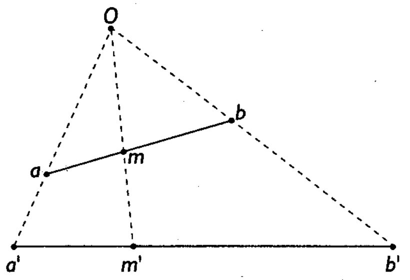
Figura 3.51

Si $AB = a$ y $BC = b$, entonces la longitud del $\angle ABC$ es igual a $AB + BC$.
Longitud $\angle ABC = a+b$

LECTURA

LA PARADOJA DE GALILEO

Se trata de la correspondencia entre el conjunto de los reales y los puntos de una recta, percibida por el sabio pisano Galileo en 1636. Consideremos dos fragmentos de línea recta: un segmento "corto" y un segmento "largo" (véase figura) y coloquemos en correspondencia biunívoca los puntos de la "línea larga" con los puntos de la "línea corta". Es evidente que cada punto *m* de esta última tiene su correspondiente *m*' en la primera y recíprocamente:



La paradoja de Galileo

Los dos conjuntos de puntos: [*a*; *b*] y [*a*'; *b*'] tienen la misma potencia: no hay "más" puntos en la línea larga que en la línea corta.

Esta paradoja fue resuelta por primera vez por Dedekind en 1872: una línea recta es más rica en puntos individuales que el conjunto de los números algebraicos en números distintos.

En otros términos, el conjunto de los puntos de una línea recta y el de los reales son equipotentes.

Así queda justificado el término "real" que atestigua la correspondencia entre el conjunto numérico considerado y un conjunto geométrico; así se explica también que se designe la potencia del conjunto *R* mediante la expresión "potencia del continuo". De esta manera, se termina la aritmetización de la geometría.

Equipotencia. Dos conjuntos *E* y *F* que pueden ser puestos en correspondencia biunívoca se llaman equipotentes.

FUENTE: Enciclopedia Temática, *Los números y el espacio (Matemáticas)*. Barcelona-España. Editorial Argos Vergara, S.A., 1970.

BIOGRAFÍA

EUCLIDES

No hay mayores datos sobre su vida, pero se sabe que vivió en Alejandría, Egipto, alrededor del año 300 a.n.e, donde fue llamado para enseñar matemática en el Instituto creado por Ptolomeo I. Fue autor de alrededor de una docena de tratados que reflejó su erudición sobre temas tan variados como astronomía, mecánica, óptica, música y por supuesto, matemática. En los *Elementos*, obra compuesta de 13 libros, intenta desarrollar la geometría estableciendo primero definiciones y postulados a partir de los cuales obtienen las proposiciones con razonamientos rigurosos desde el punto de vista lógico.

En los libros I a IV establece propiedades de polígonos, círculos y construcciones referidas a dichas figuras.

En el libro V desarrolla la teoría de las proposiciones que luego utiliza en el libro siguiente para el tratamiento de figuras semejantes.

Los libros VII, VIII y IX están dedicados a los números naturales y racionales positivos, representa a los naturales por segmentos de recta y al producto de dos naturales por un rectángulo. Sin embargo, el desarrollo de estos capítulos es aritmético, no geométrico, ya en el libro X, trata los irracionales e intenta una clasificación de los mismos.

Los tres últimos libros están dedicados a la geometría del Espacio, aunque también hay algunos resultados de geometría plana, solo en el último comprueba las propiedades de números cuadrados, cúbicos, etc. y la famosa proposición que expresa la existencia de infinitos primos. Con el método de exhausión de Eudoxo, define poliedros regulares, diedros, esfera y cono, además logra calcular razones entre área y volúmenes.

Desde la primera impresión de los *Elementos*, acaecida en Venecia en 1482, ha aparecido tal cantidad de reimpresiones que posiblemente solo ha podido ser superada por la Biblia.

Problemas Resueltos

Problema 1

En una línea recta, se ubican los puntos consecutivos A, B y C, tal que $2(AC)=3(AB)$ y $BC=6$. Calcule AC.

A) 20 B) 18 C) 14
D) 12 E) 16

Resolución

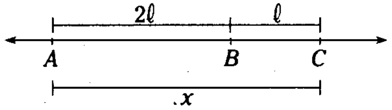


Figura 3.52

Piden $AC=x$.
Dato:
Si $2(AC)=3(AB)$, entonces $AC=3\ell$ y $AB=2\ell$, de donde $BC=\ell$
Dato:

$BC=6 \rightarrow \ell=6$
$x=3\ell$
$\therefore\ x=18$

CLAVE B

Problema 2

Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D, E, tal que $AC=CE$, $AB+CD=16$ y $DE-BC=4$. Calcule CD.

A) 12 B) 10 C) 8
D) 6 E) 4

Resolución

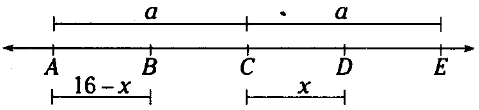


Figura 3.53

Piden $CD=x$
Dato:

$AC=CE=a$ y $AB+CD=16$
$\rightarrow AB=16-x$

también $DE-BC=4$ (I)
Reemplazando en (I) con ayuda de la figura

$(a-x)-[a-(16-x)]=4$
$\not{a}-x-\not{a}+16-x=4$
$12=2x$
$\therefore\ x=6$

CLAVE D

Problema 3

En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D de modo que M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{BM}$ y $\overline{NC}$, si $AC+BD=\ell$.

A) ℓ B) $\frac{\ell}{4}$ C) $\frac{3\ell}{2}$
D) $\frac{4\ell}{3}$ E) $\frac{\ell}{3}$

Resolución

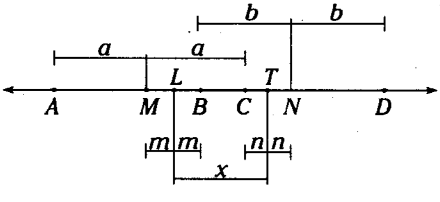


Figura 3.54

L : punto medio de $\overline{MB}$
T : punto medio de $\overline{CN}$
Piden $LT=x$
Dato:

$AC+BD=\ell \rightarrow 2a+2b=\ell$

$a+b=\frac{\ell}{2}$ (I)

De la figura

$$x = m + b - n \qquad \text{(II)}$$

$$x = n + a - m \qquad \text{(III)}$$

(II) + (III)

$$2x = a + b$$

En (I) $\quad 2x = \dfrac{\ell}{2}$

$$\therefore \quad x = \frac{\ell}{4}$$

CLAVE B

Problema 4

En una línea recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que

$$4(AB)(CD) = (BC)(AD) \text{ y } \frac{1}{10} = \frac{4}{AD} + \frac{1}{AB}.$$

Calcule AC.

A) 40 B) 30 C) 50
D) 45 E) 60

Resolución

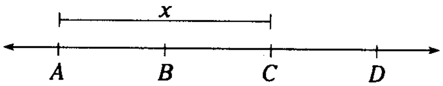


Figura 3.55

Piden $AC = x$

Dato

$$4(AB)(CD) = (BC)(AD) \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{4}{AD} + \frac{1}{AB} \qquad \text{(II)}$$

De la figura 3.55

$$CD = AD - x; \; BC = x - AB$$

En (I)

$$4(AB)(AD - x) = (x - AB)(AD)$$

$$4(AB)(AD) - 4(AB)x = x(AD) - (AB)(AD)$$

$$5(AB)(AD) = x(4(AB) + AD)$$

$$\rightarrow \frac{5}{x} = \frac{4(AB) + AD}{(AB)(AD)}$$

$$\rightarrow \frac{5}{x} = \frac{4}{AD} + \frac{1}{AB} \qquad \text{(III)}$$

Comparando (II) y (III)

$$\frac{1}{10} = \frac{5}{x}$$

$$\therefore \quad x = 50$$

CLAVE C

Problema 5

En una recta se ubican los puntos A, B, C y D tal que $AB=1$ y $BD=2$. Si los segmentos AB, BC y CD son los lados de un triángulo, calcule el valor entero de BC.

A) 3 B) 4 C) 2
D) 1 E) 6

Resolución

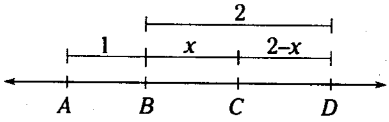


Figura 3.56

Piden $BC_{\text{entero}} = x$

Se observa

$$CD = 2 - x$$

$$\rightarrow \; 2 - x > 0 \; \rightarrow \; x < 2 \qquad \text{(I)}$$

Por dato, en el $\triangle ABC$

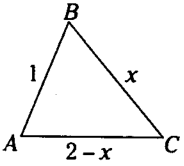


Figura 3.57

Por existencia

$$2 - x < x + 1$$

$$x > 0{,}5 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$0{,}5 < x < 2$$

$$\therefore \; x = BC_{\text{entero}} = 1$$

CLAVE D

Problema 6

Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D y E tal que $\dfrac{AC+BD+CE}{2(AE)-AB-DE}=2^{n+1}$. Calcule n.

A) 3 B) 2 C) 1
D) 0 E) −1

Resolución

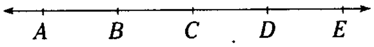


Figura 3.58

Piden n

Donde

$$\frac{AC+BD+CE}{2(AE)-AB-DE}=2^{n+1}$$

De la figura 3.58

$$AE=AB+BC+CD+DE$$

$$\frac{AC+BD+CE}{2(AB+BC+CD+DE)-AB-DE}=2^{n+1}$$

$$\frac{AC+BD+CE}{AB+BC+BC+CD+CD+DE}=2^{n+1}$$

De la figura, además

$$AC=AB+BC;\ BD=BC+CD \text{ y } CE=CD+DE$$

Reemplazando en el denominador

$$\rightarrow \frac{AC+BD+CE}{AC+BD+CE}=2^{n+1}$$

Luego

$$1=2^{n+1}$$

$$1=2^0=2^{n+1}$$

$$\rightarrow n+1=0$$

$$\therefore\ n=-1$$

CLAVE E

Problema 7

En una recta se ubican los puntos A, B, C y D, tal que C es punto medio de $\overline{BD}$.
Si $4(AB)(AD)=28-(BD)^2$, calcule AC.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$
D) 3 E) $\sqrt{11}$

Resolución

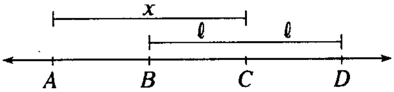


Figura 3.59

Piden $AC=x$

Dato

$$4(AB)(AD)=28-(BD)^2$$

Reemplazando

$$4(x-\ell)(x+\ell)=28-(2\ell)^2$$

$$4(x^2-\ell^2)=28-4\ell^2$$

$$4x^2-\cancel{4\ell^2}=28-\cancel{4\ell^2}$$

$$4x^2=28$$

$$\therefore\ x=\sqrt{7}$$

CLAVE C

Problema 8

En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D y E, de modo que AB, BC, CD y ED están en progresión geométrica. Si $AE=8$, calcule $\dfrac{(AC)(AB+CD)}{AB}$.

A) 4 B) 16 C) 32
D) 8 E) 2

Resolución

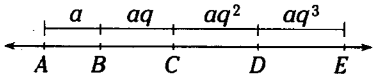


Figura 3.60

Piden

$$\frac{(AC)(AB+CD)}{AB} \qquad \text{(I)}$$

Estableciendo la progresión geométrica

Si $AB=a$ y razón geométrica: q

$\rightarrow$ $BC=aq$; $CD=aq^2$ y $DE=aq^3$

Dato

$$AE=8$$

$$\rightarrow a+aq+aq^2+aq^3=8$$

$$a(1+q+q^2+q^3)=8$$

$$a(1+q)(1+q^2)=8 \qquad \text{(II)}$$

En (I)

$$\frac{(AC)(AB+CD)}{AB}=\frac{(a+aq)(a+aq^2)}{a}$$

$$\frac{(AC)(AB+CD)}{AB}=\frac{a^2(1+q)(1+q^2)}{a}$$

$$\rightarrow \frac{(AC)(AB+CD)}{AB}=a(1+q)(1+q^2) \qquad \text{(III)}$$

(II) en (III)

$$\therefore \frac{(AC)(AB+CD)}{AB}=8$$

CLAVE D

Problema 9

¿En cuánto excede el suplemento de la suma del suplemento del complemento de un ángulo con la tercera parte del complemento del triple de dicho ángulo, a la diferencia del complemento de otro ángulo con la quinta parte del suplemento del quíntuplo de dicho ángulo?

A) 8° B) 3° C) 12°
D) 6° E) 5°

Resolución

Sean α y β las medidas de los ángulos mencionados.

Piden

$$E=\underbrace{S\left(SC(\alpha)+\frac{C(3\alpha)}{3}\right)}_{A}-\underbrace{\left(C\beta-\frac{S(5\beta)}{5}\right)}_{B}$$

$$A=180^\circ-\left[180^\circ-(90^\circ-\alpha)+\frac{90^\circ-3\alpha}{3}\right]=60^\circ$$

$$B=90^\circ-\beta-\left(\frac{180^\circ-5\beta}{5}\right)=54^\circ$$

$$E=60^\circ-54^\circ$$

$$\therefore E=6^\circ$$

CLAVE D

Problema 10

El suplemento de la diferencia entre el suplemento y el complemento del complemento de un ángulo es igual al complemento de la diferencia entre el complemento del complemento y suplemento del mismo ángulo. Calcule el suplemento del doble del ángulo.

A) 56° B) 45° C) 55°
D) 70° E) 60°

Resolución

Sea α la medida del ángulo. Piden $S(2\alpha)$.

Del enunciado

$$S(S(\alpha)-CC(\alpha))=C(CC(\alpha)-S(\alpha))$$

$$180^\circ-(180^\circ-\alpha-\alpha)=90^\circ-[(\alpha)-(180^\circ-\alpha)]$$

$$180^\circ-(180^\circ-2\alpha)=90^\circ-(\alpha-180^\circ+\alpha)$$

$$2\alpha=90^\circ-(2\alpha-180^\circ)$$

$$2\alpha=90^\circ-2\alpha+180^\circ$$

$$\alpha=\frac{270^\circ}{4}=\frac{135^\circ}{2}$$

$$\therefore S\left(2\left(\frac{135^\circ}{2}\right)\right)=S(135^\circ)=45^\circ$$

CLAVE B

Problema 11

Se tiene los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC* y *COD* tal que la m∢*AOB*=18° y la m∢*COD*=24°. Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos *AOC* y *BOD*.

A) 6° B) 12° C) 21°
D) 25° E) 33°

Resolución

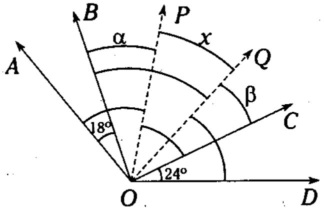


Figura 3.61

Piden x.

De la figura 3.61

$\overrightarrow{OP}$: bisectriz del ∢*AOC*

$\overrightarrow{OQ}$: bisectriz del ∢*BOD*

m∢*BOP* = α, m∢*QOC* = β

Se observa ∢*AOC*: $18° + \alpha = x + \beta$ (I)

Se observa ∢*BOD*: $24° + \beta = x + \alpha$ (II)

Sumando (I)+(II)

$42° = 2x$

$\therefore\ x = 21°$

CLAVE C

Problema 12

Se tienen los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC* y *COD*, tal que 2(m∢*BOD*)+2(m∢*COD*)=3m∢*BOC*. Si m∢*AOB*=α y m∢*AOC*=β, calcule m∢*AOD*.

A) $\dfrac{5\beta+\alpha}{2}$ B) $\dfrac{5(\beta+\alpha)}{4}$ C) $\dfrac{4(\beta+\alpha)}{3}$

D) $\dfrac{5\beta-\alpha}{4}$ E) $\dfrac{4\beta-\alpha}{3}$

Resolución

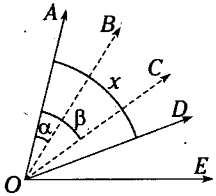


Figura 3.62

Exigen x.

Del enunciado

$2(x-\alpha)+2(x-\beta)=3(\beta-\alpha)$

$2x-2\alpha+2x-2\beta=3\beta-3\alpha$

$4x=5\beta-\alpha$

$\therefore\quad x=\dfrac{5\beta-\alpha}{4}$

CLAVE D

Problema 13

Se tienen los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC*, *COD* y *DOE*, tal que *A*, *O* y *E* son colineales. Si m∢*BOE* = m∢*AOB*+m∢*COD* y la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos *BOC* y *DOE* es 60°, calcule m∢*AOB*.

A) 60° B) 80° C) 75°
D) 70° E) 50°

Resolución

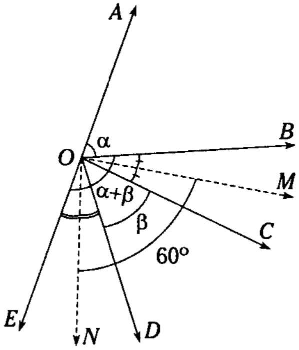


Figura 3.63

Solicitan m∢*AOB* = α.

De la figura 3.63

$\overrightarrow{OM}$: bisectriz del $\sphericalangle BOC$

$\overrightarrow{ON}$: bisectriz del $\sphericalangle DOE$

Sea $m\sphericalangle COD=\beta$

Del dato: $m\sphericalangle BOE=\alpha+\beta$

Se observa de la figura

$2\alpha+\beta=180°$ (I)

$m\sphericalangle EOD+\beta+m\sphericalangle COB=\alpha+\beta$

$\rightarrow\ m\sphericalangle EOD+m\sphericalangle COB=\alpha$

De las bisectrices

$$m\sphericalangle NOD=\frac{(m\sphericalangle EOD)}{2}$$

$$m\sphericalangle COM=\frac{(m\sphericalangle COB)}{2}$$

En el $\sphericalangle MON$: $m\sphericalangle NOD+\beta+m\sphericalangle COM=60°$

$\frac{\alpha}{2}+\beta=60°$ (II)

(I) – (II)

$2\alpha-\frac{\alpha}{2}=120°$

$\therefore\ \alpha=80°$

CLAVE B

Problema 14

Se presentan los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC* y *COD*, tal que los ángulos *AOB* y *COD* son complementarios. Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos *AOC* y *BOD*.

A) 30° B) 40° C) 50°
D) 45° E) 35°

Resolución

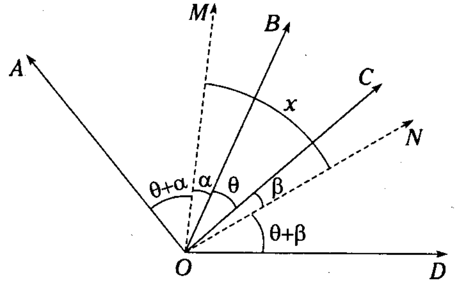


Figura 3.64

Piden $m\sphericalangle MON=x$.

De la figura 3.64

$\overrightarrow{OM}$: bisectriz del $\sphericalangle AOC$

$\overrightarrow{ON}$: bisectriz del $\sphericalangle BOD$

Sea $m\sphericalangle MOB=\alpha$

$m\sphericalangle BOC=\theta$

$m\sphericalangle CON=\beta$

Se observa $x=\alpha+\theta+\beta$ (I)

Del enunciado

$(\theta+2\alpha)+(\theta+2\beta)=90°$

$\theta+\alpha+\beta=45°$ (II)

Entonces de (I) y (II)

$\therefore\ x=45°$

CLAVE D

Problema 15

Dados los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC* y *COD*, tal que $m\sphericalangle AOC<90°$, con centro en *O*. Se hace girar los ángulos una medida de 90°, de modo que las nuevas posiciones de *A*, *B* y C son *A'*, *B'* y *C'* y $m\sphericalangle AOC=\beta$. Si $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo *COA'*, calcule $m\sphericalangle C'OM$.

A) $45°-\frac{\beta}{2}$ B) $30°+\frac{\beta}{2}$ C) $45°+\frac{\beta}{2}$

D) $60°-\frac{\beta}{2}$ E) $30°-\frac{\beta}{2}$

Resolución

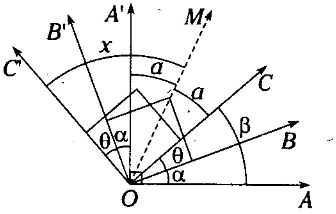


Figura 3.65

Solicitan $m\sphericalangle C'OM=x$. De la figura 3.65

$\alpha+\theta=\beta$ (I)

$\alpha+\theta+2\alpha=90°$ (II)

Sumando (I) y (II)

$2x=90°+\beta$

$\therefore\ x=45°+\frac{\beta}{2}$

CLAVE C

Problema 16

Se tienen los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, tal que m∢*AOB* = 20°, m∢*BOD* = m∢*DOE* y m∢*COE* = m∢*BOC* + m∢*BOD* = 90°. Calcule m∢*AOC*.

A) 48° B) 50° C) 52°
D) 54° E) 58°

Resolución

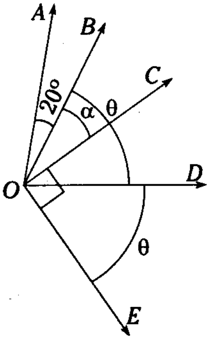


Figura 3.66

Piden m∢*AOC*

Sean m∢*BOC* = α

m∢*BOD* = θ

Del enunciado

$\alpha+\theta=90°$ (I)

Se observa

$2\theta=90°+\alpha$ (II)

Sumando (I) y (II)

$2\theta+\theta=180°$

$\theta=60°$ y $\alpha=30°$

m∢*AOC* = 50°

CLAVE B

Problema 17

Se tienen los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC* y *COD*, tal que m∢*AOB* − m∢*COD* = 16°. Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos *AOD* y *BOC*.

A) 5° B) 6° C) 7°
D) 8° E) 10°

Resolución

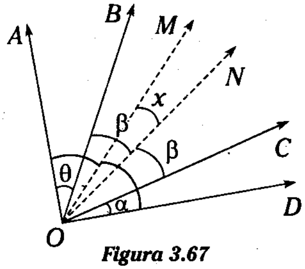


Figura 3.67

Piden m∢*MON* = *x*

Sean m∢*AOB* = θ

m∢*COD* = α

m∢*BON* = m∢*NOC* = β

→ del dato $\theta-\alpha=16°$

Como

$\overrightarrow{OM}$: bisectriz ∢*AOD*

$$m∢AOM = m∢MOD = \frac{\theta+2\beta+\alpha}{2}$$

Se observa

$$x=\beta+\theta-m∢AOM$$

$$x=\beta+\theta-\left(\frac{\theta+2\beta+\alpha}{2}\right)$$

$$x=\frac{2\beta+2\theta-\theta-2\beta-\alpha}{2}=\frac{\theta-\alpha}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{16}{2}=8°$$

CLAVE D

Problema 18

Se tienen los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC* y *COD*, tal que los ángulos *AOC* y *BOD* son suplementarios. Si la m∢*AOB* = 2(m∢*COD*) y m∢*BOC* = 42°, calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos *AOB* y *COD*.

A) 90° B) 94° C) 98°
D) 100° E) 104°

Resolución

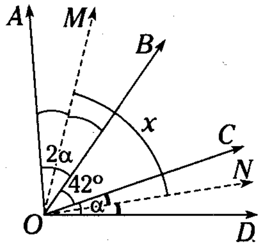


Figura 3.68

Piden $m\sphericalangle MON = x$

Sea $m\sphericalangle COD = \alpha$

$\rightarrow$ del dato $m\sphericalangle AOB = 2\alpha$

De la figura 3.68

$\overrightarrow{OM}$: bisectriz $\sphericalangle AOB$

$\overrightarrow{ON}$: bisectriz $\sphericalangle COD$

Del enunciado ($\sphericalangle AOC$ y $\sphericalangle BOD$: son suplementarios)

$$2\alpha + 42° + 42° + \alpha = 180°$$

$$3\alpha + 84° = 180°$$

$$\alpha = 32°$$

Se observa

$$x = \alpha + 42° + \frac{\alpha}{2}$$

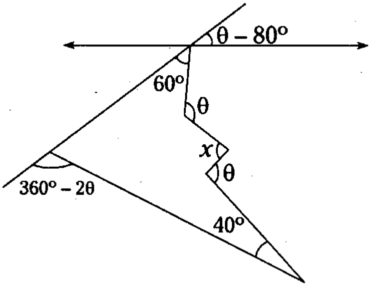
$$x = 32° + 42° + 16°$$

$$\therefore \; x = 90°$$

CLAVE A

Problema 19

Según la figura, calcule x.



A) 70° B) 80° C) 90°
D) 100° E) 110°

Resolución

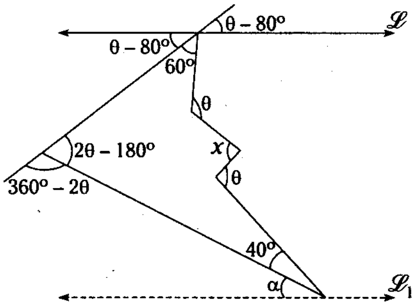


Figura 3.69

Exigen x.

Se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \mathscr{L}$

De la figura 3.69

$$\theta - 80° + \alpha = 2\theta - 180°$$

$$\alpha = \theta - 100° \qquad \text{(I)}$$

Por propiedad

$$\theta - 80° + 60° + x + 40° + \alpha = \theta + \theta$$

$$20° + x + \alpha = \theta \qquad \text{(II)}$$

(I) en (II)

$$20° + x + \theta - 100° = \theta$$

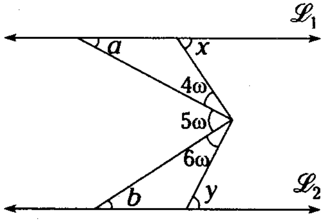
$$\therefore \; x = 80°$$

CLAVE B

Problema 20

En la figura, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

Si $a + b = 40°$, calcule $x + y$.



A) 105° B) 110° C) 115°
D) 120° E) 128°

Resolución

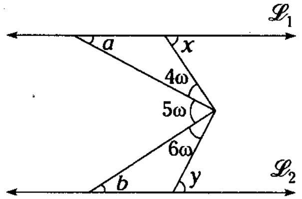


Figura 3.70

Piden $x+y$

Dato: $a+b=40°$

Por propiedad

$$x+y=4\omega+5\omega+6\omega$$

$$x+y=15\omega \qquad \text{(I)}$$

Se observa

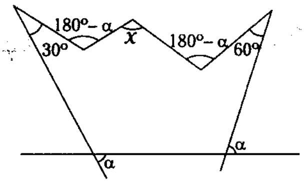
$$a+b=5\omega \rightarrow \omega=8°$$

$$\rightarrow x+y=120°$$

CLAVE D

Problema 21

Según la figura, calcule x.



A) 72° B) 82° C) 90°
D) 96° E) 100°

Resolución

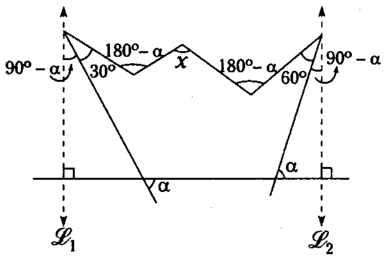


Figura 3.71

Piden x.

Se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, para aplicar la propiedad

$$120°-\alpha+x+150°-\alpha=180°-\alpha+180°-\alpha$$

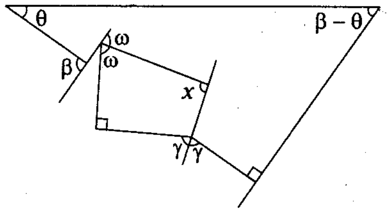
$$270°+x=360°$$

$$\therefore\ x=90°$$

CLAVE C

Problema 22

Según la figura, calcule x.



A) 80° B) 120° C) 110°
D) 90° E) 105°

Resolución

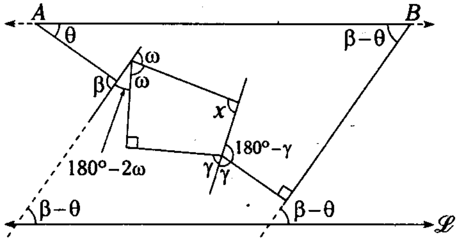


Figura 3.72

Piden x. Se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \,//\, \overline{AB}$

Por propiedad

- $\omega+180-\gamma=x+90°$ (I)
- $180-2\omega+2\gamma=90°+90°$

  $2\gamma=2\omega \rightarrow \gamma=\omega$

Reemplazando en (I)

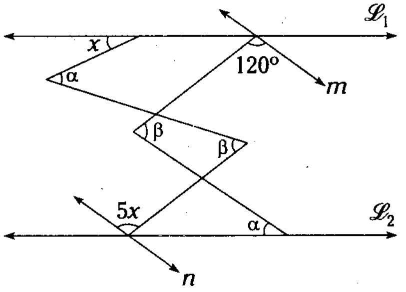
$$\gamma+180°-\gamma=x+90°$$

$$\therefore\ x=90°$$

CLAVE D

Problema 23

En la figura, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n}$. Calcule x.



A) 18° B) 20° C) 22°
D) 24° E) 26°

Resolución

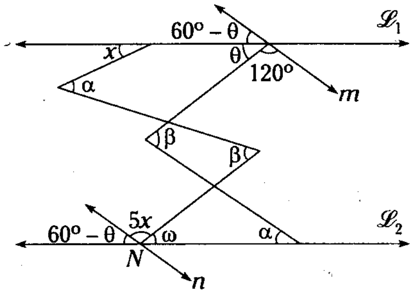


Figura 3.73

Piden x.
De la figura 3.73

$\beta = \theta + \alpha$ (I)

se observa

$\alpha + \omega = x + \beta$ (II)

Sumando (I) y (II)

$\omega = x + \theta$ (III)

Debido a que $\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, los ángulos determinados por dichas rectas tendrán igual medida e igual a $60° - \theta$

Del punto N

$60° - \theta + 5x + \omega = 180°$ (IV)

Reemplazando (III) en (IV)

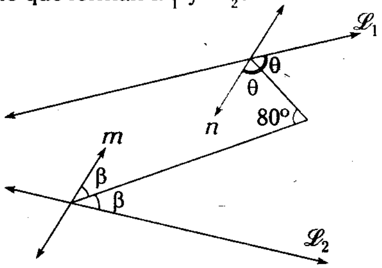
$60° - \theta + 5x + (x + \theta) = 180°$

$\therefore \; x = 20°$

CLAVE B

Problema 24

Según la figura, $\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n}$. Calcule la medida del ángulo que forman $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.



A) 30° B) 25° C) 20°
D) 18° E) 15°

Resolución

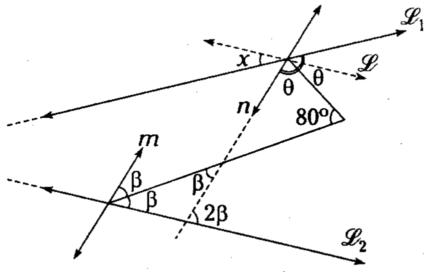


Figura 3.74

Piden x. Se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

Propiedad: $2\theta - x + 2\beta = 180°$ (I)

Por teorema de los ángulos conjugados

$\theta - x + \beta = 80°$

Multiplicando por 2

$2\theta - 2x + 2\beta = 160°$ (II)

(I) – (II)

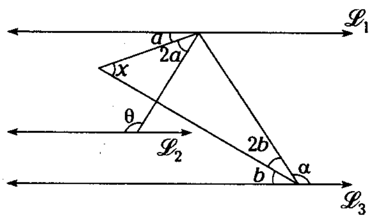
$-x - (-2x) = 180° - 160°$

$\therefore \; x = 20°$

CLAVE C

Problema 25

De la figura, $\alpha+\theta<238°$. Calcule el mínimo entero de x.



A) 37° B) 38° C) 39°
D) 40° E) 41°

Resolución

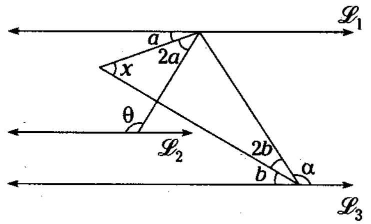


Figura 3.75

Piden el mínimo valor entero de x.

Dato: $\alpha+\theta<238°$

De $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}: x=a+b$

De $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}: \theta+3a=180°$ (I)

De $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$: $\alpha+3b=180°$ (II)

Sumando (I) y (II)

$\theta+\alpha+3(a+b)=360°$

Reemplazando en el dato

$360°-3(a+b)<238°$

$122°<3x$

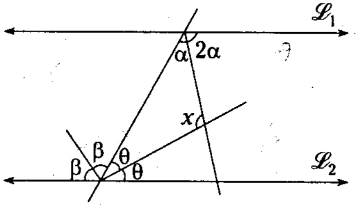
$40,6°<x$

$\therefore\ x_{mín}=41°$

CLAVE E

Problema 26

Según la figura, $2\alpha-\beta>38°$. Calcule el mínimo entero de x.



A) 112° B) 119° C) 129°
D) 132° E) 138°

Resolución

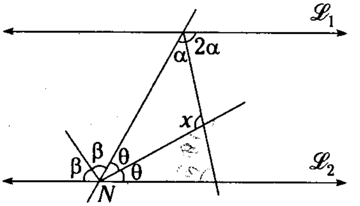


Figura 3.76

Piden el mínimo entero de x.

Dato:

$2\alpha-\beta>38°$

Se observa por propiedad

$x=2\alpha+\theta$ (I)

En el punto N

$\beta+\theta=90°$ (II)

Sumando (I)+(II)

$x+\beta=2\alpha+90°$

$x-90°=2\alpha-\beta$

Reemplazando en el dato

$x-90°>38°$

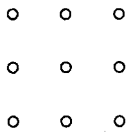
$x>128°$

$\therefore\ x_{mín}=129°$

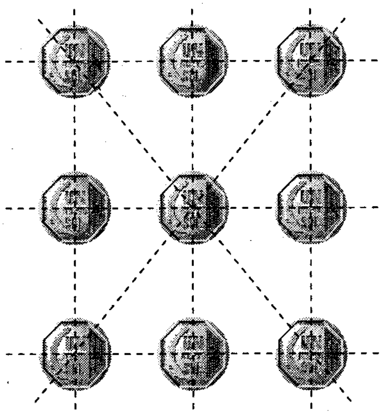
CLAVE C

Problemas Recreativos

1. Dibuje cuatro líneas conectadas que pasen por todos los puntos, sin que el trazo vuelva a pasar sobre la trayectoria que se dibujó.

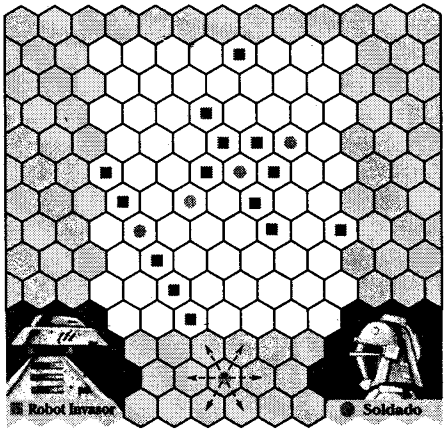


2. **Monedas en línea**
Hemos cogido nueve monedas y las hemos colocado tal como se indica en la figura, de manera que hay ocho posibles alineaciones de tres monedas (tres horizontales, tres verticales y dos diagonales).



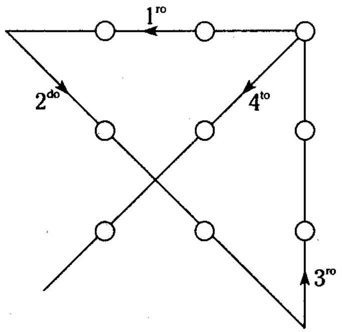
   I. Cambiando únicamente dos monedas de posición, consiga una formación donde haya diez posibles alineaciones de tres monedas.
   II. Con 16 monedas (4×4) y cambiando únicamente dos monedas de posición, consiga una formación donde haya once alineaciones de cuatro monedas.

3. **Defendamos a Zarf**



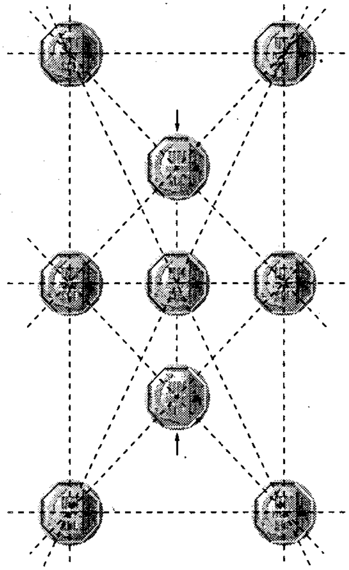
El planeta Zarf se defiende de una invasión de robots extraterrestres.
En un rincón remoto, cuatro de sus bravos soldados están rodeados por un escuadrón de 14 máquinas enemigas.
Los soldados solo pueden hacer dos disparos de su cañón láser y un defecto en su diseño permite desactivarlos con una descarga del rayo, mas si alguno recibe otro impacto, se reactivará. Cada uno de los disparos describe una trayectoria en línea recta en alguna de las seis direcciones hexagonales que se muestran en el extremo inferior de la figura inutilizando a todos los invasores que se encuentra a su paso, y para evitar que regresen al combate, los soldados tienen instrucciones de no *herir* a ningún robot por segunda vez.
¿Sería capaz de determinar en qué dirección debe apuntar cada defensor del acosado planeta Zarf?

Resolución 1

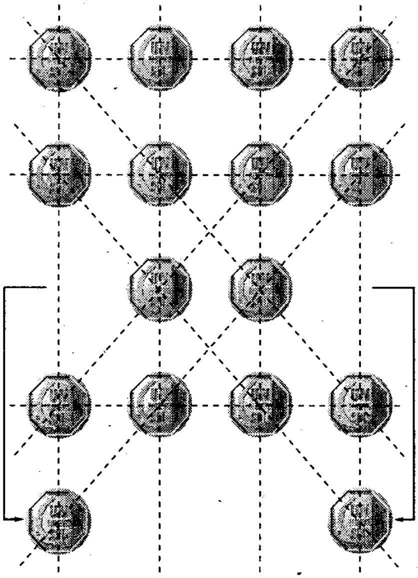


Resolución 2

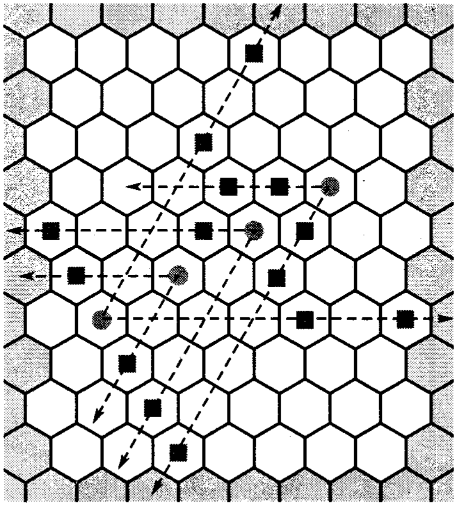
I. Tres verticales, 1 horizontal, 4 inclinadas 45° y 2 inclinadas 53/2°.



II. Tres horizontales, 4 verticales y 4 diagonales.



Resolución 3



Problemas Propuestos

1. Sean los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D y E, tal que $AB + CD = 3(BC)$ y $DE = AB$. Si luego se ubica el punto medio de M de $\overline{BE}$, donde $MD = 2$ y $AE = 16$, calcule MC.

   A) 2 B) 3 C) 4
   D) 5 E) 6

2. En una recta, se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D. Si se cumple que la relación $4(AB) - BD - 2(CD) = 4$, $AB = 3$ y $AC = 5$, calcule AD.

   A) 2 B) 3 C) 5
   D) 7 E) 9

3. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que
   $(AB)(CD) = (AD)(BC)$,
   $(BC)(CD) = 28$ y
   $CD - BC = 7$
   Calcule AC.

   A) 2 B) 6 C) 8
   D) 10 E) 12

4. Sobre una recta, se ubican los puntos consecutivos M, A y B, siendo O el punto medio de $\overline{AB}$. Calcule el valor de K para que se cumpla la siguiente igualdad $(MA)^2 + (MB)^2 = K[(MO)^2 + (AO)^2]$.

   A) 1 B) 2 C) 3
   D) 4 E) 5

5. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, M, N, R.
   Si $(AM)(AR) = 3(MN)(NR)$ y
   $$\frac{m}{NR} = \frac{n}{AM} - \frac{\ell}{AN},$$
   calcule $m + n + \ell$.

   A) 16 B) 8 C) 12
   D) 14 E) 18

6. Sobre una línea recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que
   $$\frac{a}{AC} + \frac{b}{CD} = \frac{e}{AB} + \frac{d}{BD} \text{ y}$$
   $(BD)(CD) = (AC - BD)(AD)$.
   Calcule e.

   A) 1 B) 2 C) 3
   D) 1,5 E) 2,5

7. La suma de las medidas de dos ángulos es 80° y el complemento del primero es el doble del segundo. Calcule la diferencia de las medidas de dichos ángulos.

   A) 70° B) 10° C) 60°
   D) 50° E) 40°

8. ¿Cuánto le falta al complemento de un ángulo para que sea el suplemento del mismo ángulo?

   A) 45° B) 60° C) 75°
   D) 90° E) 80°

9. Se tienen los ángulos adyacentes AOB y BOC, tal que $\dfrac{m\sphericalangle AOB}{2}=\dfrac{m\sphericalangle BOC}{3}=\dfrac{m\sphericalangle COA}{5}$. Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOB y BOC.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 90° E) 120°

10. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD. Si luego se trazan las bisectrices $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OY}$ y $\overrightarrow{OZ}$ de los ángulos AOB, COD y XOY respectivamente y $m\sphericalangle XOC+m\sphericalangle XOD-4(m\sphericalangle BOZ)=80°$, calcule $m\sphericalangle COD$.

A) 10° B) 20° C) 40°
D) 60° E) 80°

11. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que $m\sphericalangle AOB+m\sphericalangle COD=\beta$. Calcule la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos BOD y AOC.

A) $\dfrac{\beta}{2}$ B) $\dfrac{\beta}{3}$ C) $\dfrac{\beta}{4}$
D) $\dfrac{\beta}{6}$ E) $\dfrac{\beta}{8}$

12. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD. Si $m\sphericalangle AOB=3(m\sphericalangle COD)$, $m\sphericalangle AOC=120°$ y $m\sphericalangle BOD=100°$, calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos BOC y AOD.

A) 6° B) 5° C) 8°
D) 10° E) 12°

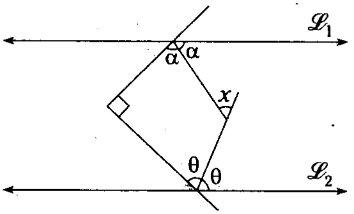
13. La diferencia de las medidas de dos ángulos adyacentes AOB y BOC es 38°. Calcule la $m\sphericalangle BOD$, si $\overrightarrow{OD}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOC$.

A) 36° B) 28° C) 42°
D) 38° E) 19°

14. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que $m\sphericalangle BOD-3(m\sphericalangle AOB)=60°$ y $m\sphericalangle COD=3(m\sphericalangle AOC)$. Calcule $m\sphericalangle BOC$.

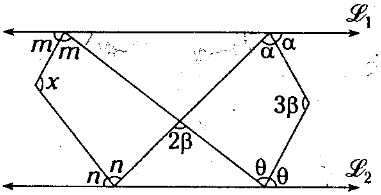
A) 12° B) 15° C) 18°
D) 22° E) 25°

15. En la figura, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Calcule x.



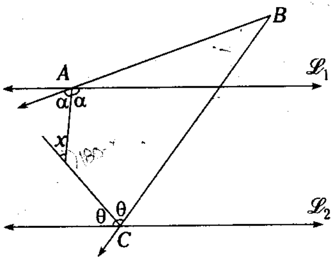
A) 45° B) 30° C) 60°
D) 90° E) 70°

16. En la figura, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Calcule x.



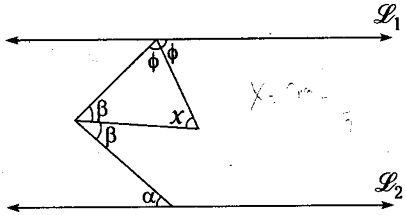
A) 135° B) 130° C) 145°
D) 152° E) 165°

17. De la figura, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Si $\measuredangle ABC$ es agudo, calcule el máximo valor entero de x.



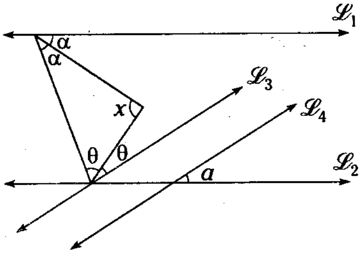
A) 30° B) 46° C) 45°
D) 44° E) 60°

18. En la figura, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Si $\alpha<90°$, calcule el mínimo valor entero de x.



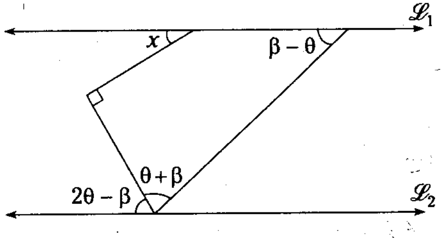
A) 44° B) 45° C) 89°
D) 91° E) 46°

19. De la figura, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$. Si $a < 60°$, calcule el mayor valor entero de x.



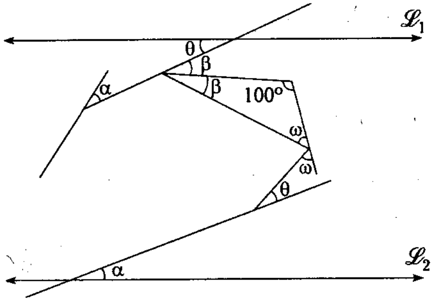
A) 119° B) 120° C) 115°
D) 121° E) 125°

20. Según la figura, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Si θ toma su mínimo valor entero, calcule x.



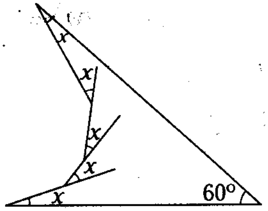
A) 45° B) 37° C) 74°
D) 86° D) 76°

21. Según la figura, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Calcule α.



A) 10° B) 25° C) 20°
D) 16° E) 40°

22. En la figura, calcule x.



A) 30° B) 24° C) 20°
D) 25° E) 22°

1	B
2	D
3	C
4	B
5	B
6	A
7	C
8	D
9	D
10	E
11	A
12	B
13	E
14	B
15	A
16	A
17	D
18	E
19	A
20	D
21	C
22	B

Claves

Capítulo IV

Congruencia de figuras

Los tejidos de Paracas - necrópolis muestran detalles de personajes míticos congruentes, pero de diferentes colores.

Congruencia de figuras

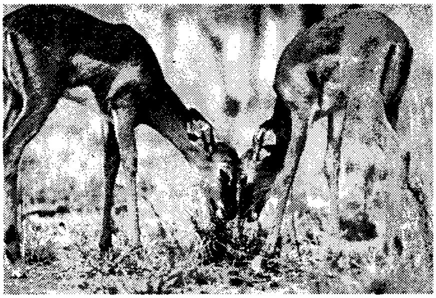
OBJETIVOS

- Analizar axiomas y postulados respecto a la congruencia que plantean diferentes matemáticos.
- Definir con precisión qué es la congruencia de figuras.
- Analizar los teoremas de la congruencia de polígonos.

INTRODUCCIÓN

Una característica sobresaliente de la matemática en el siglo XX es su tendencia hacia la generalización, y es así como muchos conceptos y teoremas de las matemáticas se han refinado y generalizado.

Dichas nociones geométricas, ya sean las de curva, superficie, espacio, paralelismo, dimensión, distancia, área, volumen, por mencionar solo algunas, han experimentado una amplia transformación. La idea de congruencia también ha experimentado este proceso.



Los seres vivos tales como los animales, frecuentemente nos muestran ejemplos de congruencia.

Para entender el concepto de congruencia citaremos textualmente los axiomas que se referían a este capítulo desde Euclides hasta Hilbert.

CONCEPTOS PREVIOS

Axioma de Euclides (Libro I)

- Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

Postulado de Euclides (Libro I)

- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
  Euclides consideraba el término de igualdad a lo que hoy entendemos por congruencia.

Proposiciones del libro I

- Si dos triángulos tienen dos lados de uno, iguales respectivamente a dos del otro y los ángulos determinados por dichas parejas de lados son iguales, también tendrán la base de uno igual a la del otro, y por lo tanto un triángulo será igual al otro. Y los ángulos restantes de uno serán iguales a los restantes del otro, respectivamente, es decir, que serán iguales los opuestos a lados iguales.

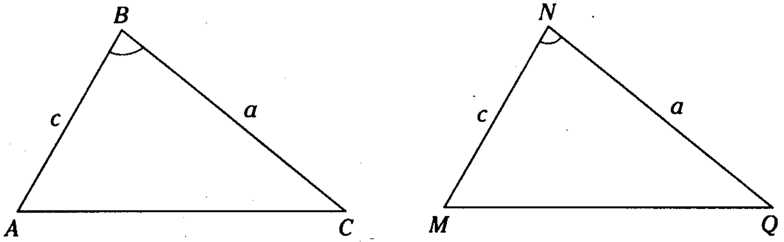


Figura 4.1

Si $AB = MN$; $BC = NQ$; $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle MNQ$

$\rightarrow$ $AC = MQ$

$\triangle ABC$ es igual al $\triangle MNQ$

y $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle NMQ$; $m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle NQM$

- En los triángulos isósceles, los ángulos de la base son iguales entre sí, y si las rectas iguales se prolongan, los ángulos que están bajo la base serán también iguales.

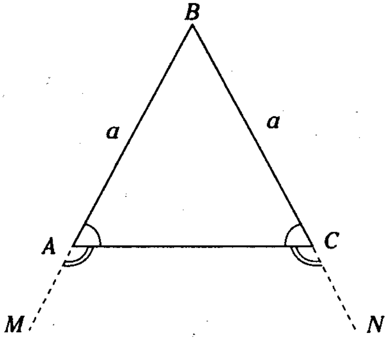


Figura 4.2

Si $AB = BC$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BCA$ y $m\sphericalangle MAC = m\sphericalangle NCA$.

- Si en un triángulo dos ángulos son iguales, los lados opuestos a los ángulos iguales también serán iguales.

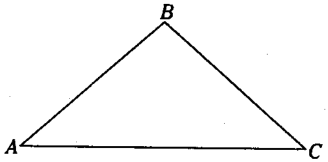


Figura 4.3

Si $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BCA \rightarrow BC = AB$

- Si dos triángulos tienen dos lados de uno iguales respectivamente a otros dos del otro y además tienen sus bases iguales, también tendrán iguales los ángulos opuestos a las rectas iguales.

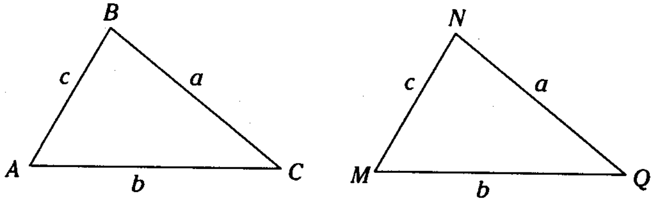


Figura 4.4

Si $AB = MN$; $BC = NQ$ y $AC = MQ$ (base)

$\rightarrow$ $m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle NQM$; $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle NMQ$ y $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle MNQ$.

Axioma de Hilbert

Definición

Dos segmentos se dicen que son congruentes si los puntos extremos de los segmentos son pares congruentes de puntos.

Postulados de congruencia

- Si A y B son puntos distintos, además A' es un punto que está en la recta m, entonces hay dos y solo dos puntos B' y B'' que están en $\overleftrightarrow{m}$, tales que el par de puntos A', B' sea congruente con el par A, B y el par de puntos A', B' sea congruente con el par A, B. Se sabe también que A' está entre B' y B''.

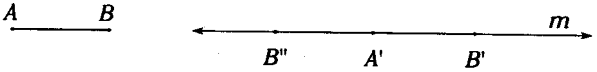


Figura 4.5

$A', B' \cong A, B$ y $A', B'' \cong A, B$,

es decir, $A'B' = AB$ y $A'B'' = AB$

- Si dos pares de puntos son congruentes al mismo par de puntos, entonces son congruentes entre sí.

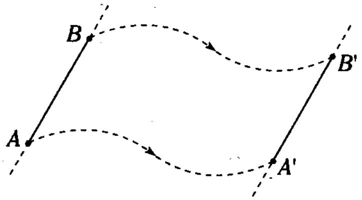


Figura 4.6

Si $A' = A$ y $B' = B$

$\rightarrow A; B \cong A'; B'$

- Todo ángulo es congruente a sí mismo.

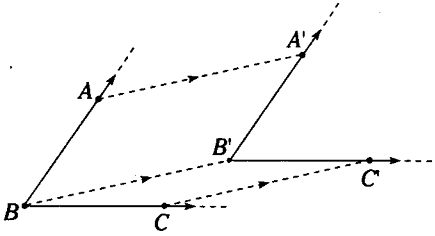


Figura 4.7

$A' = A;\ B' = B\ ;\ C' = C$

$\rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$

- Si dos lados y su ángulo comprendido de un triángulo son congruentes, respectivamente, a dos lados y su ángulo comprendido de otro triángulo, entonces cada uno de los ángulos restantes del primer triángulo son congruentes a los ángulos correspondientes del segundo triángulo.

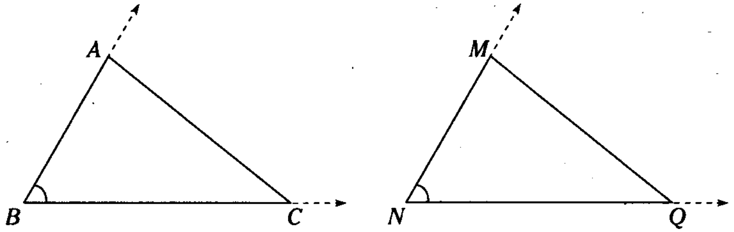


Figura 4.8

Si $\overline{AB} \cong \overline{MN}\ ;\ \overline{BC} \cong \overline{NQ}$ y $\measuredangle ABC \cong \measuredangle MNQ$

$\rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle MNQ$ y $\measuredangle ACB \cong \measuredangle MQN$

NOCIÓN DE CONGRUENCIA

Si dos figuras geométricas pueden superponerse de manera que coincidan exactamente, éstas son llamadas congruentes.

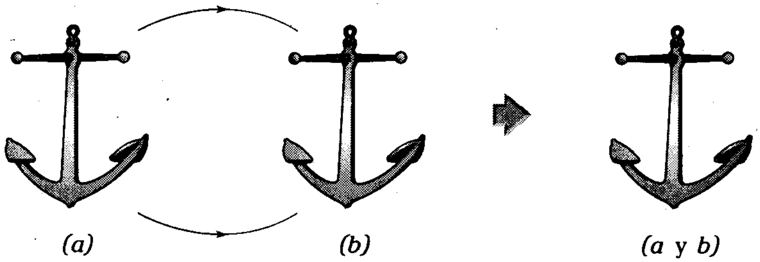
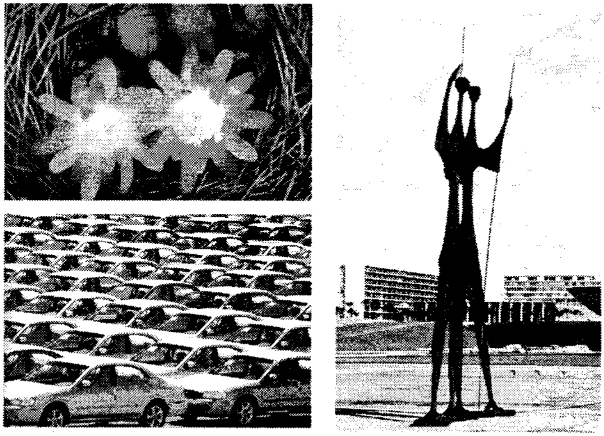


Figura 4.9

En la figura 4.9, se observa que si superponemos los puntos de *a* y *b*, éstos al ser superpuestos coinciden. Por lo tanto, demostramos que *a* y *b* son congruentes.

Podemos describir esta situación intuitivamente afirmando que las figuras congruentes tienen la misma forma[1] y el mismo tamaño[2].



- *La naturaleza nos muestra figuras congruentes como las flores de la foto.*
- *La industria automovilística reproduce figuras congruentes (serie de autos).*
- *Los escultores representan la congruencia en la estatua llamada "los guerreros" (Brasilia: plaza de los tres poderes).*

1 **Forma.** Distribución adoptada por los puntos de una figura. Así por ejemplo, en una línea la extensión es la materia y el hecho de estar constituida por una sucesión de puntos es la forma. (Noción de forma introducida por Aristóteles).

2 **Tamaño.** Es la dimensión[3] del espacio ocupado por una figura.

3 **Dimensión.** Longitud, extensión o volumen de una línea una superficie o un cuerpo respectivamente.

Observación

1. Dos figuras congruentes pueden superponerse y no necesariamente coincidir exactamente.

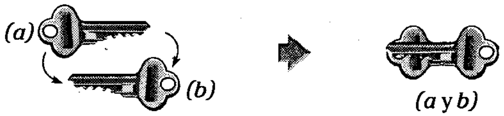


Figura 4.10

Así en la figura 4.10 se muestran las figuras congruentes a_1 y b_2, que al ser superpuestas no coinciden exactamente.

2. Dos figuras pueden superponerse y coincidir pero no necesariamente llegan a ser congruentes.

Aquí observamos las manos de una misma persona a punto de hacer coincidir sus palmas.

Así en la imagen, las manos se superponen y además coinciden pero no exactamente porque la mano derecha no es congruente a la mano izquierda.

3. Que dos figuras tengan el mismo tamaño y la misma forma no garantiza que sean congruentes.

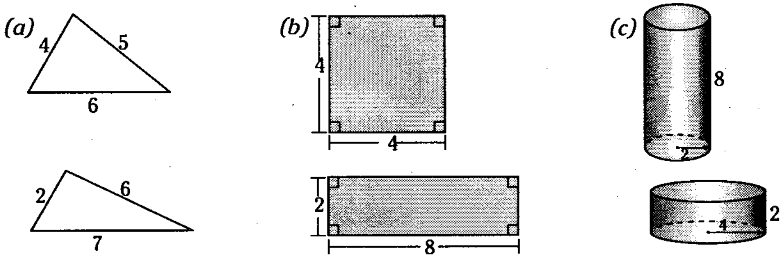


Figura 4.11

En la figura 4.11 (a) se presentan dos figuras (líneas cerradas) que tienen la misma forma (forma triangular) y el mismo tamaño (debido a que la longitud de ambas líneas es 15 u) sin ser congruentes.

En la figura 4.11 (b) hay dos regiones cuadrangulares (igual forma) que evidencian la misma área (igual tamaño) y no son congruentes.

En la figura 4.11 (c) se muestran dos cilindros de revolución (igual forma), que a pesar de observarse un mismo volumen (igual tamaño), no son congruentes.

Podemos notar que la idea de congruencia abarca figuras planas y del espacio; para un mejor entendimiento del tema, se emplearán la terminología y notaciones de la teoría elemental de conjuntos.

CONGRUENCIA

DEFINICIÓN

- Sobre dos conjuntos de puntos A y B (en una recta, en el plano o en el espacio) se dice que son congruentes, si existe una isometría[4] que permita que un conjunto coincida con el otro.

  Notación
  $A \cong B$ se lee el conjunto A es congruente al conjunto B.

- Se afirma que dos conjuntos de puntos A y B son congruentes por descomposición finita, si

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i;\ A_i \cap A_j = \phi \text{ para } i \neq j$$

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i;\ B_i \cap B_j = \phi \text{ para } i \neq j$$

$$A_i \cong B_i\ (i = 1; 2; \dots ; n) \ \rightarrow\ A \cong B$$

Esto es, A y B representan uniones de un número finito n de subconjuntos que son congruentes por pares.
Así, dos segmentos de igual longitud serán congruentes, dos ángulos de igual medida serán congruentes, dos triángulos equiláteros cuyos lados tienen igual longitud son congruentes, etc.

Postulado
Si dos pares angulares son congruentes entonces los segmentos que unen los extremos libres de sus lados son congruentes, además cada uno de los pares angulares que forman estos segmentos con los lados de los pares angulares son respectivamente de igual medida.

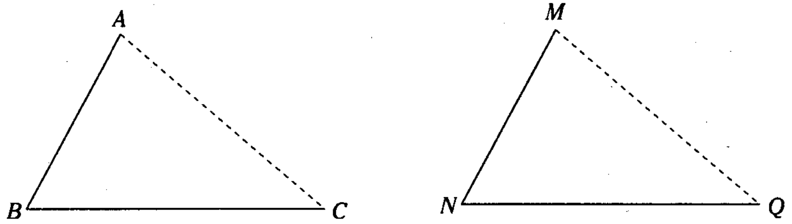


Figura 4.12

Si $\angle ABC \cong \angle MNQ$ considerando $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y $\overline{BC} \cong \overline{NQ}$, entonces
$\overline{AC} \cong \overline{MQ}$; $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle NMQ$ y $m\sphericalangle BCD = m\sphericalangle NQM$

4 **Isometría**. Transformación geométrica de un conjunto que no altera la longitud de los segmentos ni, por tanto, las amplitudes angulares y las áreas. La isometría se define mediante una relación entre los puntos de dos figuras: la de partida y la del objeto transformado. Los puntos que antes y después de la isometría no cambian se llaman puntos unitarios. Ejemplos de isometría son las traslaciones, las simetrías, los giros y las posibles combinaciones de estas, cuyo estudio se realizará más adelante.

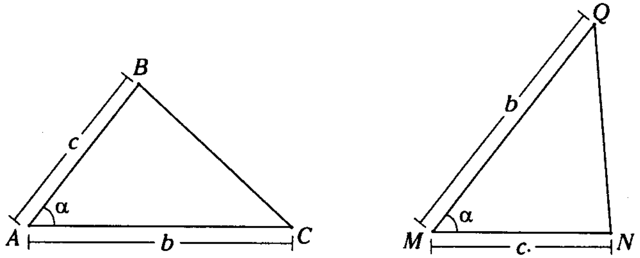
* Consulte BLUMENTHAL, L.M. *A paradox , a paradox, a most ingenious paradox, The American Mathematical Monthly*, vol 47. pp. 346-353 (Paradojas de la teoría de congruencia)

* Teoría de la disección. Congruencia por descomposición del tomo I del libro *Estudio de las Geometrías.* EVES, Howard. pp. 266.

TRIÁNGULOS CONGRUENTES

PRIMER TEOREMA

Si dos triángulos tienen respectivamente un par angular congruente, entonces dichos triángulos son congruentes.



(a)

Si $\angle BAC \cong NMQ \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNQ$

Demostración

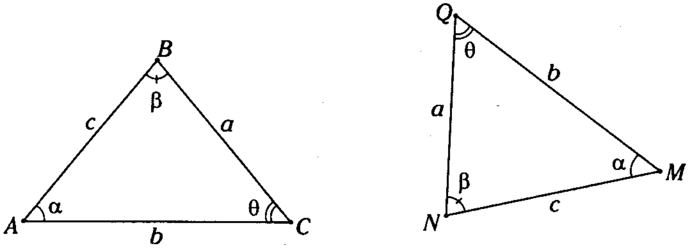
Del postulado de pares angulares congruentes $BC = NQ$, $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle MNQ$ y $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle MQN$, observamos que la correspondencia $A \leftrightarrow M$, $B \leftrightarrow N$, $C \leftrightarrow Q$ cumple con nuestro propósito de hacer coincidir los triángulos y por lo tanto $\triangle ABC \cong \triangle MNQ$.

Una correspondencia $ABC \leftrightarrow MNQ$ entre dos triángulos (con vértices A, B, C y M, N, Q respectivamente) es una congruencia si y solo si $AB = MN = c$; $BC = NQ = a$ y $AC = MQ = b$.

$m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle NMQ = \alpha$

$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle MNQ = \beta$

$m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle MQN = \theta$



(b)

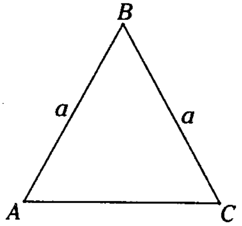
Figura 4.13

Nota

La correspondencia $A \leftrightarrow N$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow M$ no nos permite lograr la coincidencia deseada, es decir, la correspondencia $ABC \leftrightarrow NQM$ entre los dos triángulos no es una congruencia ($\triangle ABC \ncong \triangle NQM$).
No perder de vista que el orden de las letras es importante.

Teorema del triángulo isósceles

Si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces los pares angulares formados por dichos lados y el lado desigual son congruentes.



(a)

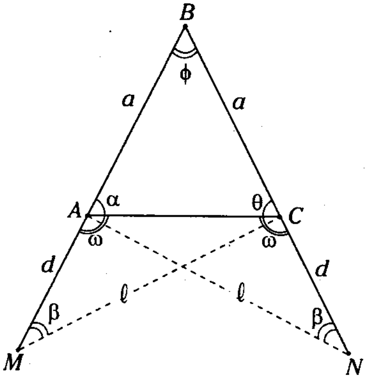
En el triángulo ABC, si $AB = BC = a$

$\rightarrow \angle BAC \cong \angle BCA$

$\therefore\ m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BCA$

Demostración

Para que $\angle BAC \cong \angle BCA$, bastará demostrar que $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BCA$.



(b)

Para ello, prolongamos $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ hasta M y N respectivamente, tal que $AM=CN=d$. De ahí que $BM = BN = a + d$.

Por lo tanto $\angle CBM \cong \angle ABN$

Por el postulado de los pares angulares

$CM = AN = \ell$

$m\sphericalangle CMB = m\sphericalangle ANB = \beta$

Luego, $\angle AMC \cong \angle CNB$

Por el postulado de los pares angulares

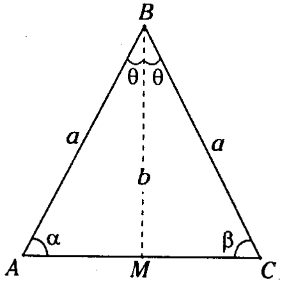
$m\sphericalangle MAC = m\sphericalangle NCA = \omega$

Finalmente $\omega + \alpha = \omega + \theta = 180°$,

de donde $\alpha = \theta$,

$\therefore\ m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BCA$

Otra manera de demostrar es cuando en el triángulo ABC ($AB = BC$) trazamos $\overline{BM}$ con M *en* $\overleftrightarrow{AC}$, tal que $m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle MBC = \theta$.



(c)

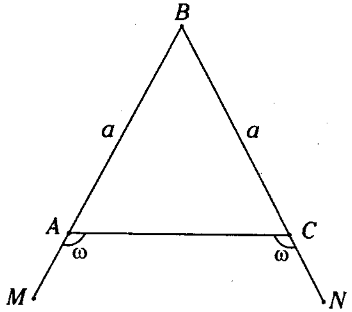
$\rightarrow \angle ABM \cong \angle CBM$

Por el postulado de los pares angulares

$\rightarrow\ m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle BCM$

$\therefore\ \alpha = \beta$

De lo anterior se establece que al prolongar los lados congruentes, estos forman con el lado desigual pares angulares de igual medida.



(d)

Figura 4.14

En el $\triangle ABC$, si $AB = BC = a$

$\rightarrow\ m\sphericalangle MAC = m\sphericalangle NCA = \omega$

Nota

Ángulo exterior de un triángulo

Al ángulo que forma un par lineal con uno cualquiera de los ángulos determinados por los lados de un triángulo son llamados ángulo exterior de un triángulo.

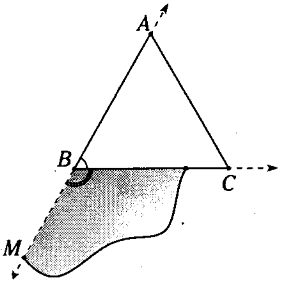


Figura 4.15

En el $\triangle ABC$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ determinan $\measuredangle ABC$. Si al prolongar $\overline{AB}$, $\measuredangle MBC$ forma un par lineal con $\measuredangle ABC$; entonces $\measuredangle MBC$ es un ángulo exterior del $\triangle ABC$.

Ángulos interiores remotos de un ángulo exterior de un triángulo

Dado un ángulo exterior de un triángulo, los dos ángulos determinados por los lados que no forman un par lineal con el ángulo exterior dado reciben el nombre de *ángulos interiores remotos del ángulo exterior.*

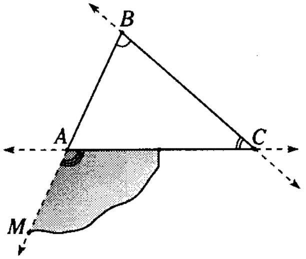


Figura 4.16

$\measuredangle MAC$: ángulo exterior del $\triangle ABC$.
$\measuredangle ABC$ y $\measuredangle ACB$: ángulos interiores remotos del ángulo exterior MAC.

Teorema del ángulo exterior

La medida de un ángulo exterior de un triángulo es mayor que la medida de cualesquiera de los dos ángulos interiores remotos.

Demostración

Al considerar el triángulo de la figura anterior, demostraremos que $m\measuredangle MAC > m\measuredangle ACB$ o $m\measuredangle MAC > m\measuredangle ABC$.

Sea E punto medio de $\overline{AC}$ y prolongamos BE hasta F, tal que $EF = BE$.

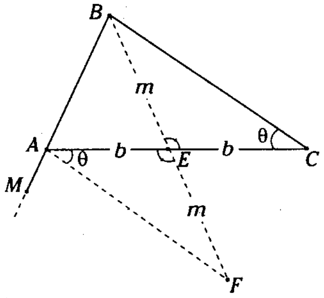


Figura 4.17

Entonces, como $m\measuredangle AEF = m\measuredangle CEB$ (postulado de los ángulos opuestos por el vértice), los triángulos AEF y CEB son congruentes (teorema de los triángulos congruentes)

$\rightarrow$ $m\measuredangle FAE = m\measuredangle BCE = \theta$

Del postulado de ángulos (Figura 4.18)

$m\measuredangle MAC = m\measuredangle MAF + m\measuredangle FAC \rightarrow m\measuredangle MAC > m\measuredangle FAC$,

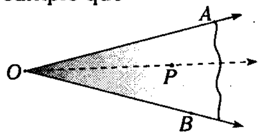
pero como $\angle BCE \cong \angle FAC$

$\rightarrow$ $m\measuredangle FAC = m\measuredangle ACB = \theta$

Por lo tanto, $m\measuredangle MAC > m\measuredangle ACB$ (el otro caso puede ser demostrado de manera análoga).

Postulado

Dado un ángulo AOB y un punto P en la región interior, se cumple que

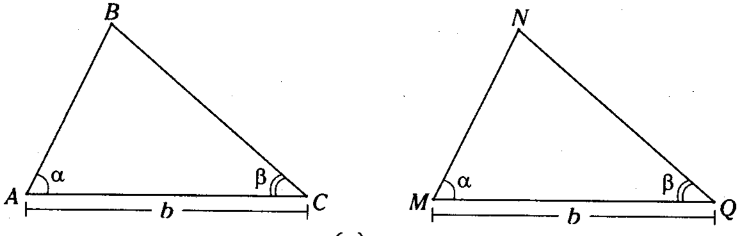


$$m\measuredangle AOB = m\measuredangle AOP + m\measuredangle POB$$

Figura 4.18

SEGUNDO TEOREMA

Dos triángulos son congruentes si tienen dos medidas angulares respectivamente iguales y el lado comprendido entre ellos son congruentes.



(a)

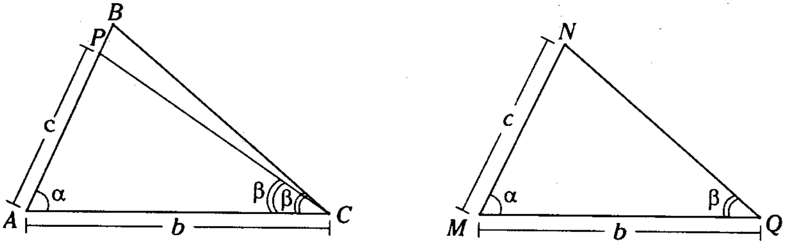
Si $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle NMQ = \alpha$; $m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle NQM = \beta$ y $\overline{AC} \cong \overline{MQ} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNQ$

Demostración

Como $\overline{AC} \cong \overline{MQ}$ y hacemos coincidir $A \leftrightarrow M$ y $C \leftrightarrow Q$ para que $ABC \leftrightarrow MNQ$, bastará probar que B y N también coincidan. Para ello bastará, demostrar que $AB = MN$ o $CB = QN$.

1. Suponiendo que $AB \neq MN$, tenemos dos posibilidades:

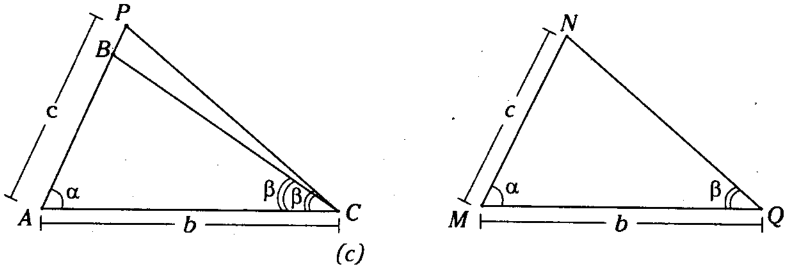
   a. Si $\boldsymbol{AB > MN}$, en $\overline{AB}$ podemos ubicar un punto P, tal que $AP = MN$



(b)

Del postulado de pares angulares congruentes, $m\sphericalangle PCA = m\sphericalangle NQM = \beta$. No obstante, como $m\sphericalangle BCA = \beta$, P coincide con B $(P = B)$, además $\triangle APC \cong \triangle MNQ \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNQ$.

   b. Si $\boldsymbol{AB < MN}$, en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto P, tal que $AP = MN$.



(c)

Figura 4.19

Del postulado de pares angulares congruentes, destacamos que $m\measuredangle PCA = m\measuredangle NQM = \beta$; pero $m\measuredangle BCA = \beta$. Concluimos así que P coincide con B $(P = B)$

además al

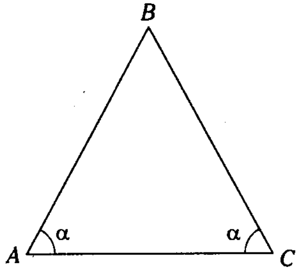
$\triangle APC \cong \triangle MNQ$

$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle MNQ$

2. Suponiendo que $BC \neq NQ$, procederemos en forma análoga al caso 1 y demostraremos que los triángulos ABC y MNQ son congruentes.

Teorema

Si en un triángulo dos de sus medidas angulares son iguales, entonces los lados que se oponen a dichos ángulos son congruentes.



(a)

En el triángulo ABC, si

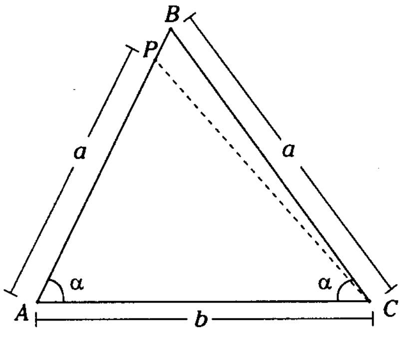
$m\measuredangle CAB = m\measuredangle ACB = \alpha$

$\rightarrow \overline{AB} \cong \overline{BC}$

$\therefore \quad AB = BC$

Demostración

Para que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, bastará demostrar que $AB = BC$.



(b)

Figura 4.20

Para ello, partimos que $BC \neq AB$ y si demostramos que lo supuesto es contradictorio, entonces quedará demostrado el teorema.

Si $BC \neq AB$, contamos con dos posibilidades:

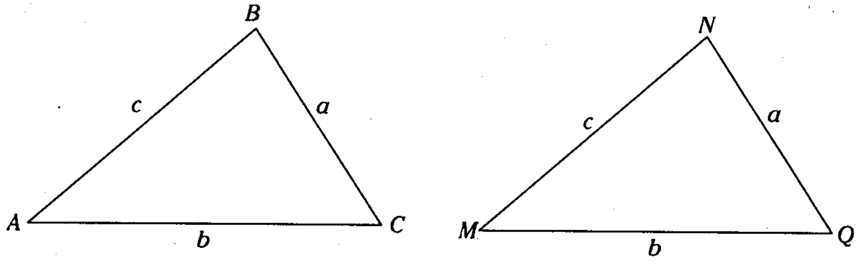
1. Si $AB > BC$, entonces en $\overline{AB}$ se puede ubicar un punto P, tal que $AP = BC$ y resulta así $\angle PAC \cong \angle BCA$. En consecuencia, $m\measuredangle PCA = m\measuredangle BAC = \alpha$, pero como $m\measuredangle BCA = \alpha$ y al estar P entre A y B la medida debe ser mayor que $m\measuredangle PCA$, se observa que es contradictorio.

2. Si $AB < BC$, esto es lo mismo que $BC > AB$, entonces en $\overline{BC}$ se puede ubicar un punto Q, tal que $CQ = AP$. Haciendo un análisis análogo al caso 1, concluimos que lo supuesto también es contradictorio.

De 1 y 2 queda demostrado que $AB = BC$ y por ende $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

TERCER TEOREMA

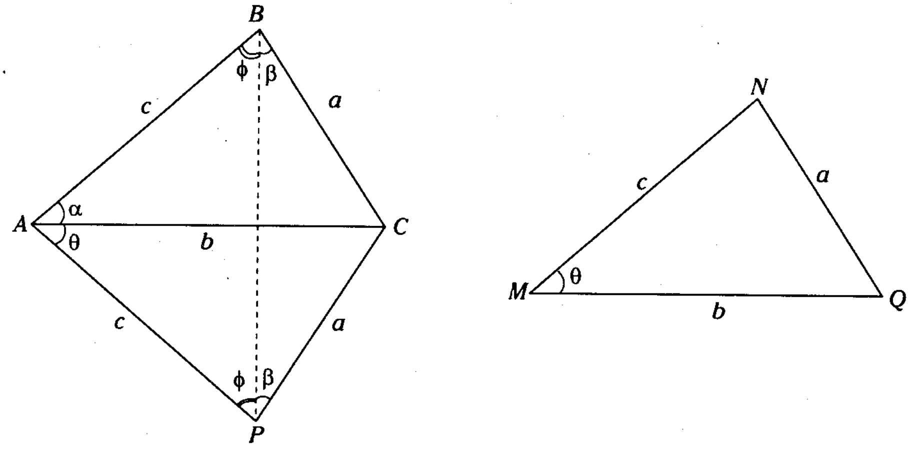
Dos triángulos son congruentes si sus tres lados son respectivamente congruentes.



(a)

Si $\overline{BC} \cong \overline{NQ}$; $\overline{AC} \cong \overline{MQ}$ y $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ $\rightarrow$ $\triangle ABC \cong \triangle MNQ$

Demostración



(b)

Figura 4.21

Construimos exteriormente al $\triangle ABC$ el triángulo APC congruente al $\triangle MNQ$, así

$m\sphericalangle PAC = m\sphericalangle NMQ = \theta$, $AP = MN = c$ y $PC = NQ = a$.

Luego en los triángulos BCP y BAP como $BC = CP = a$ y $AB = AP = c \rightarrow m\angle CBP = m\angle CPB = \beta$ y $m\angle ABP = m\angle APB = \phi$.

Es decir $m\angle ABC = m\angle APC = \beta + \phi$ y del teorema de pares angulares congruentes $\angle ABC \cong \angle APC$.

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle APC$

Ya que $\triangle APC \cong \triangle MNQ$, entonces

$\triangle ABC \cong \triangle MNQ$

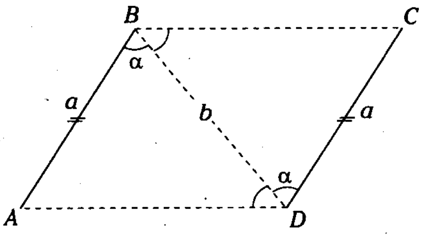
Teorema

Si los segmentos AB y CD son paralelos y congruentes, entonces, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ o $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ se bisecan.

Demostración

Sea $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

1. Si los segmentos BC y AD no se intersecan.



(a)

Trazamos $\overline{BD}$ y por ángulos alternos internos

$m\measuredangle ABD = m\measuredangle CDB = \alpha$

Sea $BD = b$ y $AB = CD = a$

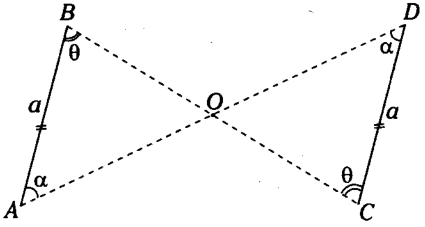
$\rightarrow \angle ABD \cong \angle CDB$

$\therefore \overline{AD} \cong \overline{BC}$

También $m\measuredangle ADB = m\measuredangle CBD$

Por el recíproco de los angulos alternos internos $\overline{AD}$ es paralelo con $\overline{BC}$ ($\overline{AD} // \overline{BC}$).

2. Si los segmentos BC y AD se intersecan.



(b)

Figura 4.22

Sea $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{0\}$ por ángulos alternos internos, se cumple

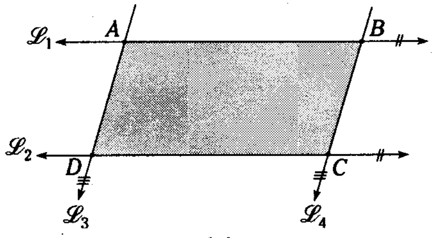
- $m\measuredangle ABC = m\measuredangle DCB = \theta$
- $m\measuredangle BAD = m\measuredangle CDA = \alpha$

Del segundo teorema de triángulos congruentes, $\triangle ABO \cong \triangle DCO$ (A.L.A.)

$\therefore AO = DO$ y $BO = CO$

Teorema

Si dos pares de rectas paralelas se intersecan dos a dos, estos determinan segmentos congruentes respectivamente.

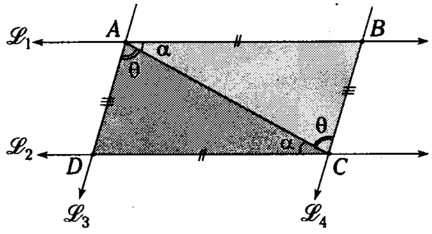


(a)

Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$

$\rightarrow \overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

Demostración



(b)

Figura 4.23

Por ángulos alternos internos si

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \rightarrow m\measuredangle CAB = m\measuredangle ACD = \alpha$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4} \rightarrow m\measuredangle DAC = m\measuredangle BCA = \theta$

Del segundo teorema de triángulos congruentes, $\triangle DAC \cong \triangle BCA$

$\therefore \overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

Nota

Si $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$

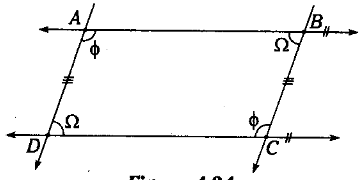
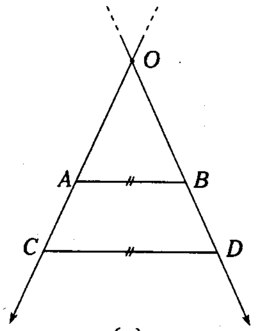


Figura 4.24

$\rightarrow$ $m\measuredangle ADC = m\measuredangle CBA$ y $m\measuredangle DAB = m\measuredangle BCD$

Teorema

En la figura 4.25(a), si $\overline{AB} // \overline{CD}$, asumimos que $CD > AB$.



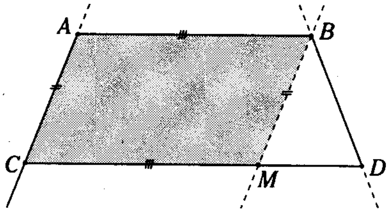
(a)

Si $\overline{AB} // \overline{CD}$, estando $\overline{AB}$ más próximo a O que $\overline{CD}$,

$\rightarrow$ $CD > AB$

Demostración

Por B trazamos una recta paralela a $\overline{AC}$ que interseca a $\overline{CD}$ en M.



(b)

Figura 4.25

Del teorema de los dos pares de rectas paralelas tenemos que $CM = AB$.

$CD = CM + MD$

$\rightarrow$ $CD > CM$

$\therefore$ $CD > AB$

Teorema

Dados los triángulos ABC y MNQ, si $AC = MQ$, $m\measuredangle ABC = m\measuredangle MNQ$ y la distancia de B a $\overline{AC}$ es igual a la distancia de N a $\overline{MQ}$, concluimos que dichos triángulos son congruentes.

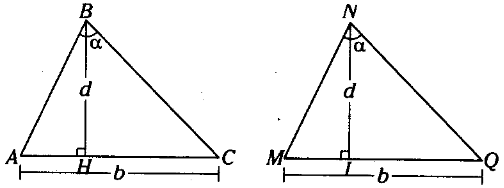


Figura 4.26

Si $AC = MQ = b$; $m \measuredangle ABC = m \measuredangle MNQ = \alpha$ y $BH = NI = d$, resulta que los triángulos ABC y MNQ son congruentes.

Observación

El hecho de que los triángulos sean congruentes implica que podría suceder que $\triangle ABC \cong \triangle MNQ$ o $\triangle ABC \cong \triangle QNM$; es decir, $AB = MN$ o $AB = QN$, así como también $BC = NQ$ o $BC = NM$, respectivamente.

Para evitar esta ambigüedad es necesario saber quiénes son los lados mayores o menores.

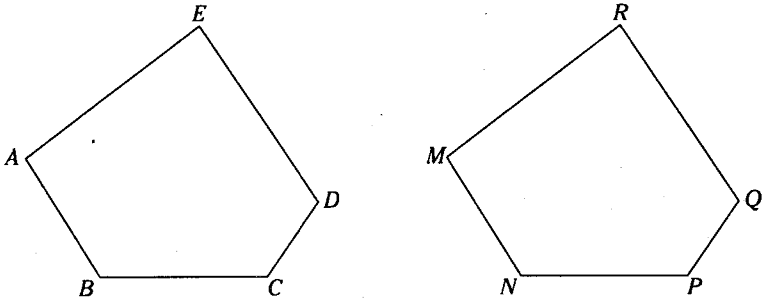
Por lo tanto, si $BC > AB$ y $NQ > MN$, definitivamente $\triangle ABC \cong \triangle MNQ$.

La demostración de esta observación requiere conocer algunas propiedades de circunferencia. (ver demostración con cuadrilátero inscriptible capítulo IX).

POLÍGONOS CONGRUENTES

Teorema

Dos polígonos son congruentes si sus pares angulares tomados consecutivamente son respectivamente congruentes.



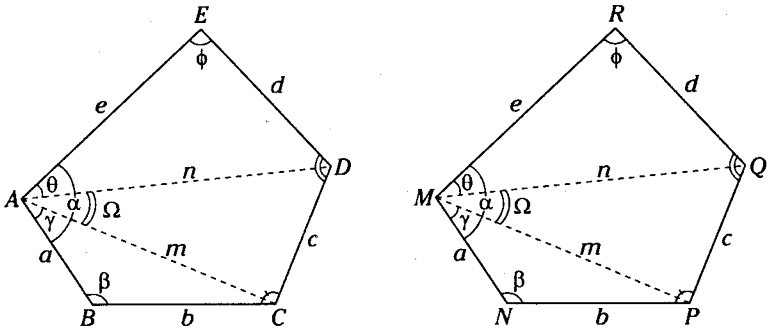
(a)

Si $\angle ABC \cong \angle MNP$; $\angle BCD \cong \angle NPQ; \ldots;$ $\angle EAB \cong \angle RMN$

$\rightarrow$ Polig. $_{(ABCDE)} \cong$ Polig. $_{(MNPQR)}$

Demostración

Si los pares angulares tomados consecutivamente son congruentes, ello garantiza que las longitudes de sus lados y sus medidas angulares sean respectivamente iguales.



(b)

Figura 4.27

Si desde uno de sus vértices y su homólogo trazamos diagonales, se observa $\overline{AC} \cong \overline{MP}$ puesto que $\angle ABC \cong \angle MNP$. Así también $m\angle BAC = m\angle NMP = \gamma$ y $AD \cong \overline{MQ}$ al ser $\angle AED \cong \angle MRQ$.

Así $m\angle EAD = m\angle RMQ = \theta$.

Es decir $m\angle DAC = m\angle QMP = \Omega$, pero como $AC = MP = m$ y $AD = MQ = n$,

$\rightarrow \angle DAC \cong \angle OMP$

Por lo tanto $CD = PQ$; $m\angle ADC = m\angle MQP$ y $m\angle ACD = m\angle MPQ$ lo cual garantiza que los polígonos *ABCDE* y *MNPQR* son congruentes.

De igual manera se puede generalizar para polígonos de n lados $n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq 3$

CIRCUNFERENCIAS CONGRUENTES

Si un polígono es regular (lados congruentes y pares angulares fomados por los lados también congruentes) y el número de lados tiende al infinito en el límite, el polígono regular se aprecia como una circunferencia. Por lo tanto, para que dos circunferencia sean congruentes bastará que sus radios tengan la misma longitud.

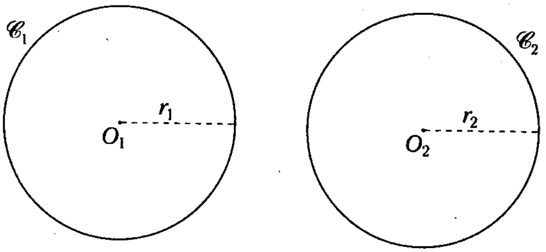


Figura 4.28

Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ circunferencias de radios r_1 y r_2, respectivamente.

Si $r_1 = r_2 \rightarrow \mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$

Importante

Los fundamentos de la Geometría

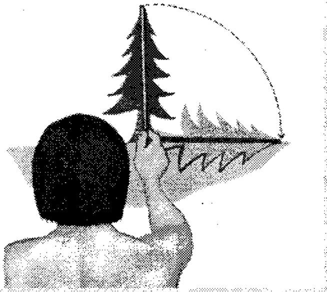
Desde los tiempos más remotos, la ambición de los matemáticos ha consistido en estructurar su ciencia como un sistema de deducciones (teoremas) desde unos puntos de partida (axiomas) tan sencillos y poco numerosos como fuera posible.

En 1899, el matemático alemán David Hilbert presentó una espléndida síntesis de los trabajos de sus precursores y de sus propias investigaciones en torno a los fundamentos de la Geometría. En su libro Grundlagen der Geometrie (fundamentos de la Geometría) se encuentra la primera exposición enteramente axiomatizada de la geometría euclidiana a partir de una veintena de axiomas.

L E C T U R A

IMÁGENES CONGRUENTES

Tanto en Grecia como en Egipto, se emplearon diversos métodos para medir distancias y calcular alturas. Un método posible consistía en sujetar un palo con el brazo extendido hasta que cubriera con exactitud la altura del objeto. Se hacía girar después 90° y la distancia aparentemente cubierta sobre el suelo era la medida buscada.

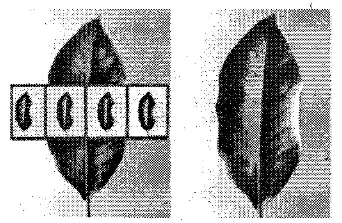


Para medir la altura se utilizaba una varilla, que con el brazo extendido cubría la altura del objeto, para luego girarla en 90°. La distancia que cubría la varilla sobre el suelo podía ser medida.

A lo largo de la historia, los pueblos han inventado nuevas formas de resolver problemas cotidianos.

Así en el grabado, de Alberto Durero (1538), este gran artista alemán nos muestra uno de los variados grabados donde se ve el método de perspectiva práctica. En este grabado se aprecia cómo un artista puede copiar literalmente en papel cuadriculado la imagen que observa a través de los cuadrados de su cuadrícula y rejilla.

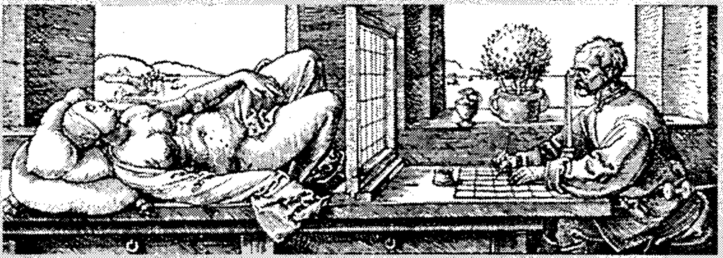
Ahora disponemos de máquinas y métodos extremadamente complejos para medir o reproducir imágenes, un ejemplo es la fotografía que reproduce imágenes todas congruentes o del tamaño que quisiéramos, o las fotocopiadoras que reproducen imágenes a tamaño real o a escala.



La fotografía permite obtener imágenes congruentes en serie.

Actualmente, se constata que la congruencia, (reproducir objetos iguales), es una obsesión del hombre, cuya magnitud se distingue en la clonación de seres vivos.

Resulta interesante recordar que todas estas ideas de congruencia e igualdad tuvieron su origen en tiempos pasados ante el progreso del hombre.



La pintura de Alberto Durero muestra el uso de cuadrículas para que el dibujante pueda obtener una imagen congruente a la que observa a través de las rejillas.

BIOGRAFÍA

PLATÓN (Atenas, 427 - Atenas 347 a.n.e.)

Filósofo griego que se convirtió en el fundador de la Academia. Integró una familia aristocrática y desde su juventud, desarrolló una intensa vida pública hasta ocupar cargos importantes en la sociedad de su época.

La tradición filosófica lo considera, al lado de Aristóteles, uno de los más grandes del pensamiento occidental. Según la leyenda, fue discípulo e interlocutor de Sócrates, cuyo pensamiento está presente en su obra. A partir de 387 a.n.e. radica en un jardín de Atenas, que estaba ofrecido al héroe **Academo** y del cual se inspiró para nombrar a su escuela. Sus numerosos discípulos, entre los cuales Aristóteles es el más importante, difundieron sus enseñanzas por Grecia y Asia Menor. En su obra *Diálogos*, expuso su teoría del universo. Según esta teoría, solo existían para él dos universos: *el mundo de las ideas o kosmos noetas y el universo de las sensaciones o kosmos aiszetas.*

Platón y Aristóteles protagonistas del fresco La Escuela de Atenas de Rafael Sanzio.

Platón consideraba que el camino que el hombre debe recorrer para encontrar la verdad consiste en escudriñar la veracidad de las cosas en el mundo de las ideas; esto fue tema de su diálogo en su libro *Fedrón*. Su pensamiento se considera idealista por afirmar la supremacía de lo ideal sobre el mundo real, aunque admite que la realidad y el mundo físico están separados de conceptos universales como la unidad, la bondad y la belleza.

Por último, la famosa inscripción en la entrada de la Academia de Platón (*Que no entre aquí nadie ignorante en geometría*) nos manifiesta el papel jugado por esta disciplina en el pensamiento de Platón y sus discípulos.

BIOGRAFÍA

EUDOXIO DE CNIDO (408 - 355 a.n.e.)

Discípulo de Platón que se dedicó no solo a la Matemática, sino también a la Astronomía. De naturaleza griega (nació y murió en Cnido), su familia compuesta de médicos; los cuales influyeron para que realice estudios en medicina. Esta fue una profesión que también ejerció durante algunos años.

Eudoxio de Cnido en la Escuela de Atenas (Rafael Sanzio)

En geometría, destaca por su teoría de las proporciones y el método exhaustivo, que impulsaron las ideas de Euclides posteriormente. Su teoría geométrica de la proporcionalidad es perfecta al punto de ser considera como reciente. En esta también se encuentra incluida a la teoría geométrica de los números irracionales, la cual estipulaba que estos no podían ser expresados como cociente de dos números enteros.

El método exhaustivo o método de agotamiento le permitió abordar el problema del cálculo de áreas y volúmenes; como el de la pirámide, cuyo volumen es un tercio de un prisma con la misma base y altura.

Asimismo, hizo construcciones geométricas ingeniosísimas; y aunque, nunca escribió sus conclusiones, estas lograron ser conocidas al trasmitirse oralmente por generaciones.

HENRI POINCAIRÉ (Nancy 1854 – París, 1912)

Matemático francés que adquiere su interés por la ciencia gracias a su familia. Pasa por varios centros como la Escuela Forestal, la Escuela Politécnica y la Escuela de Minas para finalmente graduarse como matemático. Desarrolló el conocimiento de la funciones periódicas, sistematizándolas bajo el nombre de la serie de memorias sobre las curvas definidas por ecuaciones diferenciales, en lo cual define puntos singulares, nudos, focos, puertos y centros excepcionales con sus relaciones. Constituye, de igual modo, al estudio de las ecuaciones diferenciales, de los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales y de las curvas definidas por ecuaciones diferenciales, cuyo avance aplica al estudio de la mecánica celeste, con observaciones de fluidos en rotación. Paincairé fue autor de una numerosa producción editorial, que abarcaba más de 500 textos.

Problemas Resueltos

Problema 1

En un cuadrilátero *ABCD*, m∢*ABC* = m∢*ADC* y *BC* = *CD*. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. El $\triangle ABC \cong \triangle ADC$
II. El $\triangle ABD \cong \triangle BCD$
III. $\overrightarrow{AC}$ es bisectriz del ∢*BAD*

A) VVF B) VFF C) VVV
D) FFF E) VFV

Resolución

Sea $BC = CD = a$ y al trazar $\overline{BD}$

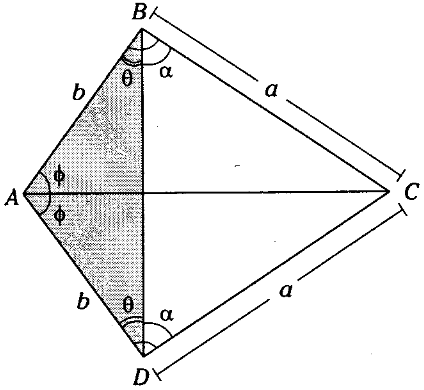


Figura 4.29

En el triángulo *BCD*

m∢*DBC* = m∢*BDC* = α

Como

m∢*ABC* = m∢*ADC* (Dato)

Por lo tanto

m∢*ABD* = m∢*ADB* = θ

Luego en el triángulo *ABD*

$AB = AD = b$

$\rightarrow \angle ABC \cong \angle ADC$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$

de lo cual m∢ *CAD* = m∢ *CAB* = ϕ

$\therefore$ $\overrightarrow{AC}$: bisectriz del ∢*BAD*

CLAVE E

Problema 2

Dado un triángulo *ABC*, donde *AB* = *BC* en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, se ubican los puntos *M* y *N*; respectivamente. Demuestre que si m∢ *MCA* = m∢ *NAC*, entonces *AM* = *CN*.

Resolución

Graficando el enunciado, tenemos

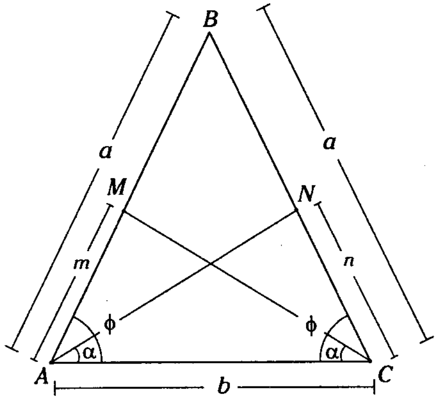


Figura 4.30

Sea

$AM = m$ y $CN = n$

Como

$AB = BC = a$

$\rightarrow\ m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BCA = \alpha + \beta$

$\therefore\ m\sphericalangle MAN = m\sphericalangle MCM = \beta$

Luego del segundo teorema de triángulos congruentes (A.L.A.), los triángulos *AMC* y *CNA* son congruentes

$\rightarrow\ AM = CN$

$\therefore\ m = n$

Problema 3

En un triángulo *ABC*, donde $BC > AB$, demuestre que $m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle BCA$.

Resolución

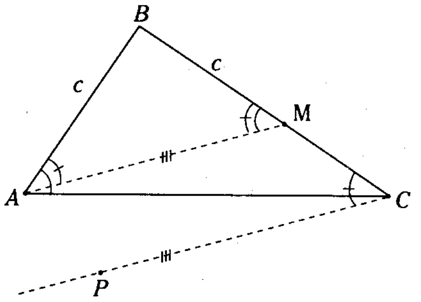


Figura 4.31

Si $BC > AB \rightarrow\ m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle BCA$

Como $BC > AB$ en $\overline{BC}$ existe un punto *M*, tal que $BM = AB = c$, del teorema de los lados congruentes en un triángulo, obtenemos

$m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle BMA$ (I)

Como *M* está en la región interior del $\sphericalangle BAC$

$\rightarrow\ m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle BAM$ (II)

Por *C* trazamos $\overline{CP} \,//\, \overline{MA}$, de ahí que *A* está en la región interior del $\sphericalangle BCP$

$\rightarrow\ m\sphericalangle BCP > m\sphericalangle BCA$ (III)

Del resultado de ángulos correspondientes

$\rightarrow\ m\sphericalangle BCP = m\sphericalangle BMA$ (IV)

De (II) y (I)

$m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle BMA$

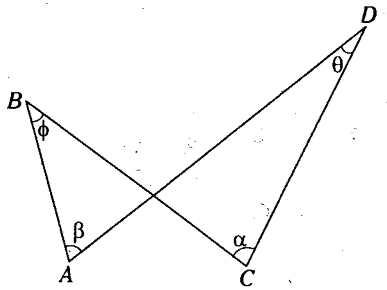
De (IV) y (III)

$m\sphericalangle BMA > m\sphericalangle BCA$

$\therefore\ m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle BCA$

Problema 4

En la figura mostrada, demuestre que si $\alpha > \beta$, entonces $\theta < \phi$.



Resolución

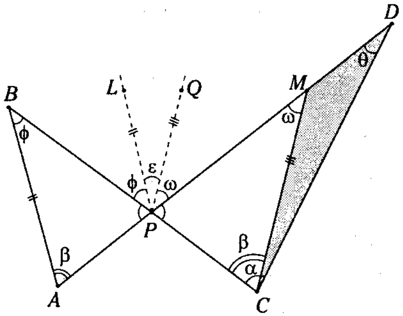


Figura 4.32

Como $\alpha > \beta$, entonces es posible ubicar un punto M en $\overline{PD}$, tal que la m∢MCP = m∢BAP = β

- Por P trazamos $\overleftrightarrow{PL} // \overline{AB}$

  → m∢LPB = m∢ABP = ϕ (∢s alternos internos)

  y m∢LPM = m∢BAM (∢s correspondientes)

  ∴ $\varepsilon + \omega = \beta$

- Por P trazamos $\overleftrightarrow{PQ} // \overline{CM}$

  → m∢QPM=m∢CMP (∢s alternos internos) y m∢QPB=m∢MCB (∢s correspondientes)

  ∴ $\varepsilon + \phi = \beta$

  → $\varepsilon + \omega = \varepsilon + \phi$

  ∴ $\omega = \phi$

Luego en el $\triangle CDM$ por el teorema del ángulo exterior de un triángulo, $\omega > \theta$ que es lo mismo $\theta < \omega$.

∴ $\theta < \phi$

Problema 5

Dado un triángulo ABC, se ubica el punto medio M de $\overline{BC}$. Demuestre que si $AC > AB$, entonces m∢MAB > m∢MAC.

Resolución

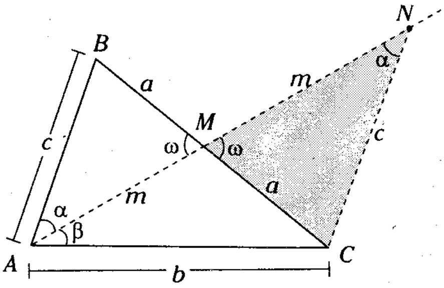


Figura 4.33

Si $b > c$ → tenemos que demostrar que $\alpha > \beta$

Para ello prolongamos $\overline{AM}$ hasta el punto N, tal que $MN = MA = m$, sean $BM = MC = a$ y m∢NMC = m∢AMB = ω (∢s opuestos por el vértice).

Los triángulos AMB y NMC son congruentes

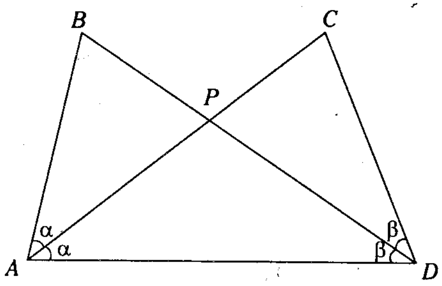
→ $AB = NC = c$ y m∢MAB = m<MNC = α

En el $\triangle ANC$, $b > c$

Por lo tanto $\alpha > \beta$, con lo cual queda demostrado la conjetura.

Problema 6

En la figura mostrada, $\alpha > \beta$. Demuestre que $BP > PC$.



Resolución

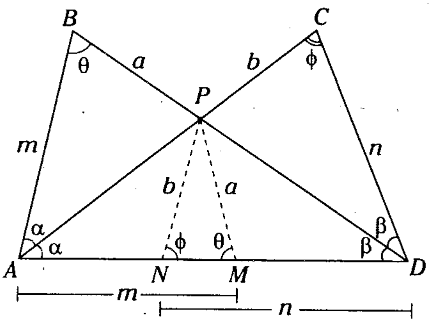


Figura 4.34

Sea $BP = a$ y $PC = b$

$\rightarrow$ tenemos que demostrar que $a > b$

Ubicamos en $\overline{AD}$ el punto M tal que

$AM = AB = m \rightarrow$ el $\triangle AMP \cong \triangle ABP$

$\rightarrow PM = BP = a$ y $m\sphericalangle AMP = m\sphericalangle ABP = \theta$

Así también en $\overline{AD}$ ubicamos el punto N tal que

$DN = DC = n \rightarrow$ el $\triangle DNP \cong \triangle DCP$

$\rightarrow PN = PC = b$ y $m\sphericalangle PND = m\sphericalangle PCD = \phi$

Luego en $\bowtie ABDC$ (Ver problema 4)

Si $\alpha > \beta \rightarrow \theta < \phi$

En el $\triangle NPM$: si $\theta < \phi \rightarrow b < a$

Por lo tanto queda demostrado que $a > b$

Problema 7

En un cuadrilátero $ABCD$, $AD = BC$ y $m\sphericalangle BCD = m\sphericalangle ADC = 90°$.

Demuestre que $\angle DAB \cong \angle CBA$

Resolución

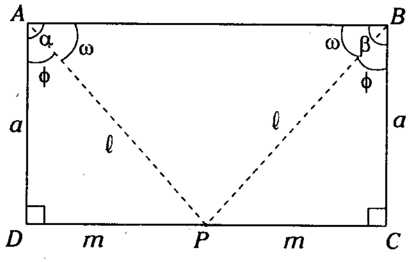


Figura 4.35

Sea

$m\sphericalangle DAB = \alpha$ y $m\sphericalangle CBA = \beta$

Tenemos que demostrar que

$\alpha = \beta$

En $\overline{DC}$ ubicamos el punto medio P

$\rightarrow DP = PC = m$

$\therefore \triangle ADP \cong \triangle BCP$ (teorema de triáng. cong.)

$\rightarrow m\sphericalangle PAD = m\sphericalangle PBC = \phi$ y

$AP = BP = \ell$

Luego en $\triangle APB$: ($AP = PB$) y del teorema de lados congruentes en un triángulo

$m\sphericalangle PBA = m\sphericalangle PAB = \omega$

$\rightarrow$ en A: $\alpha = \phi + \omega$ y

en B: $\beta = \phi + \omega$

$\therefore \alpha = \beta \rightarrow \angle DAB \cong \angle CBA$

Problema 8

En una recta se ubican los puntos A y C. Si hacia un mismo lado de la recta se ubican los puntos B y D, tal que $AD = BC$ y $m\sphericalangle DAC > m\sphericalangle BCA$, demuestre que $DC > AB$.

Resolución

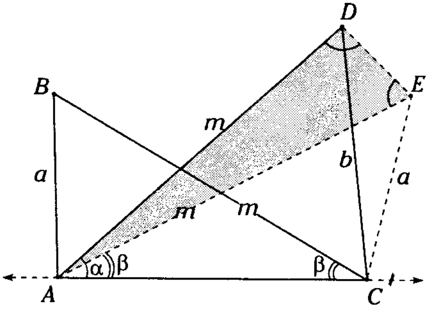


Figura 4.36

Si $\alpha > \beta \rightarrow$ tenemos que demostrar que $b > a$

Para ello construimos el triángulo AEC congruente al triángulo CBA.

$\rightarrow AE = CB = m$ y $EC = BA = a$

Luego, en el $\triangle ADE$: $m\sphericalangle AED = m\sphericalangle ADE$. De esto apreciamos que $m\sphericalangle CDE < m\sphericalangle ADE$ y $m\sphericalangle DEC > m\sphericalangle DEA$.

$\therefore$ la $m\sphericalangle DEC > m\sphericalangle CDE$

$\rightarrow$ en el $\triangle DEC$: $DC > EC$.

es decir, $b > a$ (ver problema 3)

$\therefore$ $DC > AB$

Problema 9

En los lados AB y BC de un triángulo ABC, se ubican los puntos N y M; respectivamente. Si $AM = CN$ y $m\sphericalangle MAB = m\sphericalangle NCB$, demuestre que $AN = CM$

Resolución

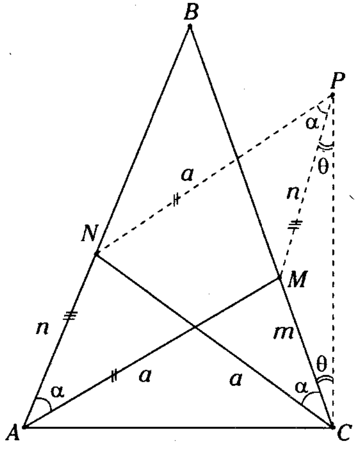


Figura 4.37

En la figura 4.37, tenemos que demostrar que

$m = n$

Para ello trazamos

$\overline{NP} // \overline{AM}$ y $\overline{MP} // \overline{AN}$

así $MP = AN = n$ y $NP = AM = a$

También de la nota al teorema de los pares de rectas paralelas.

$m\sphericalangle NPM = m\sphericalangle MAN = \alpha$

Luego en el $\triangle CNP$: $CN = NP = a$

$\rightarrow$ la $m\sphericalangle NCP = m\sphericalangle NPC$

En el $\triangle CMP$: $CM = MP$

$\therefore$ $m = n$

De lo cual queda demostrado que $AN = CM$

Problema 10

Demuestre que si en un triángulo, dos bisectrices interiores son congruentes, entonces el triángulo es isósceles (lados relativos a las bisectrices de igual longitud).

Resolución

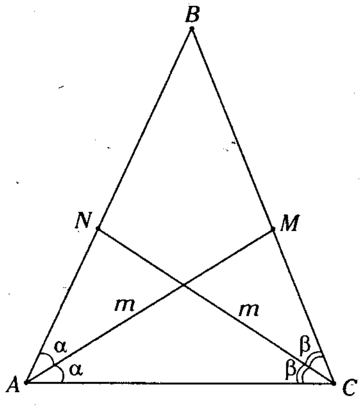


Figura 4.38

Si $m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle MAC = \alpha$

$m\sphericalangle BCN = m\sphericalangle NCA = \beta$,

entonces $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ son bisectrices interiores del triángulo relativos a los lados BC y AB, respectivamente.

Si $AM = CN \rightarrow BC = AB$,

Para demostrar que $BC = AB$, bastará con demostrar que $\alpha = \beta$. Si asumimos que $\alpha \neq \beta$ y demostramos que esto es absurdo, entonces quedará demostrado que $\alpha = \beta$.

Por lo tanto, $BC = AB$.

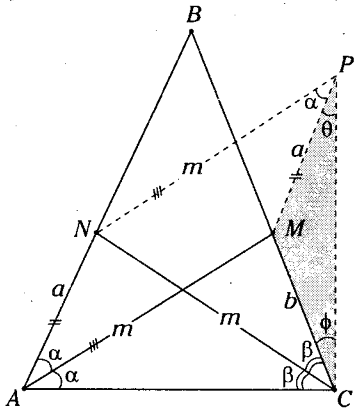


Figura 4.39

Sea $\alpha > \beta \rightarrow \alpha \neq \beta$

De los triángulos ANC y AMC (ver problema 6)

$AN < CM \rightarrow a < b$ (I)

- Por N trazamos $\overrightarrow{NP} // \overline{AM}$ y por M trazamos $\overrightarrow{MP} // \overline{AN}$, entonces

  $NP = AM = m$

  $MP = AN = a$

  y $m\measuredangle NPM = m\measuredangle NAM = \alpha$

  Luego en el $\triangle CNP$: si $NC = NP = m$

  $\rightarrow$ la $m\measuredangle NCP = m\measuredangle NPC$

  como $\alpha > \beta \rightarrow \phi > \theta$ (ver problema 3)

  entonces en el $\triangle CMP$: $a > b$ (II)

  Lo cual es contradictorio con la expresión (I)

- Análogamente, si asumimos que $\beta > \alpha$

  $\rightarrow \alpha \neq \beta$

  Demostraremos análogamente que también es contradictorio.

- De esta manera, α solo puede ser igual a β

  $\rightarrow \alpha = \beta$

  queda demostrado que $BC = AB$, es decir, el triángulo es isósceles de base AC.

Nota

Si dos bisectrices interiores de un triángulo son un iguales en longitud, el triángulo es isósceles.

Este teorema se conoce como el teorema de Steiner–Lehmus ya que en 1840, C.L.Lemus, escribió a J. Steiner pidiéndole una demostración *puramente geométrica* de dicho teorema y que Steiner algún tiempo después, demostró.

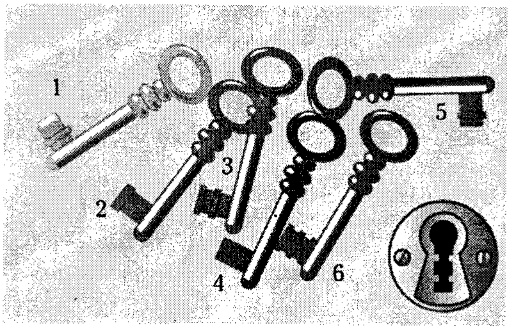
En 1976 Leo Sauré, entonces editor de la revista Eureka (hoy Crux Mathematicorum) publica un excelente artículo sobre este teorema.

Lemoine en Mathesis 2 demuestra que una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea isósceles es que tenga dos simedianas de igual longitud, también si la mediana y la bisectriz interior relativas a un mismo vértice tienen igual longitud, el triángulo es isósceles.

¿Qué ocurre si se sustituye la bisectriz interior por la exterior?

Problemas Recreativos

1. Descubra la llave que abre la cerradura.



A) 1 y 5

B) 2

C) 3

D) 4

E) 6

2. Encuentre la silueta de la siguiente imagen.

(a)

(b)

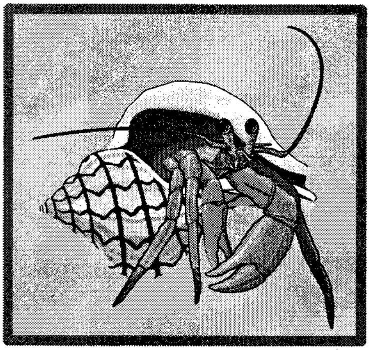
(c)

(d)

(e)

(f)

3. Halle 7 diferencias entre la figura *a* y *b*.



(a)

(b)

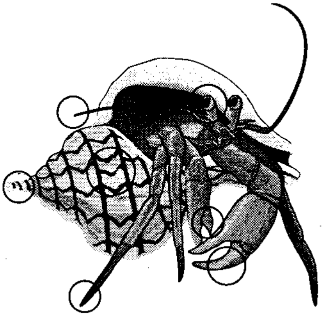
Resolución 1

La única forma de resolver este problema es examinar, una a una, las seis llaves hasta encontrar la que tiene la forma adecuada para encajar en la cerradura. Esta estrategia de prueba y error consiste en efectuar en este caso mentalmente, una serie de intentos con el objetivo de probar la veracidad de una hipótesis. La solución es la llave número 6.

Resolución 2

La silueta que corresponde a la figura es la (a).

Resolución 3

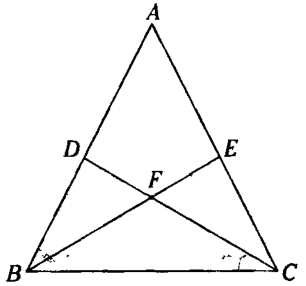


Problemas Propuestos

1. En un triángulo ABC, se ubican los puntos M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, tal que $m\sphericalangle MCA = m\sphericalangle NAC$ y $AB = BC$. Indique qué se cumple.

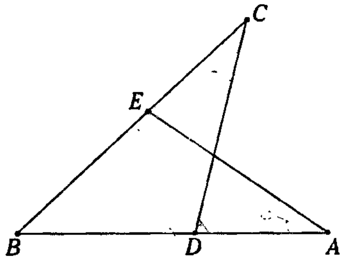
A) $BM > BN$
B) $BM < BN$
C) $BM = BN$
D) $CM > AN$
E) $AN > CM$

2. En la figura mostrada, $AB = AC$ y $BD = EC$. Señale lo que se cumple



A) $AE = BD$
B) $AD = EC$
C) $BF = FE$
D) $BF = FC$
E) $BE = CD = BC$

3. Dadas las siguientes proposiciones, dé el valor de verdad. Cuando $DB = BE$ y $m\sphericalangle BCD = m\sphericalangle BAE$



I. $\triangle BEA \cong \triangle BDC$
II. $\angle EAD \cong \angle ECD$
III. $\angle BDC \cong \angle BEA$
IV. $m\sphericalangle DEA = m\sphericalangle CDE$

A) VVVV B) VFVV C) VFVF
D) VFFV E) FVVF

4. Si en un triángulo ABC, $AB = 5$; $AC = 7$ y $m\sphericalangle ABC > m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle BCA$. Calcule BC, sabiendo que es un número entero.

A) 3 B) 4 C) 6
D) 8 E) 11

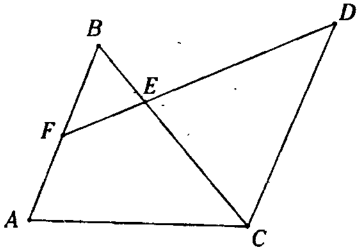
5. Dado un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos M y N, respectivamente, tal que $AB = MC$; $m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle CMN$; $m\sphericalangle MBN = m\sphericalangle MNB$ y $m\sphericalangle BAC = 50°$. Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 50° B) 40° C) 60°
D) 25° E) 75°

6. En un triángulo ABC, $AB = AC$ y $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle BAC$. Se ubican los puntos N y M en $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, tal que $m\sphericalangle NAB = m\sphericalangle MCA$. Si $AM = 3$ y $CN = 5$, calcule AC.

A) 6 B) 5 C) 7
D) 8 E) 10

7. En la figura mostrada, los triángulos ABC y CED son congruentes, donde $AC=CD$. Si $EC=5$ y $EF=2$, calcule AF.



A) 2 B) 5 C) 4
D) 7 E) 3

8. En un cuadrilátero $ABCD$, $AB=CD=5$; $\overline{BC}//\overline{AD}$; $BC=2$ y $m\measuredangle ABC=2(m\measuredangle ADC)$. Calcule AD.

A) 4 B) 5 C) 7
D) 10 E) 12

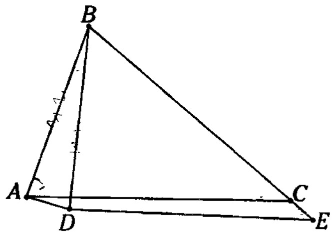
9. En un triángulo ABC, si

$$\frac{m\measuredangle ABC}{3}=\frac{m\measuredangle BAC}{2}=m\measuredangle ACB$$

y $AB=5$. Calcule AC.

A) 5 B) 8 C) $5\sqrt{3}$
D) 10 E) 15

10. En la figura mostrada, $AB=BD$ y los triángulos ABC y BDE son congruentes. Calcule $\dfrac{m\measuredangle BCA}{m\measuredangle DAC}$.

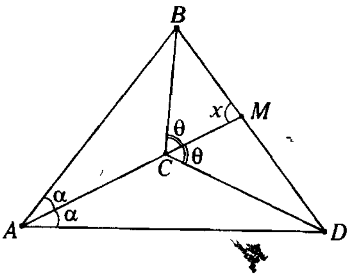


A) 1 B) 1,5 C) 0,5
D) 0,33 E) 2

11. En un triángulo ABC, en $\overline{BC}$ se ubica el punto M, tal que $m\measuredangle MAB=m\measuredangle MAC$ y $BM=MC$. Se concluye así que

A) AB puede ser igual a AC.
B) AB puede ser mayor que AC.
C) AB puede ser menor que AC.
D) $AB=AC$
E) $\triangle ABM\cong\triangle AMC$

12. En la figura mostrada, se cumple



A) $x<90°$
B) $x=90°$
C) $60°<x<90°$
D) $90°<x<120°$
E) $0°<x<180°$

13. En un cuadrilátero $ABCD$, donde $m\measuredangle ABC=m\measuredangle ADC=90°$, sean $m\measuredangle ACD=2(m\measuredangle ACB)$ y $AB=2$. Calcule AD dado que es un valor entero.

A) 4 B) 2 C) 3
D) 6 E) 5

14. En un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubican los puntos consecutivos M, Q y N, tal que $AM=NC$. Si Q es punto medio de $\overline{MN}$ y $m\measuredangle NBC=m\measuredangle ABM=20°$, calcule la $m\measuredangle BQC$.

A) 40° B) 80° C) 70°
D) 90° E) 100°

15. Dado un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubica el punto M, tal que $CM = AB$. Si m$\sphericalangle BAC = 40°$ y m$\sphericalangle BMC = 70°$, calcule m$\sphericalangle BCA$.

A) 30° B) 40° C) 35°
D) 70° E) 20°

16. Dado un triángulo ABC, en la región interior se ubica un punto P desde el cual se traza $\overline{PH}$ perpendicular a $\overline{AC}$. Si $AH = HC$ y m$\sphericalangle PBA$ = m$\sphericalangle PBC$, asumimos que

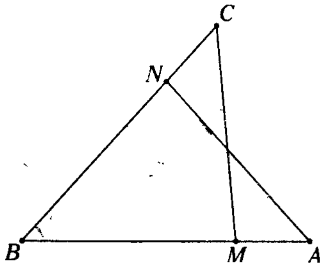
A) $AB=BC$ B) $AB=AC$ C) $BC=AC$
D) $BC \geq AB$ E) $AB=BC=AC$

17. Dadas las siguientes proposiciones, indique si son verdaderas o falsas.

I. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes.
II. Si en un cuadrilátero $ABCD$, $BC=CD$ y m$\sphericalangle BAC$=m$\sphericalangle DAC$, entonces los triángulos ABC y ADC son congruentes.
III. Si un cuadrilátero $ABCD$, $AC=BD$ y m$\sphericalangle ABD$=m$\sphericalangle ACD$=90°, concluimos que $AB=CD$

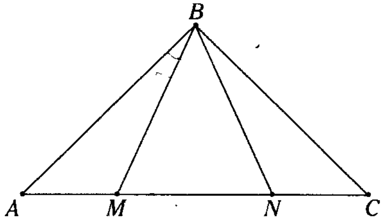
A) VFV B) FVV C) VVV
D) VVF E) FFV

18. En la figura mostrada, $AN = BM$ y $CM = BN$. Si los triángulos ABN y BCM son congruentes, señale la proposición correcta.



A) $AM=2(CN)$ B) $CN=2(AM)$ C) $AM=CN$
D) $AC=BM$ E) $AC=BN$

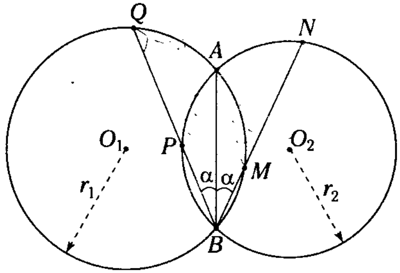
19. En la figura mostrada, $AM = NC$ y m$\sphericalangle ABM$=m$\sphericalangle CBN$. Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:



I. $\triangle ABM \cong \triangle CBN$
II. $\triangle ABN \cong \triangle CBM$
III. $BM=BN$ y $AB = BC$
IV. $AB=BN$ y $BC=BM$

A) VVFF B) VVVV C) VFFV
D) FFFV E) VVVF

20.



De la figura mostrada, señale la proposición correcta.

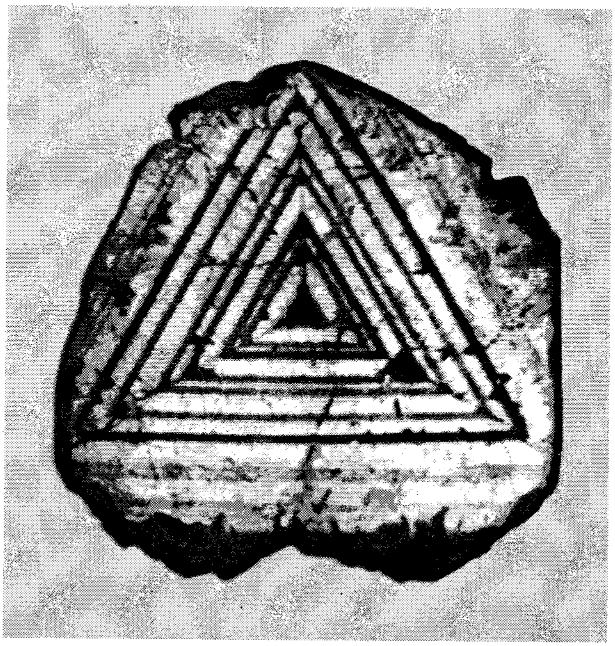
A) Si $r_1 > r_2 \rightarrow PQ>MN$
B) $PQ = MN \leftrightarrow r_1 > r_2$
C) Siempre $PQ = MN$
D) No siempre $PQ = MN$
E) $AQ = AN$ y $AM = AP$

1	C
2	D
3	B
4	C
5	A
6	D
7	E
8	C
9	D
10	E
11	D
12	B
13	C
14	D
15	B
16	A
17	E
18	C
19	E
20	C

Claves

Capítulo V

Triángulos



Una sección transversal de una turmalina de Madagascar revela una estructura prismática con varios triángulos concéntricos.

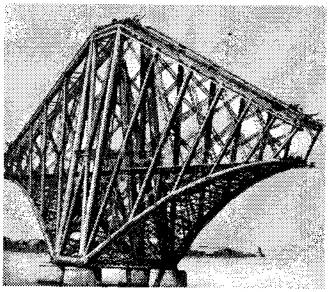
Triángulos

OBJETIVOS

- Definir el triángulo rectilíneo.
- Utilizar adecuadamente las propiedades de los triángulos de acuerdo a sus condiciones.
- Diferenciar las principales líneas notables asociadas a un triángulo.
- Construir los triángulos congruentes según los criterios planteados.

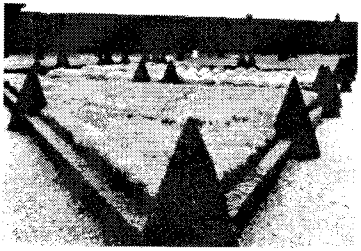
INTRODUCCIÓN

Sabemos que los pueblos que habitan en las orillas de los ríos frecuentemente necesitan cruzar la corriente de agua y para lograrlo utilizan lozas de piedra entre las dos orillas. No obstante, si el torrente de agua resulta caudaloso y bastante ancho, entonces las lozas de piedras empleadas anteriormente no son suficientes y optan por usar un larguero de madera. Debido a que el larguero tiende a ceder hacia su mitad, se aumenta su resistencia, con el apuntalamiento de los extremos, es decir, tratando de formar triángulos.



Así como ello podemos citar las múltiples utilidades que el hombre le da al triángulo, de allí la importancia de conocer sus propiedades.

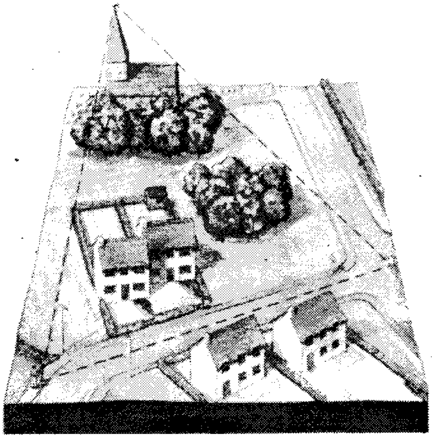
Un conocimiento más profundo y ordenado del triángulo lo tuvieron los egipcios y lo emplearon en la



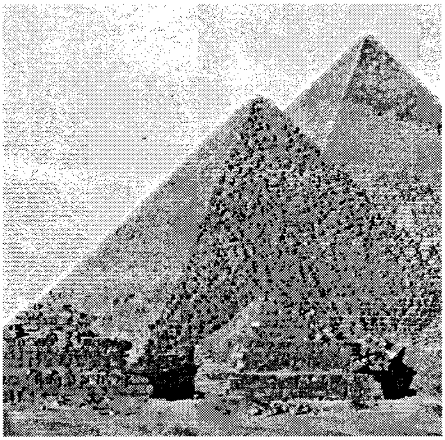
En los parques y jardines una disposición triangular es usada para dar armonía y estética, como el de los jardines ingleses.

No se tiene resgistros desde qué tiempo, el triángulo es parte de las construcciones del hombre, ya que su presencia se advierte en todas las culturas y en todos los tiempos.

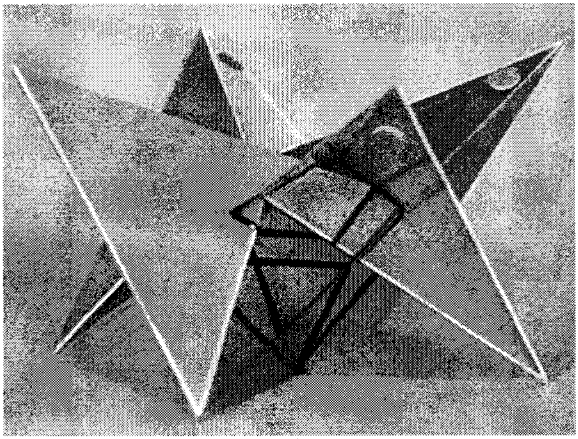
construcción de las pirámides, llegando a establecer la noción de igualdad de formas y tamaños. Con el transcurrir del tiempo los geómetras denominaron triángulos congruentes a aquellos triángulos que tenían la misma forma o el mismo tamaño que fueron usados para estudiar y comparar las propiedades del triángulo.



La topografía utiliza los triángulos para hacer los levantamientos de sus perfiles longitudinales.



En la construcción de las pirámides los egipcios tenían nociones de congruencia de triángulos ya que sus caras tienen la misma forma y el mismo tamaño.

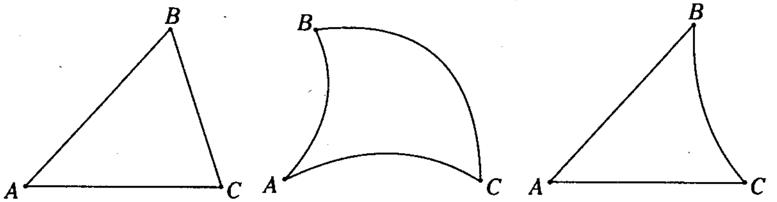


Los triángulos como expresión de arte.

TRIÁNGULOS - PARTE I

DEFINICIÓN

Es aquella figura geométrica formada al unir tres puntos no colineales mediante segmentos de línea coplanares, los cuales se intersecan, solo en los puntos mencionados.



(a) (b) (c)

Figura 5.1

Epidermis: un primer plano de los surcos epiteliales nos muestra triángulos mixtilíneos.

La figura 5.1(a): representa un triángulo rectílineo, ya que para unir los puntos se han empleado segmentos de recta.

La figura 5.1(b): muestra un triángulo curvilíneo porque se utilizan segmentos de línea curva para unir los puntos.

La figura 5.1(c): expone un triángulo mixtilíneo debido a que para unir los puntos necesitan tanto segmentos de línea recta como los de línea curva.

Observación

En la figura 5.2, los puntos A, B y C son colineales, pero al unir A, B y C mediante las líneas mostradas, también se forman triángulos, los cuales son excepciones de la definición planteada.

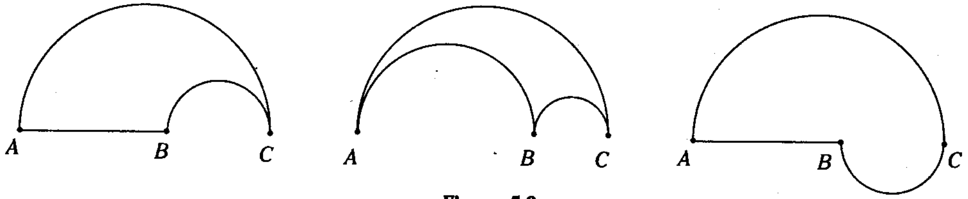


Figura 5.2

Después de haber establecido la definición general del triángulo, en adelante nuestro estudio estará dedicado exclusivamente al triángulo rectilíneo (comúnmente denominado *triángulo*), en el cual se planteará su definición y los diferentes teoremas.

TRIÁNGULO RECTÍLINEO

DEFINICIÓN

Es aquella figura geométrica que resulta de la reunión de tres segmentos de recta unidos por sus extremos a quienes se les denomina vértices.

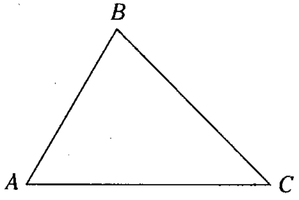


Figura 5.3

ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO

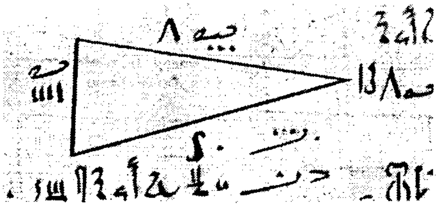
Vértices : A, B y C
Lados : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$

Notación: $\triangle ABC$
Se lee triángulo de vértices A, B y C.

Nota

Con respecto a la notación cabe mencionar que no existe un orden específico de cómo colocar las letras mayúsculas. Por lo tanto, también se puede denotar así

$\triangle BCA$
$\triangle CAB$



El triángulo es, quizás, una de las primeras figuras que el hombre estudió (papiro de Rhind - 1650 a.n.e.).

Por razones prácticas al triángulo rectilíneo se le denomina simplemente **triángulo**. Por consiguiente, cuando mencionemos triángulo nos estaremos refiriendo al triángulo rectilíneo.

Dado que en todo triángulo se presentan tres pares angulares, en la figura 5.4, se muestran los del triángulo ABC, $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle BCA$, cuyas medidas son α, β y θ, respectivamente.

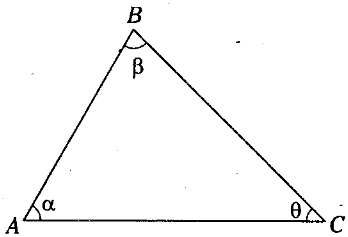


Figura 5.4

Cuando se mencionen pares angulares en el triángulo, nos estaremos refiriendo a los tres pares angulares.

Región interior y exterior de un triángulo

Todo triángulo divide al plano que lo contiene en tres conjuntos de puntos: la región interior, la región exterior y el triángulo propiamente dicho.

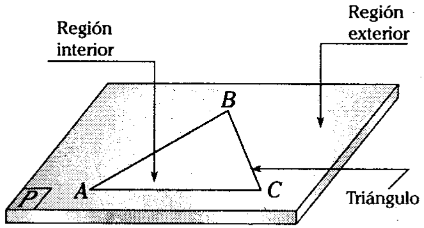


Figura 5.5

A la reunión de un triángulo y la región interior se le denomina región triangular.

La figura 5.6 muestra la región triangular ABC.

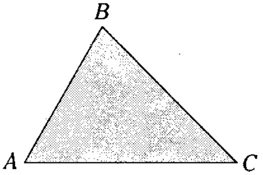


Figura 5.6

Notación: $\blacktriangle ABC$, región triangular ABC.

También es importante mencionar que en la región exterior se deben diferenciar tres zonas características, las cuales se indican en la siguiente figura:

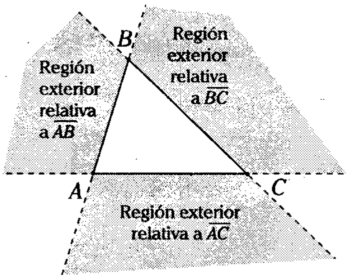


Figura 5.7

Cuando nos solicitan ubicar un punto en la región externa, nos deben especificar relativo a qué lado se está considerando.

Ángulo interior del triángulo

Es cualquiera de los ángulos, determinado por un par angular del triángulo.

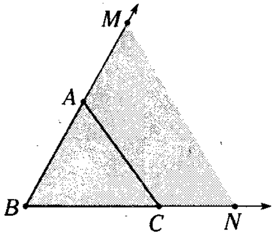


Figura 5.8

En el $\triangle ABC$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ forman el par angular ABC ($\angle ABC$).

$\overrightarrow{BM}$ y $\overrightarrow{BN}$ forman el ángulo MBN ($\measuredangle MBN$ o $\measuredangle ABC$).

$\rightarrow$ el $\angle ABC$ determina el $\measuredangle MBN$ ($\measuredangle ABC$).

$\therefore$ $\measuredangle ABC$: ángulo interior del $\triangle ABC$.

> **Nota**
>
> Dos lados de un triángulo no forman un ángulo, sino un par angular. Pero dos lados determinan un ángulo al cual se le llama ángulo interior del triángulo.

Ángulo exterior del triángulo

Es el ángulo que forma un par lineal con uno de los ángulos interiores del triángulo.

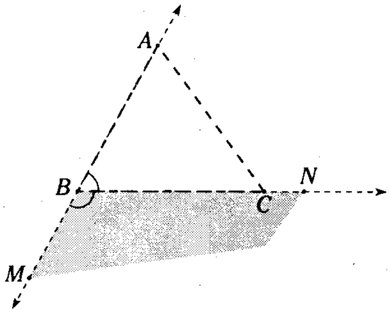


Figura 5.9

- $\measuredangle ABC$: es uno de los ángulos interiores del $\triangle ABC$.
- $\measuredangle NBM$: forma un par lineal con el $\measuredangle ABC$.

Entonces $\measuredangle NBM$ es un ángulo exterior del $\triangle ABC$.

> **Nota**
>
> En un triángulo se pueden trazar 3 ángulos interiores y 6 ángulos exteriores.

PERÍMETRO DE UNA REGIÓN PLANA

Se denomina perímetro de una región plana, a la línea cerrada (rectílinea, curvilínea o mixtilínea) que la limita. Para calcular la longitud del perímetro de una región plana debemos calcular la longitud de esta línea cerrada.

Para la región triangular *ABC* que se exhibe a continuación, el perímetro vendría a ser el triángulo *ABC*.

La longitud del perímetro de la región triangular se calcula al sumar las longitudes de sus lados.

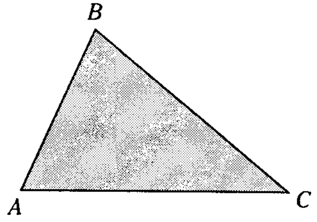


Figura 5.10

$$2p_{\blacktriangle ABC} = AB + BC + AC$$

$2p_{\blacktriangle ABC}$: La longitud del perímetro de la región triangular *ABC*.

Es preciso indicar que para el vértice *A*; su lado puesto es $\overline{BC}$, convencionalmente a la longitud de dicho lado se le asigna el valor de *a*, esto es similar para cada vértice.

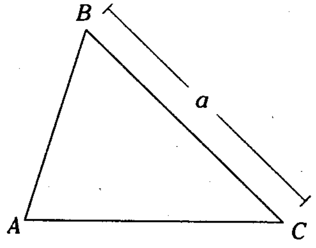


Figura 5.11

En una región triangular tendríamos.

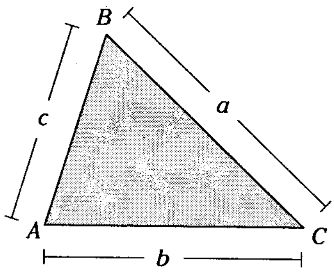


Figura 5.12

Dado que *a*, *b* y *c* son las longitudes de los lados del triángulo *ABC*, consideremos

$$2p_{\blacktriangle ABC} = a + b + c$$

De manera convencional

$p_{\blacktriangle ABC}$: longitud del semiperímetro de la región triangular *ABC*.

$$p_{\blacktriangle ABC} = \frac{a+b+c}{2}$$

TEOREMAS FUNDAMENTALES EN EL TRIÁNGULO

Teorema

En todo triángulo la suma de las medidas de los pares angulares que forman sus lados es 180º.

Demostración

Consideramos el triángulo *ABC*.

Por el vértice *B* trazamos una recta paralela a $\overline{AC}$.

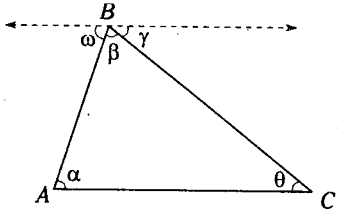


Figura 5.13

Se nota en B

$\rightarrow \quad \omega + \beta + \gamma = 180°$ (I)

Por paralelas (ángulos alternos)

$\omega = \alpha$ y $\gamma = \theta$ (II)

(II) en (I)

$\therefore \quad \boxed{\alpha + \beta + \theta = 180°}$

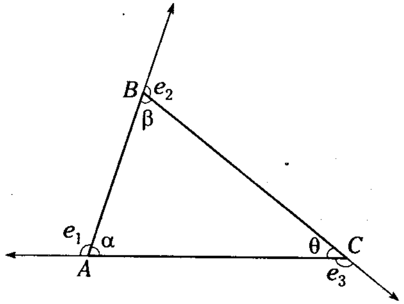
Teorema

La suma de las medidas de los ángulos exteriores del triángulo, trazados uno en cada vértice es 360°.

Demostración

Considerando el triángulo ABC.

- Primer método



(a)

Del teorema anterior

$\alpha + \beta + \theta = 180°$ (I)

en A, B, C se observa

$\alpha + e_1 = 180°$ (II)

$\beta + e_2 = 180°$ (III)

$\theta + e_3 = 180°$ (IV)

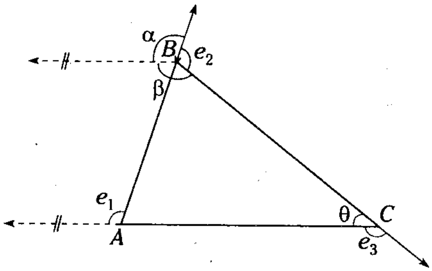
(II) + (III) + (IV)

$\alpha + \beta + \theta + e_1 + e_2 + e_3 = 540°$ (V)

(I) en (V)

$\therefore \quad \boxed{e_1 + e_2 + e_3 = 360°}$

- Segundo método



(b)

Figura 5.14

Por el vértice B trazamos una recta paralela a $\overline{AC}$.

Se nota en B:

$\rightarrow \quad \alpha + \beta + e_2 = 360°$ (I)

Por el postulado de los ángulos correspondientes

$\alpha = e_1$ (II)

$\beta = e_3$ (III)

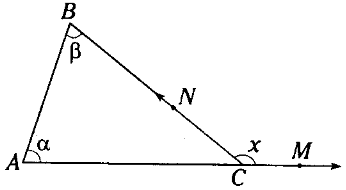
(II) y (III) en (I)

$e_1 + e_2 + e_3 = 360°$

$\therefore \quad \boxed{e_1 + e_2 + e_3 = 360°}$

Teorema

La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de sus ángulos interiores remotos. Es decir



(a)

$\boxed{x = \alpha + \beta}$

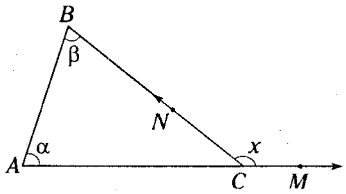
$\sphericalangle MCN$: ángulo exterior del $\triangle ABC$.

$\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC$: ángulos interiores remotos del $\sphericalangle MCN$.

Demostración

Considerando el triángulo ABC.

- Primer método



(b)

Sea la medida del par angular BCA igual a θ.

Se nota en C

$$\theta + x = 180° \quad \text{(I)}$$

del primer teorema fundamental del triángulo

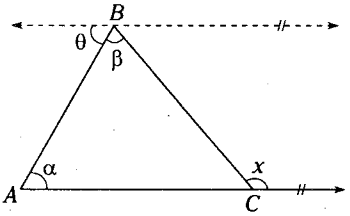
$$\alpha + \beta + \theta = 180° \quad \text{(II)}$$

(I) – (II)

$$\theta + x - \alpha + \beta - \theta = 0°$$

$$\therefore \; \boxed{x = \alpha + \beta}$$

- Segundo método



(c)

Figura 5.15

Por el vértice B trazamos una recta paralela a $\overline{AC}$.

Por paralelas (ángulos alternos)

$$\alpha = \theta \quad \text{(I)}$$

Por paralelas (ángulos alternos)

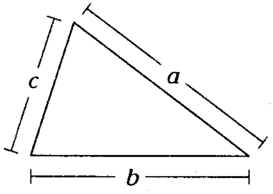
$$x = \theta + \beta \quad \text{(II)}$$

(I) en (II)

$$\therefore \; \boxed{x = \alpha + \beta}$$

Teorema

En todo triángulo la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados, pero mayor que la diferencia de las longitudes de estas. A este teorema se le denomina desigualdad triangular o existencia.



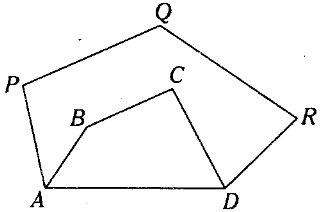
(a)

Si $b \geq a \geq c$

$$\rightarrow \; \boxed{b - c < a < b + c}$$

Demostración

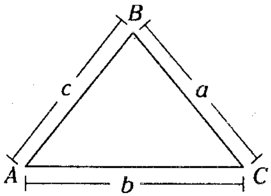
Para esta demostración utilizaremos el teorema de los poligonales.



(b)

$$\boxed{AD < AB + BC + CD < AP + PQ + QR + RD}$$

Entonces



(c)

Figura 5.16

Para los puntos A y C: $b < a + c$ (I)

Para los puntos B y C: $a < b + c$ (II)

De (I)

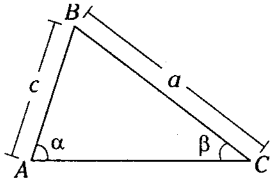
$b - c < a$ (III)

De (II) y (III)

$$b - c < a < b + c$$

Teorema

Al lado de mayor longitud de dos lados de un triángulo se opone el par angular de mayor medida de los dos que se oponen a dichos lados y viceversa.



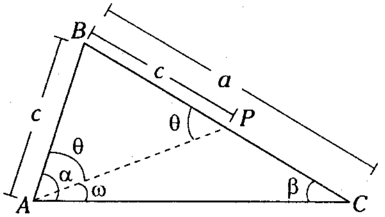
(a)

Si $BC > AB$ $(a > c)$,

$\rightarrow$ $\boxed{\alpha > \beta}$

Usualmente a este teorema se le denomina Teorema de la correspondencia en un triángulo.

Demostración



(b)

Figura 5.17

Como $BC > AB$, consideramos en $\overline{BC}$ el punto P, tal que $BP = BA$. Por el teorema del triángulo isósceles (Cap. IV) en el triángulo ABP, tenemos

$m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle BPA = \theta$

Sea

$m\sphericalangle PAC = \omega$, se observa

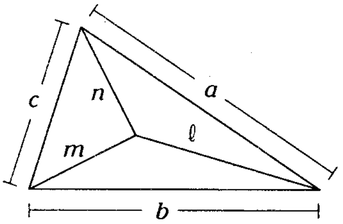
$\alpha = \theta + \omega$ y $\theta = \omega + \beta$

$\rightarrow$ $\alpha = \beta + 2\omega$

$\therefore$ $\boxed{\alpha > \beta}$

Teorema

En todo triángulo, la suma de las distancias de un punto que pertenece a la región interior hacia los vértices de dicho triángulo es menor que la longitud del perímetro y mayor que la mitad de este.

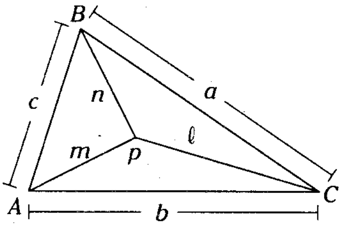


(a)

$$\frac{a + b + c}{2} < m + n + \ell < a + b + c \quad \text{ó}$$

$$p < m + n + \ell < 2p$$

Demostración



(b)

Figura 5.18

Por teorema de los poligonales, para

A y B: $m + n < a + b$

A y C: $m + \ell < a + c$

B y C: $n + \ell < b + c$

Sumando estas inecuaciones y simplificando

$$m + n + \ell < a + b + c \qquad \text{(I)}$$

Por teorema

$\triangle APC$: $b < m + \ell$

$\triangle APB$: $c < m + n$

$\triangle BPC$: $a < n + \ell$

Sumando y simplificando de manera similar.

$$\frac{a+b+c}{2} < m + n + \ell \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\boxed{\frac{a+b+c}{2} < m + n + \ell < a + b + c}$$

Observación

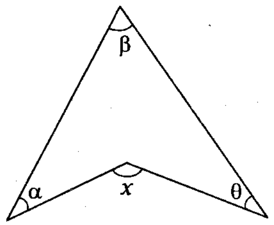
Si $m > n > \ell$, entonces se debe tener en cuenta que

$$\boxed{a + b + c > 2(m - \ell)}$$

TEOREMAS ADICIONALES

Es preciso indicar que para la solución de algún determinado ejercicio no necesariamente se utilizarán los teoremas de un capítulo únicamente, por esta razón, se plantean en el capítulo de triángulos, los siguientes teoremas adicionales.

1.

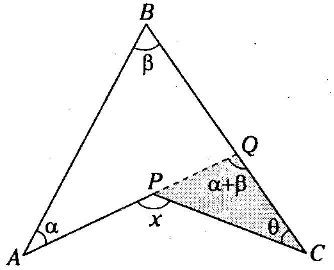


(a)

$$\boxed{x = \alpha + \beta + \theta}$$

Demostración

- Primer método



(b)

Se prolonga $\overline{AP}$ hasta Q.

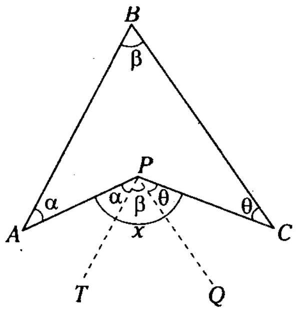
En $\triangle ABQ$

$m\measuredangle PQC = \alpha + \beta$

En $\triangle PQC$

$\therefore\ x = \alpha + \beta + \theta$

- Segundo método



(c)

Figura 5.19

Por P se traza

$\overline{PT} \,//\, \overline{AB}$ y $\overline{PQ} \,//\, \overline{BC}$

Por ángulos alternos internos

$m\measuredangle APT = \alpha$ y $m\measuredangle QPC = \theta$

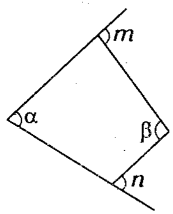
Por ángulos de lados paralelos

$m\measuredangle TPQ = \beta \ \rightarrow\ m\measuredangle ABC = \beta$

Por ángulos consecutivos, en P

$\therefore\ x = \alpha + \beta + \theta$

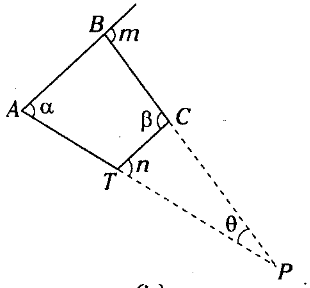
2.



(a)

$$\alpha + \beta = m + n$$

Demostración



(b)

- Primer método

  Prolongamos $\overline{BC}$ y $\overline{AT}$ hasta que se intersequen en P.

  Sea m ∢ $TPC = \theta$

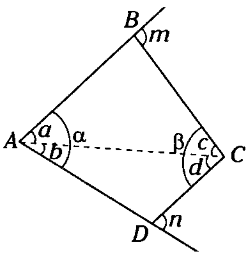
  En $\triangle TPC$: $\beta = \theta + n$ (I)

  En $\triangle ABP$: $\theta + \alpha = m$ (II)

  (I) y (II) : $\beta + \theta + \alpha = m + n + \theta$

  $\therefore \ \alpha + \beta = m + n$

- Segundo método



(c)

Figura 5.20

Trazamos $\overline{AC}$

$\triangle ABC$: $m = a + c$ (I)

$\triangle ADC$: $n = b + d$ (II)

Sumando (I) y (II)

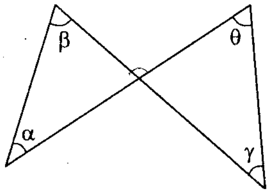
$m + n = a + b + c + d$ (III)

Pero $\alpha = a + b$ y $\beta = c + d$

Reemplazando en (III)

$\therefore \ m + n = \alpha + \beta$

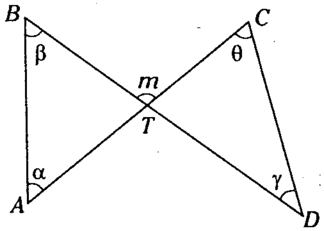
3.



(a)

$$\alpha + \beta = \theta + \gamma$$

Demostración



(b)

Figura 5.21

En $\triangle ABT$:

$m = \alpha + \beta$ (I)

En $\triangle CTD$:

$m = \theta + \gamma$ (II)

De (I) y (II)

$\therefore \ \alpha + \beta = \theta + \gamma$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Los triángulos se clasifican de acuerdo a las medidas de los pares angulares formados en dicho triángulo y las longitudes de sus lados.

Según las medidas de los pares angulares

Triángulo acutángulo. Es aquel triángulo en el cual las medidas de los pares angulares son menores que 90°.

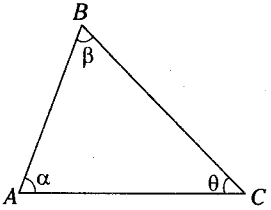


Figura 5.22

Si α, β y θ son menores que 90°, entonces el triángulo *ABC* es acutángulo.

Triángulo rectángulo. Es aquel triángulo en el cual uno de los pares angulares mide 90°.

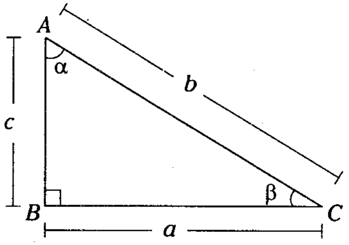


Figura 5.23

Si $m\measuredangle ABC = 90°$ entonces el triángulo *ABC* es un triángulo rectángulo recto en *B*.

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: catetos

$\overline{AC}$: hipotenusa

En la figura 5.23, se cumple las siguientes relaciones:

$$\alpha + \beta = 90° \qquad b^2 = a^2 + c^2$$

Triángulo obtusángulo. Es aquel triángulo en el cual la medida de uno de los pares angulares es mayor que 90°.

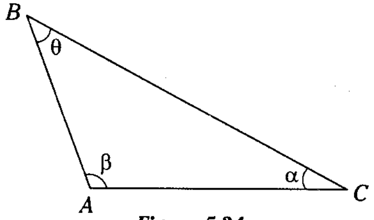


Figura 5.24

Si $\beta > 90°$ entonces el triángulo *ABC* es obtusángulo, además α y θ son menores que 90°.

Observación

Naturaleza de un triángulo. Según las longitudes de los lados de un triángulo, podemos determinar el tipo de triángulo en base a las siguientes características:

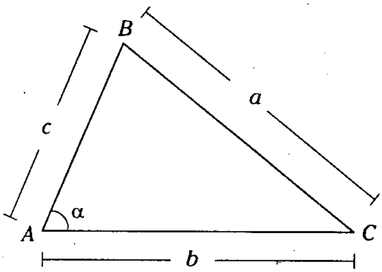


Figura 5.25

Si $a > b$ y $a > c$ y
$a^2 < b^2 + c^2 \rightarrow \alpha < 90°$
y el triángulo es acutángulo.
Si $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \alpha = 90°$
y el el triángulo es rectángulo.
Si $a^2 > b^2 + c^2 \rightarrow \alpha > 90°$
y el el triángulo es obtusángulo.

A la reunión de los triángulos **acutángulos** y **obtusángulos** se les conoce como triángulos **oblicuángulos**.

Según las longitudes de sus lados

Triángulo escaleno. Es aquel triángulo cuyos lados son de diferente longitud.

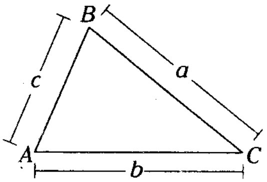


Figura 5.26

Si $a \neq b$, $a \neq c$ y $b \neq c$, entonces el triángulo ABC es un triángulo escaleno.

Triángulo isósceles. Es aquel triángulo que solo presenta dos lados de igual longitud. En todo triángulo isósceles el lado desigual o distinto recibe el nombre de base, mientras que a los lados de igual longitud se les denomina lados laterales.

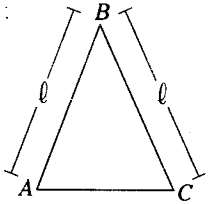


Figura 5.27

Si $AB = BC$, el triángulo ABC es un triángulo isósceles de base AC.

Nota

En todo triángulo isósceles, a los lados de igual longitud se le oponen ángulos internos de igual medida y viceversa.

De la figura,
si $AB=BC$
$\rightarrow$ $m\measuredangle BAC = m\measuredangle BCA$
(Vea la demostración en el capítulo IV)

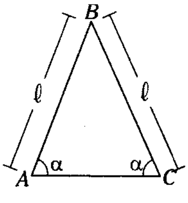


Figura 5.28

Triángulo equilátero. Es aquel triángulo cuyos lados son de la misma longitud.

Por lo tanto también sus ángulos internos son de igual medida.

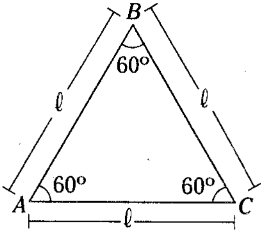


Figura 5.29

Si $AB = BC = AC$, entonces el triángulo ABC es un triángulo equilátero, además cada uno de los pares angulares mide 60°.

Observación

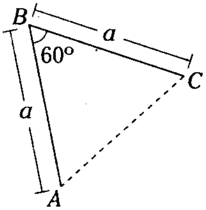


Figura 5.30

Si $AB = BC$ y $m\measuredangle ABC = 60°$, al trazar $\overline{AC}$ el triángulo ABC es equilátero.

Demostración

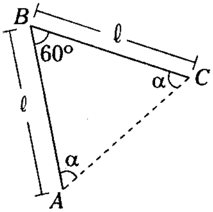


Figura 5.31

- Como $AB = BC$, el $\triangle ABC$ es isósceles
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BCA = \alpha$.
- Suma de las medidas de los ángulos internos.
  $\alpha + \alpha + 60° = 180°$ $\rightarrow$ $\alpha = 60°$
  $\therefore$ $\triangle ABC$ es equilátero

LÍNEAS NOTABLES

Reciben ese nombre aquellos segmentos de recta utilizados con frecuencia para enunciar o resolver determinados problemas.

Ceviana

Es aquel segmento de recta que une un vértice del triángulo con un punto cualquiera de su lado opuesto o la prolongación de este.

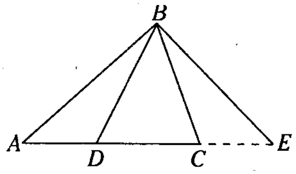


Figura 5.32

Para el triángulo ABC
$\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ son cevianas
$\overline{BD}$: ceviana interior realtiva a $\overline{AC}$..
$\overline{BE}$: ceviana exterior relativa a $\overline{AC}$.

Observación

Según la definición $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ son también cevianas relativas a $\overline{AC}$.
Además
$\overline{BP}$: ceviana exterior relativa a $\overline{CA}$.
$\overline{BQ}$: ceviana exterior relativa a $\overline{AC}$.

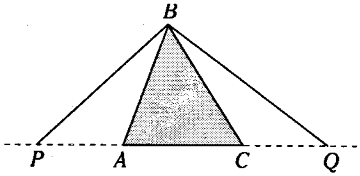


Figura 5.33

Se da el nombre de ceviana interior porque un extremo de la ceviana está en el lado opuesto, mientras que el nombre de la ceviana exterior, se otorga cuando un extremo está en la prolongación del lado opuesto. En todo triángulo se pueden trazar infinitas cevianas.

Mediana

Es aquel segmento de recta que une un vértice con el punto medio de su lado opuesto.

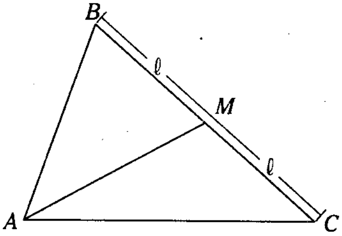


Figura 5.34

En la figura, $\overline{AM}$ es mediana relativa al lado BC.

En todo triángulo se pueden trazar tres medianas, una relativa para cada lado.

Mediatriz

Es la recta perpendicular a un lado del triángulo, coplanar al triángulo, que contiene al punto medio de dicho lado.

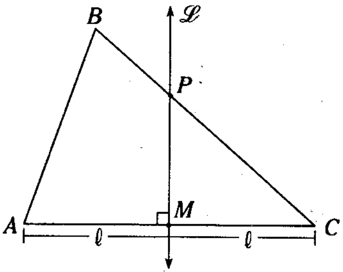


Figura 5.35

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overline{AC}$ y $AM = MC$

$\rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: mediatriz de $\overline{AC}$

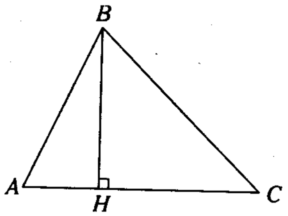
además

$\overline{MP}$: segmento mediatriz de $\overline{AC}$

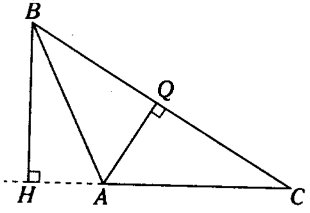
En todo triángulo se pueden trazar tres mediatrices coplanares, una relativa para cada lado.

Altura

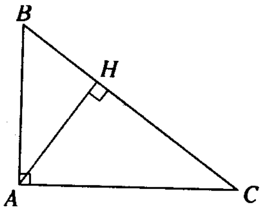
Es aquel segmento perpendicular a la recta que contiene a un lado del triángulo, trazado desde el vértice opuesto a dicho lado, cuyo extremo está en dicha recta.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.36

En la figura 5.36 (a), representan un triángulo ABC acutángulo en el cual se ha trazado la altura BH que es la altura relativa a $\overline{AC}$.

En la figura 5.36 (b), el triángulo ABC obtusángulo en el cual se han trazado las alturas BH y AQ.

En la figura 5.36 (c), el triángulo ABC es rectángulo donde $\overline{BA}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AH}$ son alturas.

Bisectriz interior

Es aquella ceviana interior que forma con cada uno de los lados adyacentes a ella, **pares angulares de igual medida**.

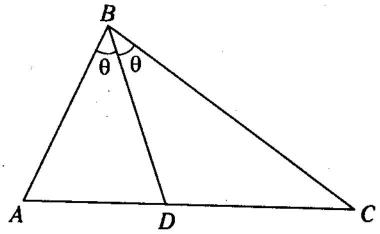


Figura 5.37

En la figura 5.37, se expone al triángulo ABC en el cual se ha trazado $\overline{BD}$ la cual es la bisectriz interior relativa a $\overline{AC}$.

Bisectriz exterior

Es aquella ceviana exterior que biseca un ángulo exterior del triángulo.

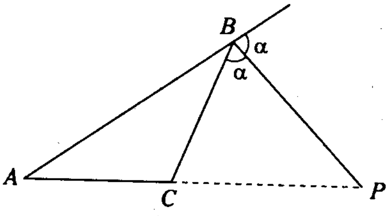


Figura 5.38

En la figura 5.38, se muestra al triángulo ABC, en el cual se ha trazado la bisectriz exterior BP.

Observación

En el vértice opuesto a la base de un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo exterior es paralela a la base de dicho triángulo. Por lo cual $\overline{BP}$ no sería ceviana y no cumple las condiciones de bisectriz exterior.

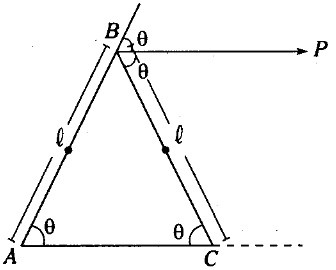
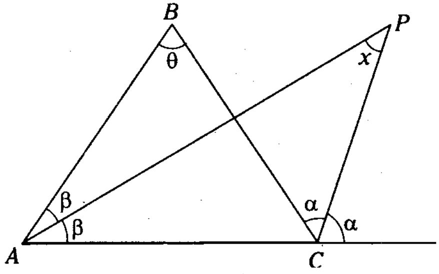


Figura 5.39

De la figura, como m∢PBC = m∢ACB

$\rightarrow\ \overrightarrow{BP} // \overline{AC}$

Demostración



(b)

Figura 5.40

$\triangle APC$: $\alpha = \beta + x$ (I)

$\triangle ABC$: $2\alpha = 2\beta + \theta$ (II)

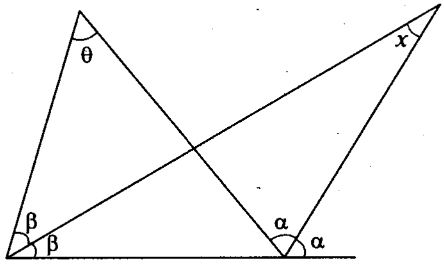
(I) en (II): $2(\beta + x) = 2\beta + \theta$

$2\beta + 2x = 2\beta + \theta$

$\therefore\ x = \dfrac{\theta}{2}$

TEOREMAS

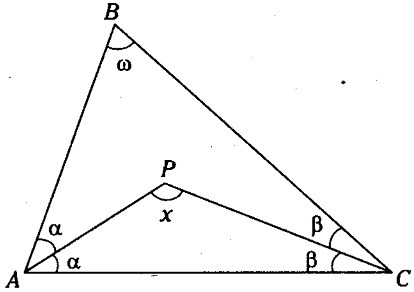
1.



(a)

$x = \dfrac{\theta}{2}$

2.

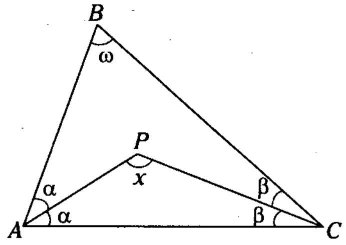


(a)

$x = 90° + \dfrac{\omega}{2}$

Demostración

- Primer método



(b)

$\measuredangle ABCP$: $x = \alpha + \omega + \beta$ (I)

En $\triangle APC$:

$$x + \alpha + \beta = 180^\circ \qquad \text{(II)}$$

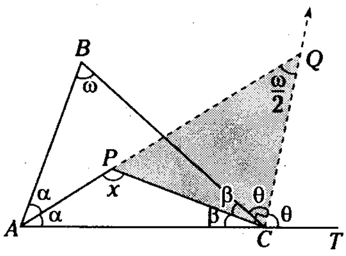
Sumando (I) y (II)

$$2x + \alpha + \beta = 180^\circ + \alpha + \omega + \beta$$

$$2x = 180^\circ + \omega$$

$$\therefore \quad x = 90^\circ + \frac{\omega}{2}$$

- Segundo método



(c)

Figura 5.41

Trazamos la bisectriz del $\measuredangle BCT$ que interseca a la prolongación de $\overline{AP}$ en Q.

Del teorema 1

$$m\measuredangle AQC = \frac{\omega}{2}$$

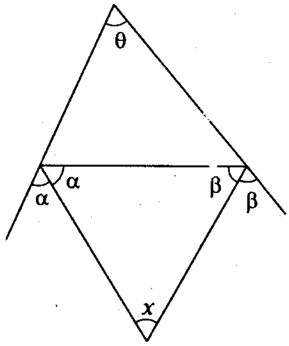
En C: $2\beta + 2\theta = 180^\circ$

$\rightarrow \quad m\measuredangle PCQ = \beta + \theta = 90^\circ$

En $\triangle PCQ$(por $\measuredangle$ externo)

$$\therefore \quad x = 90^\circ + \frac{\omega}{2}$$

3.

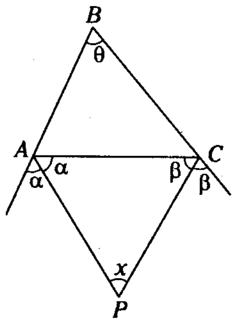


(a)

$$x = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

Demostración

- Primer método



(b)

$\triangle APC$

$$x + \alpha + \beta = 180^\circ \qquad \text{(I)}$$

$\diamond ABCP$

$$\theta + x = \alpha + \beta \qquad \text{(II)}$$

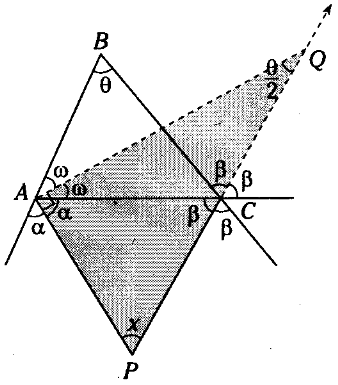
Sumando (I) y (II)

$$\theta + x + x + \alpha + \beta = 180^\circ + \alpha + \beta$$

$$2x = 180^\circ - \theta$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 90^\circ - \frac{\theta}{2}}$$

- Segundo método



(a)

Figura 5.42

Prolongamos $\overline{PC}$ y trazamos la bisectriz del $\sphericalangle BAC$ que se intersecan en Q.

Por Teorema 1:

$$\text{m}\sphericalangle AQC = \frac{\theta}{2}$$

Como $2\omega + 2\alpha = 180^\circ$

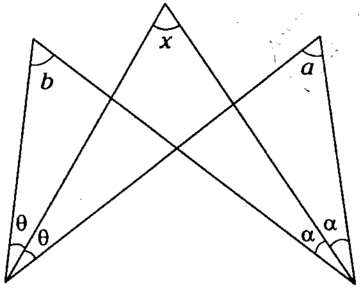
$$\rightarrow \omega + \alpha = 90^\circ = \text{m}\sphericalangle PAQ$$

En $\triangle AQP$:

$$x + \frac{\theta}{2} = 90^\circ$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 90^\circ - \frac{\theta}{2}}$$

4.

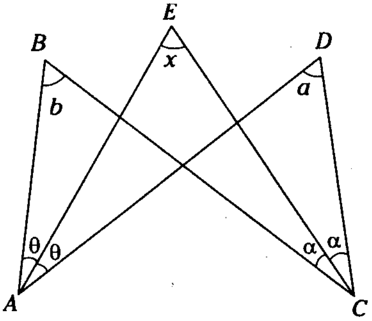


(a)

$$\boxed{x = \frac{a+b}{2}}$$

Demostración

- Primer método



(b)

$\bowtie BAEC$: $b + \theta = x + \alpha \qquad$ (I)

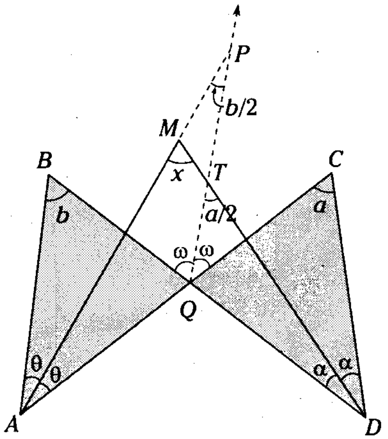
$\bowtie AECD$: $a + \alpha = x + \theta \qquad$ (II)

(I) + (II)

$$a + b + \alpha + \theta = 2x + \alpha + \theta$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{a+b}{2}}$$

- Segundo método



(c)

Figura 5.43

Trazamos la bisectriz del $\sphericalangle BQC$ que interseca a $\overline{DM}$ en T y a la prolongación de $\overline{AM}$ en P.

En $\triangle ABQ$ del Teorema 1:

$$m\sphericalangle APQ = \frac{b}{2}$$

$\triangle QCD$ Teorema 1:

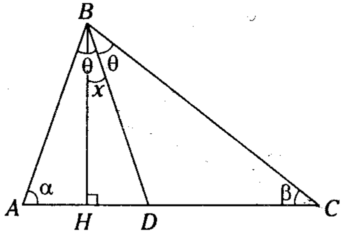
$$m\sphericalangle QTD = \frac{a}{2}$$

$\triangle PMT$ (por $\sphericalangle$ externo)

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{a+b}{2}$$

5.



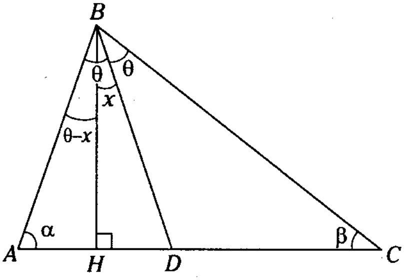
(a)

Si $\alpha > \beta$

$$\boxed{x = \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

Demostración

- Primer método



(b)

⊿ BHC: $x + \theta + \beta = 90°$	(I)
⊿ AHB: $\alpha + \theta - x = 90°$	(II)

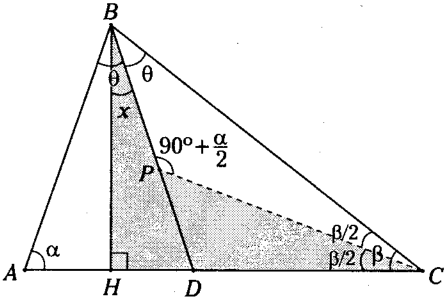
Igualando (I) y (II)

$$x + \not\theta + \beta = \alpha + \not\theta - x$$

$$2x = \alpha - \beta$$

$$\therefore \quad x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

- Segundo método



(c)

Figura 5.44

Trazamos la bisectriz del $\sphericalangle BCA$ que interseca a $\overline{BD}$ en P.
En $\triangle ABC$ del Teorema 2

$$m\sphericalangle BCP = 90° + \frac{\alpha}{2}$$

$\triangle BHCP$:

$$\cancel{90}° + \frac{\alpha}{2} = x + \cancel{90}° + \frac{\beta}{2}$$

$$x = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Observación

Si en vez de trazar la altura BH se traza la mediatriz del lado AC.

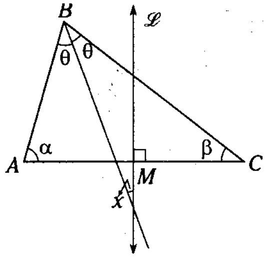


Figura 5.45

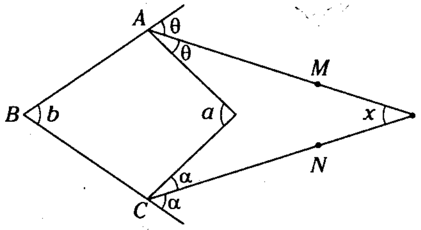
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: mediatriz del $\overline{AC}$
y $\alpha > \beta$
Se cumple

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Nota

También se cumple

Para $a > b$

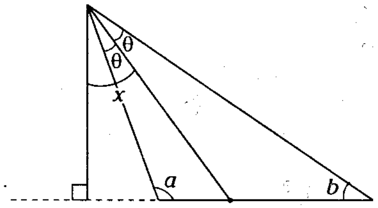


(a)

$$x = \frac{a-b}{2}$$

Si $a = b$

$$\overline{AM} // \overline{CN}$$



(b)

Figura 5.46

$$x = \frac{a-b}{2}$$

Las demostraciones de estos casos son similares a los vistos anteriormente.

LECTURA

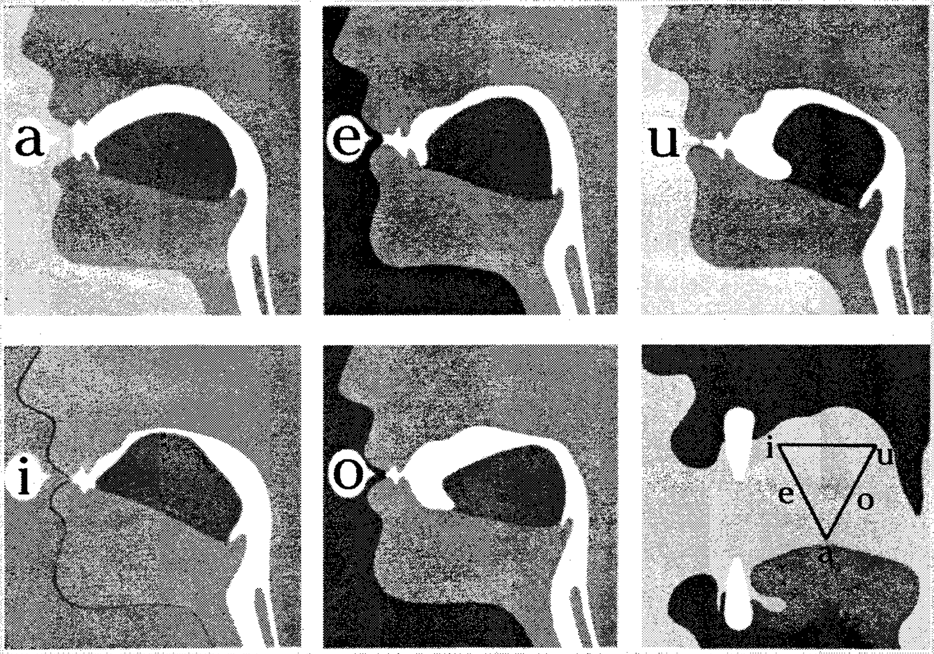
TRIÁNGULO VOCÁLICO

En una conversación, el hablante (emisor) desea ante todo comunicarse y dedica toda su atención al sentido de las palabras. Solo la preocupación de cuidar su acento en la lengua extranjera o en su propia lengua le hará recordar que el lenguaje es también una serie de sonidos producidos por un conjunto de órganos. Este aspecto físico del lenguaje es estudiado por la fonética, que analiza los sonidos y estudia cómo reconocerlos, clasificarlos y reproducirlos.

El sistema vocálico del castellano está constituido por cinco fonemas (término que comprende todos los elementos sonoros del lenguaje).

Para emitir las cinco vocales, debemos dejar salir libremente el aire, sin que ningún órgano de la boca entre en contacto, pero si esto ocurriese produciremos consonantes.

Existen dos rasgos determinantes para la diferenciación de los cinco sonidos vocálicos: la mayor o menor abertura de la boca y la posición de la lengua. Combinando estos dos factores obtenemos las 5 vocales que se representan por medio del **TRIÁNGULO VOCÁLICO**.



FUENTE: *Enciclopedia Salvat del Estudiante*. Tomo X. 1984. pp. 12

BIOGRAFÍA

FRANK MORLEY (Woodbridge 1860 - Baltimore1937)

Nació en Inglaterra el 9 de setiembre de 1860. Debido a problemas de salud interrumpió sus estudios universitarios en Cambridge y tuvo que tomar un año adicional. No obstante, alcanzó el octavo lugar en los primeros honores de su clase, graduándose en el año 1884. Trabajó enseñando matemáticas en la universidad hasta 1887, fue un periodo importante para Morley puesto que pudo superar sus problemas de salud y con esta mejoría tener más confianza en sus propias capacidades matemáticas. En EE.UU. se le designó como instructor en la universidad de Haverford, Pennsylvania de Quaker en 1887.

En el año 1889, se casa con Lilian Janet, que era música y poeta. De está unión se sabe que tuvieron tres hijos.

Su primer hijo Cristopher Darlington Morley (1890 - 1957) fue novelista; el segundo hijo Félix M. Morley (1894 - 1982), se convirtió en redactor y fue presidente de la universidad de Haverford (1940 - 1945); mientras que el tercer hijo, Vigor Franco Morley (1899 - 1985), fue director de Faber, pero también resultó matemático y colaboró con su padre por más de veinte años.

Morley fue designado profesor de las matemáticas en la universidad de Johns Hopkins en 1900. Muere el 17 de octubre de 1937 en EE.UU.

Logros matemáticos de Morley

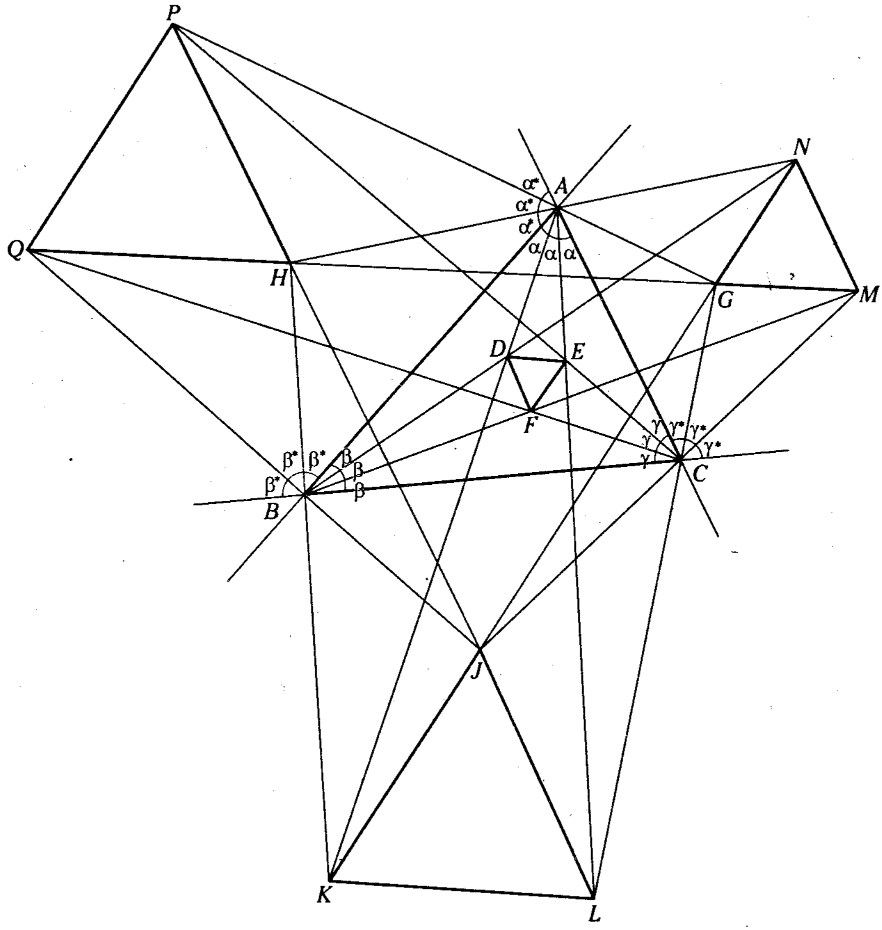
Dejó escritos principalmente en geometría, pero también en álgebra. En Haverford había colaborado con Harkenss, ambos fueron autores de los tratados *Del texto a la teoría de las funciones,* que fue publicado en 1893, "Introducción a la teoría de funciones analíticas en 1898". Estos textos fueron interesantes ya que se publicaron en un momento en que pocos libros eran producidos en EE.UU. En el año de 1933, Morley publica *La geometría inversive* escrita en común con su hijo Vigor Franco.

Entre sus papeles sobre la geometría estaba *En la curva quartic de Luroth* publicado en 1919 y que ahora es conocido como teorema de Morley: Si los ángulos de cualquier triángulo son trisecados entonces el triángulo formado por la reunión de pares de trisectores con cada par que está adyacente al mismo lado, es equilátero.

A Morley le apasionó plantear problemas matemáticos y durante 50 años publicó cerca de 60 problemas, donde la mayoría tiene naturaleza geométrica.

Morley hizo una contribución importante a las matemáticas de los EE.UU. al encargarse del boletín de la sociedad matemática y del diario americano de las matemáticas.

Los triángulos de Morley



• Al trisecar los ángulos del triángulo *ABC*, los triángulos *DEF, MNG, KLJ* y *PQH* son equiláteros.

FUENTE: http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana, España. 2001

Problemas Resueltos

Problema 1

Dado un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos N y M respectivamente, tal que $AB = BN = BM$ y $m\sphericalangle BNM = 50°$.
Calcule $m\sphericalangle BAN - m\sphericalangle BCA$.

A) 60° B) 50° C) 80°
D) 70° E) 30°

Resolución

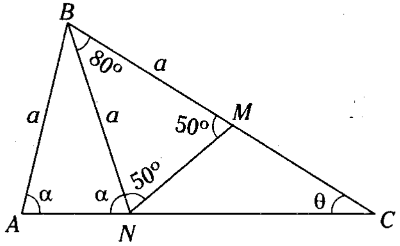


Figura 5.47

Piden $\alpha - \theta$

En $\triangle ABN$: $AB = BN \rightarrow m\sphericalangle BNA = m\sphericalangle BAN = \alpha$

En $\triangle NBM$: $BM = BN$

$\therefore\ m\sphericalangle NBM = 80°$

En $\triangle NBC$: Por ángulo exterior

$m\sphericalangle BNA = 80° + \theta$

$\rightarrow\ \alpha = 80° + \theta$

$\therefore\ \alpha - \beta = 80°$

CLAVE C

Problema 2

Se tiene un triángulo cuyas medidas de los pares angulares se encuentran en progresión aritmética. Calcule el máximo valor entero de la medida de un par angular.

A) 60° B) 90° C) 120°
D) 119° E) 78°

Resolución

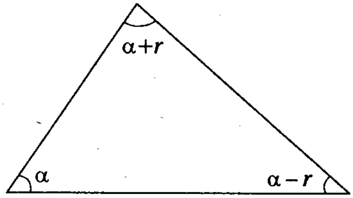


Figura 5.48

Piden $(\alpha + r)$ máximo entero.

Del $\triangle$

$\alpha + \alpha + r + \alpha - r = 180°$

$\rightarrow \alpha = 60°$

Se sabe

$\alpha - r > 0$

$\alpha > r$

$\rightarrow\ 60° > r$ (I)

Sumando a cada miembro (I): 60°

$60° + 60° > 60° + r$

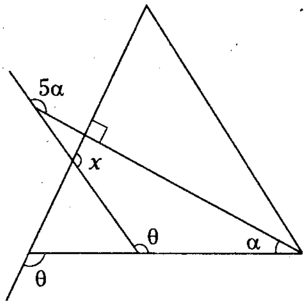
$120° > 60° + r$

$\therefore\ (60° + r)$ máximo entero $= 119°$

CLAVE D

Problema 3

De la figura, calcule x.



A) 110 B) 90° C) 115°
D) 120° E) 130°

Resolución

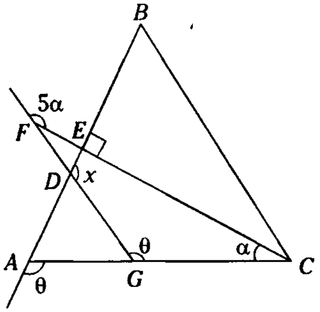


Figura 5.49

Piden x

En $\triangle FCG$: $\theta + \alpha = 5\alpha \rightarrow \theta = 4\alpha$ (I)

En $\triangle AEC$: $90° + \alpha = \theta$ (II)

Reemplazando (I) y (II)

$90° + \alpha = 4\alpha$

$\rightarrow \alpha = 30°$ y $\theta = 120°$

En $\triangle ADG$:

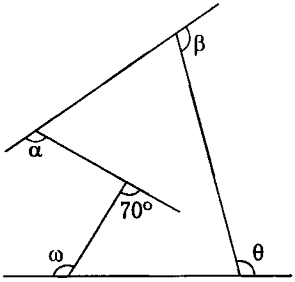
$x + \theta + \theta + 360°$

$\therefore x = 120°$

CLAVE D

Problema 4

En la figura, calcule $\alpha + \beta + \theta + \omega$.



A) 430° B) 650° C) 630°
D) 510° E) 580°

Resolución

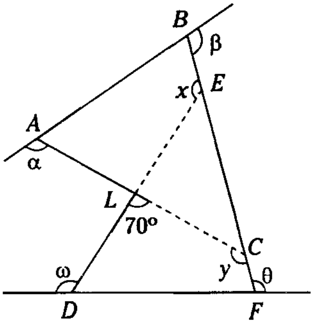


Figura 5.50

Piden

$\alpha + \beta + \theta + \omega$

En $\triangle ABC$: $\alpha + \beta + y = 360°$ (I)

En $\triangle DEF$: $\omega + \theta + x = 360°$ (II)

sumando (I) y (II)

$\alpha + \beta + \omega + \theta + y + x = 720°$ (III)

En $\triangle LEC$:

$x + y + 70° = 360° \rightarrow x + y = 290°$

Reemplazando en (III)

$\therefore \alpha + \beta + \omega + \theta = 430°$

CLAVE A

Problema 5

Dado un triángulo rectángulo ABC, recto en B, en $\overline{AC}$ y en la región exterior relativa a $\overline{BC}$, se ubican los puntos E y D respectivamente. Si $\overline{BC} \cap \overline{DE} = \{P\}$; $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle DPC$; $BD = DC = BC = EC$, calcule la $m\sphericalangle ACB$.

A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 28°

Resolución

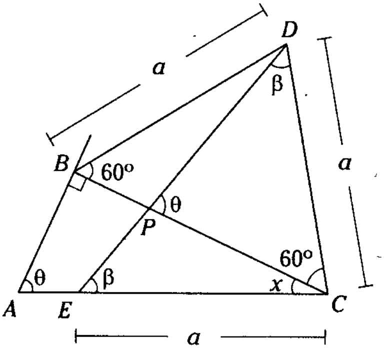


Figura 5.51

Piden x

En ⊾ABC: $x+\theta=90°$ (I)

⏢$ABPE$: $\theta+\theta=90°+\beta$ (II)

En △PCD: $\theta+\beta=120°$ (III)

Sumando (II) y (III)

$\theta=70°$

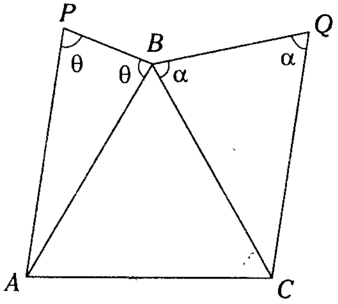
Reemplazando (IV) en (I)

$\therefore\ x=20°$

CLAVE C

Problema 6

Según la figura, el triángulo ABC es equilátero. Si $PC=2$, calcule el máximo valor entero de PQ.



A) 3 B) 4 C) 2
D) 5 E) 8

Resolución

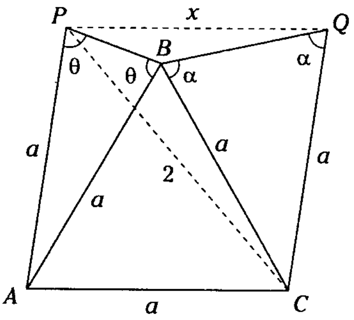


Figura 5.52

Piden $x_{\text{máx}}$

Por teorema de los poligonales ($PQCA$)

$x<a+a+a$

$x<3a$ (I)

Del gráfico

$m\measuredangle PCA<60°$

$m\measuredangle PAC>60°$

En △APC: Por correspondencia

como $m\measuredangle PCA<m\measuredangle PAC$

$a<2\ \rightarrow\ 3a<6$ (II)

Aplicando ley de la transitividad, en (I) y (II)

$x<3a<6$

$\therefore\ x_{\text{máx}}=5$

CLAVE D

Problema 7

En un triángulo acutángulo ABC, $m\measuredangle BAC=2(m\measuredangle ABC)$, en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto P, tal que $AC=PB=1$, ¿qué valor puede tomar PC?

A) 2 B) 2,1 C) 1,6
D) 2,3 E) 2,2

Resolución

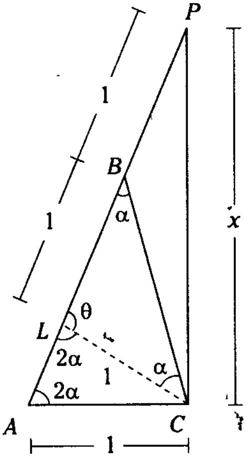


Figura 5.53

Piden el valor que puede tomar PC.

Sea $PC = x$

Se traza $\overline{LC}$ tal que $AC = LC = 1$

$\rightarrow \triangle BCL$ isósceles ($BL = LC = 1$)

Por dato $2\alpha < 90° \rightarrow \theta > 90°$

En $\triangle LPC$: Por existencia

$2-1 < x < 2+1$

$\rightarrow \quad 1 < x < 3 \qquad$ (I)

En $\triangle LPC$: Debido a la naturaleza del triángulo

$x^2 > 1^2 + 2^2$

$x > \sqrt{5} \qquad$ (II)

De (I) y (II)

$2{,}23 < x < 3$

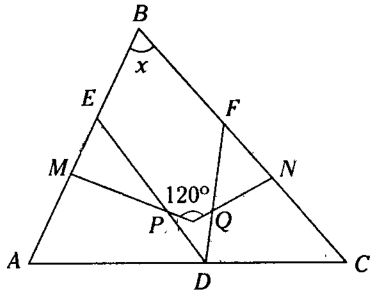
Luego de las claves

$\therefore \; x$ puede ser 2,3

CLAVE D

Problema 8

En la figura, $ME = MP$; $FN = NQ$; $AE = ED$ y $FD = FC$. Calcule x.



A) 20° B) 30° C) 40°
D) 60° E) 35°

Resolución

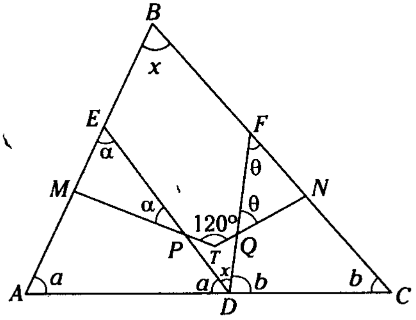


Figura 5.54

Piden x

$\triangle PTQD$: $x + \alpha + \theta = 120°$ (I)

$\diamond BFDE$: $x + x = \alpha + \theta \rightarrow \alpha + \theta = 2x$

Reemplazando en (I)

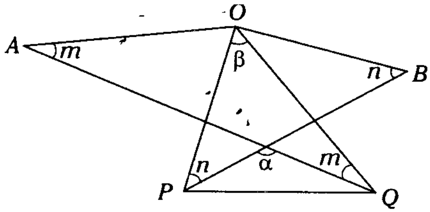
$x + 2x = 120°$

$\therefore \; x = 40°$

CLAVE C

Problema 9

En la figura, $AB = 9$ y $2\alpha - \beta = 180°$. Calcule el máximo valor entero de PQ.



A) 9 B) 7 C) 8
D) 10 E) 6

Resolución

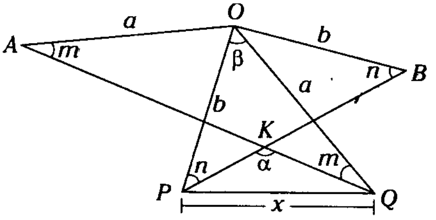


Figura 5.55

Piden $x_{máx}$ entero

$\triangle POQK$

$\alpha = n + \beta + m$ (I)

del dato

$2\alpha - \beta = 180°$ (II)

(II) – (I)

$\alpha - \beta = 180° - n - \beta - m$

$\rightarrow \alpha + n + m = 180°$,

con esto se concluye que A, O y B son colineales.

$\rightarrow AB = a + b = 9$

En $\triangle POQ$: Por existencia

$x < a + b$

$x < 9$

$\therefore x_{máx}$. entero = 8

CLAVE C

Problema 10

Dado un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubican los puntos P, Q y M $(P \in \overline{AQ}, M \in \overline{QC})$, en $\overline{AB}$ los puntos S y L $(L \in \overline{BS})$ y en las prolongaciones de $\overline{LM}$ y $\overline{QB}$ se ubican N y R respectivamente. Si $AP = AS$, $BC = QC$, $m\measuredangle QMN = m\measuredangle LBR$ y $m\measuredangle SPC + m\measuredangle RBC = 200°$, calcule la medida del ángulo entre $\overline{LM}$ y $\overline{BQ}$.

A) 120° B) 160° C) 40°
D) 50° E) 35°

Resolución

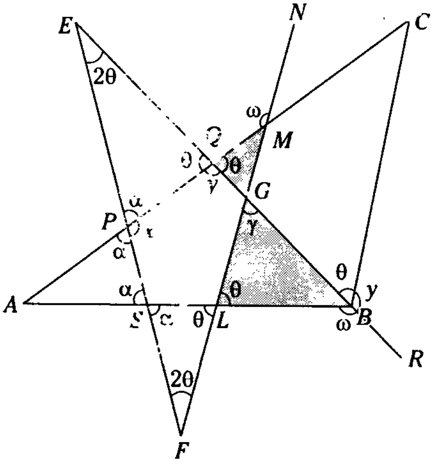


Figura 5.56

Piden γ

dato $x + y = 200°$ (I)

$m\measuredangle LBR = m\measuredangle QMN = \omega$

$AP = AS \rightarrow m\measuredangle APS = m\measuredangle ASP = \alpha$

$CQ = CB \rightarrow m\measuredangle CQB = m\measuredangle CBQ = \theta$

En P, $\alpha + x = 180°$ (II)

En B, $\theta + y = 180°$ (III)

Sumando (II) y (III)

$\alpha + \theta + x + y = 360°$

(I) en (III)

$\alpha + \theta = 160°$

En el $\triangle QMG$ y $\triangle LBG$

$\omega = \gamma + \theta = \gamma + m\measuredangle GLB$

$\rightarrow m\measuredangle GLB = \theta$

En $\triangle PQF$ y $\triangle SFL$

$m\sphericalangle PEQ = m\sphericalangle SFL = 20°$

En $\triangle EFG$: por $\sphericalangle$ exterior

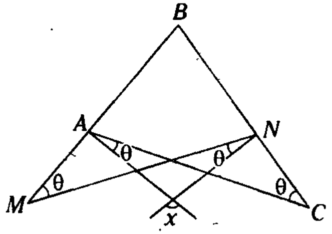
$\gamma = 20° + 20°$

$\therefore \gamma = 40°$

CLAVE C

Problema 11

Según la figura, $AC = BC$. Calcule x.



A) $90° + \frac{\theta}{2}$ B) $90° - \theta$ C) $90° - \frac{\theta}{2}$

D) $90°$ E) $90° - 2\theta$

Resolución

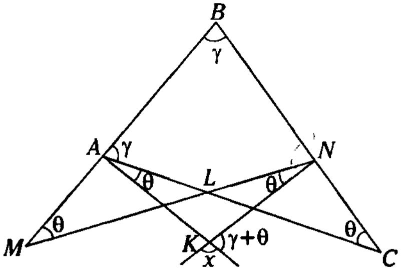


Figura 5.57

Piden x

Como $m\sphericalangle BMN = m\sphericalangle MNK \rightarrow \overline{MB} // \overline{NK}$

Como $m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle CAK \rightarrow \overline{BC} // \overline{AK}$

Por lo cual $x = \gamma$

En K: $x + \gamma + \theta = 180°$

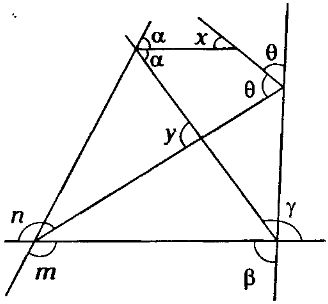
$2x = 180° - \theta$

$\therefore \ x = 90° - \frac{\theta}{2}$.

CLAVE C

Problema 12

De la figura, $m + n + \beta + \gamma = 600°$. Calcule $x + y$.



A) $50°$ B) $60°$ C) $70°$

D) $45°$ E) $55°$

Resolución

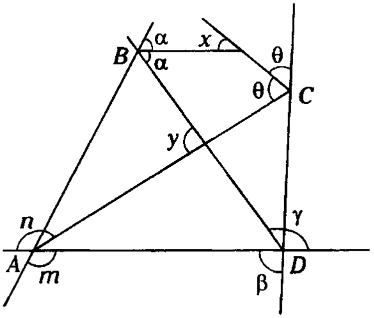


Figura 5.58

Piden $x + y$

En $\triangle ACD$: $n + 2\theta + \beta = 360°$ (I)

En $\triangle ABD$: $m + 2\alpha + \gamma = 360°$ (II)

Sumando (I) y (II)

$m + n + \beta + \gamma + 2(\theta + \alpha) = 720°$

$600° + 2(\theta + \alpha) = 720°$

$\theta + \alpha = 60°$

Por propiedad

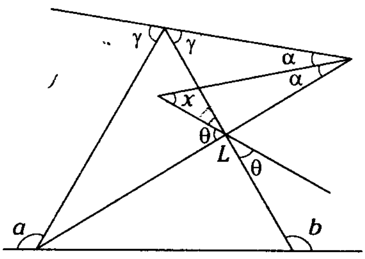
$x + y = \alpha + \theta$

$\therefore \ x + y = 60°$

CLAVE B

Problema 13

De la figura, $a + b = 220°$. Calcule x.



A) 40° B) 45° C) 35°
D) 60° E) 70°

Resolución

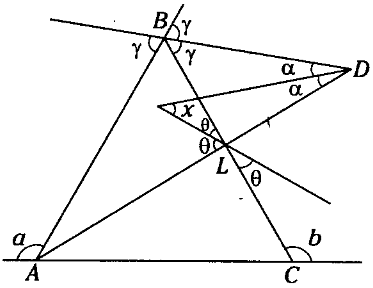


Figura 5.59

Piden x

Dato $a + b = 220°$

En $\triangle BDL$: Propiedad

$$x = \frac{\gamma}{2}$$

En $\triangle ABC$: Propiedad

$$a + b + 2\gamma = 360°$$

$$220° + 2\gamma = 360°$$

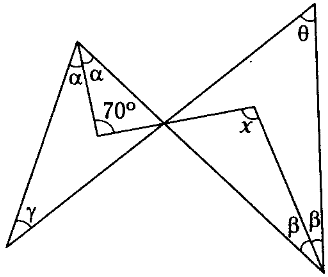
$$\gamma = 70°$$

$$\therefore\ x = 35°$$

CLAVE C

Problema 14

En la figura, $\theta - \gamma = 6°$. Calcule x.



A) 66° B) 68° C) 70°
D) 73° E) 80°

Resolución

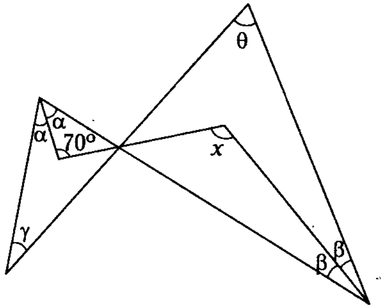


Figura 5.60

Piden x

Dato $\theta - \gamma = 6°$

Propiedad $\bowtie$

$$x + \beta = 70° + \alpha$$

$$x = 70° + (\alpha - \beta) \qquad \text{(I)}$$

Propiedad $\bowtie$

$$2\alpha + \gamma = \theta + 2\beta$$

$$2(\alpha - \beta) = \theta - \gamma$$

$$2(\alpha - \beta) = 6° \rightarrow \alpha - \beta = 3°$$

en (I)

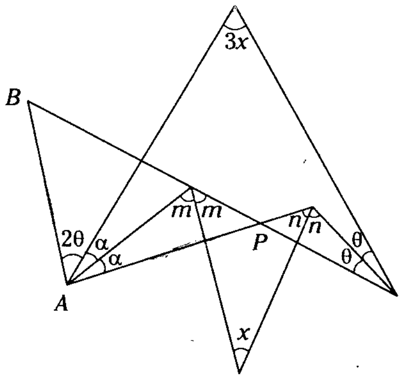
$$x = 70° + 3°$$

$$\therefore\ x = 73°$$

CLAVE D

Problema 15

Según la figura, $AB = AP$. Calcule x.



A) 25° B) 20° C) 18°
D) 16° E) 22°

Resolución

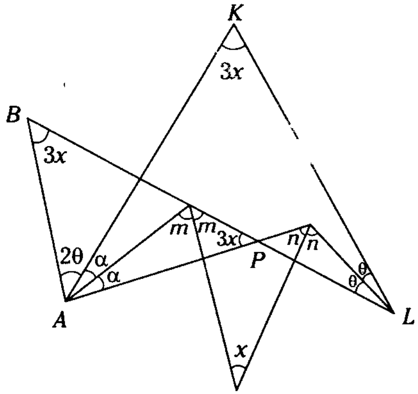


Figura 5.61

Piden x

Por propiedad ⋈: $m\measuredangle ABL = 3x$

Por propiedad

$$x = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

$$\rightarrow \alpha + \theta = 2x \qquad \text{(I)}$$

$\triangle AKLP$: $m\measuredangle APL = 3x + 2(\alpha + \theta)$ (II)

(I) en (II)

$$m\measuredangle APL = 3x + 2(2x) = 7x$$

En P: $3x + m\measuredangle APL = 180°$

Reemplazando

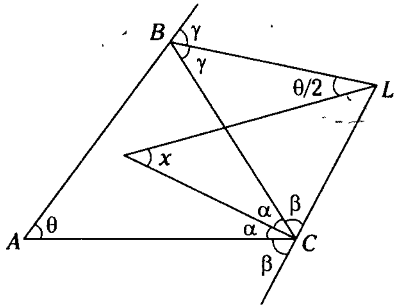
$$3x + 7x = 180°$$

$$\therefore \; x = 18°$$

CLAVE C

Problema 16

De la figura, $\theta < 39°$. Calcule el máximo valor entero de x.



A) 19° B) 20° C) 36°
D) 38° E) 40°

Resolución

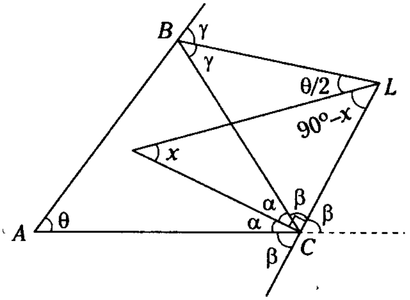


Figura 5.62

Piden x

En C:

$$2\alpha + 2\beta = 180°$$

$$\rightarrow \quad \alpha + \beta = 90°$$

En $\triangle ABC$: Propiedad

$$\frac{\theta}{2} + 90° - x = 90° - \frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow x = \theta$$

Del dato

$$\theta < 39°$$

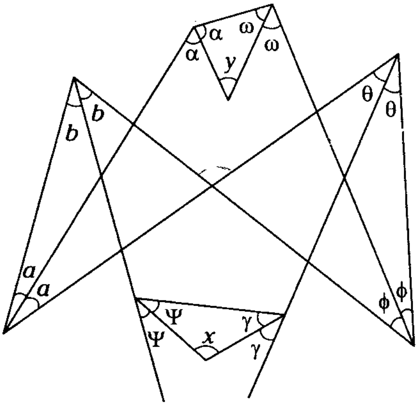
$$x < 39°$$

$$\therefore \quad x_{\text{máx. entero}} = 38°$$

CLAVE D

Problema 17

En la figura, $a + b = 40°$. Calcule $x - y$.



A) 30° B) 35° C) 40°

D) 45° E) 50°

Resolución

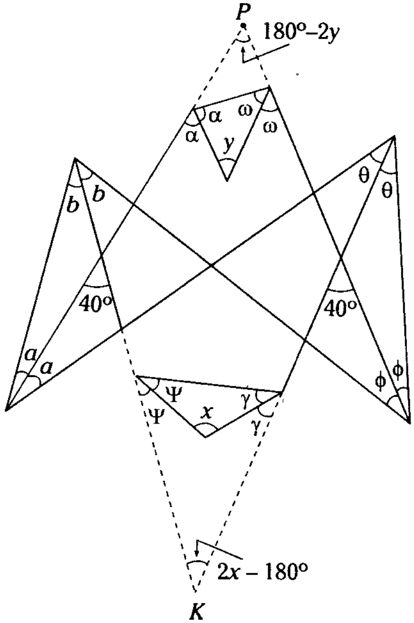


Figura 5.63

Piden $x - y$

Dato

$a + b = 40°$

Propiedad ⋈

$$2a + 2b = 2\theta + 2\phi$$

$$a + b = \theta + \phi = 40°$$

Por propiedad de los ángulos formado por bisectrices, se calculan las medidas de los ángulos en P y K, $180° - 2y$ y $2x - 180°$ respectivamente.

Por propiedad ◇

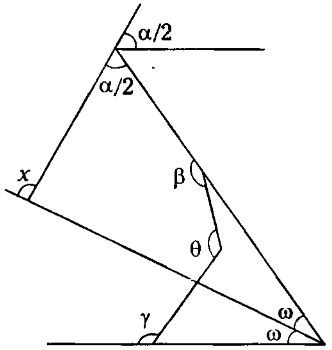
$$180° - 2y + 2x - 180° = 40° + 40°$$

$$\therefore \quad x - y = 40°$$

CLAVE C

Problema 18

En la figura, $\alpha+\beta+\theta+\gamma=540°$. Calcule x.



A) 75° B) 76° C) 80°
D) 85° E) 90°

Resolución

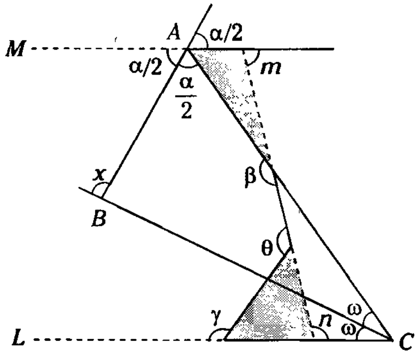


Figura 5.64

Piden x

Dato $\alpha+\beta+\theta+\gamma=540°$

En $\triangle ABC$:

$$\frac{\alpha}{2}+\omega=x \quad \text{(I)}$$

De las regiones triangulares

$$\gamma+\theta+n=360° \quad \text{(II)}$$

$$\alpha+\beta+m=360° \quad \text{(III)}$$

Sumando (I) y (II)

$$\gamma+\theta+\alpha+\beta+m+n=720°$$

$$540°+m+n=720°$$

$$\rightarrow \ m+n=180°$$

y se concluye que $\overline{MA}//\overline{LC}$

Por lo cual

$$\alpha+2\omega=180°$$

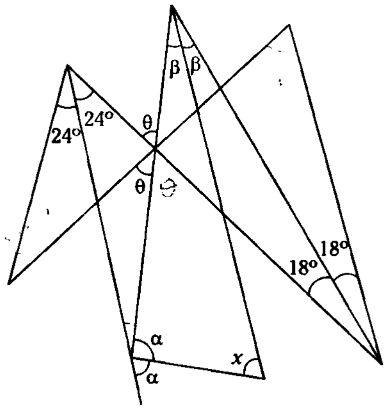
$$\frac{\alpha}{2}+\omega=90°$$

$$\therefore \ x=90°$$

CLAVE E

Problema 19

Según la figura, calcule x.



A) 93° B) 87° C) 90°
D) 97° E) 100°

Resolución

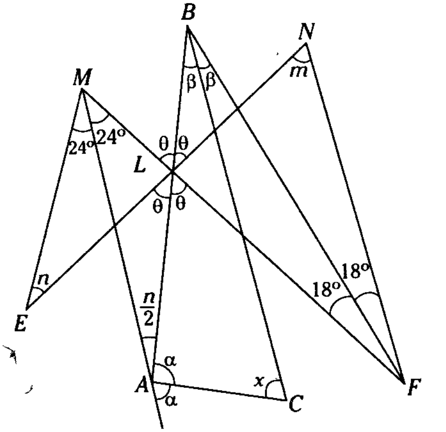


Figura 5.65

Piden x

En $\triangle ABC$: $x=180° - (\alpha + \beta)$ (I)

En $\triangle LNF$: propiedad $2\beta = \frac{m}{2} \rightarrow \beta = \frac{m}{4}$ (II)

En $\triangle MEL$: propiedad $m\sphericalangle MAL = \frac{n}{2}$

En A: $2\alpha + \frac{n}{2} = 180°$

$\rightarrow \alpha = 90° - \frac{n}{4}$ (III)

(II) y (III) en (I)

$$x = 180° - \left(90° - \frac{n}{4} + \frac{m}{4}\right)$$

$$x = 90° - \left(\frac{m-n}{4}\right) \quad \text{(IV)}$$

En el $\triangle EML$ y $\triangle LNF$

$48° + n = 36° + m$

$\rightarrow m - n = 12°$

Reemplazando en (IV)

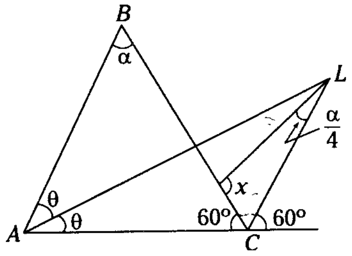
$x = 90° - \frac{12°}{4}$

$\therefore x = 87°$

CLAVE B

Problema 20

De la figura, $\alpha < 82°$, calcule el mínimo entero de x.



A) 102° B) 100° C) 104°
D) 106° E) 108°

Resolución

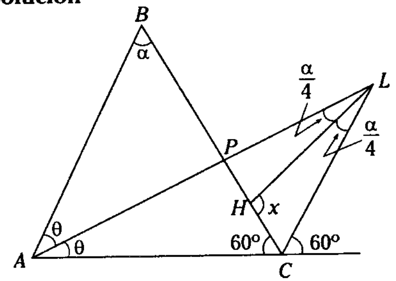


Figura 5.66

Piden x

En $\triangle ABC$: Propiedad:

$m\sphericalangle ALC = \frac{\alpha}{2}$

$\rightarrow m\sphericalangle PLH = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2}$

En $\triangle ALC$: Por propiedad $x = 90° + \frac{\theta}{2}$

Como $\alpha + 2\theta = 120°$ y $\alpha < 82°$

$\rightarrow 2\theta > 38°$

$\theta > 19°$

Sumando 90°

$$\underbrace{90° + \frac{\theta}{2}}_{x} > 90° + \frac{19°}{2}$$

$x > 99°30'$

$\therefore x_{\text{mín.}} = 100°$

CLAVE B

TRIÁNGULOS - Parte II

APLICACIÓN DE LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

TEOREMA DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Todo punto que pertenece a la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.

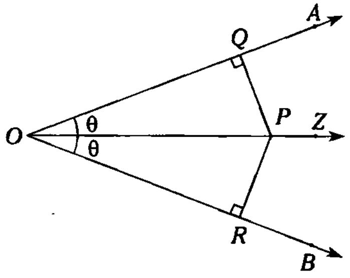


Figura 5.67

Según la figura, $m\sphericalangle AOZ = m\sphericalangle ZOB = \theta$

$P \in \overleftrightarrow{OZ}$

$⊿PQO \cong ⊿PRO$ (A.L.A.)

$\rightarrow \ PQ = PR$

$OQ = OR$

Teorema

Si un punto Q pertenece a la región interior de un ángulo y equidista de los lados del ángulo, entonces Q pertenece a la bisectriz del ángulo.

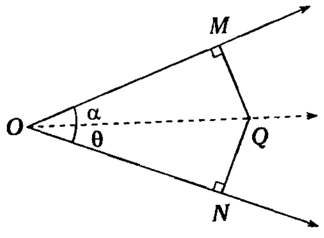


Figura 5.68

Según la figura

Si $QM = QN$

$\rightarrow$ $⊿QMO \cong ⊿QNO$ (L.L.L.)

luego $\alpha = \theta$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{OQ}$: bisectriz del $\sphericalangle MON$.

Observación

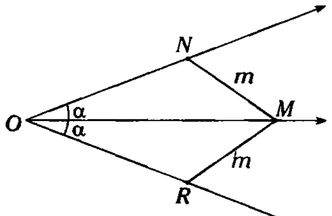


Figura 5.69

Según la figura, $m\sphericalangle NOM = m\sphericalangle ROM = \alpha$ y $MN = NR$.

Primer caso $ON = OR$

$\rightarrow$ ◇$MNOR$ = Trapezoide simétrico

(Vea la demostración del capítulo VI)

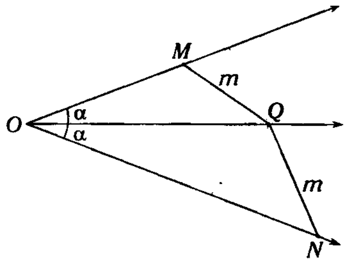


Figura 5.70

Según la figura, $m\sphericalangle MOQ = m\sphericalangle QON = \alpha$ y $QM = QN$

Segundo caso $OM < ON$

$\rightarrow$ ◻$QMON$: Cuadrilátero inscriptible

(Vea la demostración del capítulo VI)

TEOREMA DE LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO DE RECTA

Todo punto que pertenece a la mediatriz de un segmento de recta equidista de los extremos del segmento.

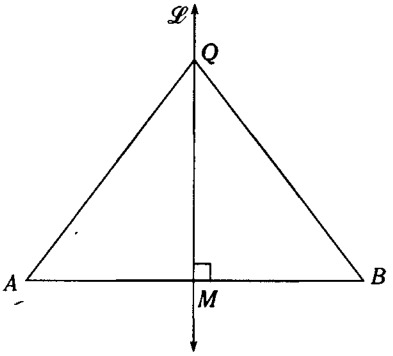


Figura 5.71

Según la figura 5.71 $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: mediatriz de $\overline{AB}$

Sea $Q \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$\triangle QMA \cong \triangle QMB$ (L.A.L.) $\rightarrow$ $QA = QB$

Teorema

Si un punto Q equidista de los extremos de un segmento de recta, entonces Q pertenece a la mediatriz de dicho segmento.

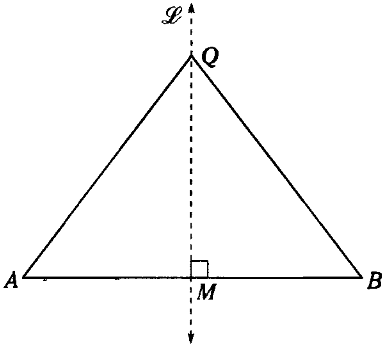


Figura 5.72

Según la figura 5.72

Si $QA = QB \rightarrow$ $\triangle QMA \cong \triangle QMB$ (L.L.L.),

luego $AM = MB$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: mediatriz de $\overline{AB}$

Nota

Dada la siguiente figura:

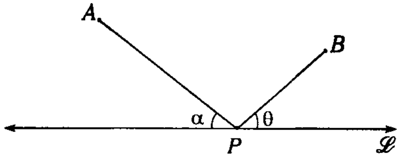


Figura 5.73

El menor recorrido para ir de A hacia B (o viceversa) tocando a la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en un punto P se presenta cuando $\alpha = \theta$.

Demostración

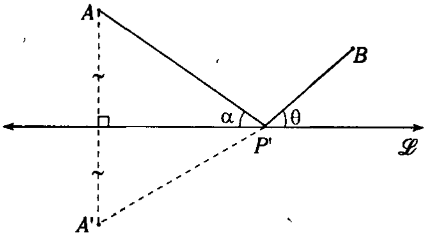


Figura 5.74

Sea el recorrido cualesquiera $AP'B$ (no es el menor recorrido), ubicamos al punto A' tal que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AA'}$, obteniéndose un recorrido equivalente $A'P'B$, es decir, por el teorema anterior $AP' = A'P'$.

$\rightarrow$ $AP' + P'B = A'P' + P'B$

Para que el recorrido $AP'B$ sea mínimo, su equivalente $A'P'B$ debe ser mínimo y ello ocurre cuando A', P' y B son colineales.

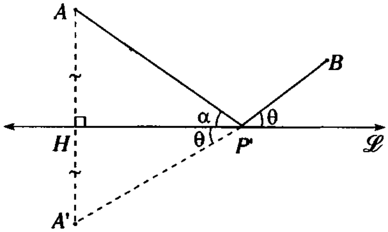


Figura 5.75

Como $\triangle AP'A'$: isósceles

$\therefore \alpha = \theta$

TEOREMA DE LOS PUNTOS MEDIOS

Si se considera uno de los puntos medios de cualquier lado de un triángulo y se traza una recta paralela a otro lado, entonces dicha recta paralela biseca al tercer lado.

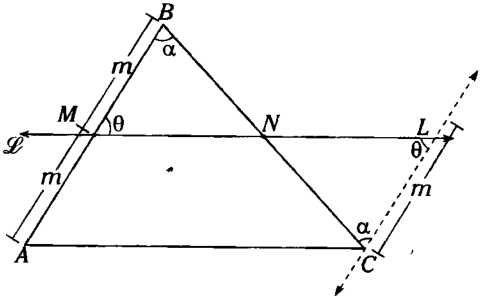


Figura 5.76

Si $AM = MB$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AC}$

$\rightarrow BN = NC$

Demostración

Se traza $\overleftrightarrow{CL} // \overline{AB}$

$\rightarrow$ ▱$AMLC$: paralelogramo

luego

$\triangle MBN \cong \triangle LCN$ (A.L.A.)

$\rightarrow BN = NC$

TEOREMA DE LA BASE MEDIA

Si se considera los puntos medios de dos lados de un triángulo, el segmento que tiene por extremos dichos puntos, se denomina base media y su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.

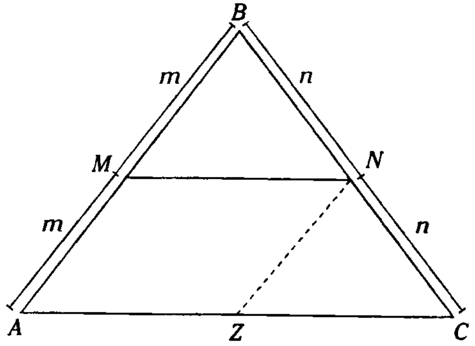


Figura 5.77

Si $AM = MB$

$BN = NC$

$\rightarrow \overline{MN}$: base media (segmento del lado $\overline{AC}$)

$MN = \dfrac{1}{2}(AC)$

además

$\overline{MN} // \overline{AC}$

Demostración

Por el teorema de los puntos medios $\overline{MN} // \overline{AC}$, se traza $\overline{NZ} // \overline{AB}$

$\rightarrow AZ = ZC$

▱$AMNZ$ = paralelogramo

$MN = AZ = ZC$

$MN = \dfrac{AC}{2}$

Observación

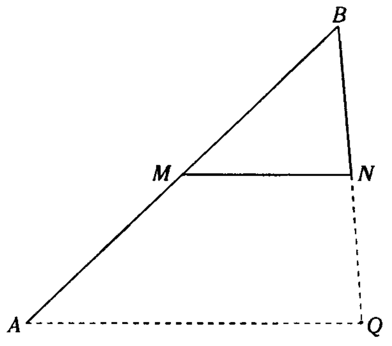


Figura 5.78

Sea $AM = MB$

Al trazar $\overline{AQ} // \overline{MN}$

$\rightarrow BN = NQ$

$\overline{MN}$: base media del $\triangle ABQ$.

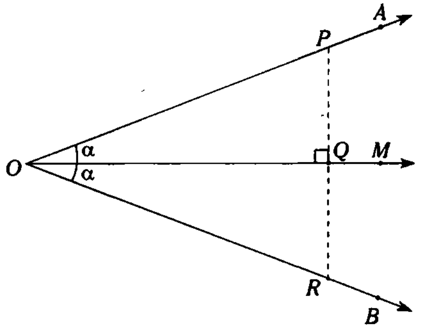


Figura 5.79

Sea $m\measuredangle AOM = m\measuredangle BOM = \alpha$

Al trazar $\overline{PQ} \perp \overleftrightarrow{OM}$

$\rightarrow$ Al prolongar $\overline{PQ}$, interseca en R a $\overrightarrow{OB}$, por lo cual $OP = OR$ y $PQ = QR$.

TEOREMA DE LA MEDIANA RELATIVA A LA HIPOTENUSA

Si se traza la mediana relativa a la hipotenusa, la longitud de dicha mediana es la mitad de la longitud de la hipotenusa.

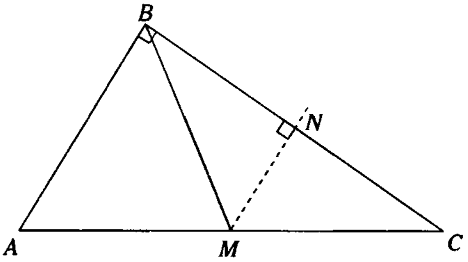


Figura 5.80

Si $AM = MC \rightarrow BM = 1/2\ (AC)$

Demostración

Se traza $\overline{MN} // \overline{AB}$

Por teorema de los puntos medios

$BN = NC \wedge m\measuredangle BNM = 90°$

luego $\triangle BMC$ (isósceles)

$\therefore\ BM = MC = AM$

Observación

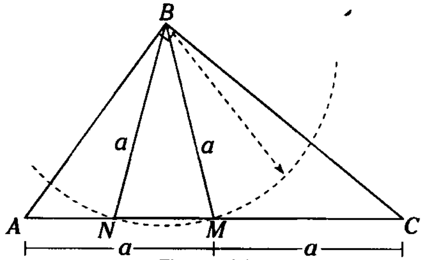


Figura 5.81

Sea $AB \neq BC$

$AM = MC;\ BM = 1/2\ (AC)$

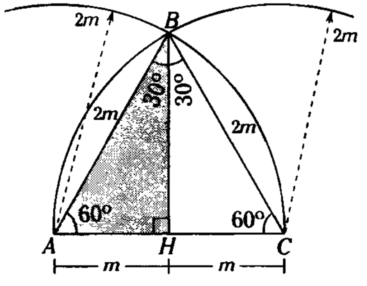
Entonces en un triángulo rectángulo existe la posibilidad de encontrar

$BM = BN = AC/2$, pero $\overline{BN}$ no es mediana.

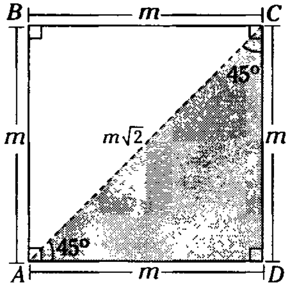
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

Son aquellos triángulos donde a partir de la razón de dos de sus lados se pueden calcular las otras medidas angulares y recíprocamente.

Solo existen dos triángulos rectángulos notables de medidas exactas y son aquellos que se deducen del triángulo equilátero y del cuadrado.

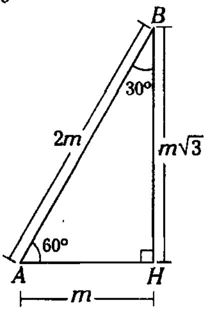


(a)



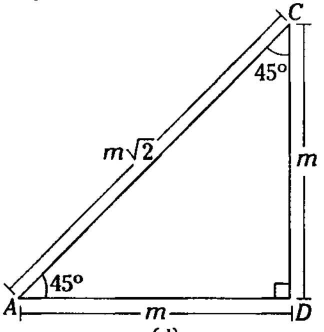
(c)

De 30° y 60°



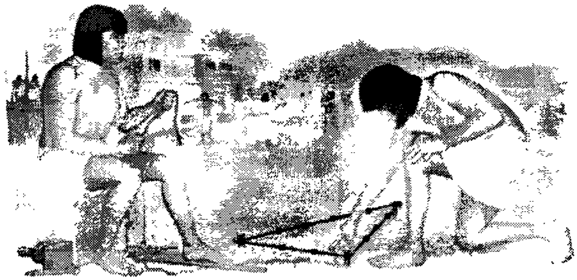
(b)

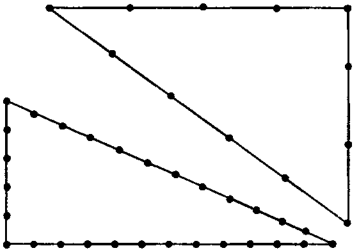
De 45° y 45°



(d)

Figura 5.82





Los triángulos rectángulos se remontan hacia muchos siglos antes de nuestra era y fueron utilizados por los egipcios para conseguir la perpendicularidad de sus construcciones, se dice que utilizaban la cuerda de los 12 y 30 nudos.

TRIÁNGULOS NOTABLES DE MEDIDAS APROXIMADAS

1. De 37° y 53°

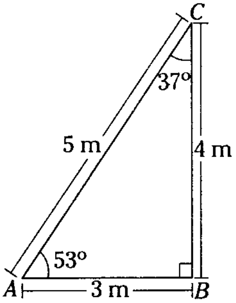
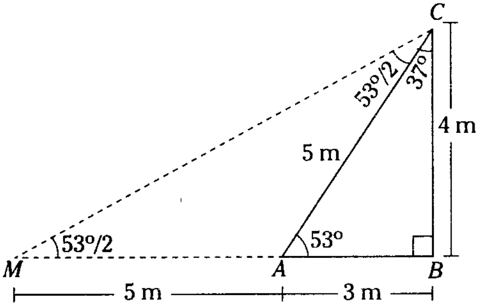
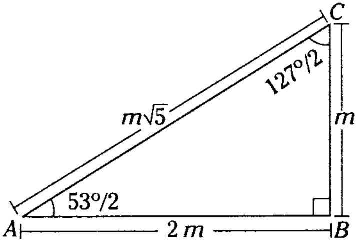


Figura 5.83

2. De 53°/2 y 127°/2



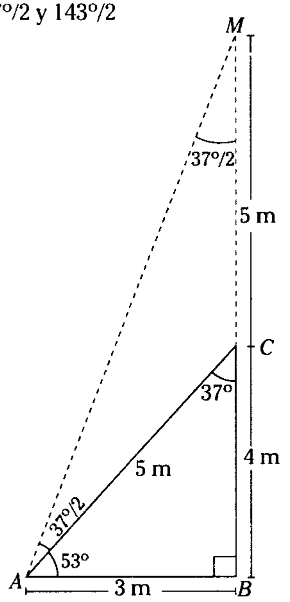
(a)



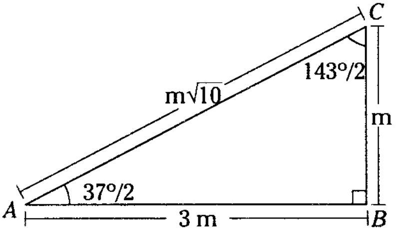
(b)

Figura 5.84

3. De 37°/2 y 143°/2



(a)



(b)

Figura 5.85

4. De 14° y 76°

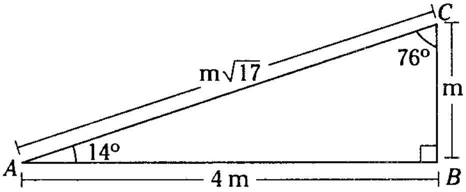


Figura 5.86

5. De 31° y 59°

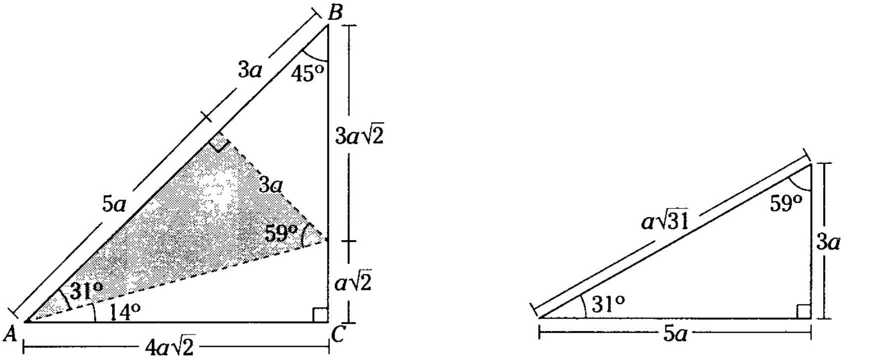


Figura 5.87

6. De 8° y 82°

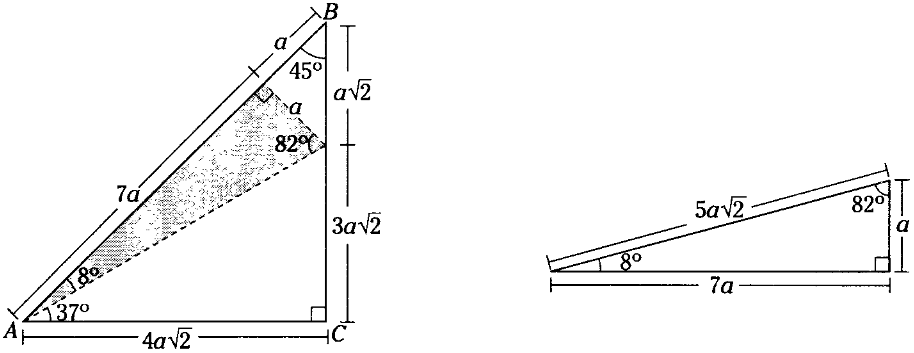


Figura 5.88

Observación

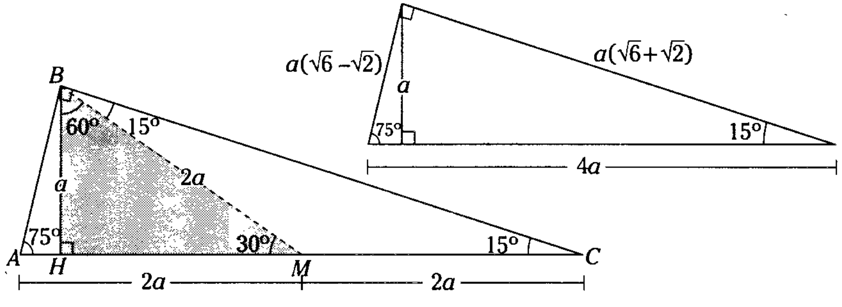


Figura 5.89

Problemas Resueltos

Problema 1

En un triángulo ABC, se ubican los puntos M y N en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, tal que $m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle MAC = m\sphericalangle NMC$ y $AB = MC$ y $(BM)(NC)=12$. Calcule $BM+NC$.

A) 10 B) $2\sqrt{3}$ C) 8
D) 6 E) $4\sqrt{3}$

Resolución

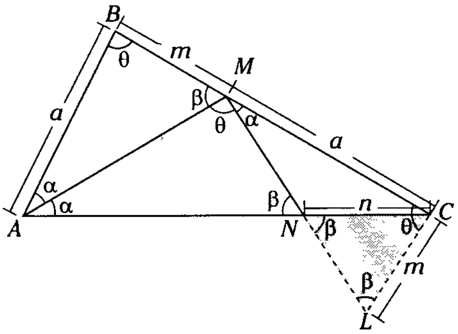


Figura 5.90

Piden $BM+NC=m+n$
Dato: $m\times n=12$
Sea $m\sphericalangle ABC=\theta$
$\rightarrow$ $m\sphericalangle AMN=\theta$ (por ángulo exterior)
Se traza $\overline{CL}$, tal que $m\sphericalangle MCL=\theta$ y L es un punto de la prolongación de $\overline{MN}$.
Se nota que
$\triangle ABM \cong \triangle MCL$ (A.L.A)
$\rightarrow$ $BM=m=CL$, $m\sphericalangle AMB=m\sphericalangle MLC=\beta$
Podemos ver como
$m\sphericalangle CNL=m\sphericalangle CLN$
$\rightarrow$ $n=m$
Del dato $n\times n=12$ $\rightarrow$ $n=2\sqrt{3}$
$\therefore$ $BM+NC=4\sqrt{3}$

CLAVE E

Problema 2

En los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo equilátero ABC, se ubican los puntos M, N y T. Tal que $AM=MB$, $MN=NT$ y $m\sphericalangle MNT=90°$. Calcule AM/TC.

A) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ B) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ C) $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$

D) $\dfrac{2\sqrt{3}+5}{3}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}+3}{3}$

Resolución

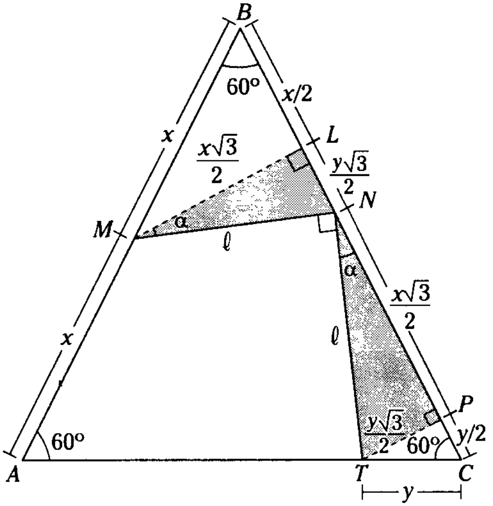


Figura 5.91

Piden $\dfrac{AM}{TC}=\dfrac{x}{y}$

Se trazan $\overline{ML}$ y $\overline{TP}$ perpendiculares a $\overline{BC}$ y

sea m∢LMN = m∢$TNP=\alpha$

$\triangle MLN \cong NPT$(A.L.A.)

$\rightarrow\ LN = TP$ y $ML = NP$

⊾ MLB: notable 30° y 60°

$$\rightarrow\ ML=\frac{x\sqrt{3}}{2};\ BL=\frac{x}{2}$$

⊾ TCP: notable 30° y 60°

$$\rightarrow\ TP=\frac{y}{2}\sqrt{3};\ CP=\frac{y}{2}$$

Como $AB = BC$

$$2x=\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\sqrt{3}+\frac{x}{2}\sqrt{3}+\frac{y}{2}$$

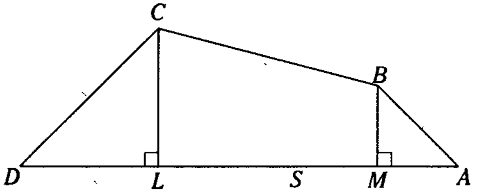
$$2x-\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{3}=\frac{y}{2}+\frac{y}{2}\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$$

CLAVE C

Problema 3

En la figura, $ML = AM + LD$, $AB = 1$, $CD=\sqrt{2}$ y $BC=\sqrt{3}$. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.



A) 45° B) 60° C) 75°
D) 90° E) 120°

Resolución

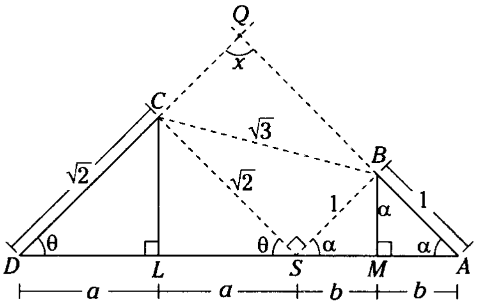


Figura 5.92

Piden x

Sea $DL = a$ y $MA = b$

como $ML = AM + LD$

Se ubica un punto S en $\overline{ML}$, tal que

$MS = MA = b\ \rightarrow\ LS = a$

En $\triangle DCS$: isósceles $CS=\sqrt{2}$

En $\triangle ABS$: isósceles $BS = 1$

Como el $\triangle BCS$ cumple con el teorema de Pitágoras.

$\rightarrow$ m∢$CSB = 90°$

En $\triangle DQA$: $x + \alpha + \theta + 180°$

en S $\theta + \alpha = 90°$

$\therefore\ x = 90°$

CLAVE D

Problema 4

En el interior de una región triangular ABC, se ubica el punto P. Si $AB = BC = PC$, $AC = PB + AB$ y m∢PBA = m∢PCB, calcule m∢BAC.

A) 30° B) 36° C) 45°
D) 53° E) 37°

Resolución

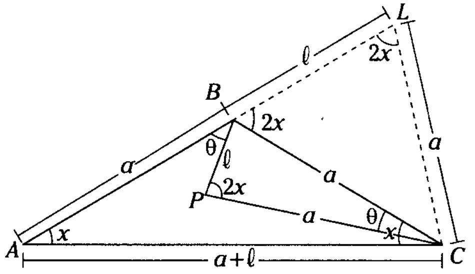


Figura 5.93

Piden m∢$BAC = x$

Sea $AB = BC = PC = a$, $BP = \ell$, $AC = a + \ell$

y m∢PBA = m∢$PCB = \theta$

◭$ABPC$: m∢$BPC = \theta + x + x - \theta = 2x$

Se prolonga $\overline{AB}$ hasta L tal que $BL = \ell$.

Como △PBC: isósceles m∢$PBC = 2x$

△PBC ≅ △LBC (L.A.L) → m∢$BLC = 2x$

Como △LAC: isósceles ($AL = AC$)

LAC: $x + 2x + 2x = 180°$

∴ $x = 36°$

Observación

△PBC: $\theta = x$ → $P \in \overline{AC}$

CLAVE B

Problema 5

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$, tal que $\overline{AP}$ es perpendicular a $\overline{BQ}$ en M. Si $AP = BQ$, $BP = AQ = \sqrt{10}$ y BQ toma su menor valor entero, calcule $AM - MQ$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 2,5 E) 4

Resolución

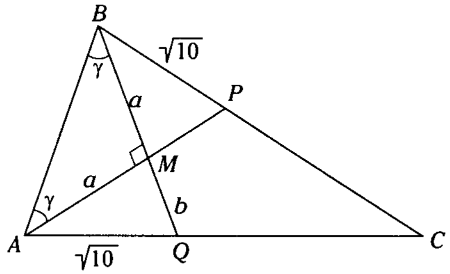


Figura 5.94

Piden $AM - MQ = a - b$

Se observa que

△ABP ≅ △BAQ (L.L.L.)

→ m∢BAP = m∢$ABQ = \gamma$

⊿ BMA: notable 45°, $\gamma = 45°$

→ $BM = a$

En △ABQ: Por teorema (relación de correspondencia)

$a + b > \sqrt{10}$

$a + b > 3{,}1$

→ $a + b = 4$ (menor entero) (I)

En ⊿ AMQ: $a^2 + b^2 = \sqrt{10}^2$ (II)

Resolviendo (I) y (II)

$a = 3$, $b = 1$

∴ $a - b = 2$

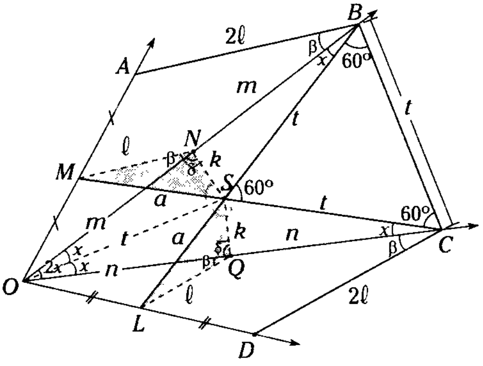
CLAVE B

Problema 6

Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que $AB = CD$, luego se ubican los puntos medios M, N, Q y L de $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ respectivamente. Si $\overline{LB} \cap \overline{MC} = \{S\}$, $OS = BC$, $MS = SL$, $SN = SQ$, m∢BOC = 2(m∢SCO), m∢DCO = m∢OBA, calcule m∢SBO. Considere a N y Q en la región exterior de $OMSL$.

A) 10° B) 14° C) 15°
D) 18° E) 22°

Resolución



(a)

Piden m∢$SBO = x$

del dato $AB = CD = 2\ell$

→ Por base media: $MN = LQ = \ell$

m∢OBA = m∢$DCO = \beta$

→ Por paralelas: m∢$ONM = LQO = \beta$

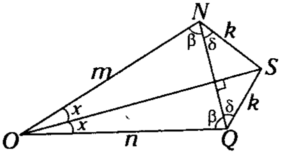
Se nota △MNS ≅ △LQS (L.L.L.)

→ m∢MNS = m∢LQS

→ m∢ONS = m∢$OQS = \delta$

De la figura 5.92 (a) $ONSQ$, como $NS = SQ$ y la m∢ONS = m∢OQS.

→ m∢NOS = m∢$QOS = \dfrac{2x}{2} = x$



(b)

Figura 5.95

De la figura, $m = n$

$\overrightarrow{OS}$: bisectriz del ∢BOC → $SB = SC$

△OSB: isósceles → $OS = SB$

△BCS: equilátero

△$BOCS$: $x + x + 2x = 60°$

∴ $x = 15°$

CLAVE C

Problema 7

En un triángulo ABC, se ubica el punto N en la prolongación de $\overline{AC}$, tal que $CN = AB$ y m∢$BAC = 80°$. Si las mediatrices de $\overline{BC}$ y $\overline{AN}$ se intersecan en P, calcule m∢CNP.

A) 38 B) 40° C) 42°

D) 46° E) 50°

Resolución

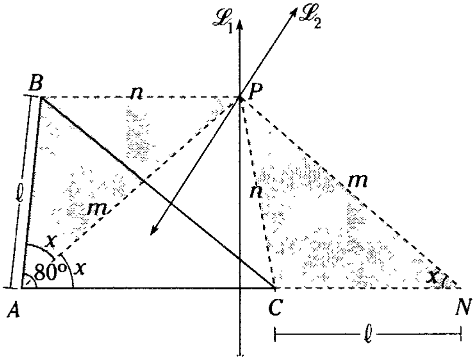


Figura 5.96

Piden m∢$CNP = x$

Sean

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$: mediatriz de $\overline{BC}$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: mediatriz de $\overline{AN}$

Por teorema de la mediatriz $BP = PC = n$, $AP = PN = m$

△ABP ≅ △NCP (L.L.L.) → m∢BAP = m∢$CNP = x$

del dato

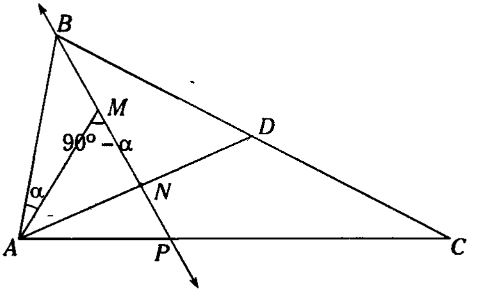
$80° = x + x$

∴ $x = 40°$

CLAVE B

Problema 8

Según la figura, $AB = DC$ y $MN = NP$ si $\overleftrightarrow{BP}$ es mediatriz de $\overline{AD}$, calcule α.



A) 15° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 20°

Resolución

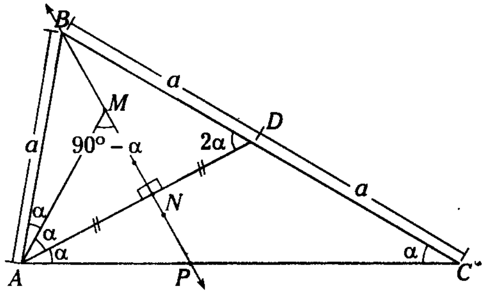


Figura 5.97

Piden α

Se nota $\overline{AD}$ es parte de la mediatriz de $\overline{MP}$

$\rightarrow$ $m\measuredangle APM = 90° - \alpha$ y $m\measuredangle MAN = m\measuredangle PAN = \alpha$

como $\overline{BP}$ mediatriz de $\overline{AD}$ $\rightarrow$ $BD = AB = a$ y $m\measuredangle BDA = 2\alpha$

En $\triangle ADC$: $m\measuredangle DCA = m\measuredangle DAC = \alpha$ $\rightarrow$ $AD = DC$

En $\triangle ABD$: se nota que es equilátero.

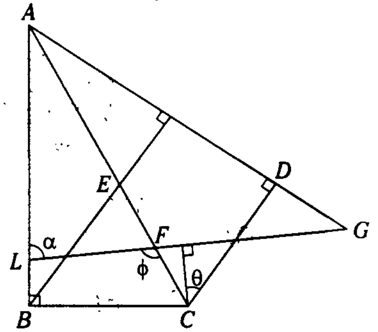
$2\alpha = 60°$

$\therefore$ $\alpha = 30°$

CLAVE B

Problema 9

Según la figura, $\theta + 2\phi - \alpha = 180°$ y $DC = 10$ cm. Calcule $BE + BC$.



A) 10 cm B) 12 cm C) 14 cm
D) 18 cm E) 20 cm

Resolución

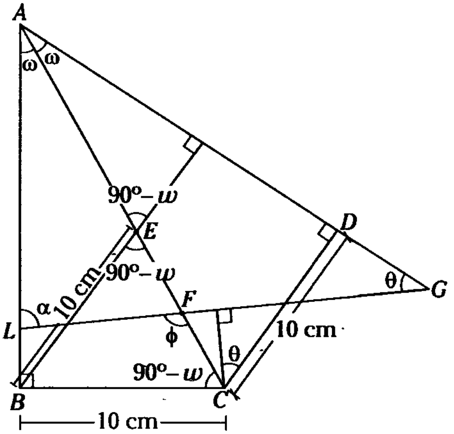


Figura 5.98

Piden $BC + BE$

dato: $\theta + 2\phi - \alpha = 180°$

En $\triangle LAF$: $m\measuredangle LAF = \phi - \alpha$

En $\triangle FAG$: $m\measuredangle FAG = 180° - \theta - \phi$

del dato $\phi - \alpha = 180° - \theta - \phi$

$\rightarrow$ $m\measuredangle LAF = m\measuredangle FAG$

Por teorema de la bisectriz de un ángulo

$BC = CD = 10$ cm

En $\triangle EBC$: isósceles

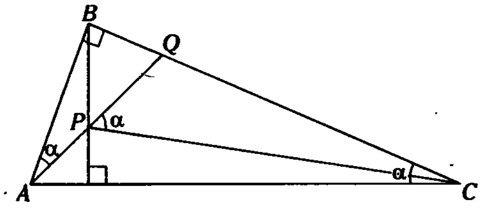
$BE = BC = 10$ cm

$\therefore\ BE + BC = 20$ cm

CLAVE E

Problema 10

Según la figura, $BQ+\frac{AB}{2}=PC$. Calcule α.



A) $\frac{75°}{2}$ B) $\frac{106°}{3}$ C) $\frac{53°}{2}$

D) $\frac{37°}{2}$ E) $\frac{127°}{4}$

Resolución

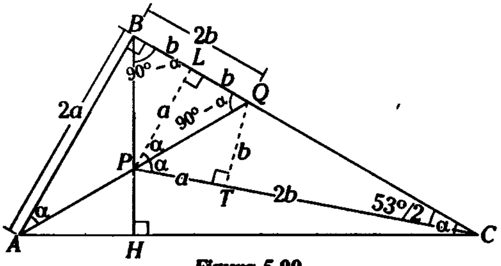


Figura 5.99

Piden α

sea $AB = 2a$, $BQ = 2b$ → del dato $PC = a + 2b$

⊾ABQ: m∢$BQA = 90° - \alpha$;

⊾BHC: m∢$HBC = 90° - \alpha$

→ $\triangle BPQ$: isósceles

se traza $\overline{PL} \perp \overline{BQ}$ → $BL = LQ = b$

Por base media $\triangle ABQ$: $PL = a$

Por teorema de la bisectriz de un ángulo:

$QL = QT = b$ → $PT = PL = a$

Por el cual $TC = 2b$

⊾QTC: notable 53°/2 → m∢$QCT = 53°/2$

⊾PLC: $\alpha + \alpha + \frac{53°}{2} = 90°$

$\therefore\ \alpha = \frac{127°}{4}$

CLAVE E

Problema 11

En un triángulo ABC, se ubican los puntos P, Q y R en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y en la prolongación $\overline{AC}$ tal que P, Q y R resulten colineales. Si $AB = AC$, $PQ = QR$, $PB = 1$ y $AP = 4$, calcule CR.

A) 2 B) 1 C) 3

D) 2/3 E) 3/2

Resolución

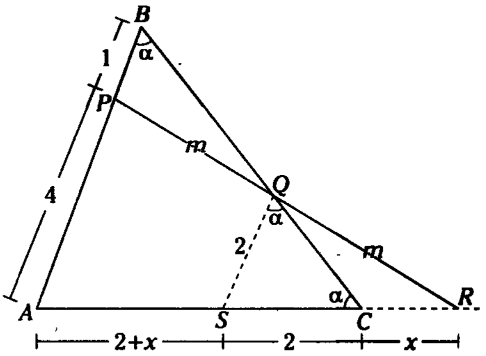


Figura 5.100

Piden $CR = x$

Se traza $\overline{QS} // \overline{AB}$

$\triangle APR$: $\overline{QS}$ es base media $\rightarrow AS = SR$, $QS = AP/2 = 2$

y $m\measuredangle SQC = m\measuredangle ABC$

$\triangle QSC$: $SQ = SC = 2$

$\triangle ABC$: $4 + 1 = 2 + x + 2$

$\therefore \quad x = 1$

CLAVE B

Problema 12

En un triángulo ABC acutángulo, se traza la altura AH y la mediana BL. Si $AC = 2(BH) = 4$, calcule el menor valor entero de $AB + BC$.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 4

Resolución

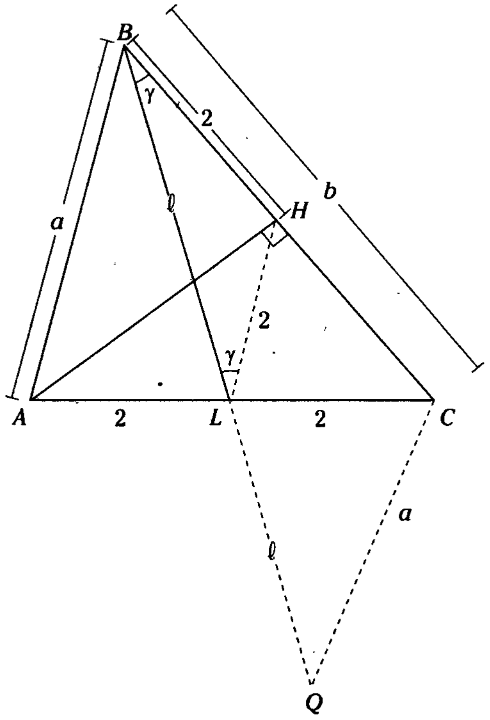


Figura 5.101

Piden $AB + BC = a + b$ (menor)

Se traza $\overline{HL}$: Por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa $HL = AC/2 = 2$

En $\triangle BHL$: se nota $m\measuredangle HBL = m\measuredangle BLH = \gamma$

En $\triangle BHL$: por teorema (existencia del $\triangle$)

$0 < BL < 4$ (I)

Por la naturaleza del triángulo BHL

$(BL)^2 > 2^2 + 2^2$

$\rightarrow BL > 2\sqrt{2}$ (II)

De (I) y (II)

$2\sqrt{2} < BL < 4$ (III)

Se prolonga $\overline{BL}$ hasta Q, tal que $BL = LQ = \ell$

$\triangle ABL \cong \triangle CLQ$ (A.L.A.) $\rightarrow$ $CQ = AB = a$

En $\triangle BCQ$ existencia

$a + b > 2\ell$ (IV)

De (III)

$4\sqrt{2} < 2\ell < 8$

$5{,}6 < 2\ell < 8$ (V)

Aplicando la ley de transitividad

$a + b > 2\ell > 5{,}6$

$\therefore \quad (a + b)$ menor entero $= 6$

CLAVE B

Problema 13

Dado un triángulo ABC, en la región exterior relativa a $\overline{AC}$, se ubica el punto L, tal que $AB = LC$ y $m\measuredangle ACL = 40°$. Luego se ubican los puntos medios M, P, Q y D de $\overline{BC}$, $\overline{BL}$, $\overline{AC}$ y $\overline{PQ}$, respectivamente. $\overleftrightarrow{MD} \cap \overleftrightarrow{CL} = \{E\}$, $AC = 2(EL)$, $m\measuredangle DEP = 10°$ y $m\measuredangle DEC = 30°$, calcule $m\measuredangle LAC$.

A) 50° B) 40° C) 35°
D) 65° E) 60°

Resolución

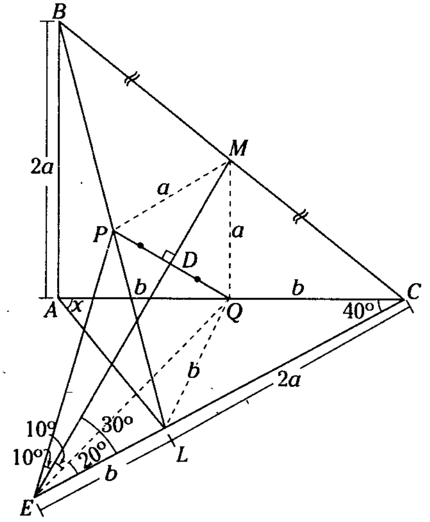


Figura 5.102

Piden m$\sphericalangle LAC$

En $\triangle LBC$ se traza la base media $\overline{PM}$,

$$\rightarrow \quad PM=\frac{CL}{2}=a$$

En $\triangle ABC$ se traza la base media $\overline{MQ}$,

$$\rightarrow \quad QM=\frac{AB}{2}=a$$

Como $\overline{DE}$ es parte de la mediatriz de $\overline{PQ}$

$\rightarrow$ $PE=QE$ $\rightarrow$ m$\sphericalangle PED$ = m$\sphericalangle QED = 10°$

Observación

De la figura, si $EL=QC=b$

$\rightarrow$ $QL=b$

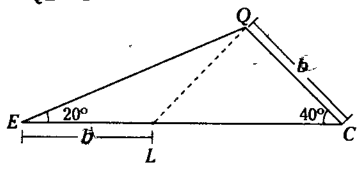


Figura 5.103

En nuestro problema $AQ=QC=QL$

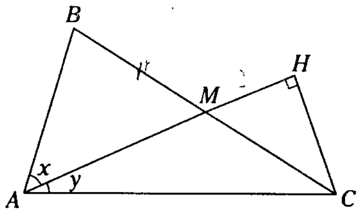
$\rightarrow$ m$\sphericalangle ALC = 90°$

$\therefore$ $x=50°$

CLAVE A

Problema 14

En la figura, $BM=MC$ y $AB=2(MH)$. Calcule x/y.



A) 1 B) 2 C) 1/2

D) 2/3 E) 3/2

Resolución

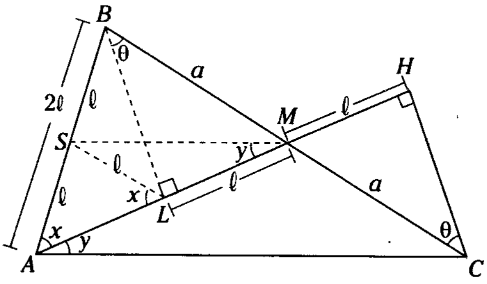


Figura 5.104

Piden $\dfrac{x}{y}$

se traza $\overline{BL} \perp \overline{AH}$

En ⊾ALB: se traza la mediana $\overline{LS}$

$\rightarrow$ $AS=SB=SL=\ell$

⊾$BLM \cong$ ⊾CHM (A.L.A.)

$\rightarrow ML=MH=\ell$

$\overline{MS}$: base media del $\triangle ABC$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle SML = y$

$\triangle SML$: isósceles $\rightarrow$ m$\sphericalangle MSL = y$

En $\triangle MSL$: por ángulo exterior

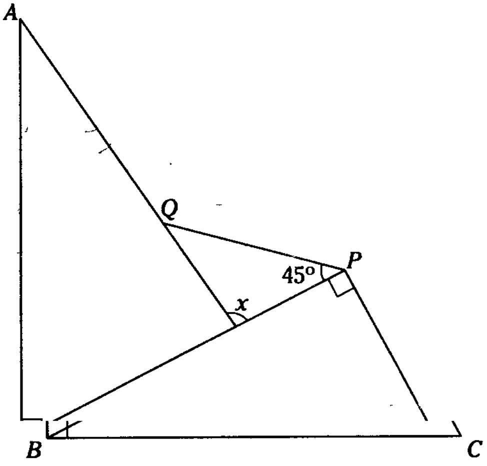
$\rightarrow$ $x=2y$

$\therefore$ $\dfrac{x}{y}=2$

CLAVE B

Problema 15

En la figura, $AB = BC$ y $AQ = PC$. Calcule x.



A) 72° B) 82° C) 74°
D) 90° E) 76°

Resolución

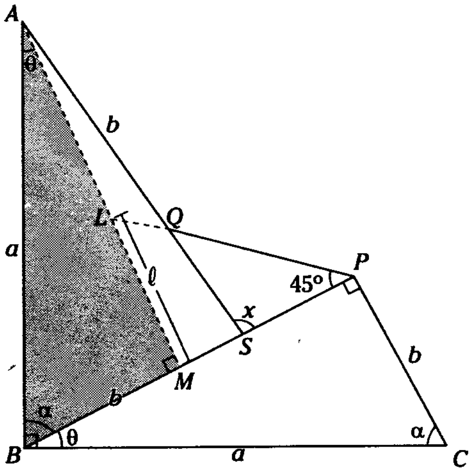


Figura 5.105

Piden x

Sea $AQ = PC = b$ y $AB = BC = a$

se traza $\overline{AM} \perp \overline{BP}$

$\triangle BMA \cong \triangle CPB$ (A.L.A.)

$\rightarrow$ $BM = PC = b$ y $AM = BP$

como ⊾LMP: notable 45°

$\rightarrow$ $LM = MP = \ell$

como

$AM = BP$

$\rightarrow$ $AL + \ell = b + \ell$

$\rightarrow$ $AL = b$

En $\triangle ALQ$: se nota $AL = AQ = b$ y $m\measuredangle MLP = 45°$

$\rightarrow$ $m\measuredangle ALQ = 135°$,

Se sabe $m\measuredangle AQL < 90°$, ($\triangle ALQ$ isósceles)

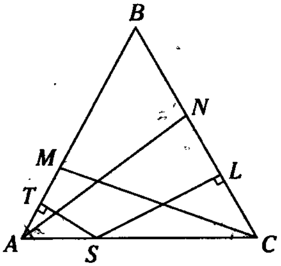
es decir, L es Q y M es S.

$\therefore$ $x = 90°$

CLAVE D

Problema 16

De la figura, $AB = BC$, $AT = TM$, $NL = LC$ y $AN = 6$. Calcule MC.



A) 4 B) 5 C) 7
D) 6 E) 12

Resolución

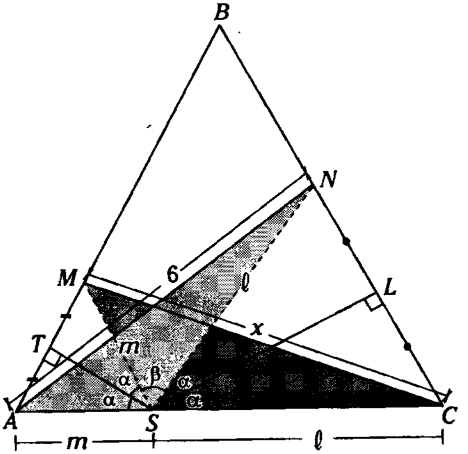


Figura 5.106

Piden $MC = x$

Se nota que $\overline{TS}$ y $\overline{LS}$ son partes de las mediatrices de $\overline{MA}$ y $\overline{NC}$ respectivamente $\rightarrow$ al trazar $\overline{MS}$ y $\overline{NS}$ se cumple $MS = AS = m$ y $NS = SC = \ell$

$\triangle ASN \cong \triangle MSC$ (L.A.L.)

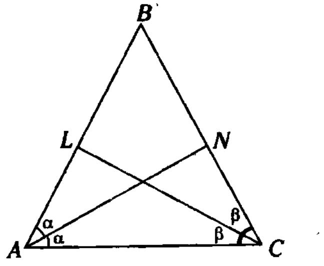
$\rightarrow$ $MC = NA$

$\therefore$ $x = 6$

CLAVE D

Problema 17

Si $AN = LC$, calcule AL/NC.



A) 1/2 B) 2 C) 2/3

D) 3/2 E) 1

Resolución

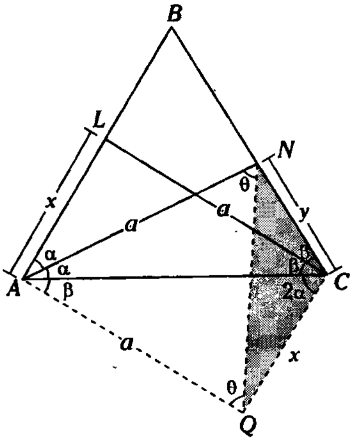


Figura 5.107

Piden x/y

Asumimos $2\beta > 2\alpha$, simplificando $\beta > \alpha$ (I)

De los triángulos ALC y ANC: $x > y$ (II)

Se traza $\overline{AQ}//\overline{LC}$, $\overline{CQ}//\overline{AL}$

$\triangle ALC \cong \triangle AQC$ (A.L.A.)

$\rightarrow$ $AQ = a$, $QC = x$ y $m\sphericalangle CQA = m\sphericalangle ALC$

Se traza $\overline{NQ}$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle ANQ = m\sphericalangle AQN = \theta$

De (I): $2\beta + \alpha > 2\alpha + \beta$ (III)

y $2\beta + \alpha + m\sphericalangle ANC = m\sphericalangle ALC + 2\alpha + \beta$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle ANC < m\sphericalangle ALC$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle ANC < m\sphericalangle CQA$

$\rightarrow$ $\theta + m\sphericalangle QNC < m\sphericalangle CQN + \theta$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle QNC < m\sphericalangle CQN$

En $\triangle NCQ$: (por teorema de correspondencia)

$\rightarrow$ $x < y$ (IV)

Analizando (II) y (IV): Se tiene una contradicción

$\therefore$ $x = y$ (método del absurdo)

CLAVE E

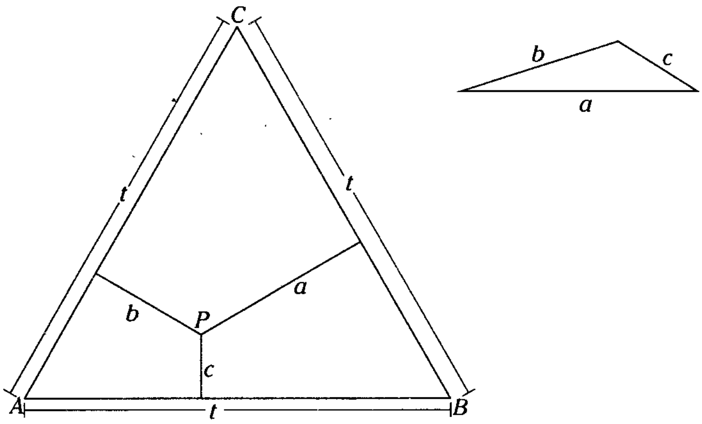
Problemas Recreativos

Problema 1

Coloque ẽstos lápices de manera que formen cuatro triángulos congruentes.

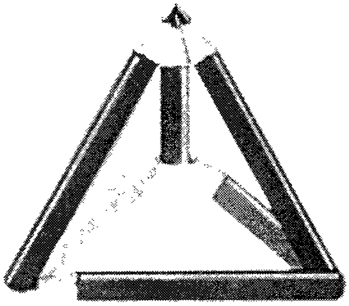
Problema 2

Desde un punto situado en el interior de un triángulo equilátero, tracemos las perpendiculares a sus lados. ¿Cuál es la probabilidad de que con los tres segmentos obtenidos pueda formarse un triángulo? (vease la figura)

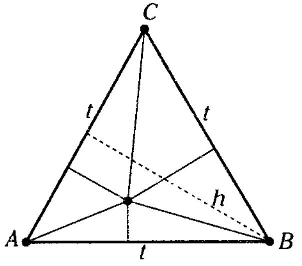


Resolución 1

Se utiliza el mismo método, pero requiere más trabajo, ya que aumentan los elementos que componen el problema. Si la combinación no fuese una palabra sino una frase, el número de alternativas sería demasiado elevada. La solución es justificarse.



Resolución 2



Para que se pueda formar un triángulo con tres segmentos, es necesario y suficiente que cada segmento sea de longitud inferior a la suma de los otros dos y superior a su diferencia.

La posibilidad de formar un triángulo con los segmentos a, b y c depende evidentemente de la posición del punto P en el interior del triángulo ABC. ¿Dónde puede situarse el punto P?

Llamemos t al lado del triángulo equilátero y h a la altura del mismo (vease la fig.). Sabemos que $h = a + b + c$ que escrito de otra manera.

$$\begin{aligned} a+b &= h-c \\ b+c &= h-a \qquad \text{(I)} \\ a+c &= h-b \end{aligned}$$

Por otra parte, la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es superior a la longitud del tercero.

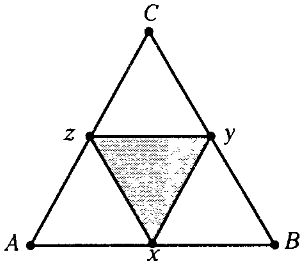
Es decir que

$$a+b>c;\, b+c>a;\, a+c>b \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) $\quad \dfrac{h}{2}>c;\ \dfrac{h}{2}>a;\ \dfrac{h}{2}>b$

Por tanto, a fin de que con a, b y c se pueda formar un triángulo, es necesario que cada uno de estos segmentos sea menor que $h/2$.

Para ello, el punto P debe situarse en el contorno o en el interior del triángulo equilátero XYZ cuyos vértices son los puntos medios de los lados AB, BC y AC (veáse la figura).



Puesto que el área de XYZ equivale a 1/4 del área total, la probabilidad que buscábamos es de 1/4.

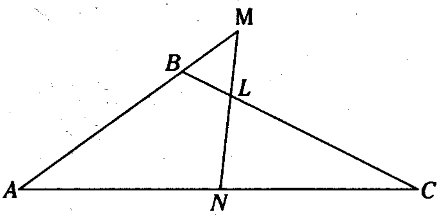
Problemas propuestos

Triángulos parte I

1. En un triángulo ABC, $m\sphericalangle BAC = 4(m\sphericalangle ACB)$ y $AB = 4$. Calcule el máximo valor entero de BC.

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

2. De la figura, $AB = LC = NC$, $m\sphericalangle BML = 3(m\sphericalangle CAB)$. Calcule el valor entero de $m\sphericalangle CAB$.

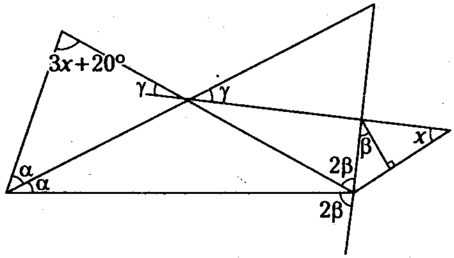


A) 20° B) 21° C) 22°
D) 23° E) 24°

3. En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{AM}$, tal que $BC < 2(AM)$. Calcule el máximo entero de $m\sphericalangle CAB$.

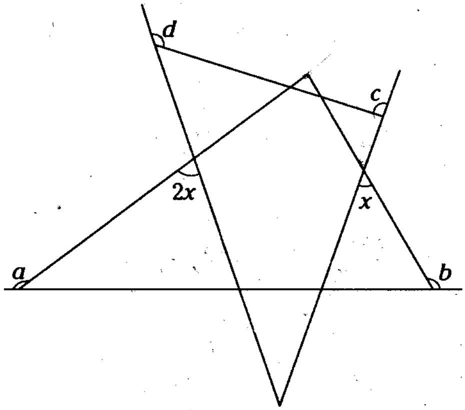
A) 59° B) 60° C) 89°
D) 91° E) 45°

4. De la figura, calcule x.



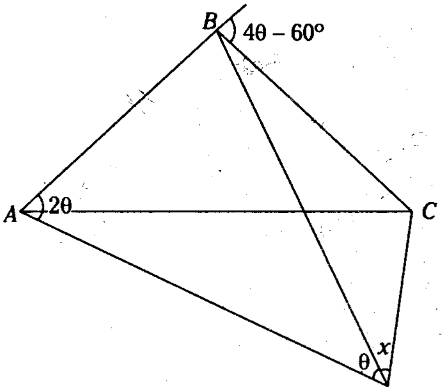
A) 18° B) 20° C) 22°
D) 26° E) 28°

5. De la figura, $a + b + c + d > 546°$. Calcule el menor valor entero de x.



A) 54° B) 63° C) 60°
D) 62° E) 98°

6. De la figura, $AB = BC$. Calcule x.



A) 28° B) 31° C) 30°
D) 26° E) 24°

7. En un triángulo ABC, se ubica el punto P exterior relativo al lado BC. Las longitudes de los segmentos PB, PC y PA están en la razón de 1, 2 y 3. Calcule la suma del mayor y menor valor entero que puede tomar AP, si el perímetro de la región triangular ABC es 39 cm.

A) 38 cm
B) 39 cm
C) 40 cm
D) 42 cm
E) 44 cm

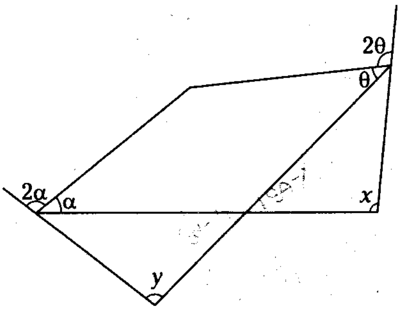
8. Dado un triángulo, la longitud de dos de sus lados son a y b. Calcule el mayor valor entero de la longitud de la mediana relativa al tercer lado sabiendo que a y b son pares.

A) $\frac{a+b+4}{2}$
B) $\frac{a+b}{2}$
C) $\frac{a+b-2}{2}$
D) $\frac{a+b+2}{2}$
E) $\frac{a+b-4}{2}$

9. En un triángulo ABC se traza la altura BH ($H \in \overline{AC}$) y las cevianas interiores BL y BS, tal que $L \in \overline{AH}$ y $S \in \overline{HC}$, $AL = a$, $LS = b$, $CS = c$, $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle HBS)$ y $m\sphericalangle ACB = 2(m\sphericalangle HBL)$. Calcule $AB + BC$.

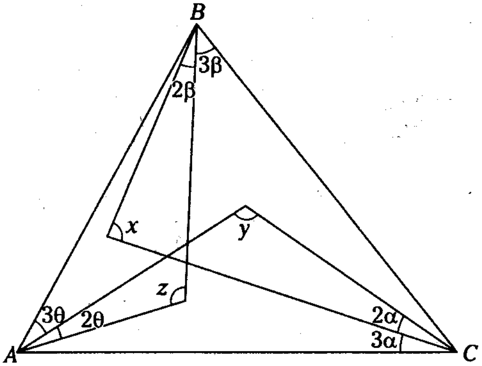
A) $\frac{a+2b+c}{2}$
B) $a+3b+c$
C) $2a+b+c$
D) $a+2b+c$
E) $a+b+2c$

10. De la figura, $\theta - \alpha < 29°$. Calcule el mayor valor entero de $(x - y)$.



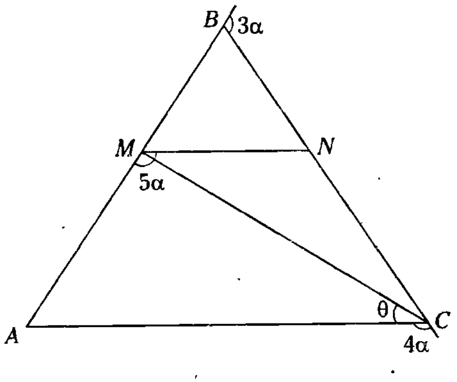
A) 76°
B) 87°
C) 88°
D) 89°
E) 86°

11. De la figura, $\alpha+\beta+\theta = 25°$, calcule el menor valor entero de $x + y + z$.



A) 202°
B) 199°
C) 201°
D) 200°
E) 198°

12. Según la figura, $\overline{MN}//\overline{AC}$ y $MN=NC$, calcule θ.



A) 28° B) 30° C) 32°
D) 34° E) 36°

13. Indique el número de triángulos escalenos cuyos lados son enteros, y el perímetro de la región triangular menor que 13.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

14. En un triángulo *ABC*, se prolonga $\overline{CA}$ hasta el punto *L*, tal que m∢*LAB*=3(m∢*ACB*) y *AB*= 4 cm. Indique entre que valores se encuentra comprendido *AC*.

A) $0<b<8$ B) $4<b<8$ C) $2<b<8$
D) $2<b<8$ E) $8<b<16$

Triángulos parte II

15. En un triángulo *ABC*, se trazan la mediana *BL* y la ceviana interior *AM*, las cuales se intersecan en *E*, si *AE* = *BC*, calcule *BM*/*ME*.

A) 1/2 B) 2 C) 1
D) 3/2 E) 2/3

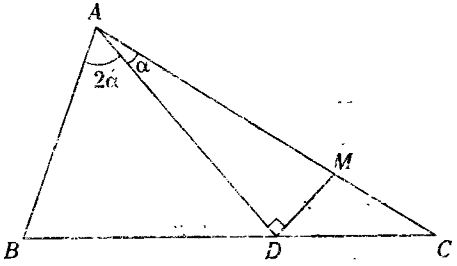
16. Dado un triángulo *ABC*(*AB* = *BC*), se ubica el punto *P* en la región exterior relativo a $\overline{BC}$, tal que *BP* = *PC* y m∢*ABC*=2(m∢*BAP*). Calcule m∢*BAP*.

A) 20° B) 25° C) 30°
D) 35° E) 40°

17. En un triángulo *ABC*, se traza la ceviana interior *BD*, tal que m∢*DBC*=90°, *DC*=2(*AD*) y m∢*ABD* =m∢*BCA*. Calcule m∢*BAC*.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

18. En la figura, *BD* = 2(*MC*), *AB* = *AD* y *AM*–*DC* = 12. Calcule la distancia de *M* a $\overline{BC}$.



A) 8 B) 4 C) 6
D) 12 E) 18

19. En el triangulo *ABC*, se traza la mediana *BM*. Si m∢*ABM*=2(m∢*MBC*) y *BC*=2(*BM*), calcule m∢*MBC*.

A) 48° B) 36° C) 30°
D) 28° E) 37°

20. En un triángulo ABC se trazan las bisectriz interior y exterior del vértice B y C respectivamente. Desde A se trazan las perpendiculares $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ a dichas bisectrices (M y N pertenecen a las bisectrices). Si $BC + AC - AB = p$, calcule MN.

A) p B) $p/2$ C) $p/3$
D) $p/4$ E) $p/5$

21. Se tiene un triángulo ABC en el cual se ubica el punto en la región interior P. tal que $AP = BC$, m$\measuredangle PCB$ = m$\measuredangle ACP$ y m$\measuredangle PBC = 72°$. Calcule m$\measuredangle PCB$.

A) 18° B) 24° C) 36°
D) 30° E) 42°

22. En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior BL, tal que m$\measuredangle LBC$=6°, m$\measuredangle BCA$= 120° y $AL = LB + BC$. Calcule m$\measuredangle ABL$.

A) 20° B) 10° C) 25°
D) 30° E) 35°

23. En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que $AB = CD$ y m$\measuredangle BAC$=5(m$\measuredangle BCA$)=100°. Calcule la m$\measuredangle DBC$.

A) 10° B) 12° C) 14°
D) 16° E) 18°

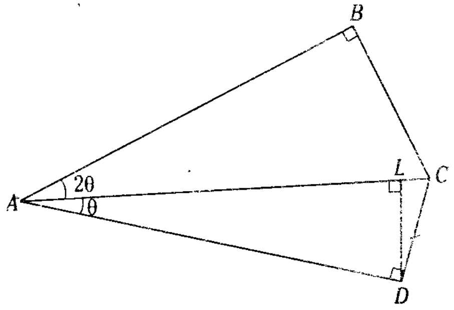
24. En un triángulo ABC, m$\measuredangle ABC$=3(m$\measuredangle ACB$). Si la mediatriz de $\overline{BC}$ interseca a la prolongación de la bisectriz interior $\overline{BM}$ en P, calcule el mayor valor entero de m$\measuredangle PCA$. Considere que el triángulo ABC es acutángulo.

A) 13° B) 14° C) 15°
D) 29° E) 30°

25. En el interior de un triángulo ABC, se ubica el punto D, tal que $BD = AC$. Si m$\measuredangle ABC$ = m$\measuredangle BAD$ = m$\measuredangle BCD$, calcule la m$\measuredangle BAD$.

A) 30° B) 37° C) 53°
D) 20° E) 45°

26. De la figura, $DL = 4$ y m$\measuredangle ADC$=90°. Calcule BC.



A) 4 B) 2 C) 6
D) 8 E) 12

27. Dado un triángulo ABC, en la región interior se ubica el punto L, tal que BC=CL, m$\measuredangle ABC$ = 98° y m$\measuredangle BAL$=m$\measuredangle LAC$=8°. Calcule m$\measuredangle LCA$.

A) 20° B) 22° C) 24°
D) 30° E) 15°

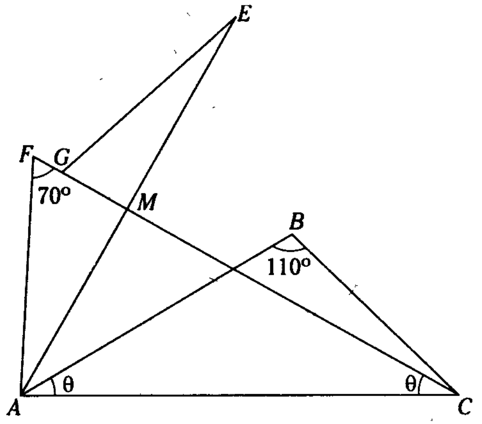
28. Se tiene un triángulo rectángulo ABC (recto en B), donde se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{BM}$, tal que m∢HMB=m∢HBC. Calcule m∢ACB.

A) 45° B) 37° C) 30°
D) 36° E) 22° 30'

29. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BL}$, tal que $AC=2(AB)=2(BL)$ y m∢BAC+2(m∢BCA)=90°. Calcule m∢LBC.

A) 6° B) 17°/2 C) 19°/2
D) 21°/2 E) 23°/2

30. De la figura, $BC=EG$ y $AM=ME$. Calcule θ.



A) 70° B) 75° C) 0°
D) 85° E) 65°

31. En la región interior de un triángulo se ubica el punto P, tal que $AB=PB+BC$, m∢ABC = 90° y m∢PBA = 2(m∢PAB) = 15°. Calcule m∢PCB.

A) 37° B) 22°30' C) 15°30'
D) 30° E) 45°

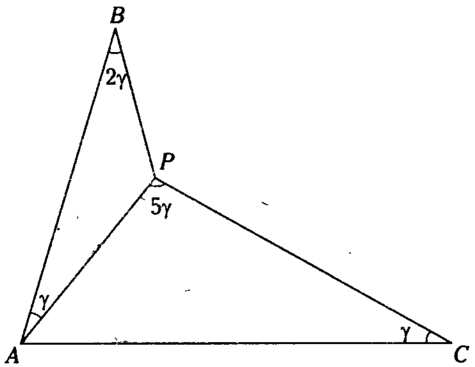
32. Dado un triángulo rectángulo ADE recto en D, se ubica el punto C en la región exterior relativa a $\overline{AE}$, luego se traza $\overline{CB}$ perpendicular a DA ($B\in\overline{DA}$), tal que ABC y ADE son triángulos congruentes. Calcule el mayor valor entero de m∢AEC.

A) 88° B) 89° C) 90°
D) 91° E) 92°

33. En la región interior de un triángulo ABC, se ubica el punto E, de modo que $AB=CE$, m∢BCE = m∢EAC y m∢BAE = m∢ECA = $30°-\dfrac{\text{m∢BCE}}{2}$. Calcule m∢$EAC$.

A) 15° B) 30° C) 5°
D) 37° E) 53°

34. De la figura, $2(AB)=2(PC)=5(BP)$. Calcule γ.



A) 28° 30' B) 25° 30' C) 18° 30'
D) 22° 30' E) 26° 30

1	B
2	C
3	C
4	B
5	B
6	C
7	A
8	C
9	D
10	E
11	C
12	B
13	C
14	B
15	C
16	C
17	A
18	D

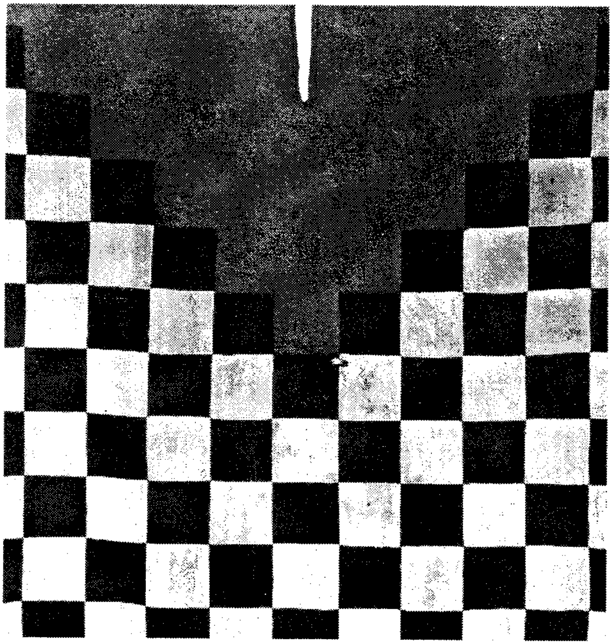
Claves

19	B
20	B
21	C
22	D
23	A
24	B
25	E
26	D
27	B
28	C
29	D
30	A
31	D
32	B
33	B
34	E

Claves

Capítulo VI

Cuadriláteros



Este poncho inca ha sido diseñado sobre la base de regiones limitadas por cuadrados, lo cual nos demuestra que los antiguos peruanos conocían las propiedades de los diversos tipos de cuadriláteros.

Cuadriláteros

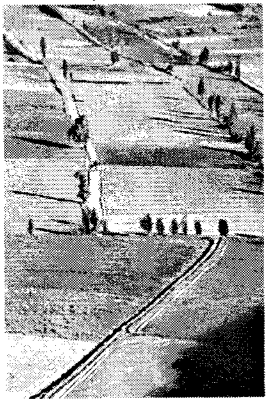
OBJETIVOS

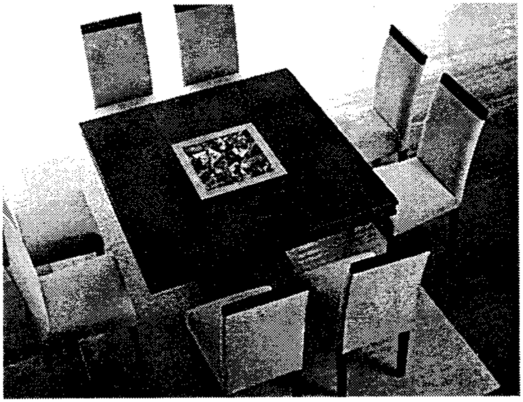
- Definir el cuadrilátero indicando sus elementos y sus propiedades básicas.
- Clasificar a los cuadriláteros según el paralelismo de sus lados.
- Aplicar las diferentes propiedades de los cuadriláteros.

INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad, el hombre al hacer demarcaciones de terrenos, les dio ciertas formas geométricas, entre las que destaca la forma rectangular por la facilidad de realizarlas y medirlas.

Con los antecedentes históricos podemos concebir que el estudio de los cuadriláteros nos ayudará a entender por qué muchos objetos que apreciamos en nuestro entorno (paredes, puertas, ventanas, pizarras, cuadernos, etc.) son de forma cuadrangular.



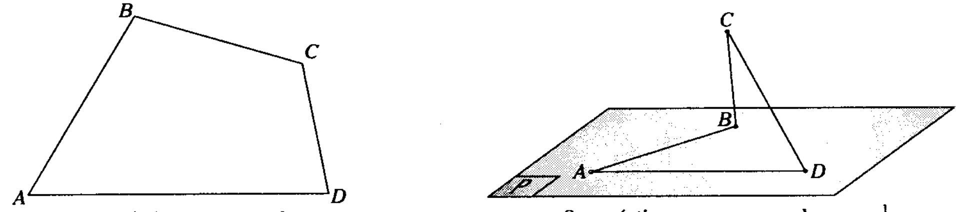


Al igual que los terrenos de cultivo, cuya forma rectangular les permite una mejor distribución del sistema de riego y una facilidad al medirlos, las mesas y sillas tienen tableros y respaldares de forma cuadrangular, para una mejor estabilidad y ofrecer comodidad en su uso.

DEFINICIÓN

Es la figura que resulta de la reunión de cuatro segmentos de recta unidos en sus extremos de tal forma que cualquier par de segmentos no es colineal, los segmentos solo tienen en común sus extremos.

Por lo expuesto se presentan dos casos:

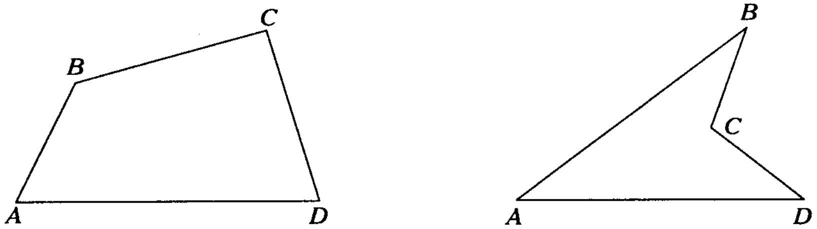


Sus cuatro vértices son coplanares — Sus vértices no son coplanares [1]

Figura 6.1

En este capítulo estudiaremos solo a los cuadriláteros cuyos vértices son todos coplanares.

Así tenemos a los cuadriláteros convexos y a los no convexos (cóncavos).



Notación

$\square ABCD$: cuadrilátero $ABCD$

$\square ABCD$: $\{\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}\}$

Notación

$\measuredangle ABCD$: cuadrilátero $ABCD$

$\measuredangle ABCD$: $\{\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}\}$

Figura 6.2

Los cuadriláteros reciben estas denominaciones debido a la región que limitan ya que todo cuadrilátero es un conjunto no convexo de puntos, es decir el cuadrilátero convexo y el cuadrilátero cóncavo son conjuntos no convexos.

ELEMENTOS

Lados: AB, BC, CD, AD

Pares angulares: $\measuredangle BAD$, $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$ y $\measuredangle ADC$

A. A los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ se les denominan lados opuestos.
En todo cuadrilátero se pueden trazar dos diagonales. ($\overline{AC}$ y $\overline{BD}$).

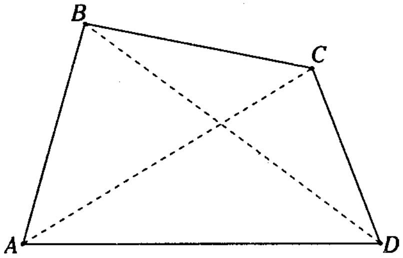


Figura 6.3

1 Se denominan puntos coplanares a aquellos puntos que pertenecen a un mismo plano.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES

1. En todo cuadrilátero la suma de sus medidas angulares es 360°.

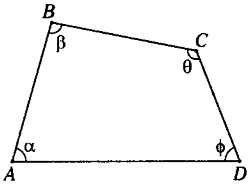


Figura 6.4

$$\alpha + \beta + \theta + \phi = 360°$$

2. En todo cuadrilátero convexo se cumple

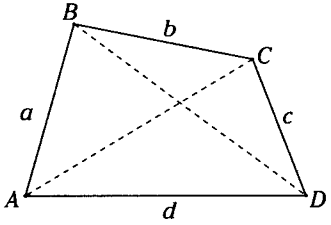


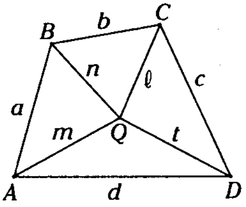
Figura 6.5

$$p < AC + BD < 2p$$

Donde $2p = a + b + c + d$ y

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

3. En todo cuadrilátero convexo se cumple



(a)

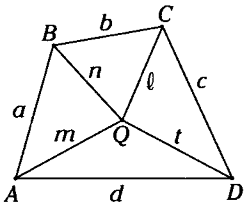
$$p < m + n + \ell + t < 3p$$

Donde

$$2p = a + b + c + d$$

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

Demostración



(b)

Figura 6.6

De la figura 6.6(b)

$$\left.\begin{array}{l} m + n < b + c + d \\ n + \ell < a + d + c \\ \ell + t < b + a + d \\ m + t < a + b + c \end{array}\right\} \text{sumando}$$

$$2(m+n+\ell+t) < 3(a+b+c+d)$$

Despejando

$$2(m + n + \ell + t) < 3(2p)$$

$$\therefore \quad m + n + \ell + t < 3p \qquad \text{(I)}$$

De los triángulos parciales

$$\left.\begin{array}{l} a < m + n \\ b < n + \ell \\ c < \ell + t \\ d < t + m \end{array}\right\} \text{sumando}$$

$$(a+b+c+d) < 2(m+n+\ell+t)$$

$$2p < 2(m + n + \ell + t)$$

$$\rightarrow \quad p < m + n + \ell + t \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\therefore \quad p < m + n + \ell + t < 3p$$

CLASIFICACIÓN

Los cuadriláteros se clasifican de acuerdo al paralelismo de sus lados. Así tenemos

TRAPEZOIDE

Definición

Es aquel cuadrilátero que no presenta lados opuestos paralelos.

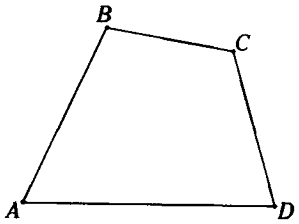


Figura 6.7

En la figura 6.7, si $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \nparallel \overline{AD}$, determinamos que el cuadrilátero *ABCD* es un trapezoide.

Aquellos trapezoides, en los cuales una de sus diagonales es parte de la mediatriz de la otra diagonal, reciben el nombre de trapezoide simétrico, trapezoide bisósceles o contraparalelogramo.

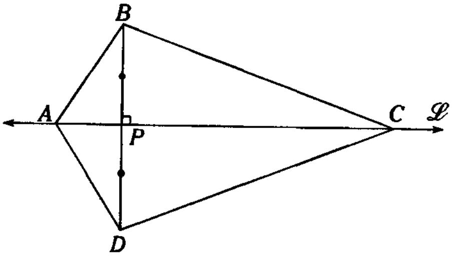
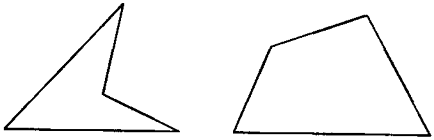


Figura 6.8

En la figura 6.8, se muestra al trapezoide *ABCD*, cuya diagonal *AC* es parte de la mediatriz de *BD* ($\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$). A la recta $\mathscr{L}$ también se le denomina *Eje de simetría*, de ahí que este tipo de trapezoide se denomina trapezoide simétrico y por la simetría respecto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$; ($AB = AD$) y ($BC = CD$).

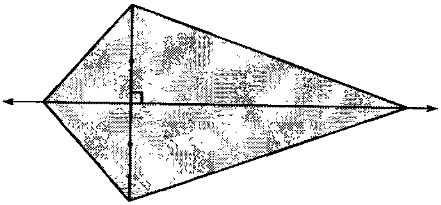
Los trapezoides pueden ser de 2 tipos: convexos o cóncavos.



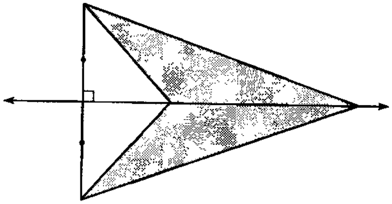
Trapezoide cóncavo   Trapezoide convexo

Figura 6.9

De igual forma, los trapezoides simétricos también pueden ser de 2 tipos: convexos y cóncavos.



Trapezoide simétrico convexo



Trapezoide simétrico cóncavo

Figura 6.10

TRAPECIO

Definición

Es aquel cuadrilátero que tiene solo un par de lados paralelos, a los cuales se les denomina **bases**.

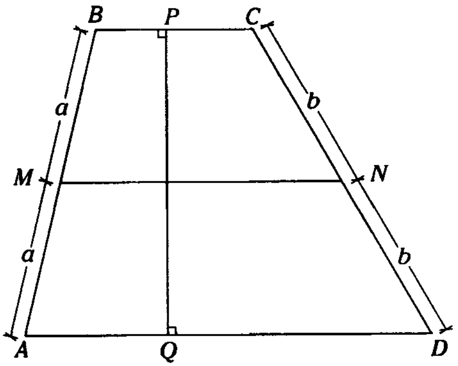


Figura 6.11

En la figura 6.11, si $\overline{BC} // \overline{AD}$, señalamos que $ABCD$ es un trapecio.

- **Bases:** Son los lados paralelos del trapecio.
- **Lados laterales:** Son los lados no paralelos.
- **Base media:** Es aquel segmento que tiene por extremos los puntos medios de los lados laterales. En la figura 6.11, $\overline{MN}$ es la base media.
- **Altura:** Es la distancia entre las bases del trapecio. En la figura 6.11, $\overline{PQ}$ es la altura del trapecio.

Teorema

En todo trapecio la base media es paralela a las bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de dichas bases.

Demostración

Trazamos $\overline{BN}$ y lo prolongamos hasta que interseque a la prolongación de $\overline{AD}$ en Q.

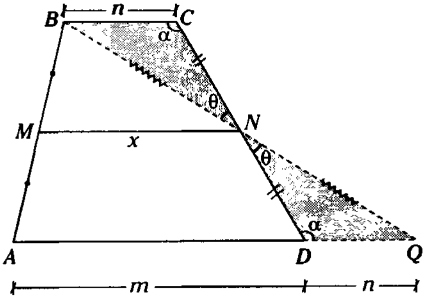


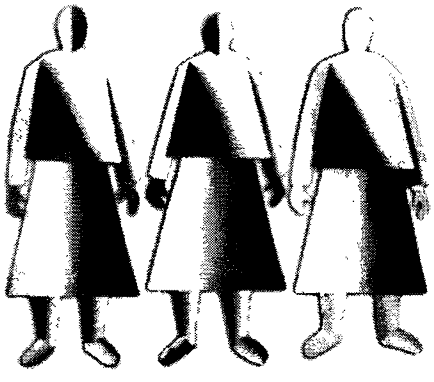
Figura 6.12

- $ABCN \cong \Delta QDN$ (A.L.A.)
  $\rightarrow BN = NQ$ y
  $QD = BC = n$
- $\overline{MN}$: Base media del ABC.

$$\therefore \boxed{MN // AD // BC}$$

$$MN = \frac{AQ}{2} = \frac{m+n}{2}$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{m+n}{2}}$$



Aquí podemos notar el uso de trapecios para la elaboración de ciertas pinturas (Mujeres jóvenes en un campo 1928-1932), cuadro de Kazimir Malevitch.

Teorema

En todo trapecio el segmento que une los puntos medios de las diagonales es paralelo a las bases y su longitud es igual a la semidiferencia de las longitudes de dichas bases.

Demostración

Se traza $\overline{CN}$ y lo prolongamos hasta que corte a $\overline{AD}$ en Q. Se observa:

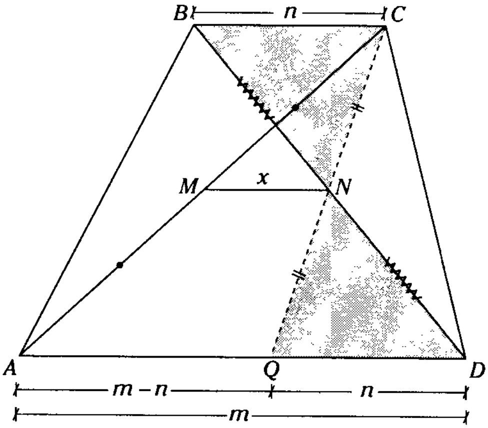


Figura 6.13

$\triangle BCN \cong \triangle DQN$ (A.L.A.)

$\rightarrow\ CN = NQ$ y

$QD = BC = n$

- MN : Base media del $\triangle ACQ$

$\rightarrow$ $\boxed{MN \parallel BC \parallel AD}$

$MN = \dfrac{AQ}{2}$

$\therefore$ $\boxed{x = \dfrac{m+n}{2}}$

Clasificación

Los trapecios se clasifican de acuerdo a las longitudes de sus laterales, debido a esto los trapecios pueden ser:

Trapecio escaleno

Es aquel trapecio cuyos lados laterales son de diferente longitud.

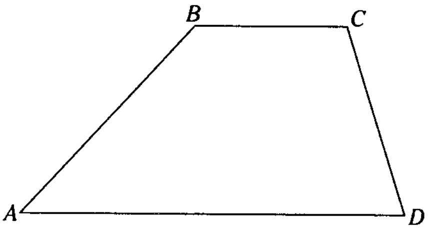


Figura 6.14

En la figura 6.14, si $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y $AB \neq CD$, entonces al trapecio se le denomina **escaleno**.

Teorema

En todo trapecio escaleno la medida de los ángulos determinados por una de las bases con los lados laterales son de diferente medida.

Demostración

Trazamos BH y CM perpendiculares a AD

$\rightarrow\ BH = CM = h$

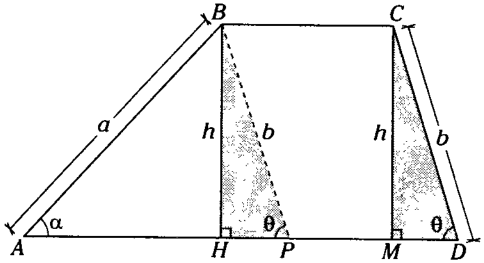


Figura 6.15

Trazamos $BP \parallel CD$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle BPH$ = m$\sphericalangle CDM = \theta$

$\triangle BHP \cong \triangle CMD$ (A.L.A.)

$\rightarrow\ BP = CD = b$

$\triangle ABP$ (correspondencia)

Como $a \neq b$ (trapecio escaleno)

$\rightarrow \ \alpha \neq \theta$

También $m\sphericalangle ABC \neq m\sphericalangle BCD$

Si en un trapecio escaleno, uno de los lados laterales es perpendicular a las bases, a dicho trapecio escaleno se le denomina **trapecio rectángulo**.

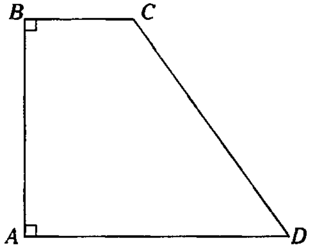


Figura 6.16

En la figura 6.16, se presenta un trapecio escaleno. Si $AB \perp BC$, lo designamos **trapecio rectángulo**.

Teorema

En todo trapecio rectángulo el punto medio del lado lateral no perpendicular a las bases está a igual distancia de los extremos del lado opuesto.

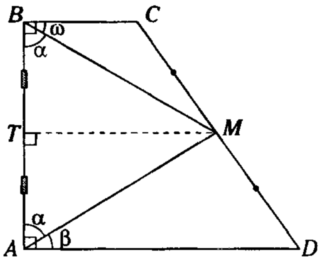


Figura 6.17

En la figura 6.17, se cumple $\boxed{BM = MA}$

Demostración

Trazamos la base media MT

$\rightarrow \ BT = TA$ y $TM \perp AB$

$\triangle BMA$: isosceles

$\rightarrow \ BM = MA$

además $m\sphericalangle MBA = m\sphericalangle MAB$

$\rightarrow \ \omega = \beta$

Trapecio isósceles

Es aquel trapecio cuyos lados laterales son de igual longitud.

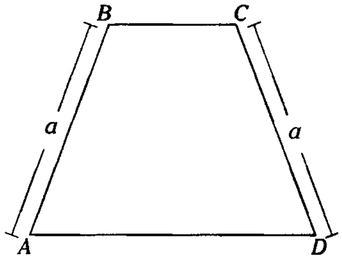


Figura 6.18

En la figura 6.18, muestra un trapecio donde los lados laterales son de igual longitud por lo que se le denomina **trapecio isósceles**.

Teorema

En todo trapecio isósceles, la medida de los ángulos determinados por una de las bases con los lados laterales es igual.

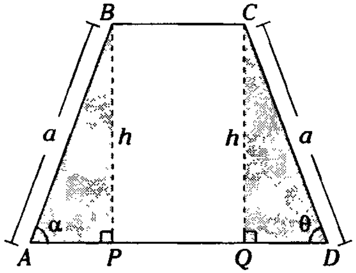


Figura 6.19

Se cumple $\boxed{\alpha = \theta}$

Demostración

Trazamos BP y CQ perpendiculares a AD

$\rightarrow\ BP = CQ = h$

⊾ $BPA \cong$ ⊾ CQD (L.L.L.)

$\rightarrow\ \alpha = \theta$

además $\boxed{AP = QD}$

Teorema

En todo trapecio isósceles, las diagonales tienen igual longitud.

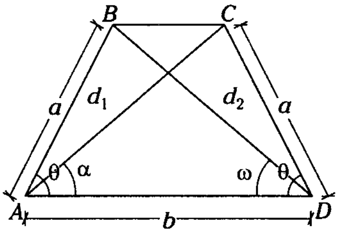


Figura 6.20

Sea $AC = d_1$ y $BD = d_2$

se cumple $\boxed{d_1 = d_2}$

Demostración

$\triangle ABD \cong \triangle DCA$ (L.A.L.)

$\rightarrow\ d_1 = d_2$

además $\boxed{\alpha = \omega}$

PARALELOGRAMO

Definición

Es aquel cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.

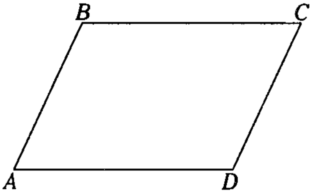


Figura 6.21

En la figura 6.21, si $AB \parallel CD$ y $BC \parallel AD$, determinamos que $ABCD$ es un paralelogramo.

Teorema

En todo paralelogramo, los lados paralelos tienen igual longitud, mientras que los ángulos opuestos igual medida.

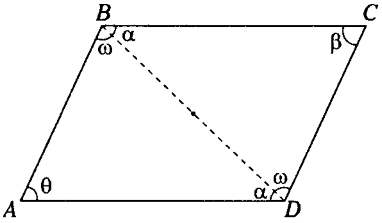


Figura 6.22

Se cumple $\boxed{AB = CD}$ $\boxed{BC = AD}$

$\boxed{\theta = \beta}$

Demostración

Trazamos BD y por ángulos alternos internos se tiene

$\rightarrow\ m\angle ABD = m\angle BDC$ y $m\sphericalangle CBD = m\angle ADB$

$\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (A.L.A.)

$\rightarrow\ AB = CD,\ AD = BC$ y $\theta = \beta$

Teorema

En todo paralelogramo las diagonales se intersecan en su punto medio.

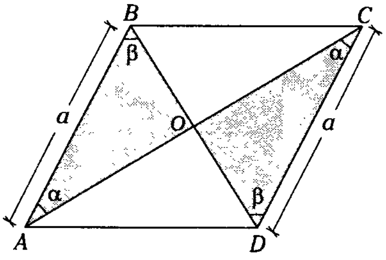


Figura 6.23

Se cumple

$AO = OC$ y

$BO = OD$

Demostración

Por ángulos alternos internos

$m\angle BAC = m\angle DCO$ y

$m\angle ABO = m\angle CDO$

Se observa

$\triangle ABO \cong \triangle CDO$ (A.L.A.)

$\rightarrow\ AO = OC$ y $BO = OD$

Observación

El gráfico muestra un paralelogramo $ABCD$ se cumple

$PO = OQ$ y $PC = AQ$

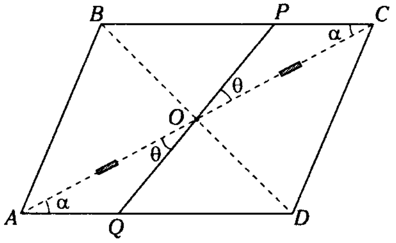


Figura 6.24

Demostración

Se observa

$m\measuredangle OAQ = m\measuredangle OCP$,

$m\measuredangle AOQ = m\angle POC$ y

$AO = OC$

$\triangle AQO \cong \triangle CPO$ (A.L.A.)

$\rightarrow\ OP = OQ$ y $AQ = PC$

Por lo visto que O es el centro de simetría del paralelogramo.

Clasificación

Romboide

Es aquel paralelogramo cuyos lados consecutivos son de diferente longitud y cuyos ángulos internos no son ángulos rectos.

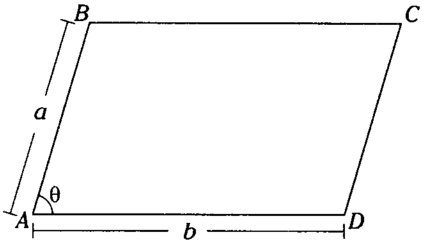


Figura 6.25

Si en el paralelogramo $a \neq b$ y $\theta \neq 90°$, entonces $\square ABCD$ es romboide.

En un romboide las diagonales **no son bisectrices** de los pares angulares internos.

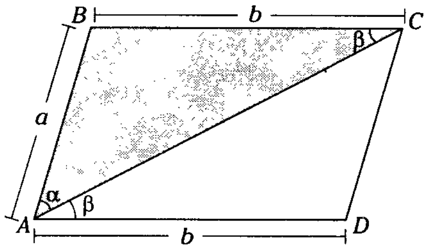


Figura 6.26

Se cumple $\alpha \neq \beta$

Demostración

$BC = AC = b$ y

$m\measuredangle BCA = m\measuredangle CAD = \beta$

En $\triangle ABC$ (por correspondencia)

Si $\alpha \neq \beta\ \rightarrow\ a \neq b$

Rectángulo

Es aquel paralelogramo cuyos lados consecutivos son de diferente longitud y cuyos ángulos internos miden 90°.

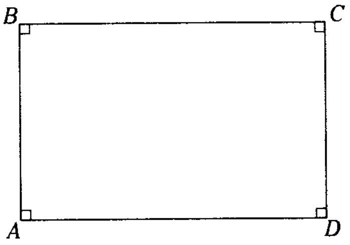
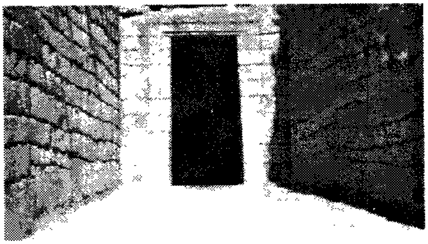


Figura 6.27



En la imagen, observamos el uso de la forma rectangular en los bloques de adobe, que forman paredes y la forma trapecial de la puerta.

Teorema

En todo rectángulo las longitudes de las diagonales son iguales.

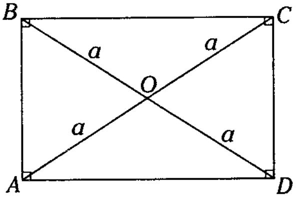


Figura 6.28

Se cumple $AC = BD$

Demostración

Sea $AO = OC = a$

⊿ ABC (teorema de la mediana relativa a la hipotenusa)

$\rightarrow\ OD = OB = a$

$\therefore\ AC = BD = 2a$

Rombo

Es aquel paralelogramo cuyos lados son de igual longitud y sus respectivos pares angulares no son rectos.

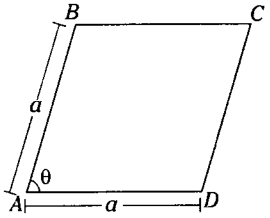


Figura 6.29

Si en el paralelogramo $AB = AD$ y $\theta \neq 90°$, Entonces se concluye que ▱$ABCD$ es rombo

Teorema

En todo rombo, las diagonales **son bisectrices** de sus ángulos interiores.

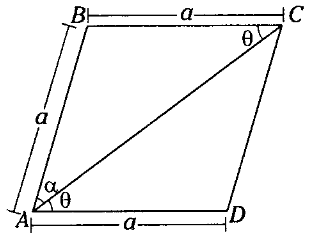


Figura 6.30

Se cumple $\alpha = \theta$

Demostración

$m\measuredangle BCA = \theta$ (por alternos internos)

$\triangle ABC$: isósceles

$\rightarrow\ \alpha = \theta$

Teorema

En todo rombo, las diagonales son perpendiculares.

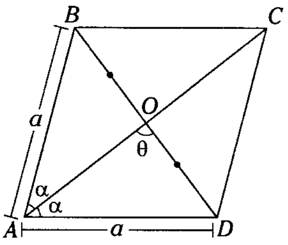


Figura 6.31

Se cumple $\theta = 90°$

Demostración

$m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle DAC$ (por teorema anterior)

$\triangle BAD$: isósceles

$\rightarrow \overline{AO} \perp \overline{BD}$

$\therefore\ \theta = 90°$

Cuadrado

Es aquel paralelogramo cuyos lados son de igual longitud y sus ángulos interiores son rectos.

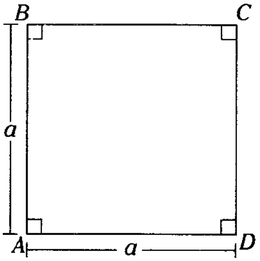
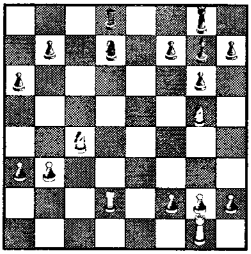


Figura 6.32



Un tablero de ajedrez, tiene forma cuadrada y a su vez esta formado por 64 casilleros de forma cuadrada.

En la figura 6.32, el paralelogramo mostrado es un cuadrado. El punto de intersección de las diagonales de un cuadrado es el centro de simetría del cuadrado y veremos en el capítulo de polígonos regulares, a dicho punto se le denominará centro.

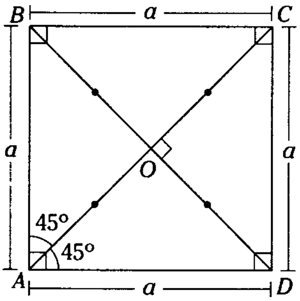
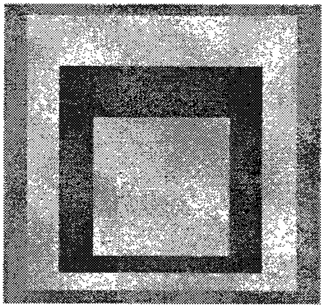
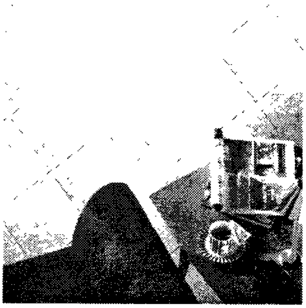


Figura 6.33





Aquí vemos el uso de la forma cuadrada en las artes plásticas (Homenaje al cuadrado, pintura de Josef Albers (1888 - 1976)) o en la decoración de paredes y pisos (losetas).

TEOREMA DE VARIGNON

En todo cuadrilátero, los puntos medios de sus lados son los vértices de un paralelogramo.

Demostración

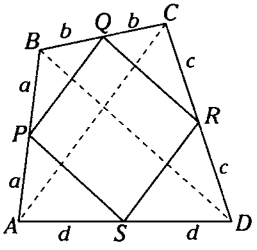


Figura 6.34

Trazamos AC y BD

$\overline{PQ}$: base media $\triangle ABC$ $\rightarrow$ $\overline{PQ} \,//\, \overline{AC}$

$\overline{RS}$: base media $\triangle ADC$ $\rightarrow$ $\overline{RS} \,//\, \overline{AC}$

entonces $\overline{PQ} \,//\, \overline{RS}$

$\overline{PS}$: base media $\triangle BAD$ $\rightarrow$ $\overline{PS} \,//\, \overline{BD}$

$\overline{QR}$: base media $\triangle BCD$ $\rightarrow$ $\overline{QR} \,//\, \overline{BD}$

entonces $\overline{PS} \,//\, \overline{QR}$

$\therefore$ $\square PQRS$: paralelogramo

Teorema

Sea $ABQP$ y $BCMN$ cuadrados de centros O_1 y O_2 respectivamente y $AT=TC$.

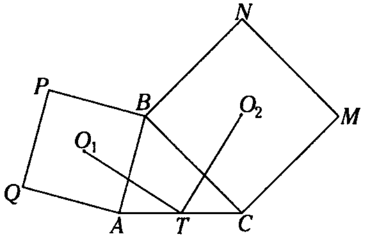


Figura 6.35

Se cumple

$\boxed{O_1T = O_2T}$ y

$\boxed{m\measuredangle O_1TO_2=90^\circ}$

Demostración

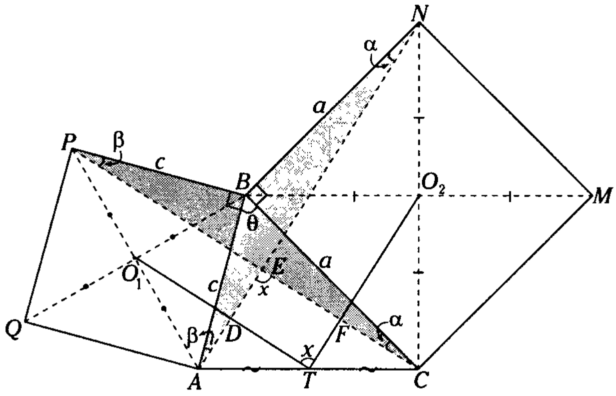


Figura 6.36

Sea $m\measuredangle ABC = \theta$

$\triangle PBC \cong \triangle ABN$ (L.A.L.)

$\rightarrow$ $PC = AN$,

$m\measuredangle BPC = m\measuredangle BAN$ y $m\measuredangle BCP = m\measuredangle BNA$

$\overline{O_1T}$: base media $\triangle PAC$

$O_1T = \dfrac{PC}{2}$ y $\overline{O_1T} \,//\, \overline{PC}$

$\overline{O_2T}$: base media $\triangle ACN$

$O_2T = \dfrac{AN}{2}$ y $\overline{O_2T} \,//\, \overline{AN}$

$\rightarrow$ $\boxed{O_1T=O_2T}$

Se observa

$\square DEFT$: paralelogramo

$\measuredangle ABCE$: $\beta + \theta + \alpha = x$

En $\triangle PBC$: $\beta + \theta + \alpha = 90^\circ$

$\rightarrow$ $x = 90^\circ$

$\therefore$ $\boxed{m\measuredangle O_1TO_2=90^\circ}$

Teorema

Sean *ABPQ*, *BCEF*, *CDGH* y *ADIJ* cuadrados de centros O_1; O_2; O_3 y O_4, respectivamente.

Se cumple

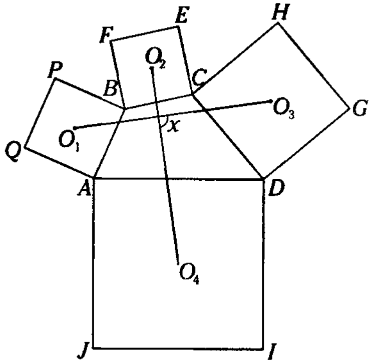


Figura 6.37

Se cumple

$$\boxed{O_1O_3 = O_2O_4} \quad \text{y} \quad \boxed{\overline{O_2O_4} \perp \overline{O_1O_3}}$$

Es decir: $x = 90°$

Demostración

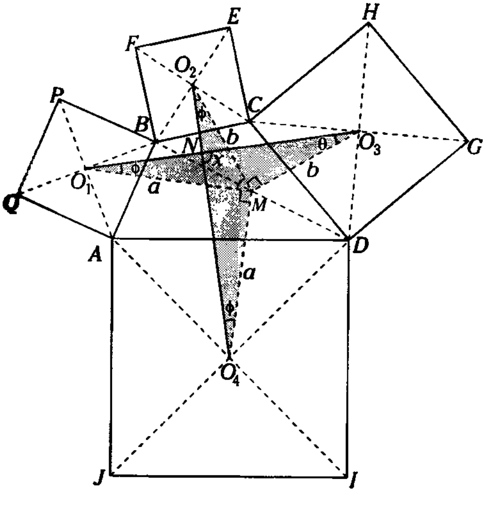


Figura 6.38

Trazamos $\overline{BD}$ y ubicamos su punto medio *M*. Del teorema anterior, para los triángulos *BCD* y *BAD*, se tiene:

- $m\sphericalangle O_2MO_3 = 90°$; $O_2M = O_3M = b$
- $m\sphericalangle O_1MO_4 = 90°$; $O_1M = O_4M = a$

  $\rightarrow \triangle O_1MO_3 \cong O_2MO_4$ (L.A.L.)

  $\therefore O_1O_3 = O_2O_4$, $m\sphericalangle MO_1O_3 = m\sphericalangle MO_4O_2$ y $m\sphericalangle MO_3O_1 = m\sphericalangle MO_2O_4$

En ⋈ O_2NO_3M:

$\theta + x = \theta + 90°$

$\rightarrow \overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$

$\therefore x = 90°$

Caso particular

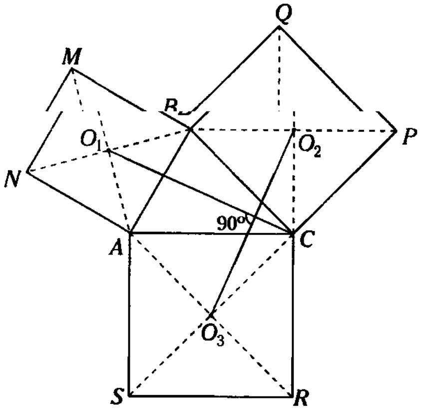


Figura 6.39

Sean *ABMN*, *BCPQ* y *ACRS* cuadrados de centros O_1, O_2 y O_3 respectivamente.

Se cumple

$$\boxed{O_1C = O_2O_3} \quad y \quad \boxed{\overline{O_1C} \perp \overline{O_2O_3}}$$

CUADRILÁTERO EQUILÁTERO

Sea un cuadrilátero $ABCD$, donde $AB = CD$ y $m\sphericalangle BAD + m\sphericalangle CDA = 120°$.

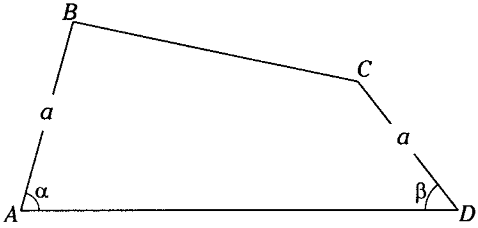


Figura 6.40

A este cuadrilátero el profesor Jack Garfunkel del (Queens College, New York) en la revista *Pi Mu Epsilon Journal*, pp. 317-329, en 1981, lo denominó cuadrilátero equilátero por los teoremas que en él se cumplen.

Teorema 1

Los puntos medios de las diagonales y del lado BC son los vértices de un triángulo equilátero.

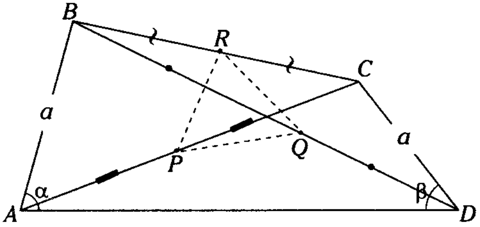


Figura 6.41

Demostración

Sean $AB = CD = a$ y $\alpha + \beta = 120°$, resulta que la medida del ángulo determinado por

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es $60° \left(m\sphericalangle det. \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 60° \right)$

Sean P, Q y R puntos medios de $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

En el $\triangle ABC$: $\overline{PR} \parallel \overline{AB}$ y $PR = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$

En el $\triangle BCD$: $\overline{RQ} \parallel \overline{CD}$ y $RQ = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$

Por lo tanto, $m\sphericalangle PRQ = m\sphericalangle det. \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 60°$.

De lo cual el $\triangle PRQ$ es equilátero.

Teorema 2

Al trazar exteriormente el triángulo equilátero BCP, el triángulo APD también es equilátero.

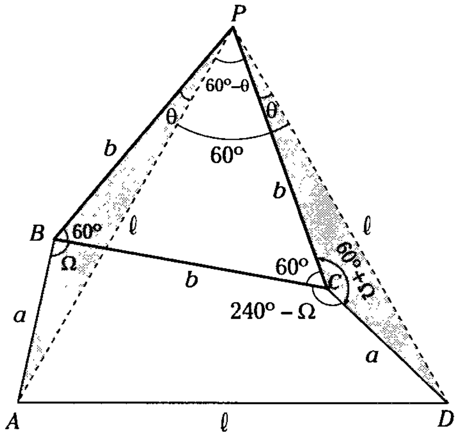


Figura 6.42

Demostración

Si $m\sphericalangle BAD + m\sphericalangle ADC = 120°$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle ADC = 240°$

$\therefore$ $m\sphericalangle ABP = m\sphericalangle DCP = 60° + \Omega$

y como $AB=DC=a$ y $BP=CP=b$, los triángulos ABP y DCP son congruentes, entonces

$m\sphericalangle BPA = m\sphericalangle CPD = \theta$ y $AP = PD = \ell$

Como

$m\sphericalangle APC = 60° - \theta$ entonces

$m\sphericalangle APD = 60°$.

Por lo tanto el $\triangle APD$ es equilátero.

Teorema 3

Si se trazan los triángulos equiláteros *APC*, *BQC* y *BRD* en un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AD}$.

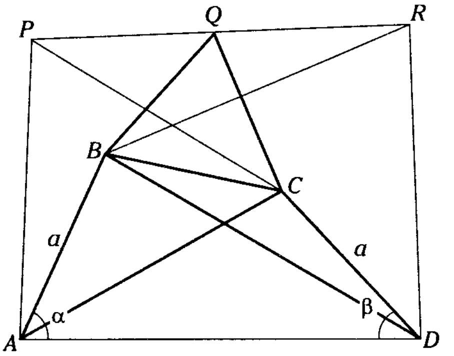


Figura 6.43

Se deduce que *P*, *Q* y *R* son colineales y *Q* es punto medio de $\overline{PR}$.

Demostración

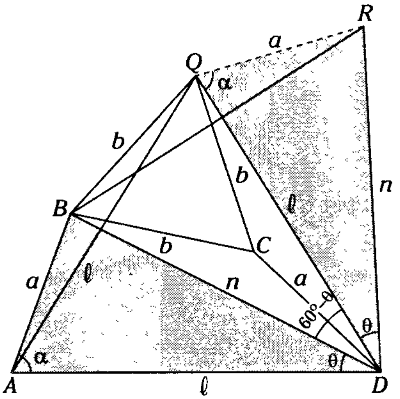


Figura 6.44

Por el teorema 2, el triángulo *AQD* es equilátero y así m∢*ADB* = m∢*QDR* = θ. Por lo tanto, los triángulos *ABD* y *QRD* son congruentes (postulado de congruencia)

→ *QR* = *AB* = *a* y m∢*RQD* = m∢*BAD* = α

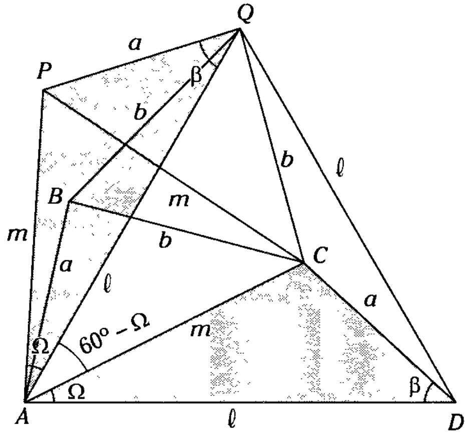


Figura 6.45

Análogamente al caso anterior, el △*AQD* es equilátero por lo tanto m∢*PAQ* = m∢*CAD* y los triángulos *PAQ* y *CAD* son congruentes (postulado de congruencia)

→ *PQ* = *CD* = *a* y m∢*PQA* = m∢*CDA* = β

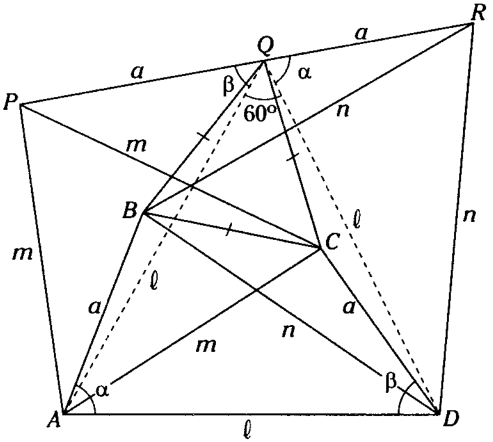


Figura 6.46

Si *ABCD*: α + β = 120°, de esta manera

α + β + 60° = 180°.

∴ *P*, *Q* y *R* son colineales.

PLANOS DE LA CIUDAD

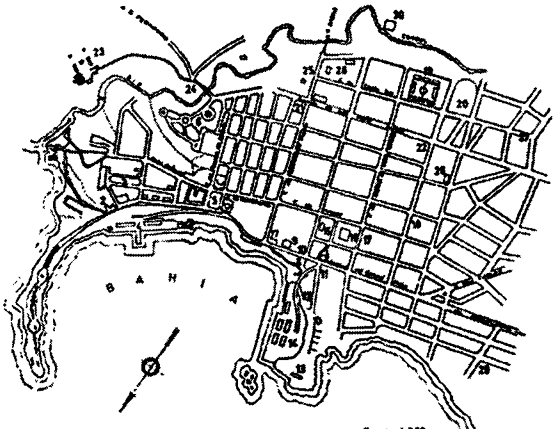
Sabemos que nuestros antepasados nos han legado construcciones importantes, como por ejemplo la pirámide del Sol (México), ruinas de Pachacámac (Lima), ruinas de Tiahuanaco (Perú - Bolivia), chulpas (viene del idioma aymará que significa **tumba**), puertas trapezoidales (época incaica), etc.

Los materiales más importantes para construir muros han sido, según la región y la cultura, la tierra amasada y la piedra. Básicamente para construir usaban lo que se llama adobe o adobón (sus 6 caras tenían forma rectangular). Debemos tener en cuenta que la posición de los adobes no eran en hileras horizontales, más bien se colocaban en forma vertical, como se colocan los libros en los estantes. No se conoce la razón, pero sin embargo muchas construcciones han resistido al impacto de terremotos y pueden verse casi intactas; ejemplos: Huaca Pulliana de Miraflores, Huacas del Sol y de la Luna en Moche, muros de Chan Chan, etc.

En la actualidad si observamos los planos de varias ciudades, distinguimos que pueden ser distintos.

En ocasiones las casas y las calles no presentan ninguna ordenación particular. Al contemplar estos planos, se tiene la impresión de que la ciudad ha ido creciendo espontáneamente, sin sujetarse a ninguna norma, como un árbol al que le van saliendo ramas con el paso del tiempo. Estos planos desordenados son características de la parte antigua de muchas ciudades europeas.

Los planos de las ciudades presentan una disposición regular, geométrica, como si el crecimiento se hubiera realizado a unas normas precisadas de antemano. En este caso, lo más frecuente es que las calles sean rectas y se corten en ángulo recto. Las manzanas de las casas serán, por tanto, rectangulares o cuadradas. Esta es la razón de que en la Amércia Latina se llame **cuadras** a las manzanas de una ciudad ya que se establece en un plano en cuadrícula. Los chinos y los japoneses edificaron también de esa manera.



No obstante, algunas ciudades se construyen con el plano radioconcéntrico.

FUENTE: *Didáctica de Ciencias y Humanidades*. Vector 2, 1973. pp. 460

BIOGRAFÍA

PIERRE VARIGNON (Caen 1654 - París 1722)

Matemático francés. Precursor del cálculo infinitesimal, desarrolló la estática en su obra *Nueva Mecánica y Estática* (esta apareció en 1725), estableció la regla de composición de fuerzas y formuló el principio de las velocidades virtuales.

Varignon planteó que al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera siempre se obtendrá, en virtud del Teorema de Tales, un paralelogramo llamado **Paralelogramo de Varignon**. Dicho paralelogramo tiene dos observaciones. En primer lugar si lo va repitiendo en el plano formando una bella trama, le indicará como ir colocando los cuadriláteros como si fueran losetas para recubrir el plano. Por lo tanto....¡ cualquier cuadrilátero es una loseta!. En segundo lugar, imagine que en los vértices del cuadrilátero situa cuatro masas iguales. ¿Dónde estará el centroide o centro de gravedad de esta figura?...., pues la respuesta es, en el centro del paralelogramo de Varignon y, esto es algo que los malabaristas circenses adoran.

FERDINAND WITTENBAUER (Maribor 1857 - Graz 1922)

Ferdinand Wittenbauer nació el 18 de febrero de 1857 en Maribor - Eslovenia. Era investigador con reputación internacional, profesor y también poeta. Sus obras fueron publicadas entre 1907 y 1911. Dentro de ellas destaca *Ejercicios de Mecánica Técnica*, la primera colección de ejercicios de mecánica en idioma alemán que se convertiría en un libro de enseñanza estándar (3 tomos).

Los conocimientos de su obra principal *Dinámica gráfica* (1923), que fue publicada después de su muerte, fueron difundidos hasta Rusia y China pero eso no es todo Ferdinand Wittenbauer en los primeros años del siglo XX entre otras cosas tuvo éxito como dramaturgo.

Desde 1877 fue catedrático en la Universidad Técnica de Graz.

Su vida entre poética y ciencia fue marcada por los pensamientos y los acontecimientos del tiempo lleno de cambios en el que vivió.

Falleció el 16 de febrero de 1922 en Graz (Austria).

Problemas Resueltos

Problema 1

En el cuadrilátero *ABCD*, se ubica *E* punto medio de $\overline{AD}$ y se traza $\overline{CF} \perp \overline{BD}$ ($F \in \overline{BD}$), tal que m∢*ABD* < 40° y *BD* = *AB* + 2(*BF*). Calcule el mayor valor entero de la medida del ángulo *CFE*.

A) 110° B) 109° C) 108°
D) 106° E) 112°

Resolución

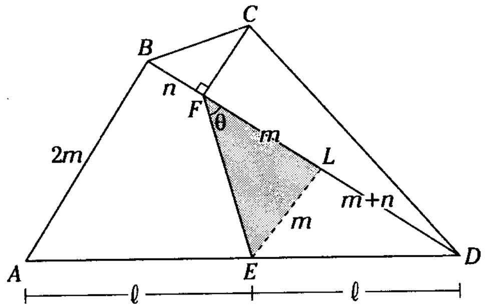


Figura 6.47

Piden m∢*CFE* (siendo mayor valor entero), sea

$AB = 2m, BF = n \rightarrow BD = 2m + 2n.$

Del punto *E* se traza $\overline{EL} \parallel \overline{AB}$

En el △*ABD*: $BL = LD = \dfrac{2m+2n}{2}$ y $LE = \dfrac{2m}{2}$

De lo cual *LF* = *m*, entonces el △*FLE* es isósceles:

m∢*LFE* = m∢*FEL* = θ

Como $\overline{EL} \parallel \overline{AB}$ y m∢*ABD* < 40°, entonces m∢*ELD* < 40°

Del △*FLE*: 2θ<40°; θ<20° (I)

Luego la m∢*CFE* = 90° + θ

De (I): 90+θ<110°

Por lo tanto el mayor valor entero

m∢*CFE* = 109°

CLAVE B

Problema 2

En un trapezoide *ABCD*, m∢*BAD* = m∢*CDA* = 60°; *AD* = *AB* + *CD* y $\overline{BD} \cap \overline{AC} = \{P\}$. Si en $\overline{AP}$ y $\overline{PD}$ se ubican los puntos *M* y *N* respectivamente tal que *BM* = *BP* y *CP* = *CN*, calcule $\dfrac{AM}{DN}$.

A) 1,2 B) 0,5 C) 1
D) 4/5 E) 2/3

Resolución

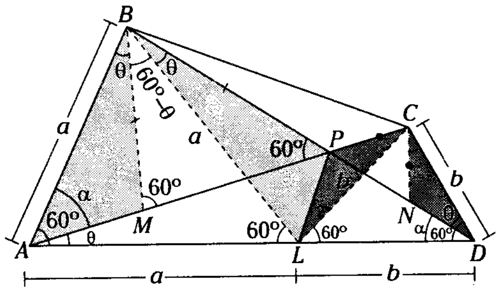


Figura 6.48

Piden $\dfrac{AM}{DN}$

Se ubica *L* en $\overline{AD}$, tal que *AL* = *a*, *LD* = *b*

→ △*ABL* y △*LCD* son equiláteros

△*BLD* ≅ △*ALC* (L.A.L)

→ m∢*CAL* = m∢*DBL* = θ

En △*BLD* (ángulo exterior)

α + θ = 60°

→ m∢*APB* = 60°

△*MBP* y △*PCN* son equiláteros.

Se observa: m∢*MBL* = 60° − θ

De donde:

m∢*ABM* = θ

△*ABM* ≅ △*LBP* (L.A.L.)

→ *AM* = *PL* (I)

Análogamente que lo anterior

$m\sphericalangle PCL = m\sphericalangle NCD$

$\triangle DCN \cong \triangle LCP$ (L.A.L.)

$\rightarrow DN = PL$ (II)

De (I) y (II): $AM = DN$

$$\therefore \frac{AM}{DN} = 1$$

CLAVE C

Problema 3

Las diagonales de un trapezoide simétrico se intersecan en el punto O, de modo que $OC = 3(AO)$. Si luego se trazan las perpendiculares $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ y $\overline{DS}$ hacia una recta exterior, tal que $BQ = DS - CR/2 = 6$, calcule AP.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución

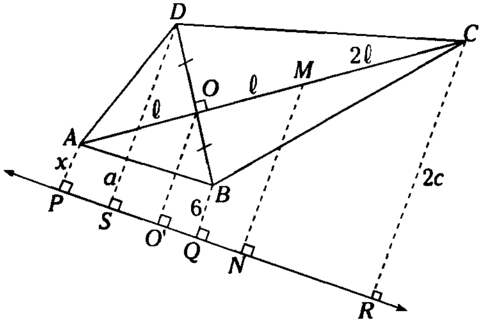


Figura 6.49

Piden $AP = x$

Sea $DS = a$, $CR = 2c$

Dato: $BQ = a - c = 6$

Se ubica el punto medio M de $\overline{AC}$, luego se traza $\overline{MN} \perp \overleftrightarrow{PR}$.

En el trapecio $ACRP$; $\overline{MN}$: base media

$$MN = \frac{x + 2c}{2} = \frac{x}{2} + c \quad \text{(I)}$$

En los trapecios $AMNP$ y $DBQS$ ($\overline{OO'}$ base media)

Propiedad

$$\frac{x + MN}{2} = \frac{a + 6}{2}$$

$$x + MN = a + 6 \quad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II)

$$x + \frac{x}{2} + c = a + 6$$

$$\frac{3x}{2} = a - c + 6$$

$$3\frac{x}{2} = 6 + 6$$

$$\therefore \ x = 8$$

CLAVE D

Problema 4

En la diagonal BD de un cuadrado $ABCD$, se ubica el punto E y en la prolongación de $\overline{EA}$, el punto F, si el triángulo FBE es equilátero, calcule AF/ED.

A) 1 B) 2 C) 0,75
D) 0,8 E) 1,2

Resolución

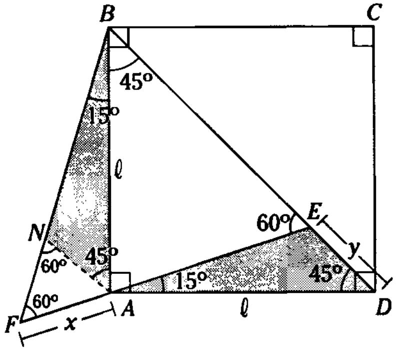


Figura 6.50

$$\text{Piden } \frac{AF}{ED} = \frac{x}{y}$$

Se traza $\overline{AN}$, tal que la m$\measuredangle BAN$ = 45°

$\triangle AED \cong \triangle BNA$(A.L.A.)

$\rightarrow\ y = AN$

En $\triangle NAF$: equilátero

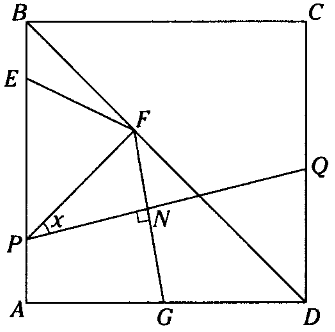
$\rightarrow\ x = AN$

$\therefore\ \dfrac{x}{y} = 1$

CLAVE A

Problema 5

En la figura mostrada, $ABCD$ es un cuadrado y $(EF+FG)$ es la longitud del menor recorrido para ir de E hacia G tocando a $\overline{BD}$. Si $EF = 2$, $NF = 3$, $NG = 4$ y $NQ = 6$. Calcule x.



A) 37° B) 53° C) 45°
D) 53°/2 E) 37°/2

Resolución

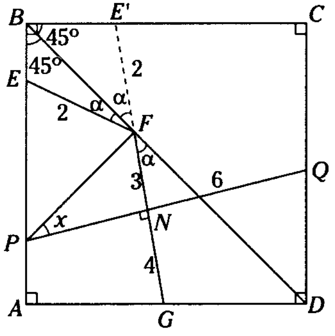


Figura 6.51

Piden x

Para que EFG sea el mínimo recorrido se sabe que la m$\measuredangle EFB$ = m$\measuredangle DFG = \alpha$

Se prolonga $\overline{GF}$ hasta E'

$\triangle BFE \cong \triangle BFE'$ (A.L.A.) $\rightarrow$ $E'F = EF = 2$

Teorema

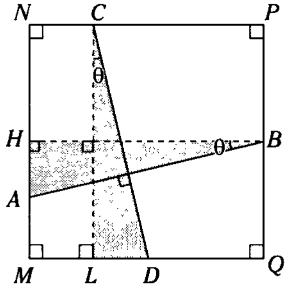


Figura 6.52

Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y $MNPQ$: cuadrado, entonces

$$AB = CD$$

Demostración del teorema

Se traza $\overline{BH} \perp \overline{MN}$ y $\overline{CL} \perp \overline{MQ}$. Como $BH = CL$, se observa $\triangle AHB \cong \triangle DLC$ (A.L.A.)

$\therefore\ AB = CD$

Aplicando el teorema en el problema

$E'G = PQ$

$\rightarrow\ 9 = NP + 6$

$NP = 3$

⊾FNP: isósceles.

$\therefore\ x = 45°$

CLAVE C

Problema 6

En un trapecio rectángulo $ABCD$, recto en A y B, se ubica en la región interior el punto M, tal que $AB = MB$, m$\measuredangle AMD$ + m$\measuredangle MDC$ = 180° $\overleftrightarrow{AM} \cap \overline{CD} = \{N\}$ y el trapezoide $BCNM$ es simétrico y la m$\measuredangle CMD$ = 90° Calcule la m$\measuredangle MDC$.

A) 37° B) 53° C) 30°
D) 45° E) 60°

Resolución

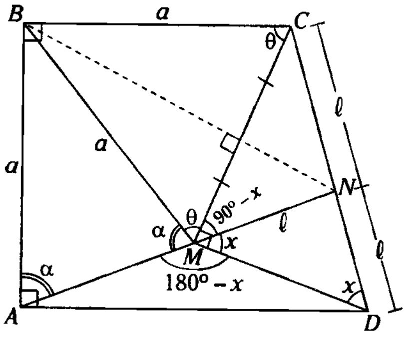


Figura 6.53

Piden $m\sphericalangle MDC = x$

Del dato

$m\sphericalangle AMD + m\sphericalangle MDC = 180°$

$\rightarrow\ m\sphericalangle AMD = 180° - x$

Luego $m\sphericalangle NMD = x$

Como

$m\sphericalangle CMD = 90°$,

$MN = ND \ \rightarrow\ CN = ND = \ell$

Por lo cual $\overline{BN}$ es parte de la mediatriz de $\overline{CM}$ y $BC = a$

$ABCM$:

$90° + 2\alpha + 2\theta = 360° \ \rightarrow\ \alpha + \theta = 135°$

Pero en M

$\alpha + \theta + 90° - x = 180°$

$\therefore\ x = 45$

CLAVE D

Problema 7

Dado un rectángulo $ABCD$, se traza el trapecio isósceles $AECF$, tal que $E \in \overline{AB}$, $\overline{EC} \parallel \overline{AF}$, $5(BE) = 2(AE)$ y la $m\sphericalangle BCE = \dfrac{37°}{2}$.

Calcule $m\sphericalangle CFD$.

A) 90° B) 85° C) 89°
D) 95° E) 98°

Resolución

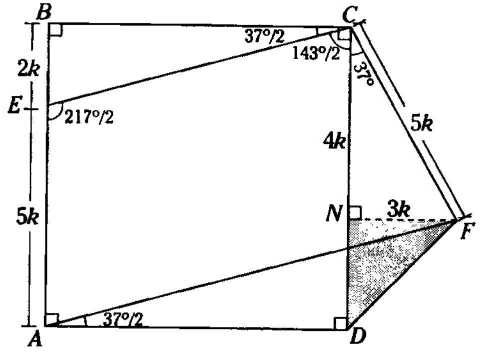


Figura 6.54

Piden $m\sphericalangle CFD = x$

Se observa $m\sphericalangle AEC = \dfrac{217°}{2}$

En el trapecio isósceles $AECF$

Se sabe $\dfrac{143°}{2} + m\sphericalangle FCD = \dfrac{217°}{2}$

$\rightarrow\ m\sphericalangle FCD = 37°$

En el $\triangle DCF$:

Se traza $\overline{FN} \perp \overline{CD} \ \rightarrow\ \triangle CNF$: notable 37°

de donde $NF = 3k$; $NC = 4k$ y $m\sphericalangle CFN = 53°$

Como

$AB = CD$

$7k = 4k + ND$

$\rightarrow\ ND = 3k$

$\triangle FND$: isósceles $\rightarrow\ m\sphericalangle NFD = 45°$

$\rightarrow\ x = 53° + 45° = 98°$

CLAVE E

Problema 8

Dado un trapecio rectángulo $ABCD$, recto en A y B, en $\overline{CD}$ se ubica el punto M, tal que ABM sea un triángulo equilátero. Si $m\sphericalangle BDM = 2(m\sphericalangle MBD)$, calcule la $m\sphericalangle ADB$.

A) 15° B) 60° C) 30°
D) 45° E) 67°30'

Resolución

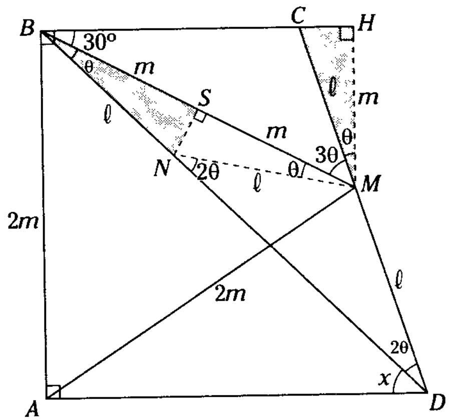


Figura 6.55

Piden m$\sphericalangle ADB = x$

Sea m$\sphericalangle MBD = \theta$, por dato m$\sphericalangle BDM = 2\theta$

Como

$BM = MA \ \rightarrow \ CM = MD$

Se traza $\overline{MN}$, tal que

$MN = NB \ \rightarrow$ m$\sphericalangle MND = 2\theta$

Además $\triangle BNM$: isósceles

Se traza $\overline{NS} \perp \overline{BM} \ \rightarrow \ BS = SM = m$

Se traza $\overline{MH} \perp \overline{BC}$, ⊾ BHM: notable (30° y 60°)

$$\rightarrow \ MH = \frac{BM}{2} = \frac{2m}{2} = m$$

⊾$CHM \cong$ ⊾BSN (L.L.L.)

$\rightarrow$ m$\sphericalangle CMH =$ m$\sphericalangle NBS = \theta$

En ⊾BHM

$3\theta + \theta = 60°$

$\theta = 15°$

Por ángulos alternos internos

$x = 30° + \theta$

$\therefore \ x = 45°$

CLAVE D

Problema 9

Dado un trapecio $ABCD$ ($\overline{BC}//\overline{AD}$), se prolonga CD hasta P y en AP se ubica el punto medio Q, si CQ y BP se intersecan en R, tal que $R \in \overline{AD}$, además $AR = 2(BC)$ y $RD = 4$, calcule AR.

A) 4 B) 6 C) 12
D) 8 E) 3

Resolución

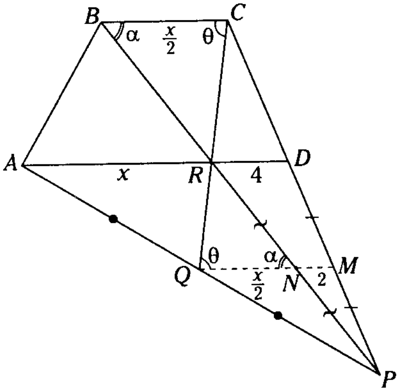


Figura 6.56

Piden $AR = x$

Del dato $AR = 2(BC) \ \rightarrow \ BC = \dfrac{x}{2}$

En el $\triangle ACP$: se traza $\overline{QM}//\overline{AD}$

$DM = MP$; $RN = NP$

$\overline{QN}$: base media $\triangle APR \ \rightarrow \ QN = \dfrac{x}{2}$

$\overline{NM}$: base media $\triangle RPD \ \rightarrow \ NM = 2$

$\triangle BCR \cong \triangle NQR$ (A.L.A.)

$\rightarrow \ QR = RC$

$\overline{RD}$: base media $\triangle QCM$

$$\rightarrow \ 4 = \frac{2 + \frac{x}{2}}{2}$$

$\therefore \ x = 12$

CLAVE C

Problema 10

En los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del triángulo ABC, se ubican los puntos P y Q respectivamente, tal que $BQPT$ es un trapecio isósceles. ($\overline{BQ}//\overline{PT}$). Si $AC = 6$, $m\sphericalangle PQT = m\sphericalangle BAC$ y $TQ = AP$, calcule TB.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 3 E) 6

Resolución

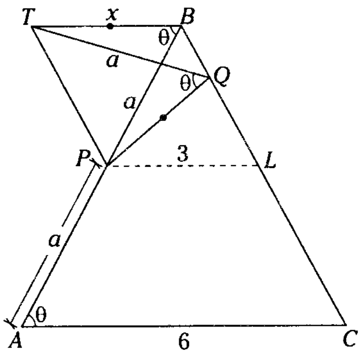


Figura 6.57

Piden $TB = x$

Sea $m\sphericalangle PQT = \theta \rightarrow m\sphericalangle PBT = \theta$

De donde $\overline{TB} // \overline{AC}$

En el trapecio isósceles $TBQP$: $PB = TQ = a$

En el $\triangle ABC$; se traza $\overline{PL}//\overline{AC}$: $PL = 3$ (base media)

El $\square TBLP$ es un romboide.

$\therefore\ x = 3$

CLAVE D

Problema 11

En la región interior de un triángulo equilátero ABC, se ubica el punto M y luego se traza $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ ($H \in \overline{AB}$) y $\overline{ML} \perp \overline{BC}$ ($L \in \overline{BC}$), además si se ubican los puntos medios P y Q de $\overline{HM}$ y $\overline{ML}$ respectivamente, tal que $m\sphericalangle EPM = m\sphericalangle FQL = 90°$ (E y $F \in AC$); $HM + ML = 2\sqrt{3}$ y la distancia de M a AC es $\sqrt{3}$, calcule $PE + QF$.

A) 3 B) 4 C) 6
D) 7 E) 5

Resolución

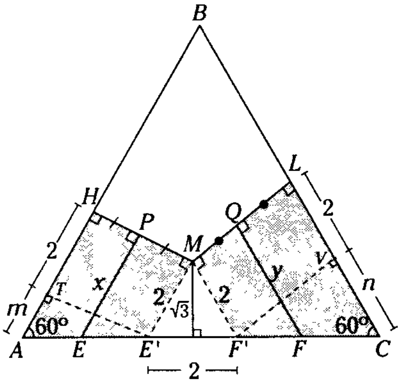


Figura 6.58

Piden

$EP + FQ = x + y$

Sea $HM = m\sqrt{3}$; $ML = n\sqrt{3}$

Por dato

$m\sqrt{3} + n\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\rightarrow\ m + n = 2$

Se traza $ME' // HA$ y $MF'//LC$

$\rightarrow\ \triangle E'MF'$: equilátero

$E'F' = E'M = MF' = 2$

⊾ ATE': notable (60°)

⊾ CVF': notable (60°)

$\rightarrow\ AT = m$ y $CV = n$

En ⏢$HME'A$: $x = \dfrac{2 + 2 + m}{2}$ (I)

En ⏢$LMF'C$: $y = \dfrac{2 + 2 + n}{2}$ (II)

Sumando (I) y (II)

$$x+y=\frac{8+m+n}{2}$$

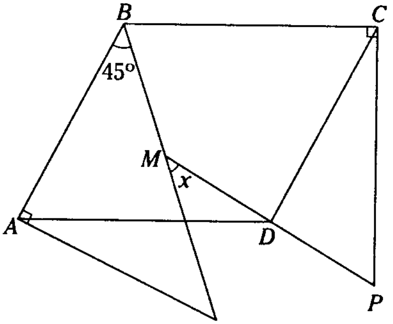
Como $m+n=2$

$$\therefore\quad x+y=\frac{8+2}{2}=5$$

CLAVE E

Problema 12

En el gráfico, *ABCD* es un romboide. Si $AD=CP$ y $PD=2(DM)$, calcule x.



A) 53°/2 B) 37°/2 C) 127°/2
D) 143°/2 E) 153°/2

Resolución

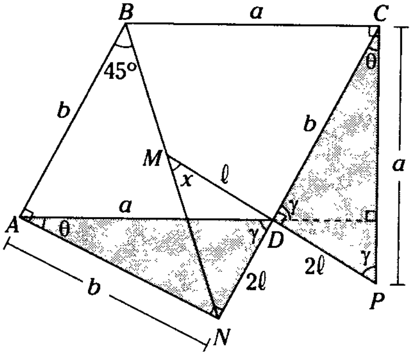


Figura 6.59

Piden x

Sea $BC=AD=a,\ AB=CD=b, MD=\ell$

Del dato $CP=AD=a, PD=2\ell$

$\triangle ADN\cong\triangle CPD$ (L.A.L.)

$\rightarrow\ DP=DN=2\ell;\ m\measuredangle CPD=m\measuredangle ADN=\gamma$

Se prolonga $\overline{AD}$ obteniéndose

$m\measuredangle AND=90°$

$\rightarrow\ m\measuredangle CDP=90°$

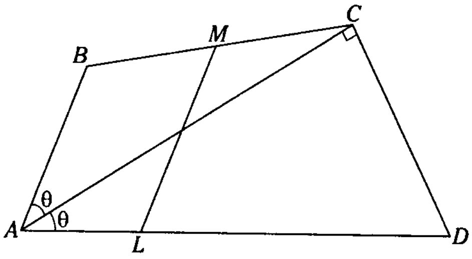
⊿*MDN*: notable $\left(\frac{53°}{2}\text{ y }\frac{127°}{3}\right)$

$$\therefore\quad x=\frac{127°}{2}$$

CLAVE C

Problema 13

De la figura, $BM=MC$ y $AD=4(AL)$.
Si $AD+2(AB)=16$ cm. Calcule LM.



A) 3 cm B) 4 cm C) 5 cm
D) 6 cm E) 7 cm

Resolución

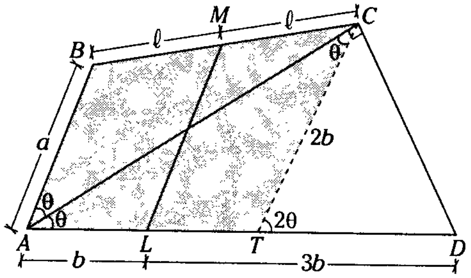


Figura 6.60

Piden $LM=x$

Sea $AL = b \rightarrow AD = 4b$ y $AB = a$

Se traza la mediana $\overline{CT}$ del ⊿ACD

Se sabe $CT = \dfrac{4b}{2} = 2b$

Se nota que $\overline{AB} // \overline{CT} \rightarrow \overline{ML}$ es base media del trapecio $ABCT$.

$$ML = \frac{a+2b}{2} \qquad \text{(I)}$$

Del dato $AD + 2(AB) = 16$

$$4b + 2a = 16$$

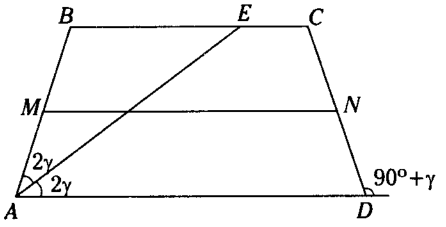
En (I)

$$\therefore \quad x = 4\,\text{cm}$$

CLAVE B

Problema 14

En el gráfico, $\overline{MN}$ es base media del trapecio $ABCD$. Si $AB = 5$ y $EC = 1$, calcule el mayor valor entero de MN.



A) 12 B) 11 C) 10
D) 9 E) 8

Resolución

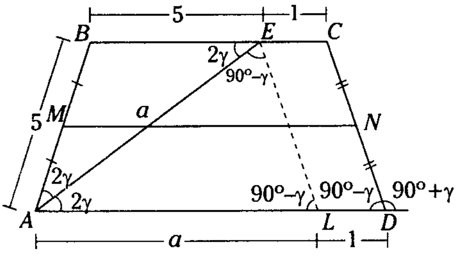


Figura 6.61

Piden MN máximo entero

Como $\overline{BC} // \overline{AD}$;

$$m\sphericalangle BEA = m\sphericalangle EAD = 2\gamma$$

$\triangle ABE$: isósceles

Se traza $\overline{EL} // \overline{CD}$:

$$m\sphericalangle ELA = 90° - \gamma$$

$\triangle EAL$: isósceles

Como $m\sphericalangle AEL = m\sphericalangle ALE$

$$\rightarrow AE = AL = a$$

En el trapecio $ABCD$, por propiedad

$$MN = \frac{6+1+a}{2} = \frac{7+a}{2} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle ABE$: Por existencia $a < 10$

Dando la forma a la expresión (I)

$$\frac{7+a}{2} < \frac{17}{2}$$

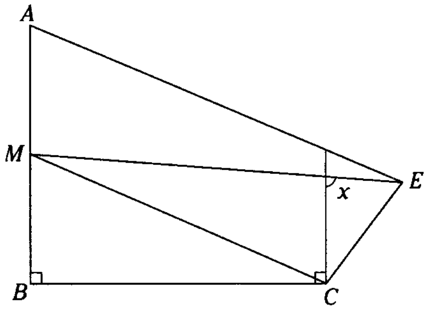
$$MN < 8{,}5$$

Por lo tanto el mayor valor entero de MN es 8.

CLAVE E

Problema 15

En el gráfico, $AB = BC$, $AM = MB$ y $AMCE$ es un trapecio isósceles. Calcule x.



A) 75° B) 82° C) 76°
D) 74° E) 84°

Resolución

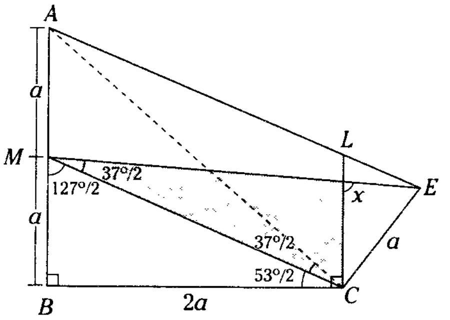


Figura 6.62

Piden x

Sea $AM = MB = CE = a \rightarrow$ por dato $BC = 2a$

En ⊾ MBC: notable $\dfrac{53°}{2}$

En ⊾ ABC: notable 45°

En $AMCE$ se traza $\overline{AC}$ y como es trapecio isósceles:

$$m\sphericalangle ACM = m\sphericalangle EMC = \frac{37°}{2}$$

Como $\overline{LC} \parallel \overline{AB}$

$$x = \frac{37°}{2} + \frac{127°}{2}$$

$\therefore\ x = 82°$

CLAVE B

Problema 16

En un cuadrado $ABCD$, se ubica el punto medio S de $\overline{AD}$. Si luego se ubican los puntos M y L en $\overline{AS}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, tal que $MNLD$ es un rectángulo ($N \in \overline{BS}$) y $ML = AB$, calcule la m$\sphericalangle LMD$.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 28° E) 33°

Resolución

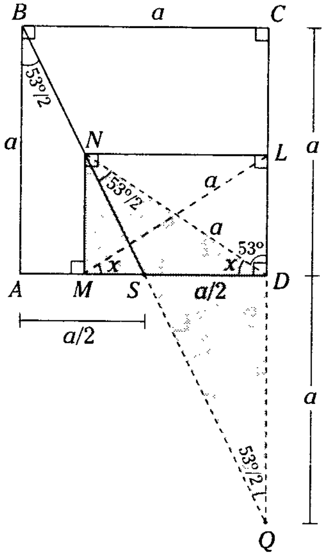


Figura 6.63

Piden m$\sphericalangle LMD = x$

Se prolongan $\overline{CD}$ y $\overline{BS}$, hasta que la intersección sea Q.

Como ⊾ BAS: notable $\left(\dfrac{53°}{2}\right) \rightarrow$ m$\sphericalangle DQS = \dfrac{53°}{2}$

⊾ BCQ: notable $\left(\dfrac{53°}{2}\right) \rightarrow CQ = 2(BC) = 2a$

Se traza ND, dado que $ND = ML = a$

△NDQ: isósceles

$\rightarrow$ m$\sphericalangle NDL = 53°$

Como m$\sphericalangle NDM = x$

$\therefore\ x = 37°$

CLAVE B

Problema 17

En un trapecio $ABCD$ ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), se ubica el punto P en $\overline{BD}$, tal que $AB = BP = PD$. Si m$\sphericalangle BAD$ = m$\sphericalangle CPD$ y $CP = 3$, calcule AD.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 9 E) 10

Resolución

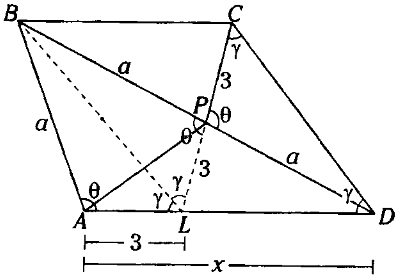


Figura 6.64

Piden $AD = x$
Sea $AB = BP = PD = a$
Se prolonga $\overline{CP}$ hasta L: $\triangle BPC \cong \triangle DPL$(A.L.A.)
$\rightarrow\ PL = CP = 3$
Trazamos $\overline{AP}$
$\triangle ABP$: $m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle BPA \rightarrow\ m\sphericalangle PAL = m\sphericalangle APL$
$\rightarrow\ AL = 3$
$\diamond ABPL$: trapezoide simétrico
$m\sphericalangle BLA = m\sphericalangle BLP = \gamma$
$\triangle BPL \cong \triangle DPC$ (L.A.L)
$m\sphericalangle LCD = m\sphericalangle BLC = \gamma$
En $\triangle CLD$; Por $\sphericalangle$ exterior: $m\sphericalangle CDL = \gamma$
$\triangle CLD$
$\rightarrow\ LD = LC = 6$
$\therefore\ x = 3+6 = 9$

Nota

Congruencia lado-lado-ángulo mayor.

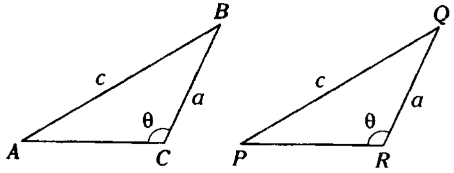


Figura 6.65

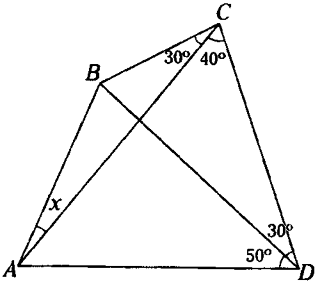
Si $c > a$

$\triangle ABC \cong \triangle PQR$

CLAVE D

Problema 18

De la figura calcule x.



A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

Resolución

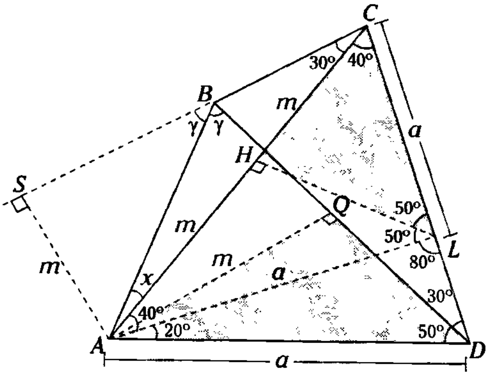


Figura 6.66

Piden x
Se traza $\overline{AL}$, tal que $CL = LA$
$\triangle LAD$: isósceles $\rightarrow\ AL = AD = a$
En el $\triangle CLA$ se traza $\overline{CH} \perp \overline{AC}$ $\rightarrow\ CH = HA = m$
Como $AD = a$ y $m\sphericalangle BDA = 50°$
Se traza $\overline{AQ} \perp \overline{BD}$ $\rightarrow\ \triangle CHL \cong \triangle AQD$ (A.L.A.)
$CH = AQ = m$
Se traza $\overline{AS} \perp \overleftrightarrow{BC}$
$\triangle ASC$: notable (30° y 60°)
$\rightarrow\ AS = m$
Como $AS = AQ$, por el recíproco del teorema de la bisectriz.
$\rightarrow\ m\sphericalangle SBA = m\sphericalangle QBA = \gamma$

En $\triangle CDB$: $2\gamma = 70 + 30° \rightarrow \gamma = 50°$

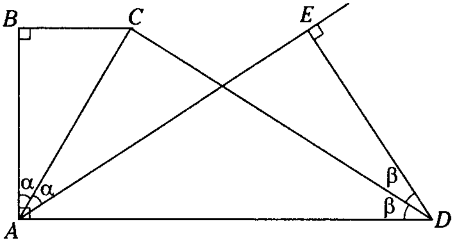
En ⋈$ABDC$: $x + 50° = 40° + 30°$

$\therefore \; x = 20°$

CLAVE E

Problema 19

De la figura, $BC = a$ y $ED = b$. Calcule AD.



A) $a+3b$ B) $3a+2b$ C) $3a+b$

D) $2a+b$ E) $a+2b$

Resolución

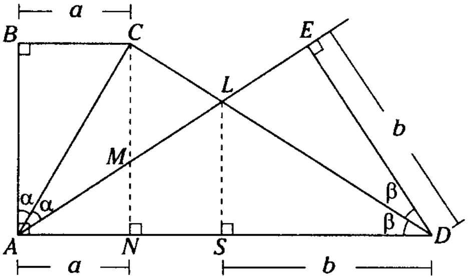


Figura 6.67

Piden $AD = x$

Se traza $\overline{LS} \perp \overline{AD}$: $SD = DE = b$ (teorema)

Se traza $\overline{CN} \perp \overline{AD}$: $AN = BC = a$

Se observa: $m\sphericalangle MCD = m\sphericalangle CLA = 90° - \beta$

$\triangle CML$: $CM = ML$ (I)

Por paralelas: $m\sphericalangle MCA = m\sphericalangle BAC = \alpha$

$\rightarrow AM = MC$ (II)

De (I) y (II)

$AM = ML$

Por teorema de los puntos medios $AN = NS = a$

$\therefore \; x = 2a + b$

CLAVE D

Problema 20

En un trapecio rectángulo, $ABCD$ recto en A y B, $m\sphericalangle ADB = 2(m\sphericalangle BDC)$ y $BD = 2(AD - BC)$. Calcule $m\sphericalangle BDC$.

A) 8° B) 10° C) 12°

D) 14° E) 15°

Resolución

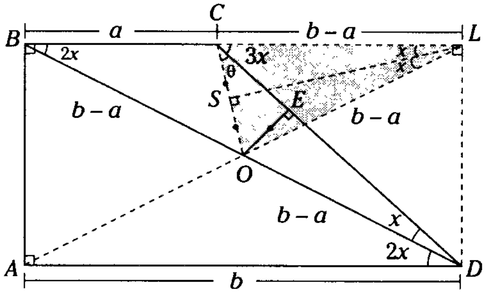


Figura 6.68

Piden $m\sphericalangle BDC = x$

Sea $BC = a$, $AD = b$ $\rightarrow$ $BD = 2(b - a)$

Se prolonga $\overline{BC}$ hasta formar el rectángulo $ABLD$.

Luego en el rectángulo $ABLD$ se traza la diagonal

$$AL: \; AO = OL = \frac{BD}{2} = b - a$$

En el $\triangle CLO$ se traza $\overline{LS} \perp \overline{CO}$, como $\triangle CLO$: isósceles $\rightarrow$ $CS = SO$

Se traza $OE \perp CD$: $\triangle LSO \cong \triangle DEO$ (A.L.A.)

$\rightarrow OE = CS$

Se observa que

⊾CEO: notable (30° y 60°) $\rightarrow$ $\theta = 30°$

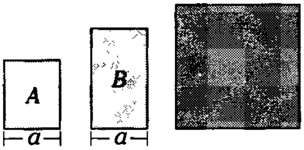
⊾CLS: $x + 3x + 30° = 90°$

$\therefore \; x = 15°$

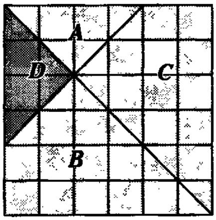
CLAVE E

Problemas Recreativos

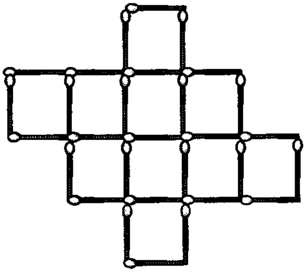
1. Componga con estas tres figuras una única figura de forma geométrica regular.



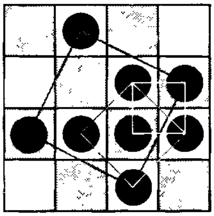
2. **Boicot a un cuadrado**
Si al recortar el cuadrado por las líneas indicadas se divide a este en cuatro partes, si se extraviara la parte *D*. ¿Se podrá formar un cuadrado con las piezas *A*, *B* y *C* solamente?



3. **Cuadrados de más**
En la figura se muestra 29 palitos de fósforo que forman 10 cuadrados sí solo se quieren 6 cuadrados quitando 5 palitos y sin que alguno este libre. ¿Cuáles de los palitos quitarías?

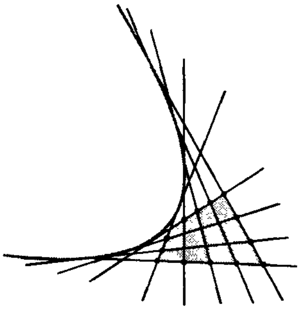


4. **Cuadrados**
Las ocho figuras en el tablero de 4 × 4 de la derecha forman las esquinas de tres cuadrados: uno pequeño y dos mayores inclinados.



a. Si se colocan fichas en los 16 escaques del tablero de 4 × 4, ¿cuántos cuadrados formarán? Cuente cualquier cuadrado que tenga una ficha en cada esquina. Los cuadrados pueden ser de cualquier tamaño, derechos o inclinados.
b. ¿Cuál es el número mayor de fichas que se pueden colocar en un tablero de 4 × 4 sin formar ningún cuadrado? ¿Cuál es el número mayor de fichas que no forma cuadrados en un tablero de 6 × 6? y el reto mayor: ¿y en un tablero de 8 × 8? Los cuadrados pueden ser de cualquier tamaño, derechos o inclinados.

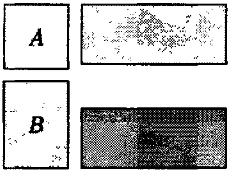
Curiosidades. Si dividimos los lados de un cuadrilátero en n y m partes iguales, como en la figura mostrada y trazamos las correspondientes rectas, entonces tendremos en el plano una red.
Cada recta de esta red es tangente a una misma parábola. Para construir la parábola, se prolongan los lados del cuadrilátero y buscamos la parábola que tiene a las cuatro rectas como sus tangentes.



En el gráfico $n = 3$ y $m = 4$

Resolución 1

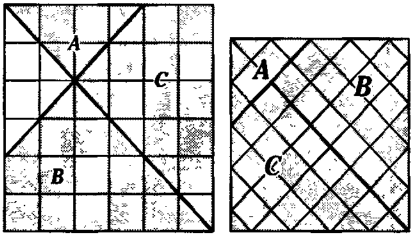
Si dividimos la tercera figura y ubicamos como se muestra en gráfico tomando como lado la composición de las dos primeras figuras.



Resolución 2

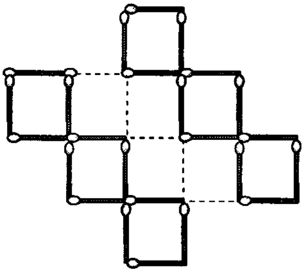
Boicot a un cuadrado (ver dibujo)

La respuesta es afirmativa



Resolución 3

Cuadrados de más (ver dibujo)

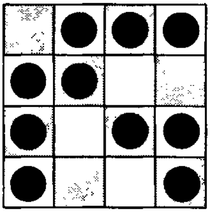


Resolución 4

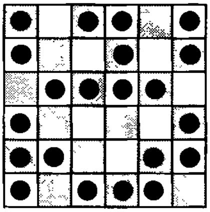
a. Formarán 20 cuadrados

b. El máximo para un tablero de 4 × 4 es 10 fichas (ver solución en el tablero 1)

El máximo para un tablero de 6 × 6 es 21 fichas (vea la solución en el tablero 2) (solución hallada por Nathan Capallo)

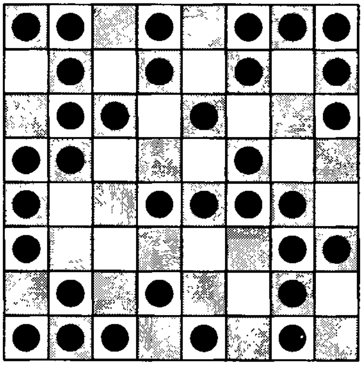


Tablero 1



Tablero 2

El máximo para un tablero de 8 × 8 es 33 fichas (vea la solución en el tablero 3). Si esta solución fue descubierta por Tom Murphy ¿puede encontrar una solución mejor?



Tablero 3

Problemas Propuestos

1. En un trapezoide $ABCD$, $4(AB) = 3(BC)$, $AD = \frac{5}{3}(AB) + CD$ y $m\measuredangle BAD = 53°$. Calcule $m\measuredangle BCD$.

A) 127° B) 120° C) 115°
D) 143° E) 137°

2. En un trapezoide $ABCD$, se ubican los puntos P y Q en $\overline{AD}$ y $\overline{BP}$, respectivamente. Si $(Q \in \overline{AC})$, tal que los triángulos ABQ y QPD son congruentes, calcule AQ. Considere que $m\measuredangle AQB = m\measuredangle QPD > 120°$ y $AD = 6$ cm.

A) 4 cm B) 3 cm C) 5 cm
D) 7 cm E) 2 cm

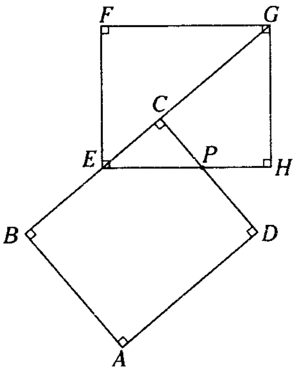
3. En un romboide $ABCD$, $m\measuredangle BAC = 45°$. Si luego se traza la mediatriz de $\overline{CD}$ que interseca a $\overline{AC}$ en P y contiene al vértice B, calcule la $m\measuredangle CAD$.

A) 15° B) 37° C) $\frac{37°}{2}$
D) $\frac{53°}{2}$ E) 53°

4. En rectángulo $ABCD$, se ubican los puntos medios N y M de $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ respectivamente. Si después se traza la altura AH en el triángulo BAN, cuya longitud es a, calcule la distancia de M a $\overleftrightarrow{BN}$.

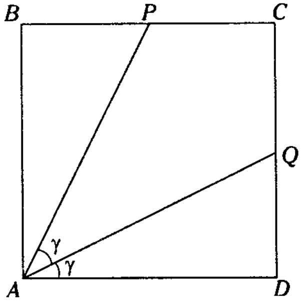
A) $2a$ B) $1,5a$ C) $\frac{2a}{3}$
D) $2,5a$ E) $3a$

5. En la figura, $ABCD$ y $EFGH$ son congruentes. Si $EB = EC$; $HP = 3$ y EP toma su mínimo valor entero impar, calcule $m\measuredangle CGP$.



A) 18°30' B) 26°30' C) 37°
D) 30° E) 16°

6. Según la figura, $ABCD$ es un cuadrado. Si $BP = 8$ cm y $QD = 9$ cm, calcule PQ.



A) 8 cm B) 9 cm C) 10 cm
D) $\sqrt{85}$ cm E) $\sqrt{95}$ cm

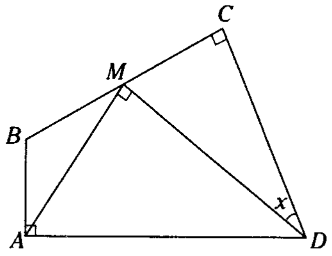
7. En un rombo $ABCD$, $AB=20$, se ubica el punto N en $\overline{BC}$ de modo que $\overline{DN}$ interseca a la diagonal $\overline{AC}$ en M. Si $5(MN) = 3(DM)$ y $m\sphericalangle NDA = 90°$, calcule la distancia del punto medio de $\overline{AC}$ a $\overline{DN}$.

A) 3 B) 5 C) 4
D) 2,5 D) 1

8. En un rombo $ABCD$, se traza exteriormente el cuadrado $CDEF$, de modo que $BD = EF$ y $BE = 18$. Calcule la distancia del centro del cuadrado al punto medio de $\overline{BD}$.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

9. En la siguiente figura, $AB = BM = MC$. Calcule x.



A) 15° B) 30° C) 22°30'
D) 45° E) 36°

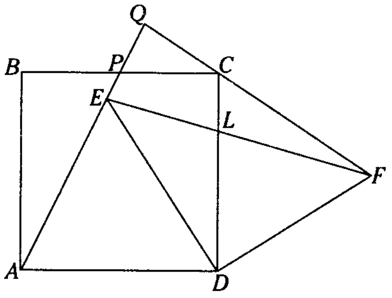
10. En un cuadrilátero $ABCD$, $AB = BC = CD$. Si en BD se ubica el punto medio M, tal que $AM = 5$; $BM = 4$ y $m\sphericalangle ABC = 90°$, calcule AD.

A) $\sqrt{59}$ B) $\sqrt{61}$ C) $\sqrt{65}$
D) $\sqrt{56}$ E) $\sqrt{73}$

11. En un rectángulo $ABCD$, se ubica el punto L en BD y se prolonga CL hasta P, tal que $CL = LP$. Si luego se trazan las perpendiculares PH y PT a los lados AD y BA respectivamente (H en AD y T en AB), calcule $m\sphericalangle CLH + m\sphericalangle CLT$.

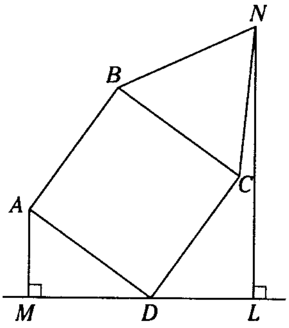
A) 90° B) 150° C) 180°
D) 160° E) 135°

12. Según la figura, $ABCD$ es un cuadrado. Si AED y CDF son triángulos equiláteros, calcule LD. Considere $PQ = a$.



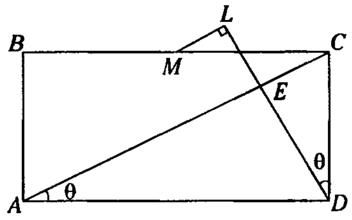
A) $2a\sqrt{3}$ B) $a\sqrt{3}$ C) $3a$
D) $3a/2$ E) $4a\sqrt{3}$

13. De la figura, $ABCD$ es un cuadrado. Si $BN = NC$; $m\sphericalangle BNC = 53°$ y $AM + 4(MD) = a$, calcule NL.



A) a B) $a/3$ C) $a/2$
D) $a/5$ E) $2a/5$

14. En la figura, $ABCD$ es un rectángulo, si $AE = 3(EC) = 12$ y $MB = MC$, calcule ML.



A) 2 B) 3 C) 6
D) 5 E) 7

15. En un romboide $ABCD$, se ubica el punto medio M en $\overline{CD}$, luego se trazan $\overline{AH} \perp \overline{BM}$ ($H \in BM$) y $\overline{HF} \perp \overline{AD}$, ($F \in \overline{AD}$) tal que $BC = 2(HF)$. Calcule el menor valor entero de la m∢BCD.

A) 75° B) 76° C) 77°
D) 78° E) 79°

16. En un trapecio rectángulo $ABCD$, donde $\overline{AB}$ es la altura, se ubica el punto medio M de CD. Si posteriormente se prolonga $\overline{BA}$ hasta el punto P, tal que las distancias de P y B a $\overleftrightarrow{MA}$ suman 24 cm, calcule MP. Considere que m∢BPM = m∢MAD. Calcule MP.

A) 24 cm B) 12 cm C) 18 cm
D) 20 cm E) 26 cm

17. En la región exterior y relativo a BC de un paralelogramo $ABCD$, se ubica el punto E, de modo que m∢AEC = 90°; m∢EAD = 2(m∢BAE); $\overline{BC} \cap \overline{AE} = \{P\}$, $\overline{BC} \cap \overline{ED} = \{M\}$; $BP = PM = MC$ y $MD = 2(EM)$. Calcule la m∢BAE.

A) 80° B) 50° C) 40°
D) 30° E) 28°

18. En el cuadrado $ABCD$, se ubican los puntos M; N y P en $\overline{AB}$; $\overline{AD}$ y en la región interior, respectivamente. Si $MNPD$ es un rombo, $BL = 3(LC)$ y $\overleftrightarrow{NP} \cap \overline{BC} = \{L\}$, calcule $\frac{MB}{LC}$.

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\sqrt{7}$ E) $\frac{4}{3}$

19. En el cuadrilátero $ABCD$, m∢ADC = 90°, m∢BAC=30°, $BC = CD$ y m∢ACD = 3(m∢BCA). Calcule m∢BCA.

A) 12° B) 14° C) 15°
D) 16° E) 18°

20. En un cuadrilátero $ABCD$, $AC = BD$, m∢CBD = 38°; m∢BCA = 22° y m∢BDC = 30°. Calcule m∢BAC.

A) 20° B) 22° C) 26°
D) 28° E) 30°

21. En un triángulo ABC, se traza $\overline{BH}$ (H en $\overline{AC}$), donde su longitud es 8 cm, tal que $3(AH) = HC = 9$ cm. Calcule la longitud del lugar geométrico de los centros de los rectángulos inscritos en el triángulo ABC, tal que un lado se encuentra contenido en $\overline{AC}$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

1	D
2	B
3	D
4	B
5	B
6	D
7	C
8	C
9	D
10	C
11	C
12	A
13	C
14	A
15	B
16	A
17	D
18	B
19	C
20	B
21	C

Claves

Capítulo VII

Polígonos

La piedra de los 12 ángulos en el muro del Palacio de la Roca (Cusco) representa un ejemplo de polígono cóncavo, cuyos ángulos exteriores encajan exactamente con los de las otras piedras de su contorno.

Polígonos

OBJETIVOS

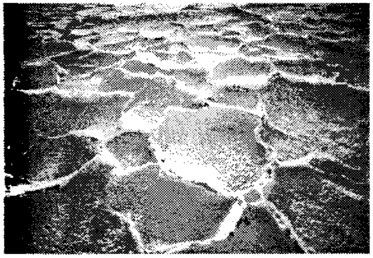
- Definir el polígono plano, indicando sus elementos.
- Conocer los diferentes tipos de polígonos.
- Relacionar adecuadamente las propiedades de los polígonos.
- Deducir teoremas de polígonos.

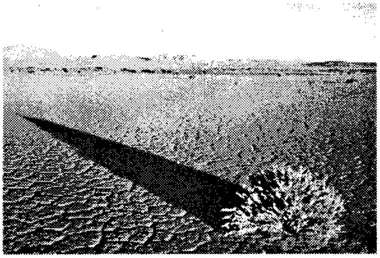
INTRODUCCIÓN

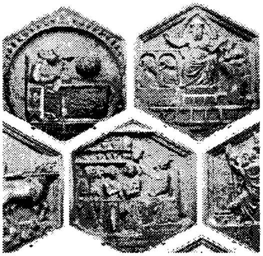
El hombre en el transcurso de su desarrollo ha buscado delimitar los terrenos donde habita o trabaja mediante líneas cerradas que suelen presentar partes rectilíneas (principalmente formas rectangulares, cuadradas, etc.); para esto, recurrió a formas poligonales, cuyas propiedades son necesarias conocer.

También en la naturaleza se observan formar poligonales por ejemplo: el panal de abejas está formado por celdas hexagonales, la piedra de los doce ángulos, etc.

Podemos ver así que el estudio de los polígonos es de gran importancia porque nos ayudará a entender y explicar con el apoyo de otras ciencias lo que encontramos en nuestro entorno y la manera de emplear sus propiedades para cubrir nuestras necesidades.







Las imágenes nos muestran la presencia de los polígonos en la naturaleza como la cristalización de las sales, el agrietamiento del suelo al evaporarse el agua así como también el empleo de los polígonos con fines decorativos.

DEFINICIÓN

Sean P_1, P_2, P_3,...., P_{n-1}, P_n puntos distintos en un plano con $n>2$, al unir los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ... $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$ se forma una línea cerrada, la cual recibe el nombre de polígono.

Dicho polígono tiene las siguientes propiedades:

- Dos segmentos con un punto común no deben estar en línea recta.
- Dos segmentos cualesquiera solo pueden intersecarse en sus extremos.
- En cada extremo común concurren solamente dos segmentos.

ELEMENTOS

- Los puntos P_1, P_2, ..., P_n se denominan vértices del polígono.
- Los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$ se denominan lados del polígono.
- Dos lados del polígono con un vértice común forman un par angular y determinan un ángulo al que se denomina ángulo interno del polígono.
- Al segmento que une dos vértices que no son extremos de un lado se denomina diagonal del polígono.
- La intersección de los interiores de los ángulos de un polígono recibe el nombre de interior o región interior del polígono. Los puntos del plano al cual pertenece el polígono, que no pertenecen al polígono ni a su interior, constituyen el exterior del polígono.
- Todo polígono es una línea continua cerrada.

Notación

Polígono: $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$

Elementos

Vértices: P_1; P_2; ...; P_8

Lados: $\overline{P_1P_2}$; $\overline{P_2P_3}$; $\overline{P_3P_4}$; ...; $\overline{P_8P_1}$

Pares angulares: $\angle P_1P_2P_3$; ...; $\angle P_7P_8P_1$

Diagonal: $\overline{P_3P_8}$; $\overline{P_1P_6}$; ...

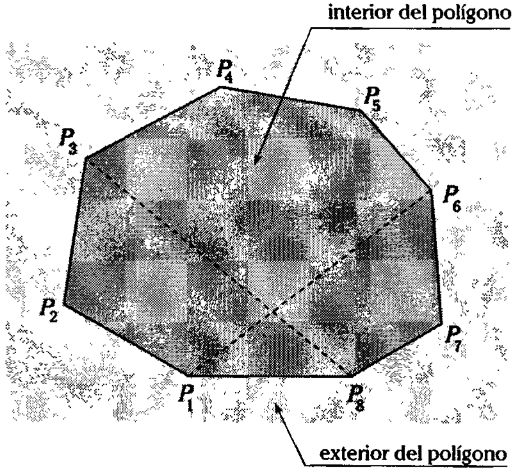
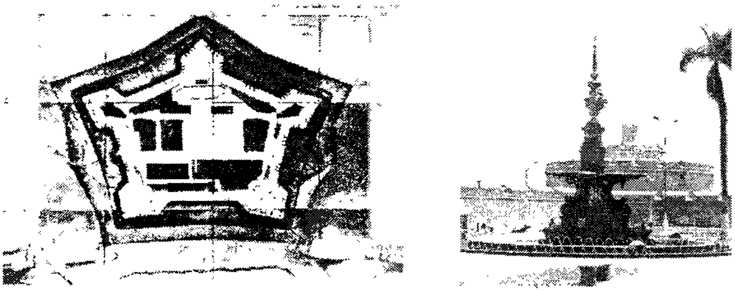


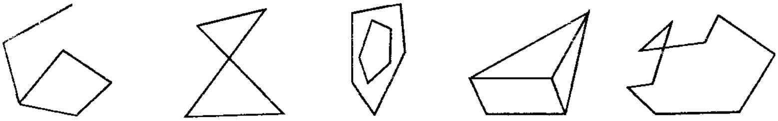
Figura 7.1



El fuerte del Real Felipe (Callao-Perú) visto en un plano de planta tiene forma poligonal.

Las siguientes figuras son polígonos

Las siguientes figuras no son polígonos



Nota

En todo polígono al segmento que unen los puntos medios de dos lados cualesquiera se le denomina diagonal media.

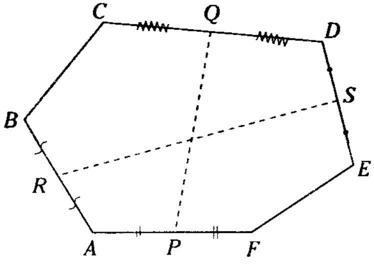


Figura 7.2

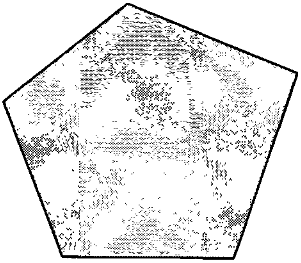
El caparazón de una tortuga presenta en el dorso escudos que tienen forma de polígonos.

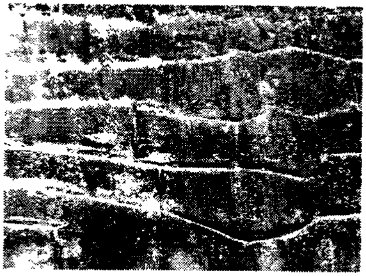
En la figura 7.2 muestra el polígono $ABCDEF$ en el cual se trazan las diagonales medias $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$.

CLASES DE POLÍGONOS

POLÍGONO CONVEXO

Es aquel polígono cuya región interior es un conjunto convexo.

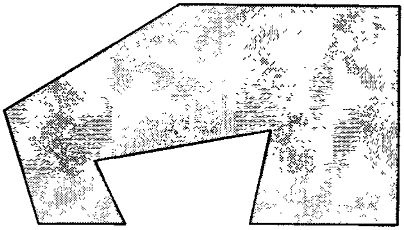




El muro muestra polígonos cuya región interior es un conjunto convexo. A dichos polígonos se les denomina convexos.

POLÍGONO NO CONVEXO (CÓNCAVO)

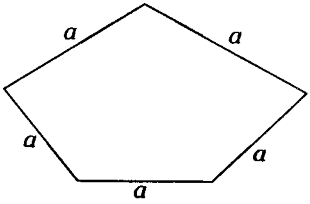
Es aquel polígono cuya región interior es un conjunto no convexo.



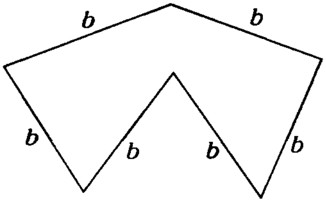
La pileta del jardín muestra un borde poligonal cuya región interior es un conjunto convexo, así se denomina a este polígono como no convexo.

POLÍGONO EQUILÁTERO

Es aquel polígono cuyos lados tienen la misma longitud.



Polígono equilátero convexo

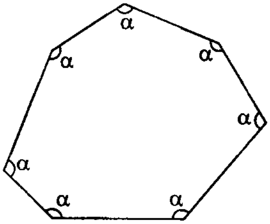


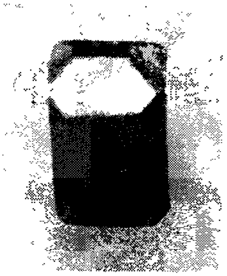
Polígono equilátero cóncavo

De las figuras anteriores podemos asumir que un polígono convexo o un polígono no c puede ser equilátero.

POLÍGONO EQUIÁNGULO

Es aquel polígono cuyos pares angulares son de igual medida.





La sección axial del cristal (magnetita) nos muestra un exágono equiángulo.

La figura muestra un polígono cuyos pares angulares tienen igual medida, por lo que a dicho polígono se le denomina equiángulo.

También podemos concluir que todo polígono equiángulo es convexo.

POLÍGONO REGULAR

Es aquel polígono que es equilátero y equiángulo a la vez.

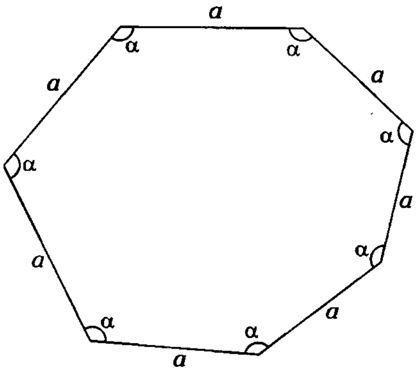
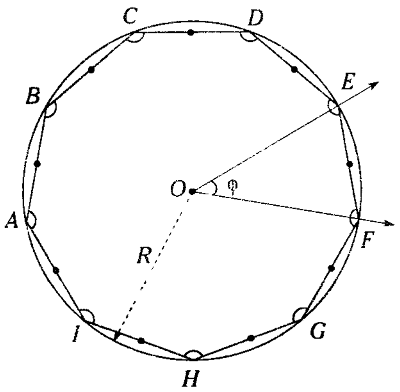


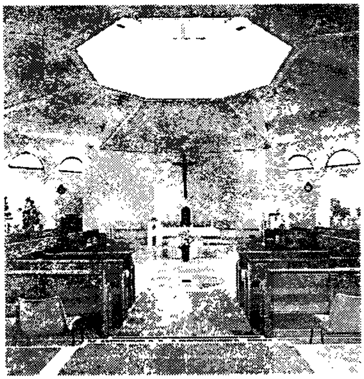
Figura 7.3

En la figura 7.3, observamos un polígono cuyos lados son de igual longitud (equilátero) y sus respectivos pares angulares son de igual medida (equiángulo). A este polígono se le distingue como regular.

Todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia y circunscribir a otra mientras estas sean concéntricas, es decir, que tengan el mismo centro; el cual recibe el nombre de centro de dicho polígono regular.

Se denomina ángulo central para un polígono regular al ángulo cuyo vértice es el centro del polígono regular y cuyos lados contienen a dos vértices consecutivos.



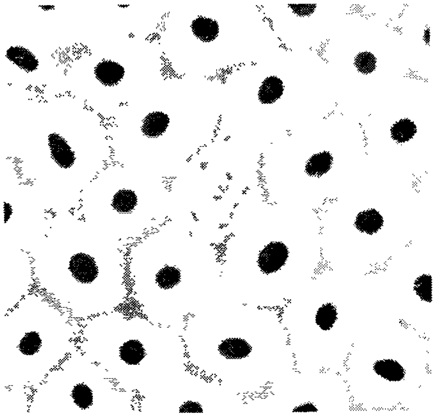


La presencia de los polígonos regulares es importante en los diseños arquitectónicos ya sea en techos o pisos.

NOMBRE DE ALGUNOS POLÍGONOS

Ciertos polígonos, según el número de lados, reciben un nombre en particular

NÚMERO DE LADOS	NOMBRE
3	triángulo
4	cuadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octágono
9	nonágono o eneágono
10	decágono
11	undecágono
12	dodecágono
15	pentadecágono
20	icoságono



Cuando las células epiteliales están adheridas muestran una distribución poligonal.

A los demás polígonos se les menciona por su número de lados, así diremos: polígono de 17 lados, polígono de 29 lados, etc.

Postulado

En todo polígono el número de vértices es igual al número de lados e igual al número de ángulos internos.

Teorema

En todo polígono, el número de diagonales trazadas desde un vértice (N° D_{1V}) es igual al número de lados disminuido en 3.

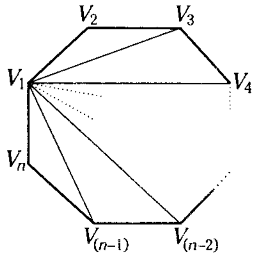
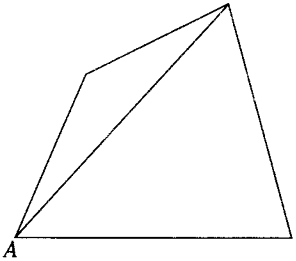


Figura 7.4

$$N^o\,D_{1V} = n-3$$

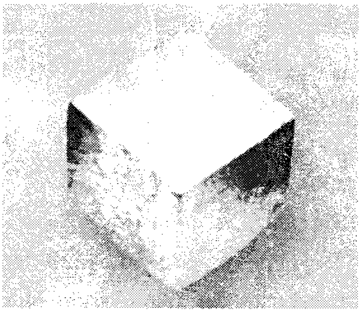
Donde n es el número de lados del polígono.

Para el polígono de 4 lados



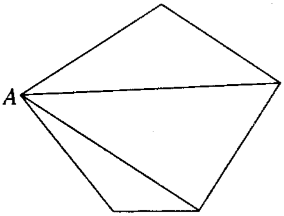
$N^o\,D_{1V} = 1 = 4-3 = n-3$

(n: # de lados)



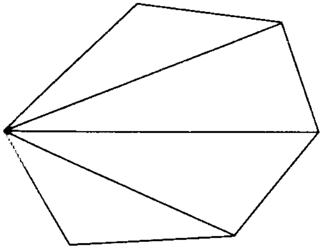
La fluorita tiene 6 caras de forma cuadrangular.

Para el polígono de 5 lados



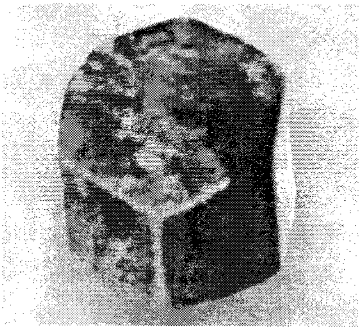
$N^o\,D_{1V} = 2 = 5-3 = n-3$ (n: # de lados)

Para el polígono de 6 lados



$N^o\,D_{1V} = 3 = 6-3 = n-3$

(n: # de lados)



Un cristal de cuarzo en un corte en X muestra una sección exagonal.

Por lo cual podemos decir que un vértice puede unirse con todos las demás vértices, menos los dos adyacentes ni consigo mismo.

$$\therefore \quad N^o D_{1V} = n - 3$$

Donde n es el número de lados del polígono.

En cada uno de los casos apreciados podemos decir que en un polígono al trazar las diagonales posibles desde un vértice, el número de triángulos formados es igual a $(n-2)$, donde n es el número de lados.

Teorema

En todo polígono, el número total de diagonales (N^o D) que se pueden trazar es igual al semiproducto del número de lados con el número de lados disminuido en tres.

$$N^o D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Donde n es el número de lados.

Demostración

En la demostración del teorema anterior, hemos deducido que desde un vértice se pueden trazar $(n-3)$ diagonales, y como el polígono tiene n vértices, entonces $N^o D = n(n-3)$. Sin embargo, en la figura 7.5 apreciamos que $\overline{AD}$ es diagonal y que es posible trazarlo de A a D o de D a A, lo cual indicaría que al contar las diagonales, se cuentan dos veces. De esta manera, el número total de diagonales es la mitad de $n(n-3)$.

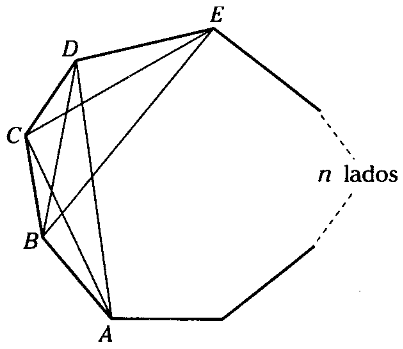


Figura 7.5

$$N^o D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Donde: n es el número de lados.

Teorema

En un polígono de n lados el número de diagonales que se pueden trazar desde K vértices consecutivos $N^o D^n_{K.Vc.}$ está dado por la siguiente expresión:

$$N^o D^n_{K.Vc} = (n)(K) - \frac{(K+1)(K+2)}{2}$$

para todo $K \leq n$

Deduzcamos la expresión

Desde el vértice (V_1), así como del (V_2), se pueden trazar $(n-3)$ diagonales, y si bien desde (V_3) deberían trazarse también $(n-3)$ diagonales, la diagonal $\overline{V_1V_3}$ ya se trazó desde (V_1).

Entonces desde (V_3) se pueden trazar $(n-4)$ diagonales, desde (V_4) deberían trazarse $(n-3)$ diagonales, pero las diagonales $\overline{V_1V_5}$, $\overline{V_2V_5}$ y $\overline{V_3V_5}$ ya han sido trazadas desde V_1 y V_2.

Entonces desde (V_4) se pueden trazar ($n-5$) diagonales, desde (V_5) deberían trazarse ($n-3$) diagonales, pero las diagonales $\overline{V_1V_5}$, $\overline{V_2V_5}$ y $\overline{V_3V_5}$ ya han sido trazadas desde V_1, V_2 y V_3 respectivamente.
desde (V_5) se pueden trazar ($n-6$) diagonales, por lo cual en forma análoga:
desde (V_6): ($n-7$) diagonales
desde (V_7): ($n-8$) diagonales
⋮ ⋮
desde (V_K): $[n-(K+1)]$ diagonales

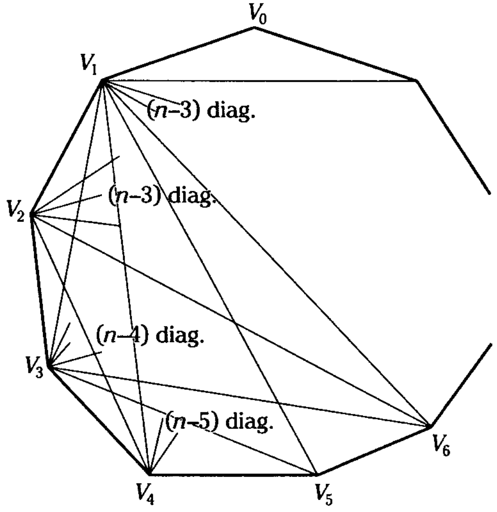


Figura 7.6

$$(\text{N}^\circ DM^n_{K.Vc}) = (n-3) + (n-3) + (n-4) + (n-5) + (n-6) \ldots + [n-(K+1)]$$
$$(\text{N}^\circ DM^n_{K.Vc}) = (n-3)+\underline{(n-1)}+\underline{(n-2)}+(n-3)+(n-4)+(n-5)+(n-6)+\ldots+[n-(K+1)+]-\underline{(n-1)}-\underline{(n-2)}$$
$$(\text{N}^\circ DM^n_{K.Vc}) = (n-3) + (K+1)n - (1+2+3+4+5+6+\ldots[K+1]) - (n-1) - (n-2)$$
$$(\text{N}^\circ DM^n_{K.Vc}) = (K+1)\ n - \frac{(K+1)(K+2)}{2} - n$$

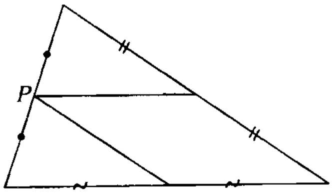
$$\boxed{\text{N}^\circ D^n_{K.Vc} = nK - \frac{(K+1)(K+2)}{2}} \quad \text{para todo } K \leq n$$

Teorema
En todo polígono el número de diagonales medias trazadas desde el punto medio de uno de sus lados ($\text{N}^\circ DM_{1\ell}$) es igual al número de lados disminuido en 1.

$$\boxed{\text{N}^\circ DM_{1\ell} = n-1}$$

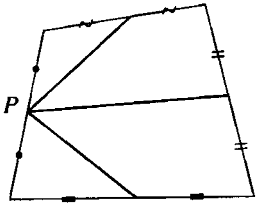
donde n es el número de lados de lados del polígono.

Para el polígono de 3 lados



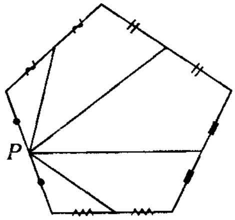
$N^{\circ}\, DM_{1\ell} = 2 = 3 - 1 = n - 1$ (n: # de lados)

Para el polígono de 4 lados:



$N^{\circ}\, DM_{1\ell} = 3 = 4 - 1 = n - 1$ (n: # de lados)

Para el polígono de 5 lados



$N^{\circ}\, DM_{1\ell} = 4 = 5 - 1 = n - 1$ (n: # de lados)

Por la cual podemos concluir que para todo polígono: $N^{\circ}\, DM_{1\ell} = n - 1$, donde n es el número de lados.

Teorema

En todo polígono el número total de diagonales medias ($N^{\circ}\, DM$) que se pueden trazar es igual al semiproducto del número de lados con el número de lados disminuido en 1.

$$N^{\circ}\, DM = \frac{n(n-1)}{2}$$

Donde n es el número de lados

Demostración

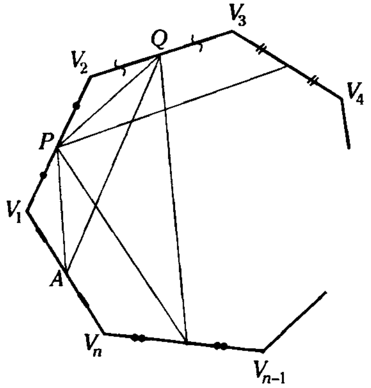


Figura 7.7

Por el teorema anterior $N^{\circ}\, DM_{1\ell} = n - 1$
Como el número de lados es igual al número de puntos medios, entonces $n(n-1)$, pero podemos apreciar de la figura 7.7 que la diagonal media PQ se ha podido trazar de P a Q o de Q a P, es decir, que toda la diagonal media ha sido contada dos veces, por lo cual el número total de diagonales medias es la mitad de $n(n-1)$.

$$N^{\circ}\, DM = \frac{n(n-1)}{2}$$

Teorema

En todo polígono de n lados, el número de diagonales medias que se pueden trazar desde K puntos medios respecto a lados consecutivos ($N^{\circ}\, DM^{n}_{K.\ell.c.}$) está dado por la siguiente expresión:

$$N^{\circ}\, DM^{n}_{K} = (n)(K) - \frac{(K)(K+1)}{2}$$

para todo $K \leq n$

Demostración

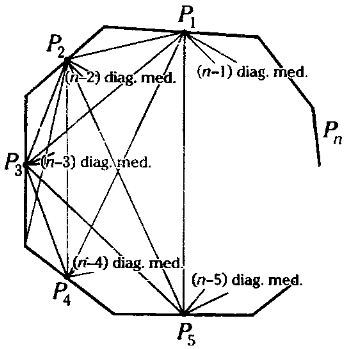


Figura 7.8

Sean $P_1, P_2, P_3, P_4 .... P_n$ los puntos medios de los lados del polígonos de n lados.

Por un teorema visto anteriormente el N° $D_{1\ell} = n - 1$. Entonces

Desde P_1 se trazan $(n - 1)$ diagonales medias. Desde P_2 se deberían trazar $(n - 1)$ diagonales medias pero la diagonal media $\overline{P_2P_1}$ ya ha sido trazada desde P_1.

Dado que desde P_2 se trazan $(n - 2)$ diagonales medias, desde P_3 se deberían trazar $(n - 1)$ diagonales medias. No obstante, las diagonales medias $\overline{P_3P_1}$ y $\overline{P_3P_2}$ ya han sido trazadas desde $\overline{P_1P_2}$ respectivamente.

Entonces desde P_3 se trazan $(n - 3)$ diagonales medias en forma análoga:

Desde P_4 se trazan $(n-4)$ diagonales medias

Desde P_5 se trazan $(n-5)$ diagonales medias

Desde P_K se trazan $(n-K)$ diagonales medias

$$\rightarrow \text{N}^\circ DM^n_{K\,(.c.} = n-1+n-2+n-3+n-4+\ldots+n-K$$

$$\text{N}^\circ DM^n_{K.\ell.c.} = n_K + (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + K)$$

$$\boxed{\text{N}^\circ DM^n_{K.\ell.c.} = (n)(K) - \frac{K(K+1)}{2}}$$

para todo $K \leq n$

Teorema

En todo polígono convexo la suma de las medidas angulares es igual a 180° multiplicado por el número de lados del polígono menos 2.

$$\boxed{\Sigma m\sphericalangle s = 180^\circ (n - 2)}$$

para todo $K \leq n$

Demostración

Como en todo polígono, desde un vértice se pueden trazar como máximo $n - 3$ diagonales (n = # lados del polígono). Si se forma $n - 2$ triángulos y la suma de las medidas angulares en un triángulo es 180°, concluimos que la suma de las medidas angulares en un polígono será igual a 180° multiplicado por el número de triángulos que forman las diagonales.

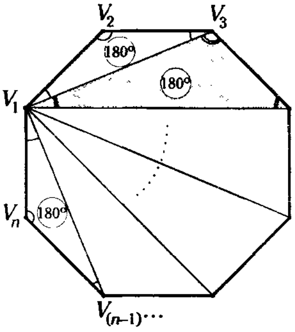


Figura 7.9

$\Sigma m\sphericalangle s = 180^\circ \times$(N° de triángulos)

El número de triángulos es igual al número de diagonales trazados desde un vértice más 1.

$$\text{N}^\circ \triangle s = (n - 3) + 1 = n - 2$$

$$\therefore \boxed{\Sigma m\sphericalangle s = 180^\circ (n - 2)}$$

Nota

El número máximo de ángulos exteriores obtusos en un polígono convexo es 3.

Teoremas en un polígono equiángulo

Sea n el número de lados de un polígono equiángulo.

Medida del $\sphericalangle$ interior: $\alpha \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n}}$

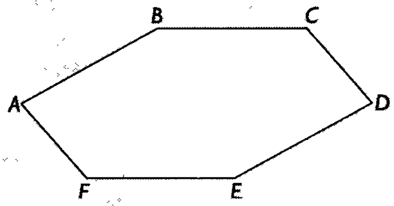
Medida del $\sphericalangle$ exterior: $\beta \rightarrow \boxed{\beta = \frac{360^\circ}{n}}$

LECTURA

¿QUÉ ES UN PAREXÁGONO?

Podemos considerar una palabra muy simple para designar cierta clase de exágono. La palabra sobre el cual nos referimos es el **parexágono.**

Un exágono común tiene seis lados arbitrarios. Un parexágono es aquel exágono particular en el cual un lado es a la vez igual en longitud y paralelo al lado opuesto.



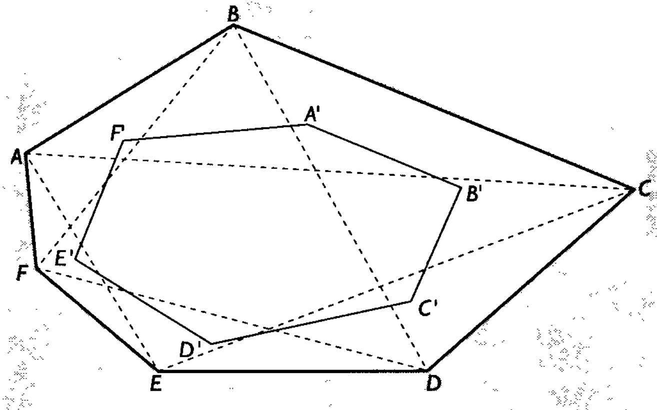
$AB = ED$; $\overline{AB} // \overline{ED}$

$BC = FE$; $\overline{BC} // \overline{FE}$

$CD = AF$; $\overline{CD} // \overline{AF}$

$\rightarrow$ $ABCDEF$: es un parexágono

Dado que se le denomina paralelogramo a todo aquel cuadrilátero cuyos lados opuestos son iguales en longitud y paralelos; podríamos llamar parexágono a aquel exágono que tiene lados opuestos, paralelos y congruentes. A continuación presentamos un ejemplo de un teorema sobre el parexágono: En un exágono irregular, no necesariamente parexágono, $ABCDEF$ al trazar las diagonales $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$, $\overline{DF}$, $\overline{EA}$, $\overline{FB}$ se forman las regiones triangulares: ABC, BCD, CDE, DEF, EFA y FAB; en las cuales se ubican sus centros de gravedad A', B', C', D', E', F', respectivamente el polígono A', B', C', D', E', F', es el denominado parexágono.



$A'\,B'\,C'\,D'\,E'\,F'$: es el parexágono relativo al exágono $ABCDEF$.

BIOGRAFÍA

GIOVANNI GIROLAMO SACCHERI (San Remo, 1667 - Milano, 1733)

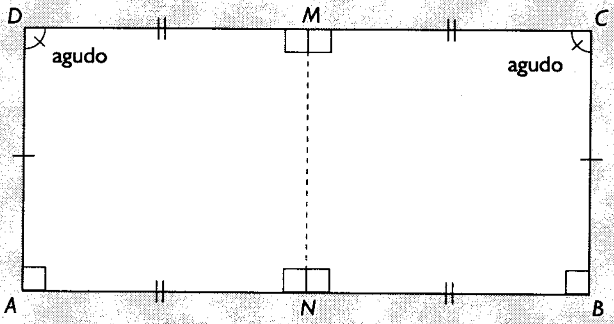
Nació el 05 de setiembre en Génova (ahora Italia) y murió el 25 de octubre de 1733 en Italia. Saccheri se incorporó a la orden de Jesuit en Génova en 1685. Cinco años más tarde radicó en Milano para estudiar filosofía y teología en la universidad de Jesuit de Breva, en donde Tommaso Ceva se animó por las matemáticas.

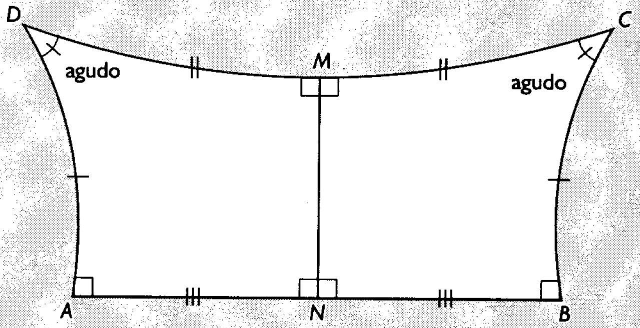
Ya en 1694, Saccheri se había convertido en sacerdote y tiempo después pasó a enseñar en varias universidades de Jesuit de Italia.

En *Eudid ab omni naevo vindicatus* (1733), Saccheri realizó un trabajo importante sobre geometría no euclidiana, porque presentó fue una tentativa para probar el postulado V de Euclides, aunque él no lo haya visto así.

Trabajó con lógica matemática y es en *Lógica Demonstativa* (1697), donde trata con definiciones, postulados y demostraciones al estilo de Euclides.

Entre sus otras publicaciones estaba un trabajo sobre neo-statica-statica publicado en 1708 y su primer libro *Geométrica a Guzmán*, dedicado al gobernador de Quaesita de Milano (1693), que fue escrito con el consejo y ayuda considerable de Tommaso Ceva (1648 - 1737 Italiano).





Problemas Resueltos

Problema 1

Si a un polígono equiángulo de n lados se le disminuye 3 lados, tendría $(n+3)$ diagonales menos. Calcule la razón numérica de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono del doble del número de lados y su número de lados de dicho polígono.

A) 125 B) 135 C) 150
D) 160 E) 170

Resolución

Piden

$$r=\frac{\text{valor numérico } \Sigma m\sphericalangle i}{2n} \qquad \text{(I)}$$

Sea n el número de lados del polígono equiángulo.

Según el enunciado

$$\frac{n}{2}(n-3)-\frac{n-3}{2}(n-3-3)=n+3$$

$$n^2-3n-\left[n^2-9n+18\right]=2(n+3)$$

$$\cancel{n^2}-3n-\cancel{n^2}+9n-18=2n+6$$

$$6n-18=2n+6$$

$$4n=24$$

$$\rightarrow \quad n=6$$

Utilizando la fórmula de $\Sigma m\sphericalangle i$

$$\Sigma m\sphericalangle i_{(2n)}=180°(2n_{(\text{lados})}-2)=180°(12-2)$$
$$=180°\times 10$$

En (I)

$$r=\frac{(180\times 10)}{(2\times 6)}=150$$

$$\therefore\ r=150$$

CLAVE C

Problema 2

Se tienen dos polígonos equiángulos, tal que los vértices de uno pertenecen a los lados del otro. Si dos lados de un polígono con un lado del otro polígono determinan ángulos cuyas medidas están a una razón de 9 a 1 y su valor numérico del menor ángulo mencionado es igual al número de lados de un polígono, calcule el número de lados del polígono equiángulo.

A) 10 B) 12 C) 8
D) 6 E) 9

Resolución

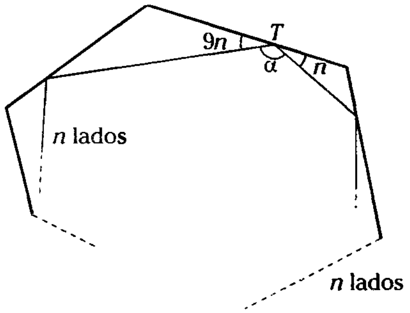


Figura 7.10

Piden n (número de lado de un polígono)

Se sabe que $\alpha=\dfrac{180°(n-2)}{n}$

En T

$$9n+\frac{180(n-2)}{n}+n=180$$

$$10n+\frac{180n-360}{n}=180$$

$$10n^2+180n-360=180n$$

$$10n^2=360$$

$$\therefore\ n=6$$

CLAVE D

Problema 3

En un polígono equiángulo, el número de ángulos rectos a que equivale la suma de las medidas de ángulos internos excede en 11 al número de vértices del polígono formado al unir en forma consecutiva los puntos medios de los lados del polígono equiángulo. Calcule la medida del ángulo exterior del polígono inicial.

A) 20° B) 21° C) 22°
D) 23° E) 24°

Resolución

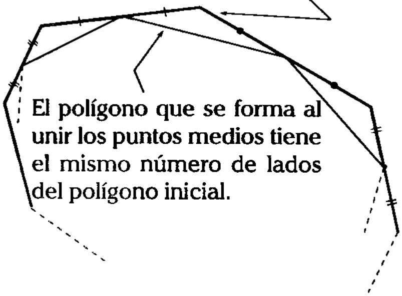


Figura 7.11

Pide

$$m\sphericalangle e=\frac{360°}{n} \qquad \text{(I)}$$

Del enunciado

$$N°\sphericalangle \text{ rectos } (\Sigma m\sphericalangle i)-11=n$$

$$\frac{180°(n-2)}{90°}-11=n$$

$$2n-4-11=n$$

$$n=15$$

En (I)

$$m\sphericalangle e=\frac{360°}{15}$$

$$\therefore\ m\sphericalangle e=24°$$

CLAVE E

Problema 4

Se tienen dos polígonos equiángulos, donde el número de lados de uno de ellos es el doble del otro. El número total de diagonales trazadas en el polígono de menor número de lados más el número de ángulos rectos a que equivale la suma de medidas de los ángulos internos en el otro polígono es igual 14. Calcule la medida del ángulo exterior del polígono de menor número de lados.

A) 60° B) 70° C) 75°
D) 90° E) 120°

Resolución

Figura 7.12

Pide

$$m\sphericalangle e=\frac{360°}{n} \qquad \text{(I)}$$

Del enunciado

$$\frac{n(n-3)}{2}+\frac{180°(2n-2)}{90°}=14$$

$$\frac{n^2-3n}{2}+2(2n-2)=14$$

$$\frac{n^2-3n+8n-14}{2}=8$$

$$n^2+5n-36=0$$

$$\begin{matrix} n & +9 \\ n & -4 \end{matrix}$$

$$n=4$$

En (I)

$$m\sphericalangle e=\frac{360^{\circ}}{4}$$

$\therefore\ m\sphericalangle e=90^{\circ}$

CLAVE D

Problema 5

En un mismo plano se tienen tres polígonos el polígono 2 tiene el doble número de lados del polígono 1 y comparten un lado en común. El polígono 3 es el resultado de la unión de los polígonos anteriores, donde solamente el lado en común sin sus extremos pertenece a la región interior. Si el número total de diagonales del polígono 3 es 152, calcule el número total de diagonales del polígono de menor número de lados.

A) 18 B) 35 C) 27
D) 14 E) 20

Resolución

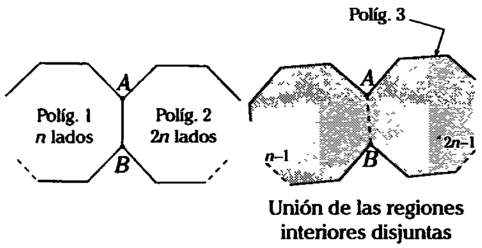


Figura 7.13

Piden

$$N^{\circ}D=\frac{n(n-3)}{2} \qquad (I)$$

De la segunda figura, podemos observar que solamente $\overline{AB}$ sin sus extremos pertenece a la región interior del polígono, cuyo número de lados es:

$n-1+2n-1=3n-2$

Según el enunciado

$$\frac{(3n-2)(3n-2-3)}{2}=152$$

$$(3n-2)(3n-5)=304$$

$$9n^2-6n-15n+10=304$$

$$9n^2-21n-294=0$$

$$3n^2-7n-98=0$$

$$\begin{matrix}3n & +14\\ n & -7\end{matrix}$$

$\rightarrow\ n=7$

(siendo el de menor número de lados)

Reemplazando en (I)

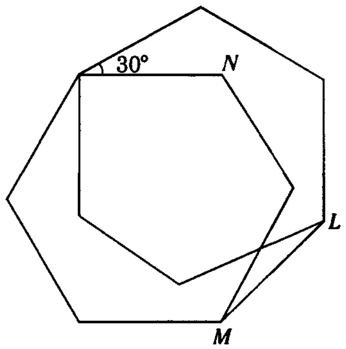
$$N^{\circ}D=\frac{7(7-3)}{2}$$

$\therefore\ N^{\circ}D=14$

CLAVE D

Problema 6

En la figura, se muestran dos exágonos regulares congruentes. Calcule $m\sphericalangle NML$.



A) 37° B) 45° C) 53°
D) 48° E) 60°

Resolución

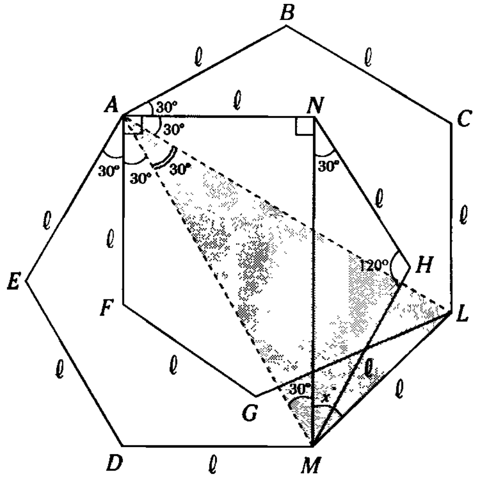


Figura 7.14

Piden m∢$NML = x$

Se sabe que:

$$m\sphericalangle i=\frac{180°(n-2)}{n}$$

Como $n = 6 \rightarrow$ m∢i = 120°

De la figura 7.14, m∢NAF = 90° y m∢EAF = 30°

Como los polígonos son congruentes

$\rightarrow AL = AM$

Se sabe que $\overline{AL}$ y $\overline{AM}$ son bisectrices de los ángulos internos FAB y EAN; entonces

m∢MAE = 60° y m∢LAB = 60°

En △NHM: m∢HNM = 30°

$\rightarrow$ m∢ANM = 90° y m∢AMN = 30°

En △MAL: m∢AML = m∢ALM = 75°

$x + 30° = 75°$

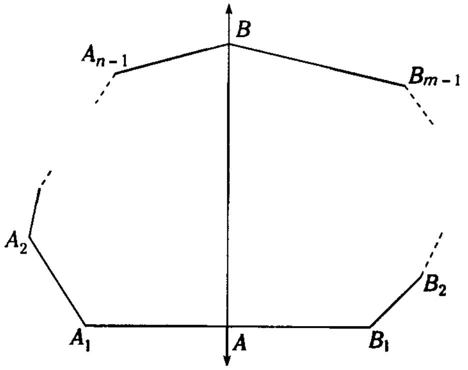
$\therefore\ x = 45°$

CLAVE B

Problema 7

Según la figura, $n + m = 100$. Calcule el número de diagonales del polígono

$A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}BB_{n-1}B_{n-2} \ldots B_2B_1$



A) 4 655 B) 4 752 C) 4 559
D) 4 464 E) 4 370

Resolución

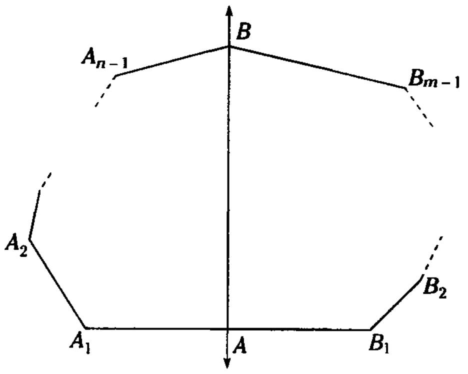


Figura 7.15

Piden

$$N^{o}\,D=\frac{K(K-3)}{2} \qquad \text{(I)}$$

Donde K es el número de lados del polígono

$A_1A_2A_3...A_{n-1}BB_{n-1}B_{n-2}...B_2B_1$

Sin tomar en cuenta a $\overline{AB}$, $\overline{A_1A}$ y $\overline{AB_1}$

El número de lados sería $(n-1)+(m-1)$

Luego considerando $\overline{A_1B_1}$, entonces

$K=(n-1)+(m-1)+1=m+n-1$

$\rightarrow\ K=100-1=99$

Reemplazando (I)

$$\therefore \text{N}^\circ\ D=\frac{99(96)}{2}=4\,752$$

CLAVE B

Problema 8

En un octágono regular $ABCDEFGH$, se trazan $\overline{BE}$ y $\overline{DH}$, las cuales se intersecan en L. Si $AB=a$, calcule AL.

A) $\frac{3}{2}a\sqrt{2}$ B) $a\sqrt{2}$ C) $a\sqrt{3}$

D) 2a E) $a\sqrt{6}$

Resolución

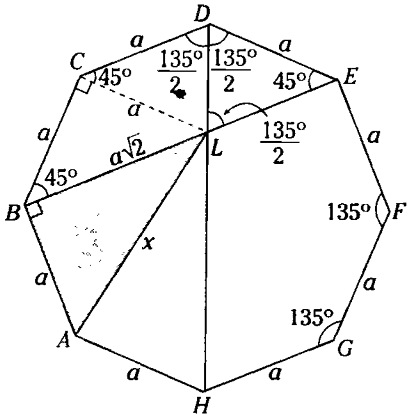


Figura 7.16

Piden $AL=x$

Se sabe que $m\sphericalangle i=\frac{180^\circ(n-2)}{n}$

Como $n=8\ \rightarrow\ m\sphericalangle i=135^\circ$

Se nota $\square BCDE$: trapecio isósceles

$\rightarrow\ m\sphericalangle DEB=m\sphericalangle CBE=45^\circ$

$m\sphericalangle CDH=m\sphericalangle EDH=\frac{135^\circ}{2}$

En $\triangle DLE$: $m\sphericalangle DLE=\frac{135^\circ}{2}\ \rightarrow\ LE=a$

$CLED$ es un rombo

$\rightarrow\ m\sphericalangle LCD=45^\circ$

⊾BCL: Notable 45°

$BL=a\sqrt{2}$

En ⊾ABL: Teorema de Pitágoras

$x^2=a^2+(a\sqrt{2})^2$

$\therefore\ x=a\sqrt{3}$

CLAVE C

Problema 9

Interiormente a un pentágono regular $ABCDE$, se construye un triángulo equilátero APB. Calcule la $m\sphericalangle DPE$.

A) 42° B) 54° C) 66°

D) 72° E) 84°

Resolución

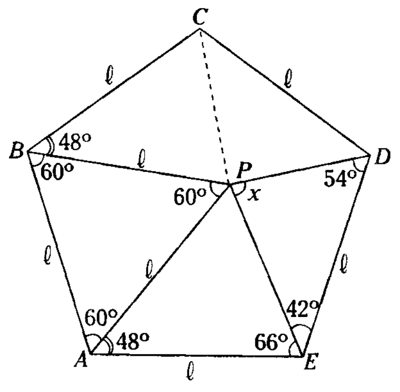


Figura 7.17

Piden $m\sphericalangle DPE=x$

Se sabe que $m\sphericalangle \hat{i}=\frac{180^\circ(n-2)}{n}$

Como $n = 5 \rightarrow m\sphericalangle \hat{\imath} = 108°$

Por dato

$m\sphericalangle PBA = m\sphericalangle PAB = 60°$

$\rightarrow m\sphericalangle CBP = m\sphericalangle EAP = 48°$

En $\triangle PAE$: $m\sphericalangle APE = m\sphericalangle AEP = 66°$

Luego $m\sphericalangle PED = 42°$

$\triangle CBP \cong \triangle PAE$ (L.A.L.)

$\rightarrow PC = PE$

⏢$CDEP$: trapezoide simétrico

$$\rightarrow m\sphericalangle CDP = m\sphericalangle EDP = \frac{108°}{2} = 54°$$

En $\triangle EPD$: $x + 54° + 42° = 180°$

$\therefore\ x = 84°$

CLAVE E

Problema 10

En un pentágono convexo $ABCDE$, $AB = CD$ y $BC = DE$. Si se ubica el punto medio M de $\overline{AE}$ y $m\sphericalangle BCD + m\sphericalangle BAE + m\sphericalangle DEA = 360°$, calcule la $m\sphericalangle BMD$.

A) 50° B) 60° C) 75°
D) 90° E) 120°

Resolución

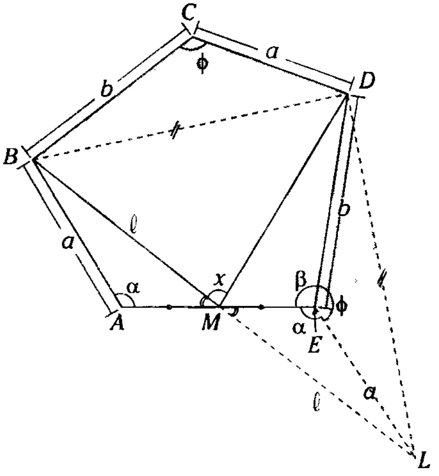


Figura 7.18

Piden la $m\sphericalangle BMD = x$

Dato $\phi + \alpha + \beta = 360°$

Se prolonga $\overline{BM}$ hasta L, tal que $BM = ML$.

$\triangle BMA \cong \triangle LME$ (L.A.L.)

$\rightarrow EL = AB = a$ y $m\sphericalangle MEL = m\sphericalangle MAB = \alpha$

En E y por dato:

$m\sphericalangle DEL = \phi$

$\triangle BCD \cong \triangle DEL$ (L.A.L.)

$\rightarrow BD = DL$

En $\triangle BDL$ como $BD = DL$ y $BM = ML$

$\rightarrow \overline{DM}$ es altura

$\therefore\ x = 90°$

CLAVE D

Problema 11

En un nonágono equiángulo $ABCDEFGHI$, en su interior y en $\overline{FG}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente. Si $m\sphericalangle QDE = 20°$, $DQ = 4\sqrt{3}$ y la suma de las distancias de P a los lados AI, CD y FG es 15. Calcule la distancia de Q a $\overline{AI}$.

A) 7 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

Resolución

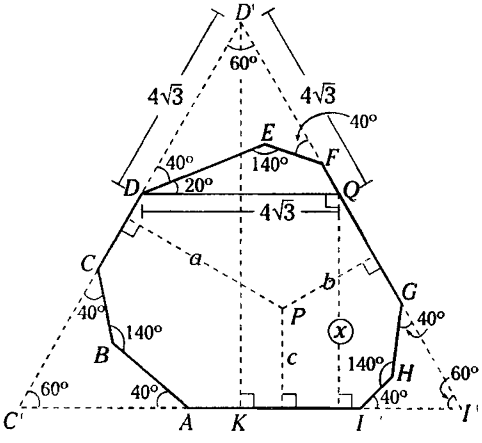


Figura 7.19

Piden x
Dato $a + b + c = 15$
Se sabe que

$$m\measuredangle i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

Como $n = 9 \rightarrow m\measuredangle i = 140^\circ$ y $m\measuredangle \hat{e} = 40^\circ$
Se prolongan $\overline{CD}, \overline{DC}, \overline{FG}, \overline{GF}, \overline{AI}, \overline{IA}$ hasta que se forme el $\triangle C'D'I'$ siendo este equilátero.
Por propiedad del $\triangle$ equilátero

$$D'K = a + b + c$$

$DD'Q$ es equilátero de altura de longitud 6.
Luego

$$6 + x = 15$$

$$\therefore\ x = 9$$

CLAVE B

Problema 12

Dados dos polígonos regulares, tales que la suma total de sus medidas angulares internas es 2 340 y la diferencia de sus números de diagonales es 21. Calcule la medida del ángulo interno del polígono de menor número de lados.

A) 135° B) 144° C) $\frac{900^\circ}{11}$

D) $\frac{800^\circ}{9}$ E) $\frac{900^\circ}{7}$

Resolución
Sean n_1 y n_2 los números de lados de los polígonos regulares (considerando $n_2 < n_1$)
Piden $m\measuredangle i$
del polígono de menor número de lados
Dato

$$180^\circ(n_1-2)+180^\circ(n_2-2)=2\,340^\circ$$

$$n_1-2+n_2-2=13$$

$$n_1+n_2=17$$

$$n_1=17-n_2 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{n_1(n_1-3)}{2}-\frac{n_2(n_2-3)}{2}=21$$

$$n_1(n_1-3)-n_2(n_2-3)=42 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II)

$$(17-n_2)(17-n_2-3)-n_2(n_2-3)=42$$

Operando

$$n_2=7$$

Se sabe que

$$m\measuredangle i=\frac{180^\circ(n_2-2)}{n_2}=\frac{180^\circ(7-2)}{7}$$

$$\therefore\ m\measuredangle i=\frac{900^\circ}{7}$$

CLAVE E

Problema 13

En un polígono se cumple que la suma del número de diagonales con el triple del número de diagonales medias y el doble el número de vértices es 276. Calcule la diferencia del número de diagonales trazadas desde 5 vértices consecutivos y un vértice.

A) 29 B) 24 C) 30
D) 49 E) 52

Resolución
Sea n : número de lados del polígono
Piden diferencia (N° $D_{5.Vc}$ – N° $D_{1.V}$) (I)
Dato

$$\frac{n(n-3)}{2}+3\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]+2n=276$$

$$n^2-3n+3n^2-3n+4n=552$$

$$4n^2-2n-552=0$$

$$2n^2-n-276=0$$

$$\begin{matrix} 2n & & +23 \\ & \times & \\ n & & -12 \end{matrix}$$

$$\rightarrow\ n=12$$

Número de diagonales trazados desde K vértices

$$\text{N}^\circ D_{K.Vc}=nK-\frac{(K+1)(K+2)}{2}$$

Como $K=5 \rightarrow \text{N}^\circ D_{5.Vc}=12\times5-\frac{6\times7}{2}=39$

Número de diagonales trazados desde un vértice

$N^o D_{1V} = n-3$

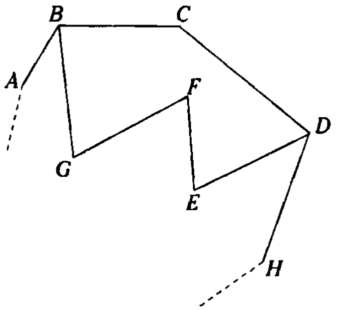
$n=12 \rightarrow N^o D_{1V}=9$

$\therefore \quad N^o D_{5Vc} - N^o D_{1V} = 39-9=30$

CLAVE C

Problema 14

En la figura, se muestran los polígonos *BCDEFG* y *ABGFEDH*..., donde los números de diagonales están en la razón de 1 a 3. Calcule el número de diagonales medias del polígono de mayor número de lados determinado.



A) 21 B) 28 C) 36
D) 45 E) 55

Resolución

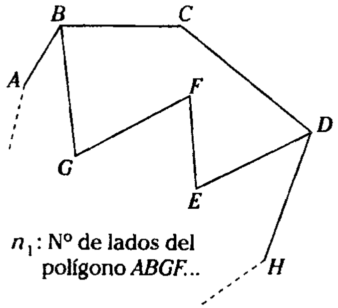


Figura 7.20

Piden N° *DM* (del polígono mayor número de lados)

Se sabe que:

$$N^o DM = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{(I)}$$

Para el polígono *BCDEFG* ($n=6$)

$$N^o D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{6\times 3}{2}$$

$$N^o D = 9$$

Del dato N° *D* del polígono *ABGFEDH*.... es 27.

$$\frac{n_1(n_1-3)}{2} = 27$$

$$n_1^2 - 3n_1 - 54 = 0$$

$$\begin{matrix} n_1 & \diagdown\!\!\!\diagup & -9 \\ n_1 & & +6 \end{matrix}$$

Por lo cual $n_1 = 9$

Reemplazando en (I)

$$\therefore \quad N^o DM = \frac{9(9-1)}{2} = 36$$

CLAVE C

Problema 15

En el polígono convexo *ABCDEF*..., se traza la diagonal *AE*, determinandose dos polígonos. Si la diferencia de los números de sus diagonales es 15, calcule la suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono *ABCDEF*...

A) 1 980° B) 1 620° C) 2 160°
D) 1 800° E) 1 260°

Resolución

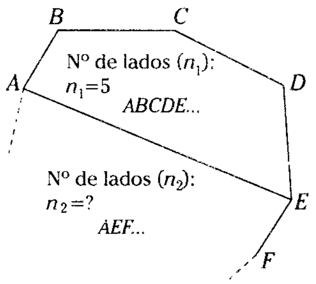


Figura 7.21

Piden $\Sigma m\sphericalangle i_{ABCDEF..}$: suma de medidas de los ángulos interiores.

Se sabe que $\Sigma m\sphericalangle i_{ABCDEF} = 180°(n-2)$ (I)

Del enunciado

$$\frac{n_2(n_2-3)}{2}-\frac{5(5-3)}{2}=15$$

$$n_2^2-3n_2=40$$

$$n_2^2-3n_2-40=0$$

$$n_2 \quad -8$$
$$n_2 \quad +5$$

$$n_2=8$$

Entonces el número de lados

$$(n)_{ABCDEF...}=(n_1-1)+(n_2-1)=5+8-2=11$$

En (I)

$$\Sigma m\sphericalangle i_{ABCDEF..}=180°(11-2)$$

$$\therefore \quad \Sigma m\sphericalangle i_{ABCDEF.}=1\,620°$$

CLAVE B

Problema 16

Calcule el número de diagonales de un polígono equiángulo *ABCDEF*..., si las rectas perpendiculares a $\overline{BA}$ y $\overline{DE}$ forman un ángulo que mide 36°.

A) 464 B) 405 C) 377

D) 434 E) 495

Resolución

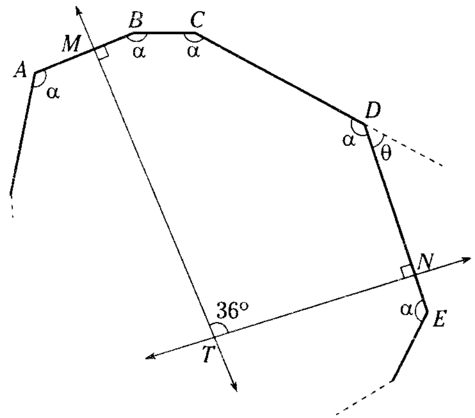


Figura 7.22

Piden Nº *D* (del polígono *ABCDEF*...)

$$N^o\,D=\frac{n(n-3)}{2} \qquad \text{(I)}$$

Polígono *MBCDNT*: el número de lados es 6

$$\Sigma m\sphericalangle i=180°(6-2)=90°+3\alpha+90°+36°$$

$$\alpha=168° \rightarrow \theta=12°$$

(θ es medida del ángulo exterior de *ABCDEF*...)

Como

$$m\sphericalangle e=12°=\frac{360°}{n}$$

$$\rightarrow n=30$$

En (I)

$$N^o\,D=\frac{30(30-3)}{2}$$

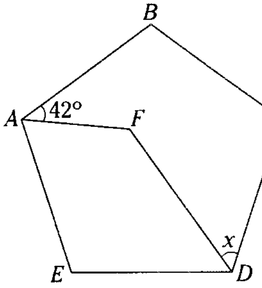
$$N^o\,D=\frac{30\times 27}{2}$$

$$\therefore \quad N^o\,D=405$$

CLAVE B

Problema 17

De la figura, si $ABCDE$ es un pentágono regular y $DF = DE$, calcule x.



A) 36° B) 42° C) 48°
D) 52° E) 60°

Resolución

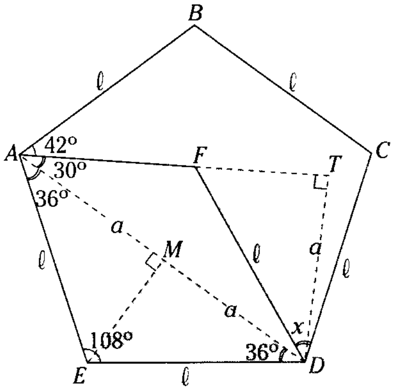


Figura 7.23

El problema indica hallar x

Se sabe que la

$$m\measuredangle i = \frac{180°(n-2)}{n} \text{(medida del ángulo interior)}$$

Como $n = 5 \rightarrow m\measuredangle\hat{i} = 108°$

Se traza $\overline{AD}$

$\rightarrow m\measuredangle EAD = m\measuredangle EDA = 36°$ y

$m\measuredangle DAF = 30°$

Se traza $\overline{EM}$ perpendicular a $\overline{AD}$ y

$\overline{DT}$ perpendicular a $\overleftrightarrow{AF}$

$\triangle ATD$ notable 30° y 60°: $AD = 2(TD)$

$\triangle FTD \cong \triangle EMD$ (L.L.L.)

$\rightarrow m\measuredangle TDF = m\measuredangle MDE = 36°$

En el vértice D:

$\rightarrow m\measuredangle TDC = 108° - 36° - 60°$

$m\measuredangle TDC = 12°$

De la figura 7.23, se nota

$x = m\measuredangle FDT + m\measuredangle TDC$

$x = 36° + 12°$

$\therefore\ x = 48°$

CLAVE C

Problema 18

En un dodecágono equiángulo $ABCDEFGHIJKL$, $CG = GK$ y $2(DE) = FG = 2\sqrt{3}(CD) = 2\sqrt{3}(EF) = \frac{KF}{2}$. Calcule la $m\measuredangle CGK$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 53°

Resolución

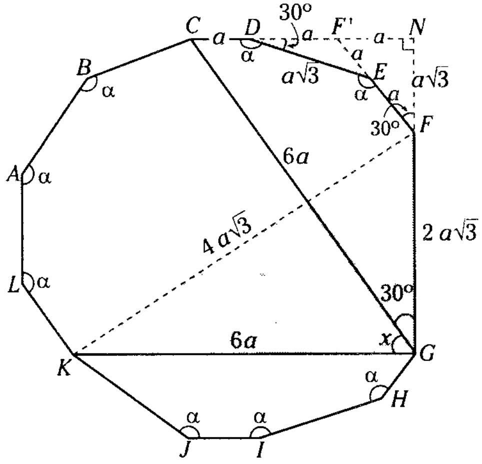


Figura 7.24

Solicitan la $m\measuredangle CGK = x$

Se sabe que

$$m\sphericalangle i=\alpha=\frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

Como $n=12 \rightarrow \alpha=150^\circ$

Se prolongan $\overline{CD}$ y $\overline{GF}$ hasta N.

Se prolonga $\overline{FE}$ hasta F'

En $\triangle DF'E$: $DF'=F'E=a$

⊿$F'NF$ es notable de 30° y 60°

$$F'N=a;\ FN=a\sqrt{3}$$

⊿CNG: como $NG=CN\sqrt{3}$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle CGN=30^\circ$ y $m\sphericalangle NCG=60^\circ$ y

$CG=6a$

Del dato $CG=GK=6a$

En $\triangle FGK$: como se tiene la relación de sus lados y es conocido de 30° y 60°.

$\rightarrow$ $m\sphericalangle KGF=90^\circ$

$\therefore\ x=60^\circ$

CLAVE C

Problema 19

Un polígono convexo de $2n$ lados se llama rómbico si sus lados miden uno y todos sus pares de lados opuestos son paralelos. Todo polígono rómbico se puede dividir en cuadriláteros rómbicos.

¿Para qué valor de n, un polígono rómbico de $2n$ lados se divide en 66 cuadriláteros rómbicos?

A) 10 B) 16 C) 12
D) 18 E) 14

Resolución

Piden el valor de n, donde el polígono rómbico de $2n$ lados se divide en 66 cuadriláteros rómbicos.
Se analizará a partir del rombo.

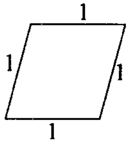


Figura de 4 lados: $n=2$

1 cuadrilátero rómbico $=\dfrac{2\times 1}{2}$

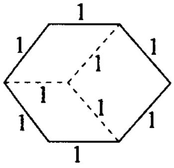


Figura de 6 lados: $n=3$

3 cuadriláteros rómbicos

$=\dfrac{3\times 2}{2}$

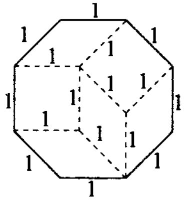


Figura de 8 lados: $n=4$

6 cuadriláteros rómbicos

$=\dfrac{4\times 3}{2}$

Luego se deduce que:

La cantidad de cuadriláteros rómbicos (CCR)

$$CCR=\frac{n(n-1)}{2}$$

Como $CCR=66=\dfrac{n(n-1)}{2}$

$$n^2-n-132=0$$

$$\begin{matrix} n & -12 \\ n & +11 \end{matrix}$$

$\rightarrow$ $n=12$

CLAVE C

Problema 20

Dado un decágono regular, indique cuántos pares diagonales se intersecan en el interior del polígono, determinando ángulos de 72°.

A) 90 B) 100 C) 110
D) 120 E) 130

Resolución

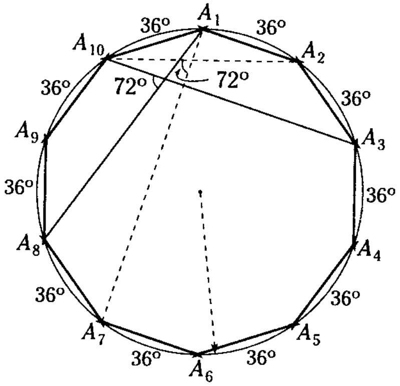


Figura 7.25

Piden la cantidad de pares diagonales que se intersecan, determinando ángulos de 72°.
Se sabe que

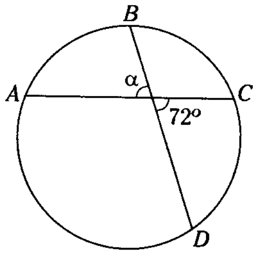


Figura 7.26

$$\alpha = \frac{m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{CD}}{2} = 72^\circ$$

$$\rightarrow \; m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{CD} = 144^\circ$$

Para nuestro problema, las medidas de los arcos determinados por los lados es 36°.

1^er. caso: Tomando el arco A_1A_2

$\overline{A_1A_7}$ y $\overline{A_2A_{10}}$ determinan un ∢ de 72°

$\overline{A_1A_6}$ y $\overline{A_2A_9}$ determinan un ∢ de 72°

$\overline{A_1A_5}$ y $\overline{A_2A_8}$ determinan un ∢ de 72°

$\overline{A_1A_4}$ y $\overline{A_2A_7}$ determinan un ∢ de 72°

$\overline{A_1A_3}$ y $\overline{A_2A_6}$ determinan un ∢ de 72°

El arco A_1A_2 en total determina 5 pares y como se tienen 10 arcos que miden 36°, podemos notar que se tienen 10(5)=50 pares.

2^do. caso: Tomando el arco A_1A_3

$\overline{A_1A_8}$ y $\overline{A_3A_{10}}$ determinan un ∢ de 72°

$\overline{A_1A_7}$ y $\overline{A_3A_9}$ determinan un ∢ de 72°

$\overline{A_1A_6}$ y $\overline{A_3A_8}$ determinan un ∢ de 72°

$\overline{A_1A_5}$ y $\overline{A_3A_7}$ determinan un ∢ de 72°

$\overline{A_1A_4}$ y $\overline{A_3A_6}$ determinan un ∢ de 72°

El arco A_1A_3 en total determina 6 pares y como se tienen 10 arcos diferentes que miden 72°, podemos notar que se tienen 10(6) = 60 pares.

3^er. caso: Tomando el arco A_1A_4: (que mide 108°) se estaría repitiendo el 1^er. caso.

Por lo tanto, la cantidad de pares diagonales que se intersecan, determinando ángulos cuya medida es 72°, sería 50+60=110 pares.

Observación

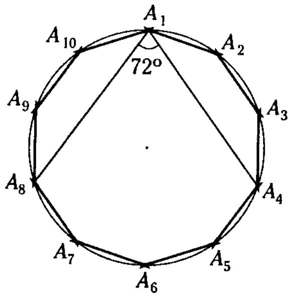


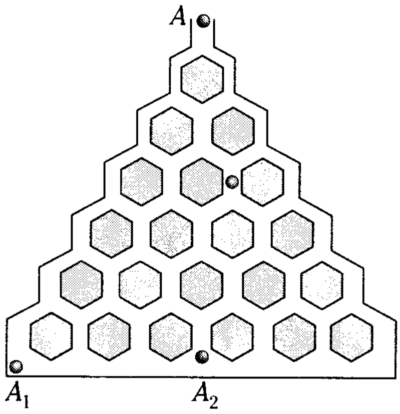
Figura 7.27

Las diagonales $\overline{A_8A_1}$ y $\overline{A_4A_1}$ determinan ángulos de medida de 72°, pero no lo hemos considerado ya que la intersección de dichas diagonales no se encuentra en el interior, sino en el polígono.

CLAVE C

Problemas Recreativos

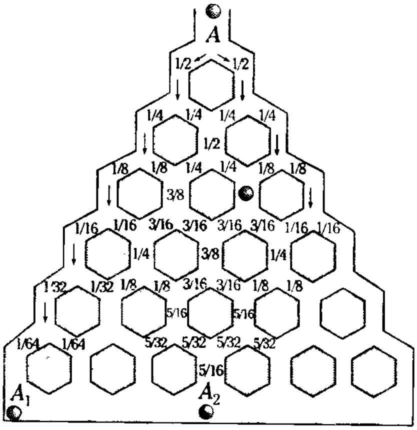
1. Si dejamos caer una bolita en este laberinto poligonal regular por el canal A, ¿cuál es la probabilidad de que alcance el ángulo inferior izquierdo A_1 y el canal central A_2?



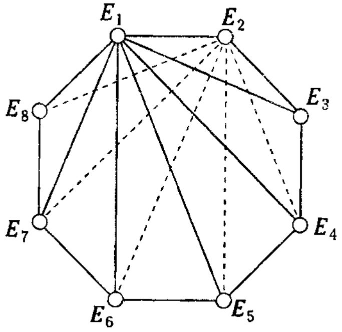
2. En un campeonato de fúlbito participan 16 equipos que se enfrentarán todos contra todos. Si en cada fecha todos juegan dos partidos, señale cuántas fechas se jugarán, cuántos partidos por fechas se disputarán y al final del campeonato, cuántos encuentros se habrán realizado.

Resolución 1

Como podemos apreciar en la figura la probabilidad en el primer caso es 1/64 y en el segundo caso es 5/16 ó 20/64.

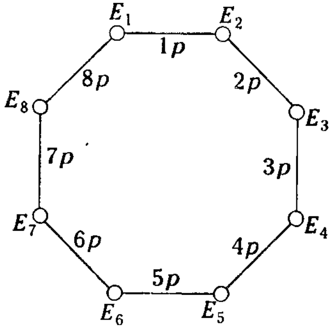


Resolución 2



Para resolver este problema nos apoyaremos en las fórmulas de los polígonos, donde E_i es un equipo. ($i=1, ..., 16$)

Si solo fueran 8 equipos el equipo E_1 tendrían que jugar en total 7 partidos ($n-1$), así también el equipo E_2, E_3... por lo tanto en total se tendrán que jugar 28 partidos $\frac{8(8-1)}{2}$, en general es: $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$, entonces con 16 equipos se tendrán que jugar $\frac{16(15)}{2}=120$ partidos de los cuales cada equipo jugará $16-1=15$ encuentros.



Con 8 equipos en la primera fecha se tendrán que disputar 8 partidos entonces con 16 equipos se disputaran 16 encuentros en la primera fecha. Como son 120 partidos se tendrán que jugar en 8 fechas 7 de dos partidos cada uno y 1 fecha con un solo partido por equipo.

- Se jugarán 8 fechas.
- Se disputarán 16 partidos salvo la última fecha en la que solo habrá 8 partidos.
- Al final se realizan 120 encuentros.

Problemas Propuestos

1. Dado un polígono convexo de n lados, donde n es par, calcule el número de diagonales trazadas desde los vértices impares.

A) n^2-2n-2 B) n^2-3n-3 C) $\frac{n}{4}(3n-11)$

D) $\frac{n}{8}(3n-10)$ E) $\frac{n}{4}(2n-7)$

2. Los ángulos interior y exterior de un polígono regular miden θ y $K\theta$ respectivamente. Si K toma su mayor valor entero, calcule el número de diagonales medias del polígono.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

3. Los puntos A, B, C, D, E, ... son los vértices de un polígono equiángulo. Si se ubica el punto P en la región exterior, tal que $\overline{PD}$ interseca a $\overline{BC}$, $m\sphericalangle PAB = m\sphericalangle PDC$ y $m\sphericalangle ABC = 2(m\sphericalangle APD)$, calcule la suma de las medidas de los ángulos interiores de dicho polígono.

A) 720° B) 180° C) 540°
D) 360° E) 1 080°

4. En un polígono equiángulo $ABCDEF$, se cumple que $AB = 8$, $BC = 4$ y $CD = 6$. Si por D se traza la $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{FE}$, calcule la distancia A a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

5. En un exágono convexo se trazan dos diagonales y una diagonal media, tal que no se intersequen (considere que los polígonos no tienen regiones interiores comunes). Calcule la suma del número de diagonales de dichos polígonos.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

6. Se tiene un pentágono $ABCDE$, tal que $\overline{AB}//\overline{CD}$, $\overline{BC}//\overline{ED}$, $AE = 2$, $CD = 5$ y $m\sphericalangle BCD + m\sphericalangle AED = 180°$. Calcule AB.

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1,5

7. En un octógono equiángulo $ABCDEFGH$, $2\sqrt{2}(AB) = 6(BC) = 3(FG) = 3\sqrt{2}(GH)$.
Si en $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ se ubican los puntos P, Q, R y S tal que $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ se intersecan perpendicularmente en L, calcule QR. Considere que $PL = 6$, $LS = 13$ y $LR = 12$.

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

8. Se tiene un polígono equiángulo $ABCDEF$.... en el cual se trazan las bisectrices interiores de los vértices B y E intersecándose en P. Si $m\sphericalangle BPE = 180° - \frac{m\sphericalangle BCD}{2}$, calcule el número de diagonales del polígono.

A) 20 B) 27 C) 35
D) 44 E) 54

9. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo interno mide $(q+4)$ veces la medida del ángulo exterior, y además se cumple que el número de diagonales es $36q$?

A) 22 B) 46 C) 47
D) 49 E) 24

10. En un polígono equilátero se conoce que desde 4 vértices consecutivos se pueden trazar 29 diagonales. Calcule el perímetro de la región poligonal equilátera, si uno de sus lados mide 6 cm.

A) 48 cm B) 54 cm C) 60 cm
D) 66 cm E) 72 cm

11. En un polígono regular, si se triplica el número de lados, la medida de cada ángulo interior aumenta en 24°. Calcule el número de diagonales de dicho polígono.

A) 20 B) 65 C) 44
D) 27 E) 35

12. Quince veces la medida del ángulo interior de un polígono equiángulo es igual al cuadrado de la medida de su ángulo exterior. Calcule el número de diagonales que se pueden trazar de 4 vértices consecutivos.

A) 14 B) 15 C) 17
D) 18 E) 20

13. En un polígono regular, si se duplica el número de lados, la medida de cada ángulo interno aumenta en 15°. Calcule el número de diagonales en el polígono.

A) 72 B) 64 C) 54
D) 48 E) 38

14. Los ángulos de un exágono convexo se encuentran en progresión aritmética. Calcule el mayor valor entero de la razón.

A) 22° B) 24° C) 23°
D) 25° E) 34°

15. En un polígono regular *ABCDEFG*..., $m\sphericalangle ACE=150°$. Calcule el número de diagonales

A) 247 B) 230 C) 209
D) 252 E) 529

16. El ángulo interior y el ángulo exterior de un polígono regular miden θ y $(K-1)\theta$, respectivamente. ¿Cuáles son los valores enteros que puede tener K para que el polígono exista?

A) 2; 3 B) 1; 2; 3; 4 C) 1; 2; 3; 4; 5
D) 1; 2 E) 1; 2; 3

17. Se tiene un polígono convexo de n lados y M diagonales, tal que $M>2n$. Calcule el menor valor entero de n.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

18. ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 38 diagonales desde 6 vértices consecutivos?

A) octágono
B) undecágono
C) nonágono
D) decágono
E) dodecágono

19. Cuánto debe medir uno de los ángulos de un polígono, si tiene 27 diagonales y todos sus ángulos interiores se encuentran en progresión aritmética.

A) 120° B) 130° C) 140°
D) 150° E) 160°

20. En un polígono convexo, reducimos a la tercera parte el número de lados, y las diagonales a 52. Calcule el número de diagonales trazadas desde 4 vértices consecutivos del polígono inicial.

A) 21 B) 25 C) 29
D) 33 E) 37

1	D
2	C
3	A
4	B
5	E
6	C
7	A
8	C
9	E
10	D
11	E
12	C
13	C
14	C
15	D
16	E
17	D
18	B
19	C
20	D

Claves

Capítulo VIII

Circunferencias

El Templo del anfiteatro en Caral fue denominado así por presentar una plaza circular con gradería. Es probable que ahí se hayan celebrado ceremonias públicas.

Circunferencias

OBJETIVOS

- Conocer las propiedades y los elementos que se asocian a la circunferencia.
- Estudiar las propiedades de los ángulos que se pueden trazar a la circunferencia.
- Aplicar de manera adecuada las propiedades de circunferencia.
- Diferenciar las posiciones relativas de dos circunferencias coplanares.

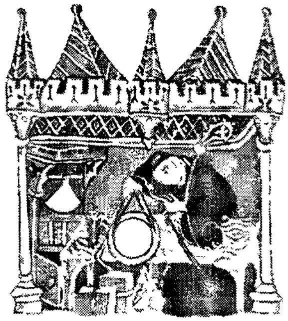
INTRODUCCIÓN

Al observar el borde de la Luna o el Sol, el hombre tuvo las primeras nociones de circunferencia cuando corta una naranja o un limón el contorno de la sección plana tiene forma de circunferencia y que equidista del centro, esto llevo a conocer las primeras propiedades de ella.

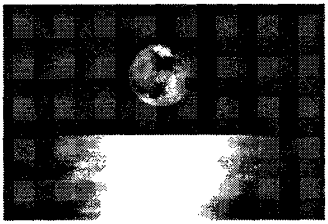
Al cortar un limón y una naranja se muestra una distribución radial, donde el borde se asemeja a una circunferencia.

Por historia sabemos que hace más de 2 000 años a.n.e. se descubrió la rueda. Los egipcios, aprovechando que sus terrenos eran llanos, desplazaban las rocas para sus construcciones usando troncos de árboles que luego hacían rodar. Posiblemente, este fenómeno de rodadura inspiró al hombre a crear la rueda.

En la actualidad, sabemos que la rueda es un objeto muy importante para el transporte terrestre, de ahí la necesidad del estudio de la circunferencia. Obviamente, sus propiedades también servirán para estudiar otras figuras, tales como los polígonos regulares.



***Abad y matemático.** Uno de los pocos matemáticos medievales en Inglaterra fue Ricardo de Wallingford, profesor en Oxford y abad de un monasterio. En la imagen, se le ve trabajando con un compás rudimentario.*



La Luna presenta forma de circunferencia.

DEFINICIÓN

Es el conjunto de todos los puntos de un plano, cuyas distancias a un punto dado de dicho plano son iguales.

En la figura 8.1, los puntos A, B, C, D, E y O son coplanares (en el plano $\mathbb{P}$) y la distancia de los puntos $A, B, C, D,$ y E al punto O es r.

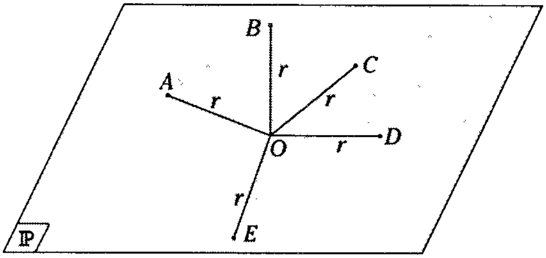
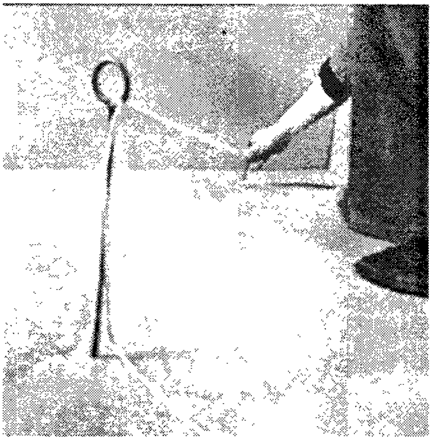


Figura 8.1



Compas hecho con cordel.

Trazado de un círculo con listón perforado.

La unión de todos los puntos del plano $\mathbb{P}$ cuya distancia a O es r se llama circunferencia.

El punto O se llama centro y r se llama radio. Se designará a la circunferencia indicando su centro y el radio como se muestra en la figura 8.2.

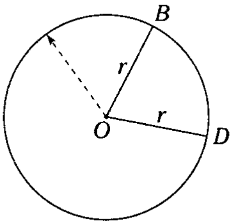


Figura 8.2

Observación

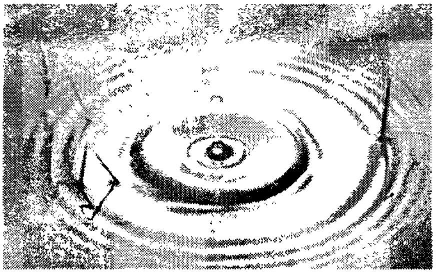
El conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia a O es menor que el radio se denomina **interior** a la circunferencia.
El conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia a O es mayor que el radio se denomina **exterior** a la circunferencia.
Al segmento que tiene por extremos el centro de la circunferencia y cualquier punto de la circunferencia se llama segmento radial, o simplemente radio de la circunferencia.

El compás, instrumento simple para trazar circunferencias.

ELEMENTOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

CUERDA

Se llama cuerda de una circunferencia al segmento que tiene por extremos dos puntos de la circunferencia. Toda cuerda que contenga al centro de la circunferencia se denomina diámetro.



Las ondas expansivas al caer una gota de agua forman circunferencias concéntricas.

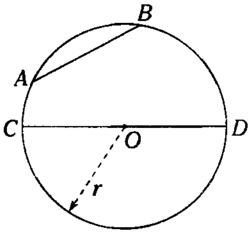
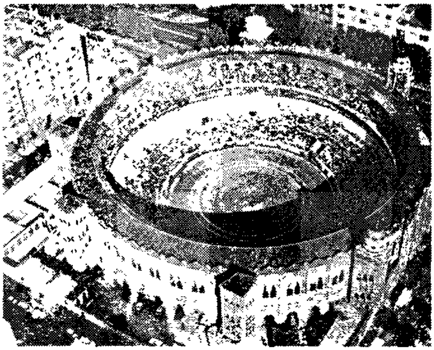


Figura 8.3

En la figura 8.3, se tiene una circunferencia de centro O y radio r.
$\overline{AB}$: cuerda de extremos A y B ($AB < 2r$)
$\overline{CD}$: diámetro de extremos C y D ($CD = 2r$)



La plaza de toros en Barcelona, en una vista aérea, nos muestra una distribución circunferencial.

Observación

A la recta que contiene al diámetro se suele llamar recta diametral.

ARCO

Es una porción de la circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.

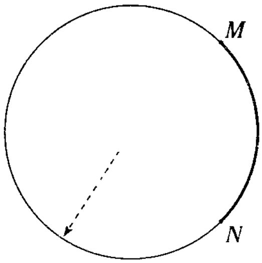
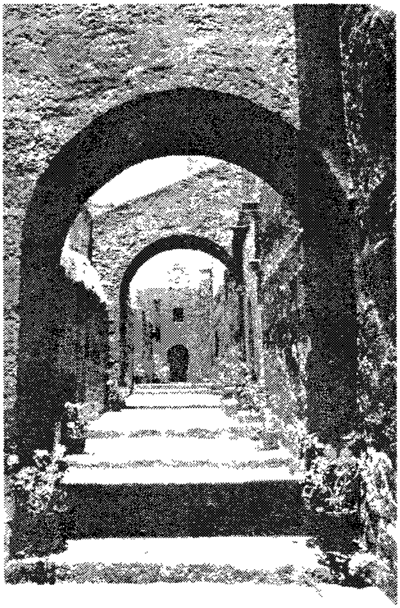


Figura 8.4

En la figura 8.4, M y N son los extremos de dos arcos.

Notación

Arco MN: $\overset{\frown}{MN}$ (Se lee: arco MN).



Los portales del convento Santa Catalina en Arequipa nos muestra arcos de circunferencias.

POSICIONES RELATIVAS ENTRE UNA CIRCUNFERENCIA Y UNA RECTA EN EL PLAN

Una circunferencia y una recta coplanares pueden ocupar tres posiciones que se excluyen mutuamente.

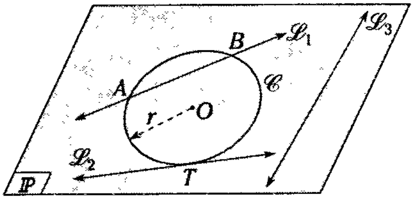
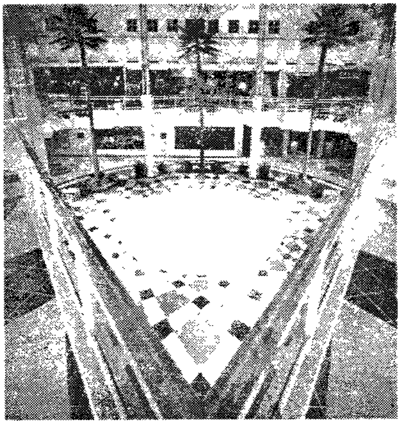


Figura 8.5

En la figura 8.5, las rectas $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ y la circunferencia de centro O con radio r están contenidas en el plano $\mathbb{P}$.



Los acabados de diseños arquitectónicos utilizan a la circunferencia como un elemento del decorado que armoniza con líneas rectas.

RECTA SECANTE

Es aquella recta que interseca a la circunferencia en dos puntos.

En la figura 8.5, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \cap \mathscr{C} = \{A, B\}$.

Además $\overline{AB}$: cuerda

RECTA TANGENTE

Es aquella recta que interseca a la circunferencia en un solo punto. El punto de intersección se denomina punto de tangencia.

En la figura 8.5, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \cap \mathscr{C} = \{T\}$ y T es llamado punto de tangencia.

RECTA EXTERIOR

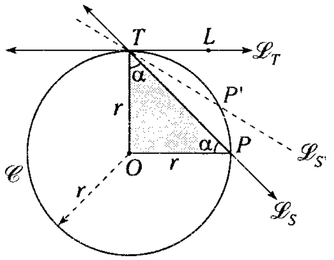
Es aquella recta que tiene todos sus puntos exteriores a la circunferencia.

En la figura 8.5, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \cap \mathscr{C} = \phi$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$: recta exterior.

Teorema

Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio (segmento radial) en el punto de tangencia.

Demostración



(a)

En la figura 8.6(a), $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_T}$ es tangente a $\mathscr{C}$ en T.

$\triangle TOP$: isósceles $\rightarrow$ $\alpha = 90° - \dfrac{m\measuredangle TOP}{2}$

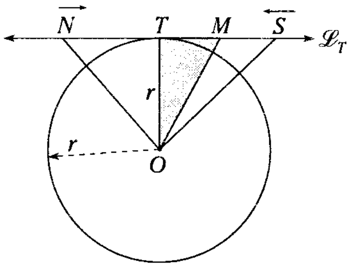
Se observa que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_S'}$ es secante en P' y T a $\mathscr{C}$.

En el límite cuando P' se aproxima a T

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_{S'}}$ tiende a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_T}$ $\rightarrow$ $m\measuredangle OTL = 90°$

$\therefore$ $\boxed{\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_T}}$

Otra forma de demostrar



(b)

Figura 8.6

En la figura 8.6 (b), $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_T}$ es tangente a la circunferencia. Se observa $OS > r$, $OM > r$, $ON > r$ y así cualquier otro punto distinto de T que se ubica en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_T}$ cumplirá que es mayor que r, entonces r es la longitud del menor segmento trazado de O a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_T}$.

$\rightarrow$ $m\measuredangle OTS = 90°$

$\therefore$ $\boxed{\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_T}}$

Nota

Sea d la distancia del centro de una circunferencia de radio r a una recta dada coplanar a dicha circunferencia, entonces

$d < r$ $\rightarrow$ la recta es secante.

$d = r$ $\rightarrow$ la recta es tangente.

$d > r$ $\rightarrow$ la recta es exterior.

ÁNGULOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

ÁNGULO CENTRAL

Es aquel ángulo cuyo vértice es el centro de una circunferencia.

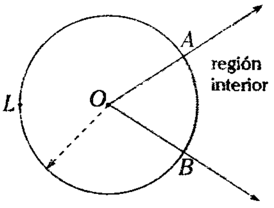


Figura 8.7

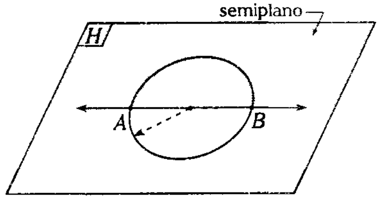
En la figura 8.7, $\sphericalangle AOB$: ángulo central.

Nota

El conjunto de puntos de la circunferencia interiores al ángulo central se llama arco correspondiente al ángulo.

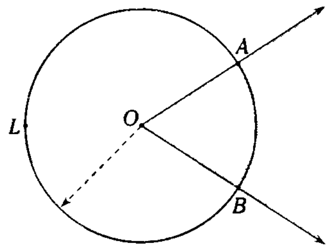
En la figura 8.7, $\overset{\frown}{AB}$: arco correspondiente al $\sphericalangle AOB$.

Observación



(a)

Sean $\overline{AB}$ diámetro de una circunferencia y H cualquiera de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AB}$, se llama semicircunferencia a la unión de A, B y todos los puntos de la circunferencia que están en uno de los semiplanos.



(b)

Figura 8.8

De la figura 8.8(b) $\overset{\frown}{AB}$: arco menor y $\overset{\frown}{ALB}$: arco mayor.

Dado que A y B no son extremos del mismo diámetro de una circunferencia de centro O, se llama arco menor de la misma a la unión de A, B y todos los puntos de la circunferencia que están en la región interior del $\sphericalangle AOB$, y se llama arco mayor a la unión de A y B y todos los puntos de la circunferencia que están en el exterior.

Se llama arcos en general a los arcos menores, semicircunferencias y arcos mayores.

Si L es un punto distinto de A y B al arco se indicará $\overset{\frown}{ALB}$ o $\overset{\frown}{BLA}$.

Definición

La medida de un arco AB es igual a:

- la medida del ángulo central correspondiente, si $\overset{\frown}{AB}$ es un arco menor.
- 180°, si $\overset{\frown}{AB}$ es una semicircunferencia.
- 360° menos la medida del arco menor correspondiente, si es un arco mayor.

Notación

Para la medida en grados sexagesimales de un arco AB cualquiera, se indicará como $m\overset{\frown}{AB}$.

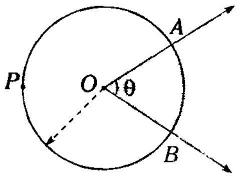


Figura 8.9

$\sphericalangle AOB$: ángulo central

Por definición $m\sphericalangle AOB = m\overset{\frown}{AB}$

$\rightarrow\ m\overset{\frown}{AB} = \theta$

$\rightarrow\ m\overset{\frown}{APB} = 360° - \theta$

Nota

A veces es conveniente considerar a la circunferencia como un arco, aunque no tenga extremos. En este caso se considera su medida 360°.

ÁNGULO INSCRITO

Es aquel ángulo en el que su vértice se ubica en la circunferencia y sus lados contienen dos cuerdas. El arco cuyos puntos son interiores al ángulo inscrito, es el arco correspondiente.

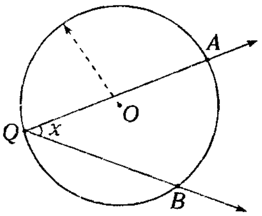


Figura 8.10

En la figura 8.10

$\sphericalangle AQB$: ángulo inscrito

$\overset{\frown}{AB}$: arco correspondiente al $\sphericalangle AQB$

Teorema

La medida del ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del arco correspondiente.

En la figura $x = \dfrac{m\overset{\frown}{AB}}{2}$

Demostración

Consideremos los tres casos siguientes:

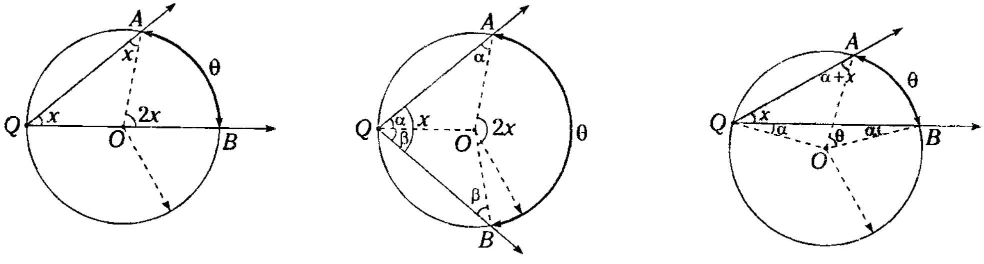


Figura 8.11

$\overline{QB}$: diámetro; $m\overset{\frown}{AB} = \theta$

$\triangle QOA$: isósceles

Por $\sphericalangle$central: $2x = \theta \rightarrow x = \dfrac{\theta}{2}$

$\triangle OQB$ y $\triangle OQA$: isósceles; $x = \alpha + \beta$

$\sphericalangle AQBO$: $m\sphericalangle AOB = x + \alpha + \beta = 2x$

Por $\sphericalangle$central: $2x = \theta \rightarrow x = \dfrac{\theta}{2}$

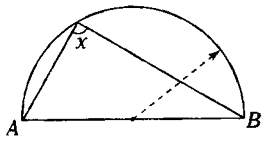
$\triangle OQB$ y $\triangle OQA$: isósceles

$\bowtie QAOB$: $x + \alpha + x = \theta + \alpha$

$\rightarrow x = \dfrac{\theta}{2}$

Observación

–

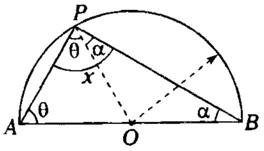


Si $\overline{AB}$: diámetro.

Se cumple

$$x = 90°$$

Demostración



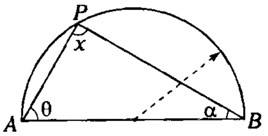
En la figura

$x = \alpha + \theta$

$\triangle APB$: $x + \alpha + \theta = 180°$

$\therefore\ x = 90°$

Otra forma de demostrar



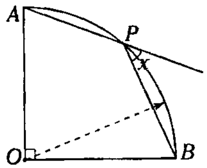
En la figura, por ángulo inscrito

$m\overset{\frown}{AP} = 2\alpha$; $m\overset{\frown}{PB} = 2\theta$

$2\alpha + 2\theta = 180° \rightarrow \alpha + \theta = 90°$

$\triangle APB$: $\alpha + \theta + x = 180°\ \therefore\ x = 90°$

–



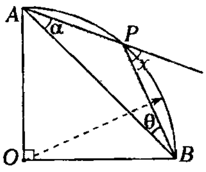
Si $\overset{\frown}{AB}$: cuadrante ($m\overset{\frown}{AB} = 90°$)

P esta entre A y B

Se cumple

$$x = 45°$$

Demostración



$\triangle APB$: $x = \alpha + \theta$

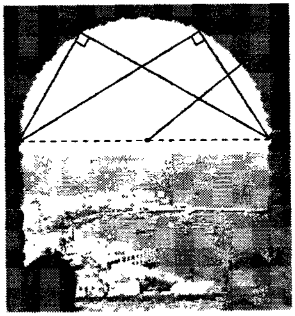
Por ángulo inscrito

$m\overset{\frown}{PB} = 2\alpha$; $m\overset{\frown}{AP} = 2\theta$

$\rightarrow\ 2\alpha + 2\theta = 90°$

$\rightarrow\ \alpha + \theta = 45°$

$\therefore\ x = 45°$



La parte superior del portal es una semicircunferencia, en donde los ángulos inscritos son rectos.

ARCO CAPAZ

El conjunto de todos los puntos de un plano, que son vértices de ángulos que tienen igual medida y sus lados contienen a dos puntos fijos (En la figura 8.12, A y B por ejemplo), es un arco de circunferencia llamado arco capaz.

Por ángulo inscrito

$$m\measuredangle APB = m\measuredangle ASB = \frac{m\overset{\frown}{AB}}{2}$$

$\overset{\frown}{APB}$: Arco capaz del ángulo de medida α.

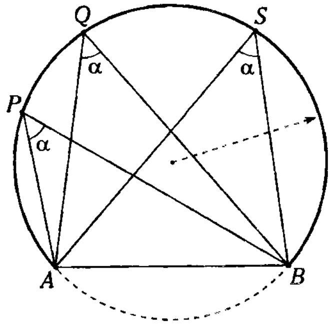
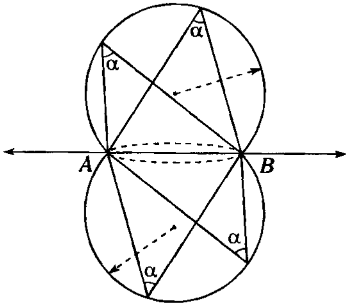


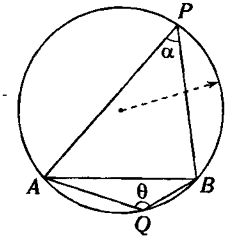
Figura 8.12

Observación



(a)

Para cada semiplano limitado por $\overleftrightarrow{AB}$ se puede construir un arco capaz en la figura 8.13(a) se muestran arcos capaces del ángulo de medida α.



(b)

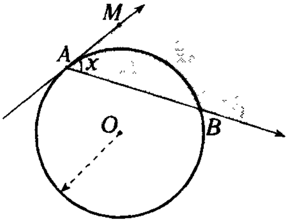
Figura 8.13

$\overset{\frown}{APB}$: Arco capaz del ángulo de medida α.
$\overset{\frown}{AQB}$: Arco capaz del ángulo de medida θ.
$\measuredangle AQB$ y $\measuredangle APB$ son suplementarios.
Es decir $\alpha+\theta = 180°$

El arco iris es una porción de circunferencia que la naturaleza nos muestra frecuentemente.

ÁNGULO SEMIINSCRITO

Es aquel ángulo cuyo vértice se ubica en la circunferencia y sus lados están determinados por una **tangente** y una **secante**. El arco, cuyos puntos son interiores al ángulo semiinscrito, es correspondiente al ángulo.



(a)

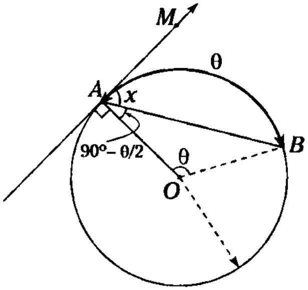
En la figura 8.14(a), A es punto de tangencia
$\measuredangle MAB$: Ángulo semiinscrito.
$\overset{\frown}{AB}$: Arco correspondiente al $\measuredangle MAB$.

Teorema

La medida del ángulo semiinscrito es igual a la mitad de la medida del arco correspondiente.

En la figura 8.14(b): $\boxed{x = \dfrac{m\overset{\frown}{AB}}{2}}$

Demostración



(b)

Figura 8.14

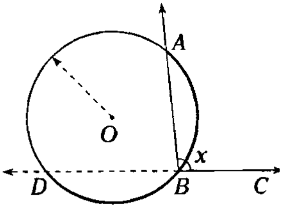
Por teorema $\overline{OA} \perp \overline{AM}$, por $\measuredangle$ central: $m\measuredangle AOB = \theta$

$\triangle AOB$ es isósceles: $m\measuredangle OAB = 90° - \dfrac{\theta}{2}$

En A: $\boxed{x = \dfrac{\theta}{2}}$

ÁNGULO EXINSCRITO

Es aquel ángulo adyacente y suplementario a un ángulo inscrito.



(a)

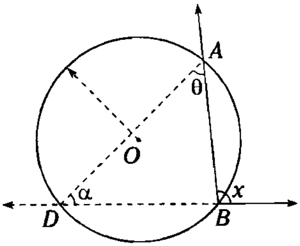
En la figura 8.15(a) para el ángulo inscrito ABD: $\measuredangle ABC$ es ángulo exinscrito.

Teorema

La medida del ángulo exinscrito es igual a la semisuma de las medidas de los arcos correspondientes por dicho ángulo.

En la figura 8.15(a): $$x=\frac{m\overset{\frown}{AB}+m\overset{\frown}{BD}}{2}$$

Demostración



(b)

En la figura 8.15(b): $x=\alpha+\theta$ (I)

Por ángulo inscrito

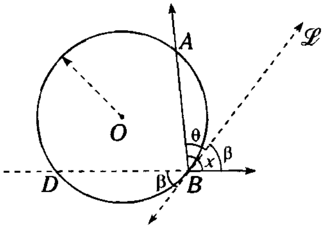
$$\alpha=\frac{m\overset{\frown}{AB}}{2}$$

$$\theta=\frac{m\overset{\frown}{BD}}{2} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

$$\therefore \quad x=\frac{m\overset{\frown}{AB}+m\overset{\frown}{BD}}{2}$$

Otra forma de demostrar



(c)

Figura 8.15

Se traza por B la recta tangente $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

Por ángulo semiinscrito

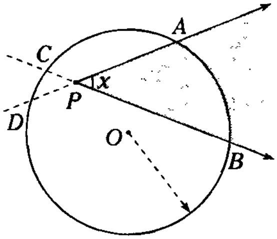
$$\theta=\frac{m\overset{\frown}{AB}}{2} \quad \text{y} \quad \beta=\frac{m\overset{\frown}{BD}}{2} \qquad \text{(I)}$$

En B: $x=\beta+\theta$ (II)

(I) en (II): $$x=\frac{m\overset{\frown}{AB}+m\overset{\frown}{BD}}{2}$$

ÁNGULO INTERIOR

Es aquel ángulo cuyo vértice es un punto interior a una circunferencia. (El ángulo central es un caso particular).



(a)

En la figura 8.16(a), P: Punto interior

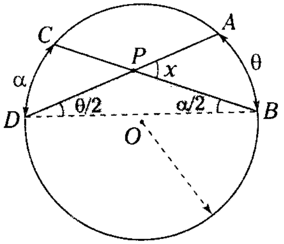
$\measuredangle APB$: ángulo interior.

Teorema

La medida del ángulo interior es igual a la semisuma de las medidas de los arcos correspondientes por dicho ángulo y el ángulo opuesto por el vértice. En la figura 8.16(b).

$$x=\frac{m\overset{\frown}{AB}+m\overset{\frown}{CD}}{2}$$

Demostración



(b)

Figura 8.16

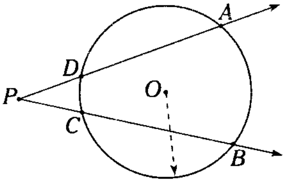
Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle ADB=\dfrac{\theta}{2}$; $m\sphericalangle CBD=\dfrac{\alpha}{2}$

$\triangle DPB$: $x=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\alpha}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{x=\frac{m\overset{\frown}{AB}+m\overset{\frown}{CD}}{2}}$$

ÁNGULO EXTERIOR

Es aquel ángulo cuyo vértice es un punto exterior a una circunferencia y sus lados pueden ser: dos secantes, una secante y tangente, o dos tangentes a dicha circunferencia.

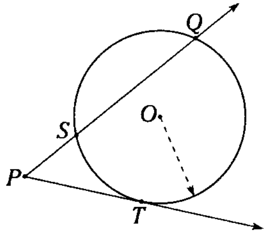


(a)

En la figura 8.17(a), P: punto exterior

$\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$: secantes a la circunferencia

$\sphericalangle BPA$: ángulo exterior.



(b)

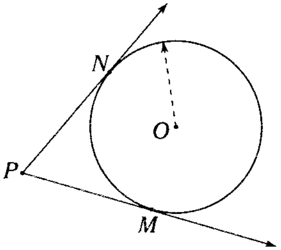
T : punto de tangencia

P : punto exterior

$\overrightarrow{PQ}$: secante

$\overrightarrow{PT}$: tangente en T

$\sphericalangle TPQ$: ángulo exterior



(c)

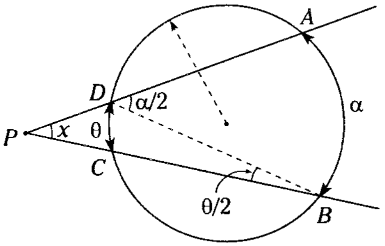
M y N : puntos de tangencia

$\sphericalangle NPM$: ángulo exterior

Teorema

La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos correspondientes por dicho ángulo.

Demostración



(d)

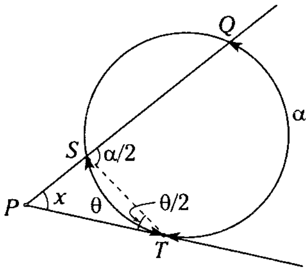
θ y α son medidas de los arcos correspondientes al ángulo APB.

Por ángulo inscrito $m\sphericalangle CBD=\dfrac{\theta}{2}$; $m\sphericalangle BDA=\dfrac{\alpha}{2}$

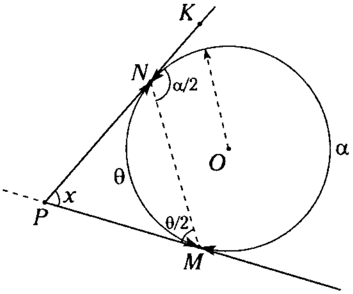
Por medidas de ángulo exterior al $\triangle PDB$

$$\frac{\alpha}{2}=x+\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{x=\frac{\alpha-\theta}{2}}$$



(e)



(f)

Figura 8.17

Por ángulo semiinscrito

$$m\measuredangle PTS = \frac{\theta}{2}$$

Por ángulo inscrito

$$m\measuredangle TSQ = \frac{\alpha}{2}$$

$\triangle PST$

$$x + \frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{\alpha - \theta}{2}}$$

Por ángulo semiinscrito

$$m\measuredangle PMN = \frac{\theta}{2}\ ;\ m\measuredangle KNM = \frac{\alpha}{2}$$

$\triangle PMN$: $x + \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$

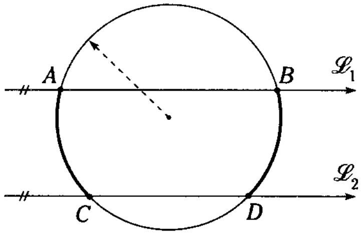
$$\therefore \boxed{x = \frac{\alpha - \theta}{2}}$$

También $\triangle PMN$ es isósceles. Además, se cumple

$$\boxed{x + \theta = 180°}$$

PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA

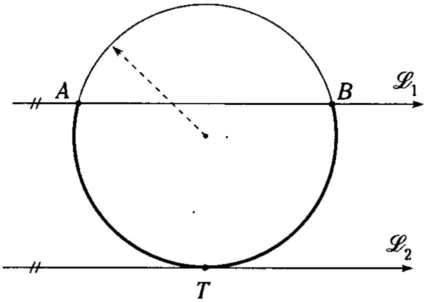
I. Dos rectas paralelas, secantes a una circunferencia determinan arcos de igual medida (arcos congruentes).



(a)

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \rightarrow \boxed{m\widehat{AC} = m\widehat{BD}}$

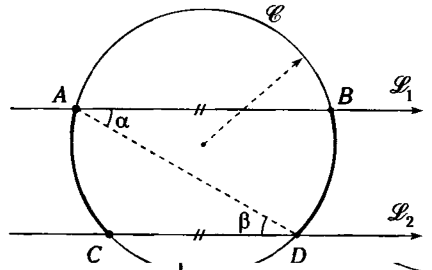
Además, en este caso



(b)

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \rightarrow \boxed{m\widehat{AT} = m\widehat{TB}}$

Demostración



$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$

$D = R$

aso L.L.L.)

$= \alpha$

(∢central)

central)

rior se demuestra

es $AB = CD$.

cuerda de una

centro de dicha

O: centro de 𝒞.

(c)

Figura 8.18

∢BAD: ángulo inscrito en 𝒞

$$\rightarrow\ m∢BAD = \alpha = \frac{m\widehat{BD}}{2}$$

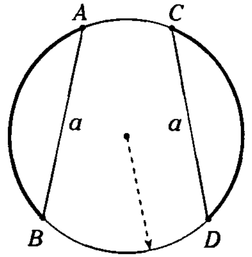
∢ADC: ángulo inscrito en 𝒞

$$\rightarrow\ m∢ADC = \beta = \frac{m\widehat{AC}}{2}$$

Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \rightarrow\ \alpha = \beta$

$$\therefore\ \boxed{m\widehat{BD} = m\widehat{AC}}$$

II. Dos cuerdas de igual medida determinan en una misma circunferencia, arcos de igual medida y viceversa.

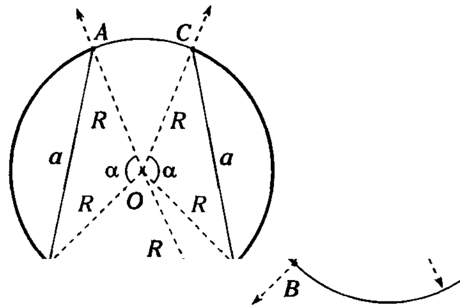


(a)

Si $AB=CD$

$$\rightarrow\ \boxed{m\widehat{AB} = m\widehat{CD}}$$

Demostración



(b)

Figura 8.19

Si $AB = CD = a$, trazamos $\overline{O}$

$\rightarrow\ OA = OB = OC = O$

$\therefore\ \triangle AOB \cong \triangle COD$ (ca

$\rightarrow\ m∢AOB = m∢COD$

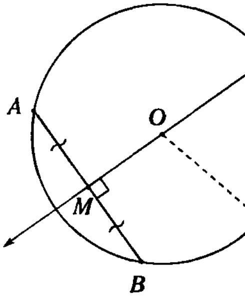
$\therefore\ m\widehat{AB} = m∢AOB = \alpha$

$m\widehat{CD} = m∢COD = \alpha$ (∢

$$\therefore\ \boxed{m\widehat{AB} = m\widehat{CD}}$$

Análogamente al caso anter que si $m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$, entonc

III. La mediatriz de toda circunferencia contiene al circunferencia.

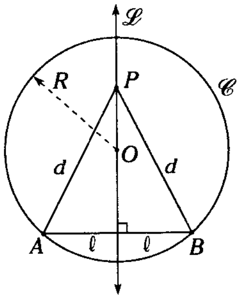


(a)

Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: mediatriz de $\overline{AB}$ y

$$\rightarrow\ \boxed{O \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}}$$

Demostración



(b)

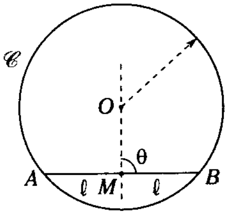
Figura 8.20

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AB}$, entonces todo punto que equidista de A y B pertenece a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, así $PA = PB = d$.

Si O es centro de $\mathscr{C} \rightarrow OA = OB = R$, es decir, O equidista de A y B, O pertenece a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

$$\therefore \boxed{O \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}}$$

Observación



Si $AM = MB = \ell$

O: centro de $\mathscr{C}$

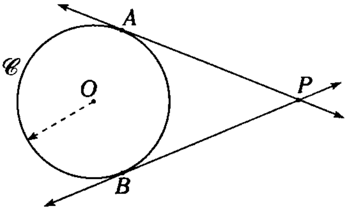
$\rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AB}$

$$\therefore \boxed{\theta = 90^\circ}$$

Figura 8.21

Postulado

Desde un punto exterior a una circunferencia solo se pueden trazar dos rectas tangentes a dicha circunferencia.



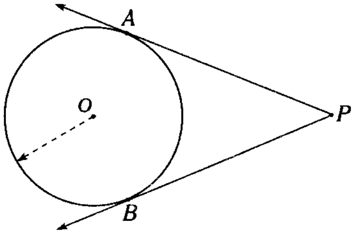
(a)

P : punto exterior a $\mathscr{C}$.

$\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$: rectas tangentes a $\mathscr{C}$.

A y B : puntos de tangencia.

IV. Los segmentos tangentes trazados desde un punto exterior a una misma circunferencia son congruentes.

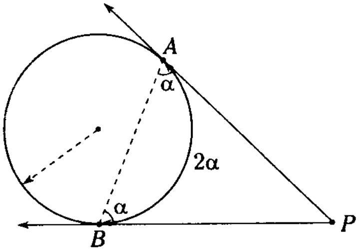


(b)

Sean A y B puntos de tangencia

$$\therefore \boxed{PA = PB}$$

Demostración



(c)

Figura 8.22

$\measuredangle PAB$: ángulo semiinscrito

$$\rightarrow m\measuredangle PAB = \frac{m\widehat{AB}}{2} = \alpha$$

$\measuredangle PBA$: ángulo semiinscrito

$$\rightarrow m\measuredangle PBA = \frac{m\widehat{AB}}{2} = \alpha$$

$\triangle APB$: isósceles

$$\therefore \boxed{PA = PB}$$

Observación

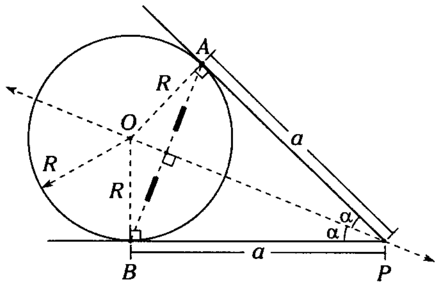


Figura 8.23

$OA = OB = R$

y como $PA = PB = a$

el ⏢$AOBP$: trapezoide simétrico

→ $\overrightarrow{PO}$: Bisectriz del ∢APB

→ $\overleftrightarrow{PO}$: Mediatriz del $\overline{AB}$

Axioma o teorema

Si dos circunferencias se intersecan, ha de ser en dos puntos. Euclides basó esta afirmación en que intuitivamente parece que ello es evidente; pero en una exposición deductiva de la Geometría, una afirmación de esta clase debe enunciarse en cuanto axioma (postulado), o demostrarse en cuanto teorema.

Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos circunferencias de centros O_1, O_2 y radios a y b respectivamente donde $O_1O_2 = c$, si $a < b + c$; $b < a + c$ y $c < a + b$; entonces $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ se intersecan en dos puntos, los cuales están en lados opuestos a la recta que pasa por los centros.

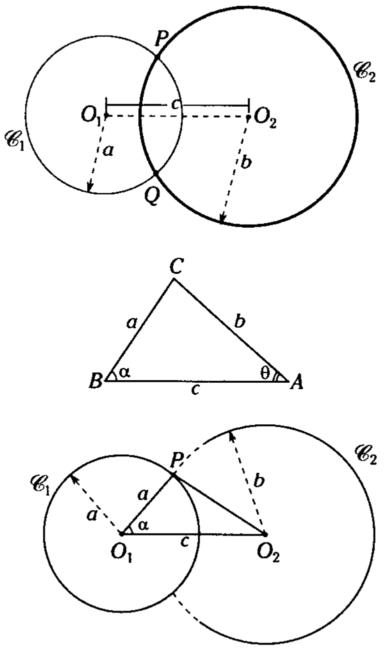


Figura 8.24

Demostración. De $(a < b + c, b < a + c, c < a + b)$.

Por el teorema de existencia de un triángulo, existe un triángulo ABC con lados de longitud a, b y c.

Sea m∢$CBA = \alpha$ y m∢$CAB = \theta$

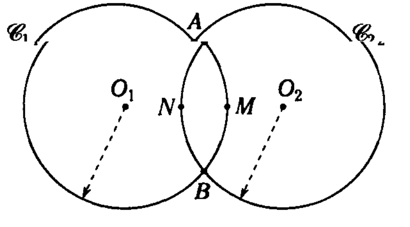
A un lado de la recta O_1O_2 ubicamos un punto P sobre $\mathscr{C}_1$, de tal manera que m∢PO_1O_2=m∢CBA=α (A en el semiplano superior determinado por $\overleftrightarrow{O_1O_2}$). Por el teorema L.A.L. de la congruencia de triángulos, podemos asegurar que $\triangle O_1PO_2 \cong \triangle BCA$, luego $PO_2 = CA = b$.

De esta manera concluimos que P también pertenece a $\mathscr{C}_2$ (ya que $\mathscr{C}_2$ es el conjunto de puntos del plano que dista b unidades respecto de O_2).

En forma análoga sea Q un punto de $\mathscr{C}_1$ ubicado en el semiplano inferior determinado por $\overleftrightarrow{O_1O_2}$, tal que m∢$QO_1O_2$ = m∢$CBA = \alpha$.

Entonces el $\triangle O_1QO_2 \cong \triangle BCA$ (Teorema L.A.L.), luego, $QO_2 = CA = b$ y de esta manera hemos demostrado que Q también pertenece a $\mathscr{C}_2$. Por lo tanto, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ se intersecan en dos puntos (P y Q).

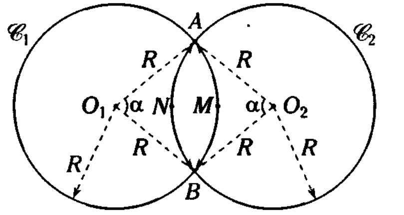
V. Dos circunferencias congruentes que se intersecan determinan dos arcos congruentes.



(a)

Si $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2 \rightarrow m\widehat{AMB} = m\widehat{ANB}$

Demostración



(b)

Figura 8.25

Si $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$, entonces sus radios son de igual longitud, por lo tanto

$O_1A = O_1B = R$

$O_2A = O_2B = R$

Por lo tanto O_1AO_2B es un rombo

$\rightarrow \; m\measuredangle AO_1B = m\measuredangle AO_2B$

$\therefore \; m\widehat{AMB} = m\widehat{ANB}$

Mirador de Yanahuara (Arequipa), compuesto por arcos de circunferencia.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS COPLANARES

CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES

Dos circunferencias son exteriores si no se intersecan y sus regiones interiores son conjuntos disjuntos.

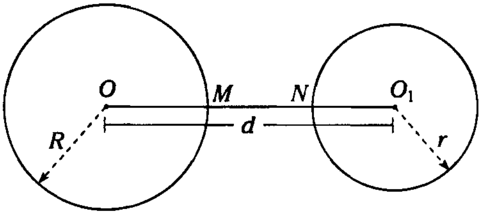
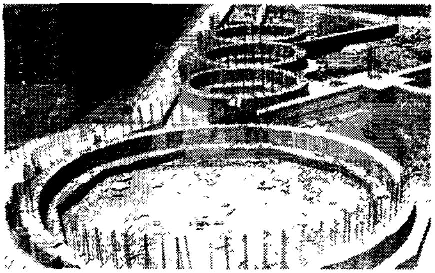


Figura 8.26

Sea $OO_1 = d$

$\rightarrow \; d = OM + MN + NO_1 = R + MN + r$

$\therefore \; d > R + r$



Las bases de edificaciones circulares nos muestra circunferencias exteriores.

CIRCUNFERENCIAS SECANTES

Dos circunferencias son secantes si tienen al menos un punto en común.

Tangentes exteriores

Si tiene solo un punto en común y sus regiones interiores son conjuntos disjuntos.

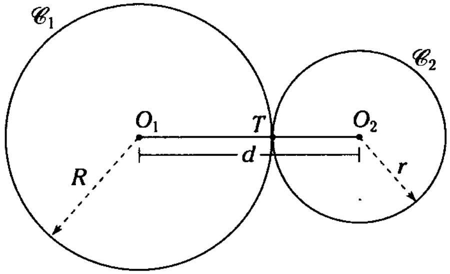


Figura 8.27

$\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{T\}$

T es punto de tangencia

$O_1T = R;\ O_2T = r;\ O_1O_2 = d$

$\rightarrow\ d = R + r$

Teorema

Si las circunferencias $\mathscr{C}_1$, radio R y $\mathscr{C}_2$, radio r son tangentes exteriores, afirmamos que los centros y el punto de tangencia son colineales.

Secantes propiamente dichos (secantes)

Si tienen dos puntos en común.

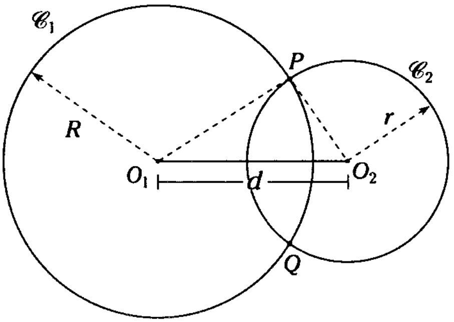


Figura 8.28

$\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{P;\ Q\}$

Sea $R > r$, entonces en el $\triangle O_1PO_2$

$O_1P = R;\ O_2P = r;\ O_1O_2 = d$

$\rightarrow\ R - r < d < R + r$

Ángulo determinado por dos circunferencias secantes

Se denomina así al ángulo formado por las rectas tangentes trazadas a ambas circunferencias en uno de sus puntos comunes.

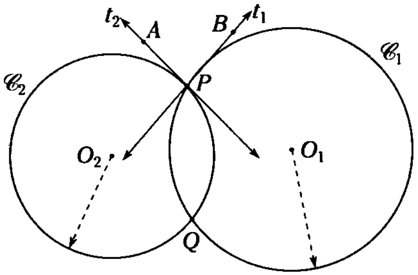


Figura 8.29

$\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{P, Q\}$

$\overleftrightarrow{t_1}$: recta tangente a $\mathscr{C}_1$ en P.

$\overleftrightarrow{t_2}$: recta tangente a $\mathscr{C}_2$ en P.

$\sphericalangle APB$: ángulo formado por $\overleftrightarrow{t_1}$ y $\overleftrightarrow{t_2}$

$\sphericalangle APB$: ángulo determinado por $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Circunferencias ortogonales

Son dos circunferencias secantes, donde la medida del ángulo determinado por éstas es 90°.

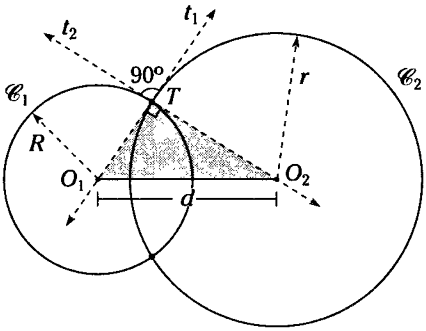


Figura 8.30

$\overleftrightarrow{t_1}$ tangente a $\mathscr{C}_2$; $\overleftrightarrow{t_2}$ tangente a $\mathscr{C}_1$

Si $\overleftrightarrow{t_1} \perp \overleftrightarrow{t_2}$ entonces

$\overleftrightarrow{t_2}$ es normal de $\mathscr{C}_2$ y

$\overleftrightarrow{t_1}$ es normal de $\mathscr{C}_1$

$(O_1 \in \overleftrightarrow{t_1}; O_2 \in \overleftrightarrow{t_2})$

$O_1T = R$, $O_2T = r$, $O_1O_2 = d$ y

$m\sphericalangle O_1TO_2 = 90°$

$\rightarrow \; d = \sqrt{R^2 + r^2}$

Tangentes interiores

Si tienen un solo punto en común y una de las regiones interiores esta contenida en la región interna de la otra.

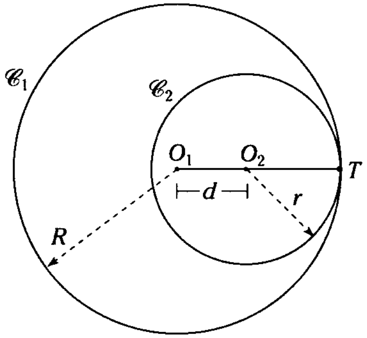


Figura 8.31

$\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{T\}$

T: punto de tangencia

Sea $R > r$

$O_1T = R$; $O_2T = r$; $O_1O_2 = d$

$\rightarrow \; d = R - r$

Teorema

Si las circunferencias $\mathscr{C}_1$ de radio R y $\mathscr{C}_2$ de radio r son tangentes interiores, entonces los centros y el punto de tangencia son colineales.

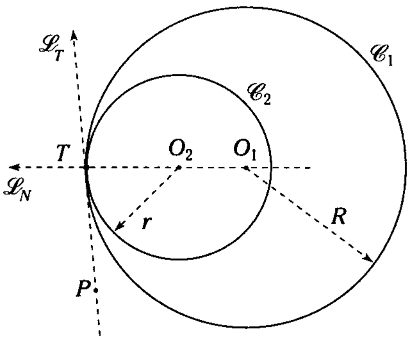


Figura 8.32

Del postulado de la tangente común a dos curvas tangentes.

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_T}$ tangente a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en T, entonces

$m\sphericalangle O_1TP = 90°$ y

$m\sphericalangle O_2TP = 90°$

$\therefore \; m\sphericalangle PTO_1 = m\sphericalangle PTO_2 = 90°$

entonces $O_1 \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}_N}$ y $O_2 \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}_N}$

Por lo tanto O_1, O_2 y T son colineales.

CIRCUNFERENCIA INTERIOR (interiores)

Una circunferencia es interior a otra, si está contenida en la región interior de la otra y no se intersecan.

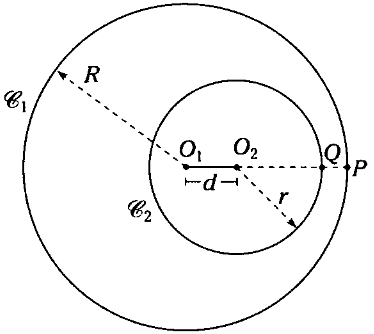


Figura 8.33

Sea $R > r$ y $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{\}$

$\mathscr{C}_2$ es interior a $\mathscr{C}_1$

$O_1P = R;\ O_2Q = r;\ O_1O_2 = d$

$O_1P = O_1O_2 + O_2Q + QP$

entonces

$O_1O_2 = (R - r) - (QP)$

$\therefore\ d < R - r$

CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS

Dos circunferencias son concéntricas si tienen el mismo centro.

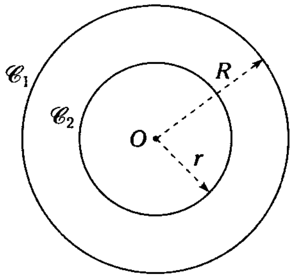
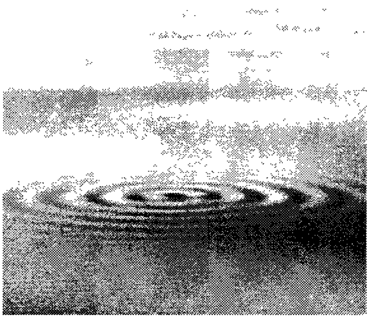


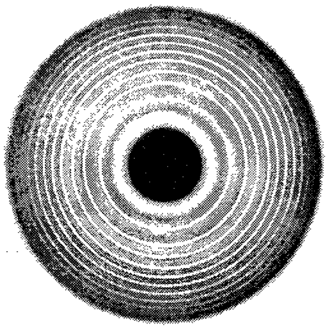
Figura 8.34

En la figura 8.34, $\mathscr{C}_2$ es interior a $\mathscr{C}_1$. Sea d la distancia entre los centros de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

$\rightarrow\ d = 0$



El desplazamiento de ondas de agua en un lago ocurre a través de circunferencias concéntricas.



Un rayo de luz en un corte transversal muestra una distribución de anillos concéntricos.

RECTAS TANGENTES COMUNES A DOS CIRCUNFERENCIAS

Tangente común exterior

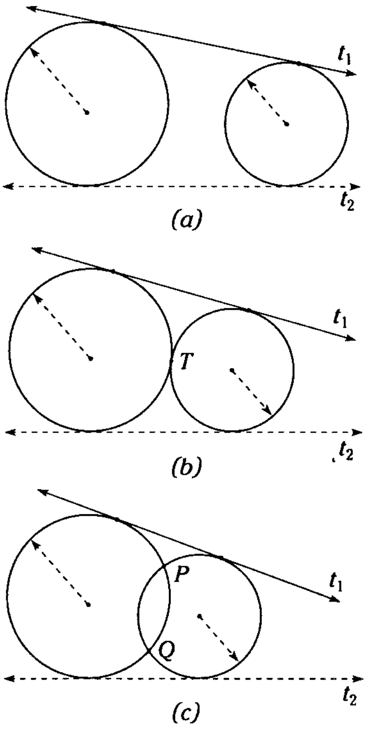
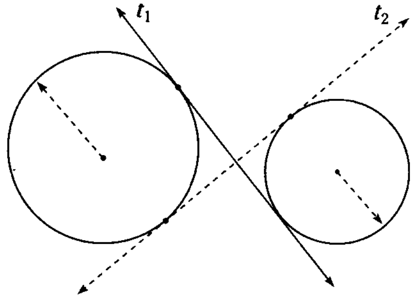
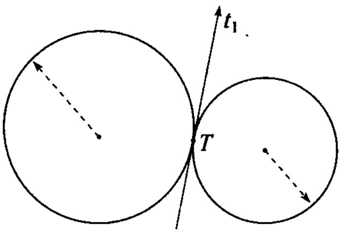


Figura 8.35

Tangente común interior



(a)

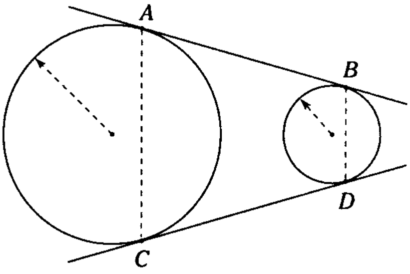


(b)

Figura 8.36

Teoremas

1.



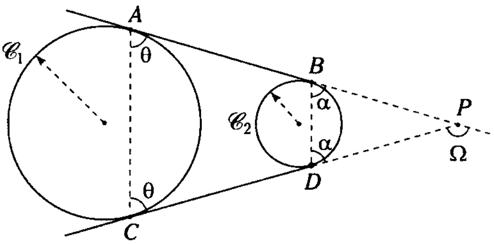
(a)

Si A, B, C y D son puntos de tangencia.

$AB = CD$ (I)

$\overline{AC} // \overline{BD}$ (II)

Demostración



(b)

Figura 8.37

Prolongamos las tangentes comunes exteriores $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ hasta P.

Por la propiedad IV de la circunferencia

Para $\mathscr{C}_1$: $PA = PC$

Para $\mathscr{C}_2$: $PB = PD$

$\therefore\ PA - PB = PC - PD$

$AB = CD$

Así también

$m\sphericalangle PBD = m\sphericalangle PDB = \alpha$ y

$m\sphericalangle PAC = m\sphericalangle PCA = \theta$

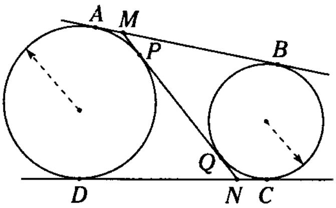
$\triangle BPD$: $\Omega = 2\alpha$

$\triangle APC$: $\Omega = 2\theta$

$\therefore\ \alpha = \theta$

$\rightarrow\ \overline{AC} // \overline{BD}$

2.

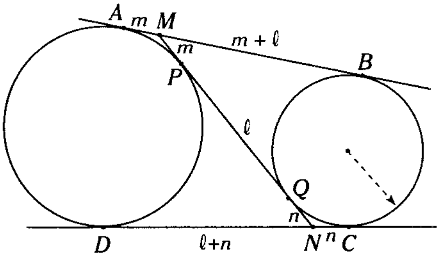


(a)

Si A, B, C, D, P y Q son puntos de tangencia, entonces

$AB = CD = MN$ y $AM = MP = QN = NC$

Demostración



(b)

Figura 8.38

De la propiedad IV de la circunferencia.

$MA = MP = m$

$NQ = NC = n$

$NP = ND = n+\ell$

$MB = MQ = m+\ell$

De la propiedad anterior

$AB = CD$

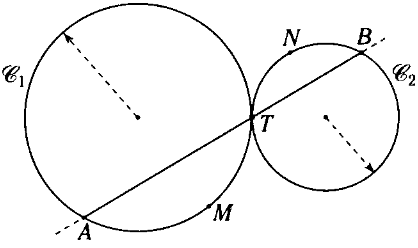
$\rightarrow\ 2m+\ell = \ell+2n$

Simplificando $m = n$

$\rightarrow\ AM = MP = QN = NC$ y

$AB = CD = MN$

3.

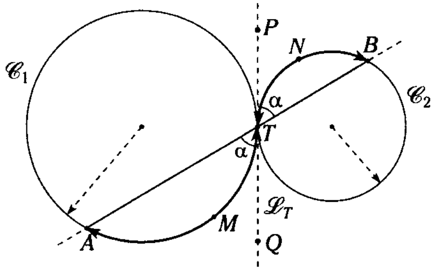


(a)

$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: tangentes exteriores en T.

$m\widehat{AMT} = m\widehat{BNT}$

Demostración



(b)

Figura 8.39

Trazamos la tangente común interior a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

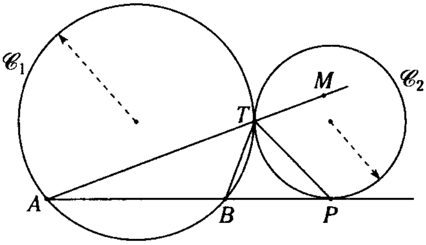
$\rightarrow\ m\sphericalangle PTB = m\sphericalangle QTA = \alpha$

En $\mathscr{C}_1$: $\alpha = \dfrac{m\widehat{AMT}}{2}$ (ángulo semiinscrito)

En $\mathscr{C}_2$: $\alpha = \dfrac{m\widehat{BNT}}{2}$ (ángulo semiinscrito)

$\therefore\ m\widehat{AMT} = m\widehat{BNT}$

4.



(a)

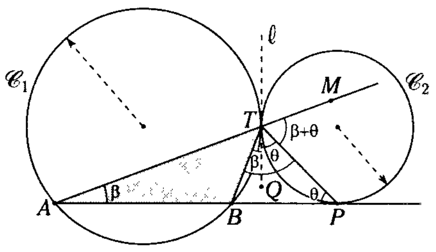
Si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes exteriores en T

$\overleftrightarrow{AB}$ tangente a $\mathscr{C}_2$ en P.

$\overline{TP}$: bisectriz exterior del $\triangle ATB$.

$m\sphericalangle BTP = m\sphericalangle MTP$

Demostración



(b)

Figura 8.40

Trazamos $\overleftrightarrow{\ell}$ tangente común interior a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

$\rightarrow$ $m\sphericalangle QTB = m\sphericalangle TAB = \beta$

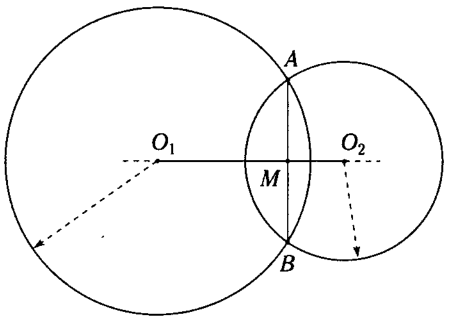
$m\sphericalangle QTP = m\sphericalangle BPT = \theta$

$\rightarrow$ En el $\triangle APT$

$m\sphericalangle PTM = \beta + \theta$

$\therefore$ $m\sphericalangle BTP = m\sphericalangle PTM$

5. En dos circunferencias secantes el segmento que une los centros es parte de la mediatriz de la cuerda común a las circunferencias.

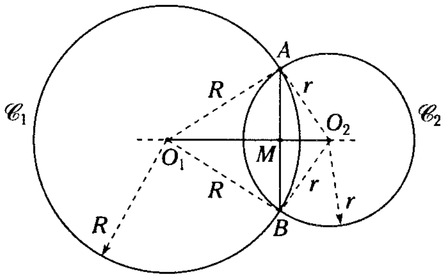


(a)

$\overline{O_1O_2} \perp \overline{AB}$ y

$AM = MB$

Demostración



(b)

Figura 8.41

En $\mathscr{C}_1$: $O_1A = O_1B = R$

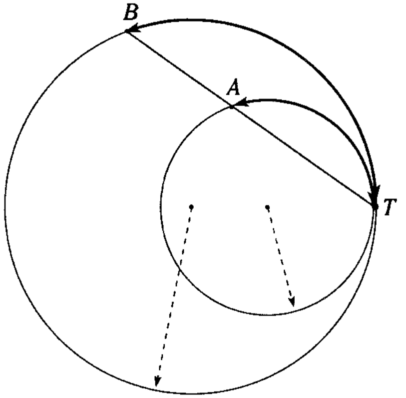
En $\mathscr{C}_2$: $O_2A = O_2B = r$

$\rightarrow$ O_1AO_2B: trapezoide simétrico

$\rightarrow$ Por propiedad $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ mediatriz de $\overline{AB}$.

$\therefore$ $AM = MB$

6.

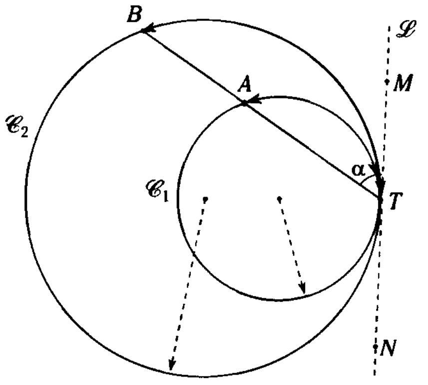


(a)

Si T es punto de tangencia, entonces

$m\overset{\frown}{AT} = m\overset{\frown}{BT}$

Demostración



(b)

Figura 8.42

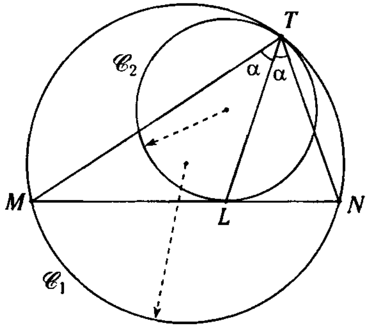
Por T trazamos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ tangente común exterior a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

En $\mathscr{C}_1$: $\alpha = \dfrac{m\widehat{AT}}{2}$ (ángulo semiinscrito)

En $\mathscr{C}_2$: $\alpha = \dfrac{m\widehat{BT}}{2}$ (ángulo semiinscrito)

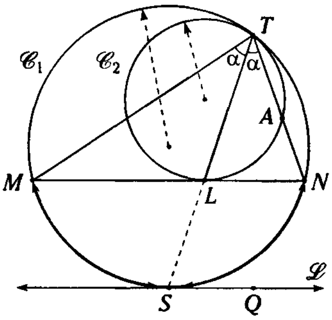
$\therefore\ m\widehat{AT} = m\widehat{BT}$

7. Si T y L son puntos de tangencia, consideramos así que $m\sphericalangle MTL = m\sphericalangle NTL$



(a)

Demostración



(b)

Figura 8.43

Se prolonga $\overline{TL}$ hasta S ($S \in \mathscr{C}_1$)

Luego se traza la recta $\mathscr{L}$ (tangente a $\mathscr{C}_1$ en S).

De la propiedad anterior

$m\widehat{TAL} = m\widehat{TNS}$

$\therefore\ m\sphericalangle NLT = m\sphericalangle QST$

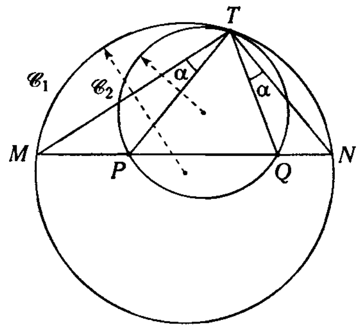
(ángulo semiinscrito) por lo cual $\overline{MN} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

De la propiedad I de la circunferencia

$m\widehat{MS} = m\widehat{SN}$

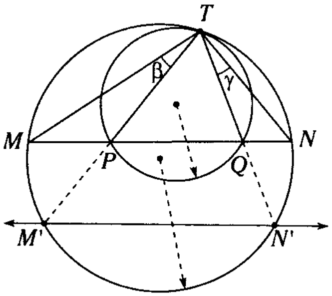
$\therefore\ m\sphericalangle MTS = m\sphericalangle STN$

8. Dado que T es punto de tangencia $\overline{MN}$ y la cuerda de $\mathscr{C}_1$ secante a $\mathscr{C}_2$, concluimos que $m\sphericalangle MTP = m\sphericalangle QTN$



(a)

Demostración



(b)

Figura 8.44

Se prolongan $\overline{TP}$ y $\overline{TQ}$ hasta los puntos M' y N'. Por propiedad que se ha desarrollado anteriormente

$m\widehat{TQ} = m\widehat{TN'}$

$\rightarrow\ m\sphericalangle TPQ = m\widehat{TQ}/2$ (ángulo inscrito)

$m\sphericalangle TM'N' = m\widehat{TN'}/2$ (ángulo inscrito)

Por lo cual se nota

$\overline{MN} // \overleftrightarrow{M'N'}$: $m\widehat{MM'} = m\widehat{NN'}$ (propiedad)

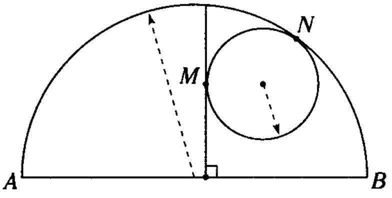
$$\beta = \frac{m\widehat{MM'}}{2}$$

$$\gamma = \frac{m\widehat{NN'}}{2}$$

$\rightarrow\ \beta = \gamma$

$\therefore\ m\sphericalangle MTP = m\sphericalangle NTQ$

9.

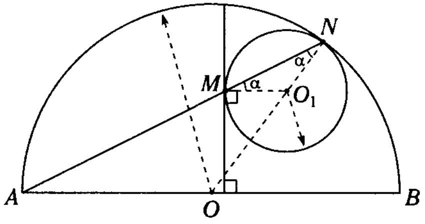


(a)

Si M y N son puntos de tangencia

Entonces A, M y N son colineales.

Demostración



(b)

Figura 8.45

Sea $m\sphericalangle MNO_1 = m\sphericalangle NMO_1 = \alpha$ ($\triangle$ isósceles)

Para la circunferencia:

$m\widehat{MN} = 180° - 2\alpha$ (ángulo central)

Como $\overline{MO_1} // \overline{AB}$:

$m\sphericalangle AON = 180° - 2\alpha$

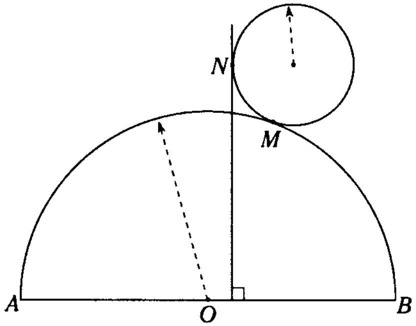
Para semicircunferencia:

$m\widehat{AN} = 180° - 2\alpha$ (ángulo central)

Se nota $m\widehat{MN} = m\widehat{AN}$

Por lo tanto A, M y N son colineales.

10.

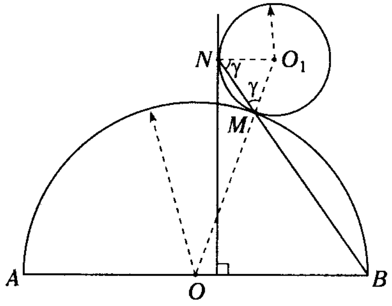


(a)

Si M y N son puntos de tangencia

N, M y B son colineales.

Demostración



(b)

Figura 8.46

Sea m∢MNO_1 = m∢NMO_1 = γ (△ isósceles)

Para circunferencia:

$m\widehat{MN} = 180° - 2\gamma$ (ángulo central)

Como $\overline{NO_1}$ // $\overline{AB}$

$m\sphericalangle O_1OB = 180° - 2\gamma$

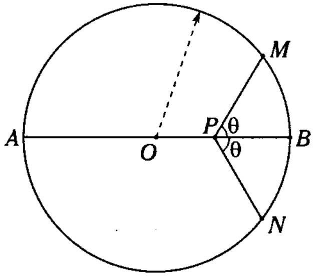
Para semicircunferencia:

$m\widehat{MB} = 180° - 2\gamma$ (ángulo central)

Se nota $m\widehat{MN} = m\widehat{MB}$

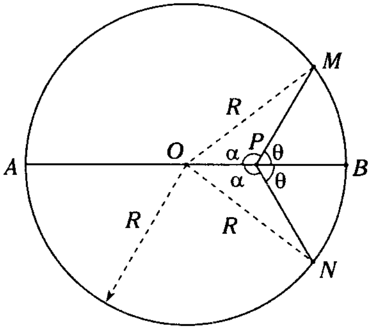
Por lo tanto *A*, *M* y *B* son colineales.

11. Si $\overline{AB}$ es diámetro y m∢*MPB* = m∢*NPB*, obtenemos que $m\widehat{MB} = m\widehat{NB}$



(a)

Demostración



(b)

Figura 8.47

Sea m∢*MPB* = m∢*NPB* = θ

→ m∢*OPM* = m∢*OPN* = α

además *OM* = *ON* = α

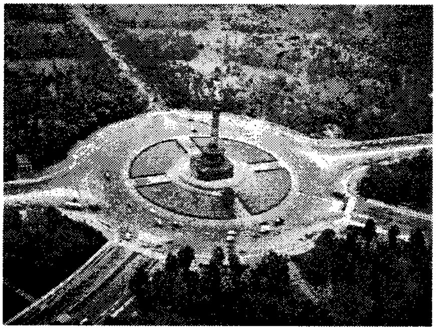
Por lo tanto △*OPM* y △*OPN* son congruentes.

(Criterio $L.L.A_{mayor}$)

Entonces la

m∢*MOP* = m∢*NOP*

∴ $m\widehat{MB} = m\widehat{BN}$

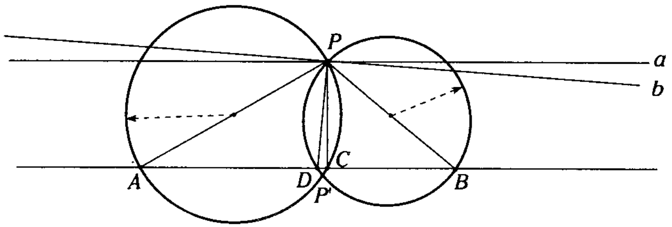


La Grosser Stern, plaza de contorno circunferencial situada en el centro de Toergarten (Berlín) y de la cual parten radialmente cinco calles.

Importante

Teorema paradójico

La geometría tampoco se encuentra a salvo de paradojas sorprendentes. Podemos *demostrar*, por ejemplo, que un ángulo recto es igual a un ángulo obtuso, o que todos los triángulos son isósceles a partir de figuras construidas de una forma que aparece aceptable, pero que no corresponde a la realidad. Veamos un ejemplo: *Por un punto P exterior a una recta r podemos trazar dos paralelas a esta recta.*

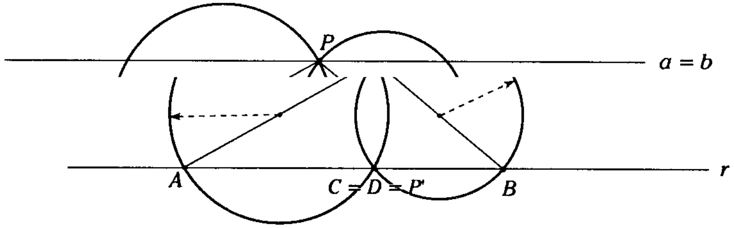


(a)

Demostración

En la figura 8.48(a), mostrado por P trazamos dos circunferencias con diámetros PA y PB (A y B en $\overleftrightarrow{r}$) entonces m∢PCA = m∢PDB = 90°.

De ahí, por P trazamos las rectas a y b perpendiculares a $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$ respectivamente, pero como la m∢PCB y la m∢PDA miden 90°, $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$ resultan paralelas a $\overleftrightarrow{r}$, como queríamos demostrar.



(b)

Figura 8.48

¿Dónde está el error?

Una construcción esmerada nos mostraría que los puntos C y D no son distintos, por lo tanto $C = D = P'$. Esto conlleva a que $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$ se confundan.

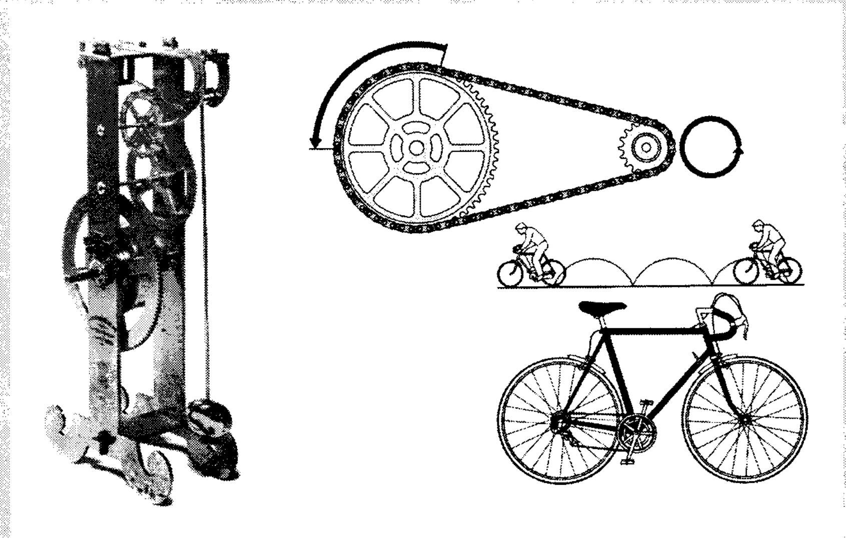
Se ha dicho a menudo que la geometría es, a veces, *el arte de razonar correctamente sobre dibujos falsos*.

CIRCUNFERENCIA Y MOVIMIENTO

Nuestros antepasados llevaban miles de años utilizando las circunferencias. Uno de los primeros en estudiar la circunferencia fue el científico y matemático griego Arquímedes de Siracusa (287-212 a.n.e.), quien al interesarse por medir la longitud de la circunferencia, el borde del círculo. Descubriendo así que la longitud de la circunferencia depende de su radio (distancia desde su centro a la circunferencia).

Si alguna vez montaste una bicicleta con una rueda pinchada, sabrás lo incómodo que resulta, debido a que en lugar de desplazarte suavemente, lo harás dando botes. Esto obedece a que una rueda pinchada no forma una circunferencia perfecta, ya que se aplastará en el punto en que toca la superficie de la tierra.

También podemos mencionar el uso de los engranajes (que tiene forma circunferencial) y podemos citar como ejemplo una forma primitiva de reloj mecánico diseñada por Galileo. Dicho reloj fue construido por su hijo en 1649. El movimiento del péndulo actuaba sobre un sistema de engranajes que hacían girar la manecilla (ver figura).



En la disposición de arriba, el plato tiene 57 dientes y el piñón tan sólo 18. Por consiguiente, una vuelta del pedal hará girar la rueda trasera unas tres veces, según la relación 57: 18; ó 3,17:1. Una bicicleta de carrera con diez piñones, tiene dos engranajes de tamaño diferente como platos y cinco piñones en la rueda trasera; la variedad de cambios posibles permiten al ciclista subir más desahogadamente las pendientes y aprovechar al máximo las cuestas abajo.

FUENTE: *El Universo de la ciencia: Número, medidas y ordenadores*. 1985. Ediciones Anaya.

L E C T U R A

LA CIRCUNFERENCIA Y EL NÚMERO π

Sin duda el concepto de redondez fue quizás uno de los primeros conocimientos que le hombre adquirió al observar el Sol, la Luna u otras cosas, así como fenómenos o procesos naturales con que trapezaba y que intentaba comprender.

Como lo manifiestan los petroglifos o las pinturas rupestres halladas en cuevas de diferentes partes del mundo y que datan de hace aproximadamente 10 000 años antes de nuestra era.

Petroglifos de Ccompicancha a 14 km de Andahuaylas, muestra grabaciones incisas en roca natural de circunferencias.

La circunferencia estaba presente como desarrollo de su capacidad cognitiva, tal como muestra el grabado de los petroglifos encontrado en Andahuaylas (Perú). También en la llanura de Salisbury (Wiltshire, Gran Bretaña) se alza uno de los conjuntos megalíticos más misteriosos de la historia: Stonehenge. El monumento, construido entre los años 3000 y 1500 a.n.e. esta constituido a base de grandes dólmenes dispuestos de forma concéntrica. Incluso se desconoce que cultura entre el neolítico y la edad de bronce lo erigio así como también la función que tenía, algunos afirman que era un templo donde los druidas celebraban el solsticio de verano otras hipotesis sostienen que es un ordenador cósmico, un complejo observatorio que servía para predecir automáticamente las posiciones del Sol y de la Luna, así como los eclipses, pero lo cierto es que podemos notar la presencia de la circunferencia en su distribución.

Desde hace mucho tiempo (cerca de 4000 años) el hombre noto que el número de veces en que el diámetro esta contenido en la circunferencia es siempre el mismo, sea cual sea el tamaño de esa circufnerencia.

Así si una circunferencia tienen longitud C y diámetro D, mientras otra tiene longitud C y diámetro D', entonces $\frac{C}{D} = \frac{C'}{D'}$ a este valor constante se le representa con la letra griega π.

Podemos decir de una manera simple que π es la longitud de una circunferencia de diametro igual a 1.

Ya los babilónicos habían observado que el valor de π está comprendido entre $\frac{25}{8}$ y $\frac{22}{7}$ que en fracciones decimales, esto da $3{,}125 < \pi < 3{,}142$, el número π siempre provocó atracción irresistible a los aficionados a través de los siglos. Lo curioso es que el valor 256/81 es el mismo que fue obtenido por el escriba egipcio Ahmes, autor del famoso papiro de Rhind, escrito 2000 años a.n.e.

Desde Arquímedes, quien obtuvo el valor $\pi = 3{,}1416$, los matemáticos, se han ocupado de calcular π con precisión cada vez mayor y luego con la ayuda de la computadora han encontrado el número π con más de 10 millones de decimales.

Podemos decir entonces que la circunferencia y el número π conviven con el hombre desde tiempos inmemoriales hasta nuestros días.

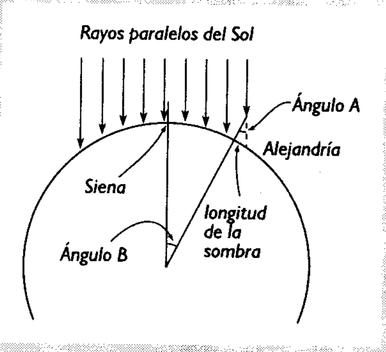
ERATÓSTENES DE CIRENE (Cirene, 276 - Alejandría, 192 a.n.e.)

Nació en Cirene (ahora es Libia), fue astrónomo, historiador, geógrafo, filósofo, poeta, crítico teatral y matemático. Después de estudiar en Alejandría y Atenas, alrededor del año 255 a.n.e. fue director de la biblioteca de Alejandría.

Trabajó con problemas matemáticos tales como la duplicación del cubo y números primos. Escribió muchos libros de los cuales solo se tienen noticias por referencias bibliográficas de otros autores. Dentro de sus obras más importantes se encuentra *Platonicus* y *On means* el poema *Hermes* inspirado en astronomía, así como también trabajos literarios y ética. Una de sus principales contribuciones a la ciencia y a la astronomía fue su trabajo sobre la medición de la Tierra. Eratóstenes en sus estudios de los papiros de la biblioteca de Alejandría, encontró un informe de observaciones en Siena (ahora Asuán), lugar localizado a unos 800 km, en donde al mediodía del 20 de junio (solsticio verano) no se producían sombras.

Eratóstenes realizó las mismas observaciones en Alejandría el mismo día a la misma hora, descubriendo que la luz del Sol incidía verticalmente en un pozo de agua. Asumió de manera correcta que si el Sol se encontraba a gran distancia, sus rayos al alcanzar la Tierra debían llegar en forma paralela, si esta era plana como se creía en aquellas épocas y no se deberían entonces encontrar diferencias entre las sombras proyectadas por los objetos a la misma hora del mismo día, independientemente de donde se encontraran. Sin embargo, el demostrarse que sí lo hacían, (la sombra dejada por la torre de Siena formaba 7 grados con la vertical) dedujo que la Tierra no era plana y utilizando la distancia conocida entre las dos ciudades y el ángulo medido de las sombras, calculó la circunferencia de la Tierra que aproximadamente media 250 estadios (40 000 kilómetros).

También calculó la distancia al Sol en 804 000 000 estadios y la distancia a la Luna en 780 000 estadios. Midió con precisión la inclinación de la eclíptica en 23°51'75". Compiló un catálogo de las estrellas en el cual contenía 675 estrellas. Creó uno de los calendarios más avanzados para su época y una historia cronológica del mundo desde la Guerra de Troya.



El ángulo A puede medirse a partir de la longitud de la sombra en Alejandría.

Mirando desde el fondo de un pozo de la antigua Siena, cerca del actual Abu Simbel en Egipto, donde según la tradición local tuvo su origen el estudio de la circunferencia de la Tierra por Eratóstenes.

BIOGRAFÍA

HIPARCO (Nicea160 - Rodas124 a.n.e.)

Hiparco, el fundador de la astronomía como ciencia matemática, nació en Nicea (Bitinia). Según algunos autores, realizó algunas observaciones astronómicas hacia 160 años a.n.e. y murió en el año 124 a.n.e., y, según otros, vivió durante los reinados de la dinastía Ptolomeo. Hizo probablemente sus primeros estudios en Nicea, visitó Babilonia, luego se fue a Atenas, donde estudió con los filósofos que frecuentaban aún el liceo y se estableció definitivamente en Rodas, donde escribió numerosas obras (hoy desaparecidas) de astronomía y algunas de matemáticas, ciencia a la cual agregó lo que había de llamarse Trigonometría.

De sus grandes descubrimientos astronómicos, solo citaremos el del fenómeno de precisión de los equinoccios, su rectificación de las medidas de Eratóstenes sobre la oblicuidad de la eclíptica, su medida exacta de la duración del año y de la desigualdad de los días y su descubrimiento de los paralajes.

Según la historia Hiparco fue un severo crítico de los conocimientos ya adquiridos hasta ese entonces.

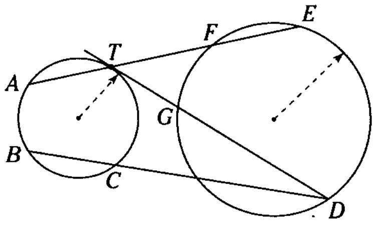
También debemos mencionar que de la iniciativa de Hiparco hoy sobrevive la división de la circunferencia en 360 grados sexagesimales. Así mismo llega a la posteridad una clasificación de más de 1 000 estrellas con la posición de mayoría de ellas.

Hiparco observando las estrellas.

Problemas Resueltos

Problema 1

En la figura, $m\widehat{AB} = m\widehat{BC} = 80°$; $m\widehat{FG} = 30°$ y $m\sphericalangle BDG = 20°$. Calcule $m\widehat{ED}$, si T es punto de tangencia.



A) 92° B) 110° C) 115°
D) 120° E) 130°

Resolución

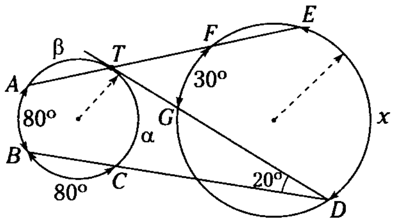


Figura 8.49

Pide la $m\widehat{ED} = x$

De la circunferencia menor

$$\beta + \alpha = 200° \qquad \text{(I)}$$

Por ángulo exterior

$$\frac{80° + \beta - \alpha}{2} = 20°$$

$$\alpha - \beta = 40° \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\alpha = 120°;\ \beta = 80°$$

Por ángulo semiinscrito en la circunferencia menor

$$m\sphericalangle ATF = \frac{80°}{2} = 40° \quad \rightarrow \quad m\sphericalangle ETD = 40°$$

Por ángulo exterior en la circunferencia mayor

$$m\sphericalangle ETD = \frac{x - 30°}{2}$$

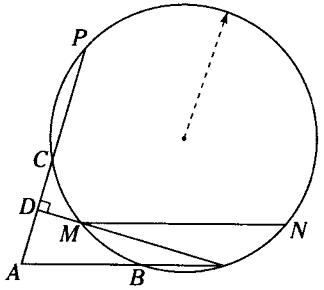
Reemplazando

$$\therefore\ x = 110°$$

CLAVE B

Problema 2

En la figura, $\overline{MN} // \overline{AB}$, $CD = DA$. Calcule $m\widehat{NP}$.



A) 160° B) 170° C) 180°
D) 190° E) 200°

Resolución

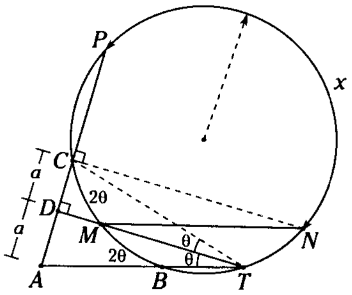


Figura 8.50

Pide $m\overset{\frown}{NP}=x$.

Se trazan $\overline{CT}$

Como $\overline{CD}=\overline{DA} \rightarrow m\sphericalangle CTD = m\sphericalangle DTA = \theta$

$m\overset{\frown}{BM} = m\overset{\frown}{CM} = 2\theta$

también

$\overline{MN}=\overline{BT} \rightarrow m\overset{\frown}{NT} = m\overset{\frown}{BM} = 2\theta$

Si

$m\overset{\frown}{CM} = m\overset{\frown}{TN} = 2\theta \rightarrow \overline{CN}//\overline{MT}$

y $m\sphericalangle PCN = m\sphericalangle CDT = 90°$

Por ángulo inscrito

$\therefore\ x = 180°$

CLAVE C

Se prolongan $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ hasta N.

Se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ tangente en T.

$\triangle ANB$: $m\sphericalangle ANB = 180° - 4x$

Por ángulo inscrito: $m\overset{\frown}{PT} = 6x$ y $m\overset{\frown}{QT} = 8x$

Por ángulo semiinscrito

$m\sphericalangle NPT = m\sphericalangle RTP = 3x$

$m\sphericalangle RTQ = m\sphericalangle NQT = 4x$

$\square PTQN$: $3x+3x+4x+4x+180°-4x = 360°$

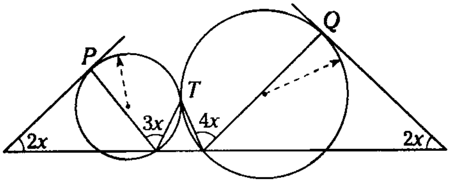
$10x = 180°$

$\therefore\ x = 18°$

CLAVE D

Problema 3

En la figura, P, T y Q son puntos de tangencia. Calcule x.



A) 10° B) 12° C) 16°
D) 18° E) 22°30'

Resolución

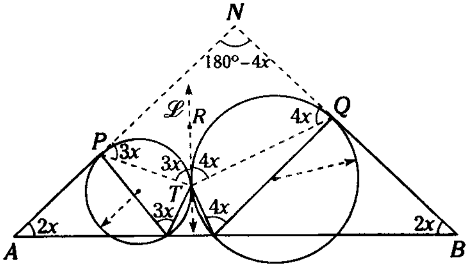
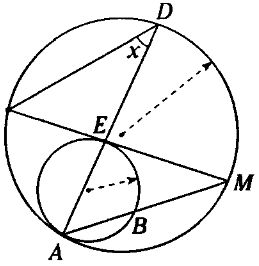


Figura 8.51

Piden x.

Problema 4

De la figura, A, E son puntos de tangencia, $m\overset{\frown}{EB} = 92°$ y $m\overset{\frown}{AM} = 90°$. Calcule x.



A) 30° B) 34° C) 43°
D) 42° E) 45°

Resolución

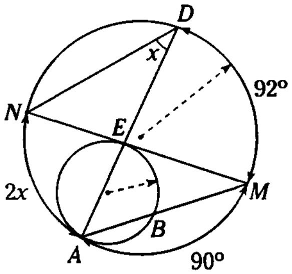


Figura 8.52

Piden x

Por propiedad, se sabe que $m\widehat{ND} = m\widehat{MD}$

Por ángulo inscrito

En la circunferencia mayor:

$$m\widehat{AN} = 2x$$

Por dato en la circunferencia menor y mayor

$$m\widehat{EB} = 92° = m\widehat{DM}$$

$$\rightarrow \quad m\widehat{ND} = m\widehat{MD}$$

En la circunferencia mayor

$$92° + 92° + 90° + 2x = 360°$$

$$274° + 2x = 360°$$

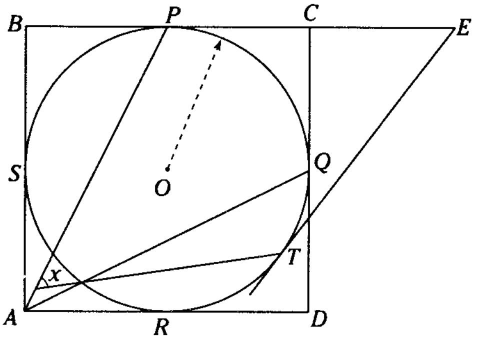
$$2x = 86°$$

$$\therefore \quad x = 43°$$

CLAVE C

Problema 5

En la figura, $ABCD$ es un cuadrado. Si los puntos P, Q, R, S y T son puntos de tangencia, $PC = CE$, calcule x.



A) 54° B) 55° C) 55°30'

D) 56°30' E) 63°30'

Resolución

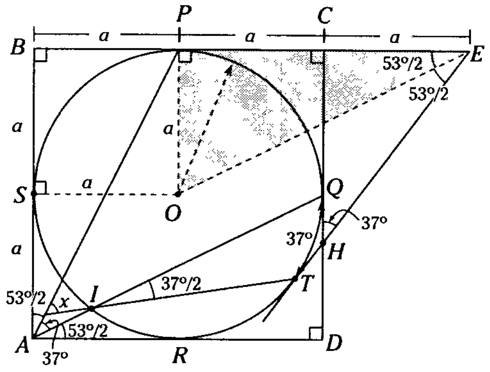


Figura 8.53

Piden x.

Del dato $PC = CE = a$

Trazamos $\overline{OP}$ y $\overline{OS}$.

$OSBP$: cuadrado $\rightarrow$ $OP = B = \alpha$

$\rightarrow$ $BP = PC = CE = OP = a$

Al trazar $\overline{OE}$ ◺OPE: notable de 53°/2; 127°/2

$\rightarrow$ $m\measuredangle PEO = 53°/2$

◺PBA: notable de 53°/2; 127°/2

$\rightarrow$ $m\measuredangle BAP = 53°/2$

◺QAD: notable de 53°/2; 127°/2

$\rightarrow$ $m\measuredangle QAD = 53°/2$

En A, se observa:

$m\measuredangle PAQ = 37°$

Por teorema $\overleftrightarrow{EO}$ es bisectriz

$\rightarrow$ $m\measuredangle PEO = m\measuredangle OET = 53°/2$

◺CHE: $m\measuredangle CHE = 37°$

Por propiedad $m\widehat{QT} = m\measuredangle QHE = 37°$

$\rightarrow$ $m\measuredangle TIQ = 37°/2$

Por ángulo externo en el triángulo

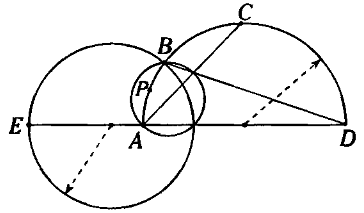
$$x = 37° + \frac{37°}{2}$$

$$\therefore \quad x = 55°30'$$

CLAVE C

Problema 6

En la figura, $m\widehat{APB} = m\widehat{BC}$ y $m\widehat{EB} = 160°$. Calcule $m\widehat{BCD}$.



A) 140° B) 160° C) 150°
D) 120° E) 130°

Resolución

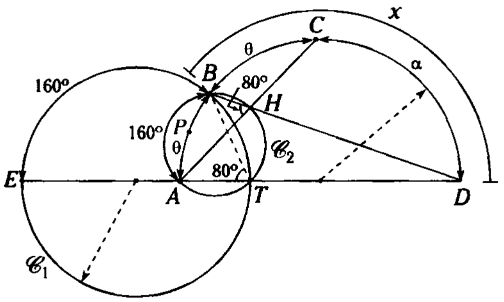


Figura 8.54

Piden $m\widehat{BCD} = x$

Sea $m\widehat{AB} = m\widehat{BC} = \theta$ y $m\widehat{CD} = \alpha$

$\rightarrow\ x = \alpha + \theta$ (I)

Por ángulo inscrito en $\mathscr{C}_1$

$\rightarrow\ m\sphericalangle BTE = 80°$

$\rightarrow\ m\widehat{AB} = 160°$ y $m\sphericalangle BHA = 80°$

Por ángulo interior en la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$.

$$80° = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

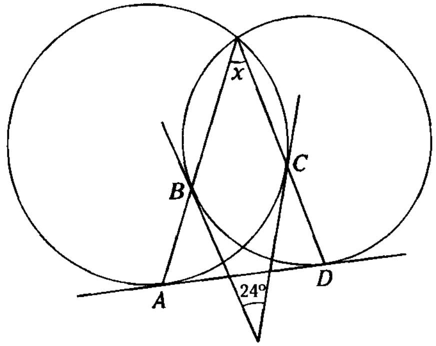
$$\alpha + \theta = 160°$$

$$\therefore\ x = 160°$$

CLAVE B

Problema 7

En la figura, A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule x.



A) 30° B) 33° C) 36°
D) 39° E) 48°

Resolución

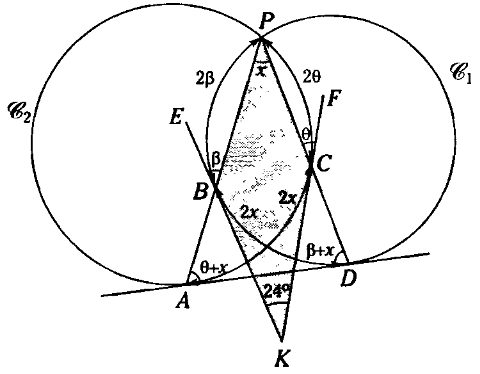


Figura 8.55

Piden x.

Sean $m\sphericalangle EBP = \beta$ y $m\sphericalangle PCF = \theta$

$\sphericalangle KBPC$: $24° + x = \beta + \theta$ (I)

De $\mathscr{C}_1$, vemos que

$m\widehat{BP}=2\beta$ y $m\widehat{BD}=2x$

Por ángulo semiinscrito $\rightarrow$ $m\measuredangle ADP=\beta+x$

De $\mathscr{C}_2$ se tiene

$m\widehat{PC}=2\theta$ y $m\widehat{AC}=2x$

Por ángulo semiinscrito $\rightarrow$ $m\measuredangle PAD=\theta+x$

En $\triangle APD$

$3x+\theta+\beta=180°$ (II)

Reemplazando (I) en (II)

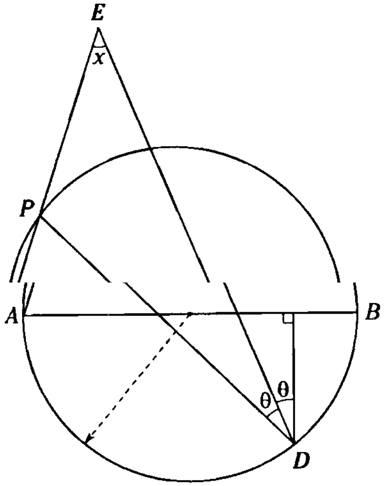
$3x+24°+x=180°$

$\therefore\ x=39°$

CLAVE D

Problema 8

Según la figura, si $m\widehat{PAD}=160°$. Calcule x.



A) 38° B) 40° C) 42°

D) 44° E) 48°

Resolución

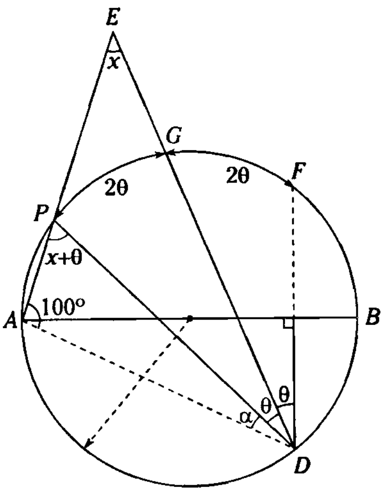


Figura 8.56

Piden x.

Como $m\widehat{PAD}=160°$ $\rightarrow$ $m\widehat{PBD}=200°$

Por ángulo inscrito

$\rightarrow$ $m\measuredangle PAD=100°$

Sea $m\measuredangle PDA=\alpha$

Por ángulo inscrito

$\rightarrow$ $m\widehat{PG}=m\widehat{GF}=2\theta$

Propiedad: $m\widehat{APF}=m\widehat{AD}=2\alpha+4\theta$

Por ángulo exterior

$$x=\frac{2\alpha+4\theta-2\theta}{2}$$

$x=\alpha+\theta$

En $\triangle ADE$: isósceles

$\rightarrow$ $x+x+100°=180°$

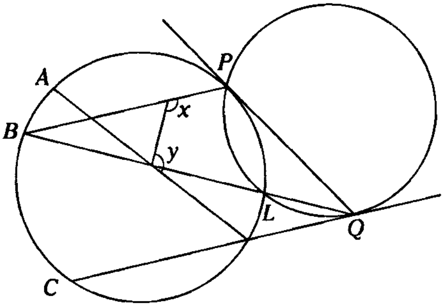
$2x=80°$

$\therefore\ x=40°$

CLAVE B

Problema 9

Según la figura, P y Q son puntos de tangencia y $m\overset{\frown}{AC} = 82°$. Calcule $x+y$.



A) 220° B) 221° C) 224°
D) 226° E) 227°

Resolución

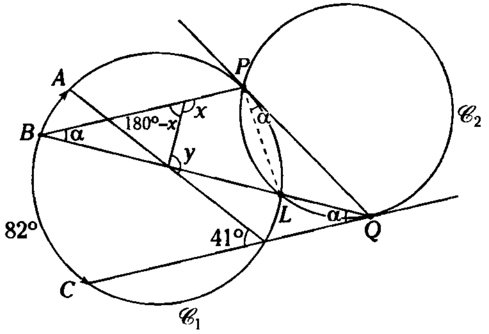


Figura 8.57

Piden $x+y$.

Se traza la cuerda común $\overline{PL}$, sea $m\overset{\frown}{PL} = 2\alpha$

En $\mathscr{C}_1$: ángulo semiinscrito: $m\sphericalangle LPQ = \alpha$

En $\mathscr{C}_2$: ángulo inscrito $\rightarrow$ $m\sphericalangle\overset{\frown}{LQ} = 2\alpha$

En $\mathscr{C}_2$: ángulo semiincrito $\rightarrow$ $m\sphericalangle LQC = \alpha$

Se nota, $\overline{BP} // \overline{CQ}$

Por propiedad de rectas paralelas

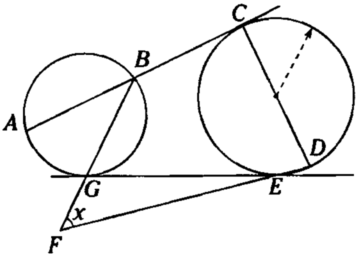
$180° - x + 41° = y$

$\therefore \; x+y = 221°$

CLAVE B

Problema 10

De la figura, $m\overset{\frown}{AB} = \beta$ y C, E y G son puntos de tangencia. Calcule x.



A) 90° − β/4 B) 75° − β/2 C) 90° − β/2
D) 90° − β/3 E) 45° − β/2

Resolución

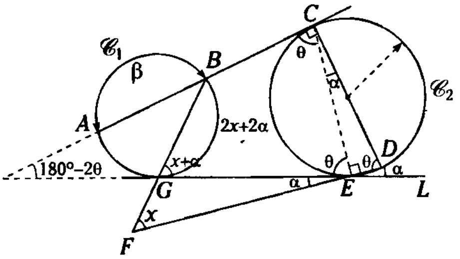


Figura 8.58

Piden x.

Se traza $\overline{CE}$: $m\sphericalangle CED = 90°$

Sea $m\sphericalangle DCE = m\sphericalangle DEL = \alpha$ y $m\sphericalangle BCE = \theta$

En $\mathscr{C}_2$: Por propiedad: $m\sphericalangle BCE = m\sphericalangle GEC = \theta$

Del vértice C, $\alpha + \theta = 90°$ (I)

En $\mathscr{C}_1$: Por ángulo semiinscrito: $m\overset{\frown}{BG} = 2(x+\alpha)$

En $\mathscr{C}_1$: Por ángulo exterior

$$180° - 2\theta = \frac{2x + 2\alpha - (360° - 2x - 2\alpha - \beta)}{2}$$

$$180° - 2\theta = x + \alpha - 180° + x + \alpha + \frac{\beta}{2}$$

$360° - 2(\theta+\alpha) = 2x+\beta$ (II)

$360° - 180° = 2x+\beta$

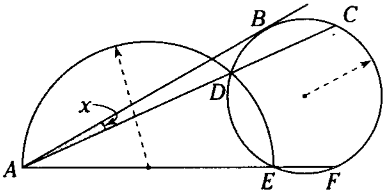
Reemplazando (I) en (II)

$\therefore\ x = 90° - \dfrac{\beta}{2}$

CLAVE C

Problema 11

De la figura, $m\sphericalangle DAE = \alpha$, $m\widehat{BC} = 2\alpha$ y $m\widehat{CF} = 3\alpha$. Calcule x.



A) $\dfrac{3\alpha}{2}+60°$ B) $\dfrac{3\alpha}{2}-60°$ C) $\dfrac{5\alpha}{2}-40°$

D) $\dfrac{5\alpha}{2}-90°$ E) $\dfrac{3\alpha}{2}-90°$

Resolución

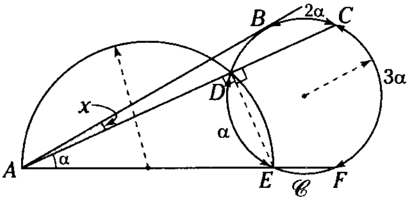


Figura 8.59

Piden x.

Se traza $\overline{DE}$: $m\sphericalangle ADE = 90°$

En $\mathscr{C}$: Por ángulo exterior

$$x = \frac{2\alpha - m\widehat{BD}}{2} \quad \text{(I)}$$

En $\mathscr{C}$: Por ángulo exterior

$$\alpha = \frac{3\alpha - m\widehat{DE}}{2}$$

$\rightarrow\ m\widehat{DE} = \alpha$

Se nota, $m\widehat{EDC} = 180°$

En $\mathscr{C}$: $\alpha + m\widehat{BD} + 2\alpha = 180°$

$\rightarrow\ m\widehat{BD} = 180° - 3\alpha$ (III)

Reemplazando (II) en (1)

$$x = \frac{2\alpha - (180° - 3\alpha)}{2}$$

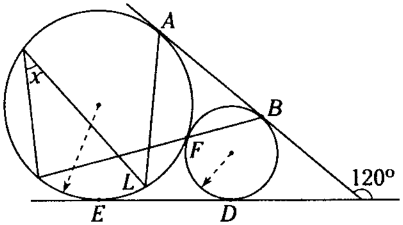
$$x = \frac{5\alpha - 180°}{2}$$

$$\therefore\ x = \frac{5\alpha}{2} - 90°$$

CLAVE D

Problema 12

De la figura, A, B, D, E y F son puntos de tangencia. Si $m\widehat{EL} = m\widehat{LF}$, calcule x.



A) 38° B) 42° C) 45°

D) 49° E) 53°

Resolución

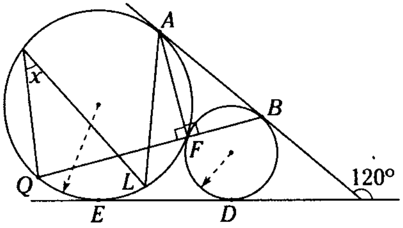


Figura 8.60

Piden x.

Por propiedad $m\overset{\frown}{AFE} = 120° \rightarrow m\overset{\frown}{AF} = m\overset{\frown}{FE} = 60°$

$\rightarrow\ m\overset{\frown}{EL} = m\overset{\frown}{LF} = 30°$

Propiedad: $m\measuredangle AFB = 90° \rightarrow m\overset{\frown}{AFQ} = 180°$ y $m\overset{\frown}{QF} = 120°$

Se nota de la circunferencia mayor

$m\overset{\frown}{QL} = m\overset{\frown}{QF} - m\overset{\frown}{LF}$

$\rightarrow\ m\overset{\frown}{QL} = 120° - 30° = 90°$

Por ángulo inscrito

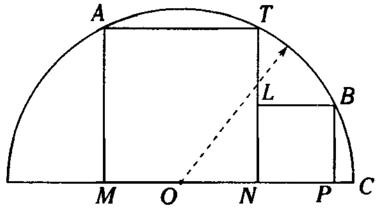
$$x = \frac{m\overset{\frown}{QL}}{2} = \frac{90°}{2}$$

$\therefore\ x = 45°$

CLAVE C

Problema 13

De la figura, *AMNT* y *NLBP* son cuadrados. Calcule $m\overset{\frown}{AB}$.



A) 80° B) 75° C) 90°
D) 105° E) 120°

Resolución

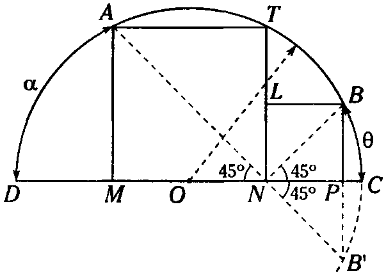


Figura 8.61

Piden $m\overset{\frown}{AB} = x$.

Sea $m\overset{\frown}{DA} = \alpha$ y $m\overset{\frown}{BC} = \theta$

De la semicircunferencia

$x + \alpha + \theta = 180°$ (I)

Observación

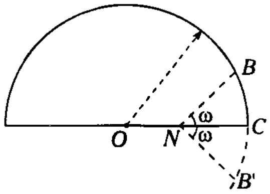


Figura 8.62

Si $m\measuredangle BNC = m\measuredangle CNB' \rightarrow m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{CB'}$

Continuando con nuestro problema

$m\overset{\frown}{CB'} = m\overset{\frown}{BC} = \theta$

Por ángulo interior

$$45° = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

$\rightarrow\ \alpha + \theta = 90°$ (II)

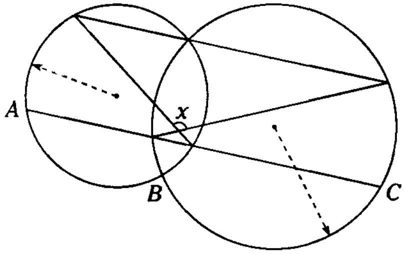
Reemplazando en (II) en (I)

$\therefore\ x = 90°$

CLAVE C

Problema 14

Según la figura, $m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} = 280°$. Calcule x.



A) 110° B) 120° C) 130°
D) 140° E) 150°

Resolución

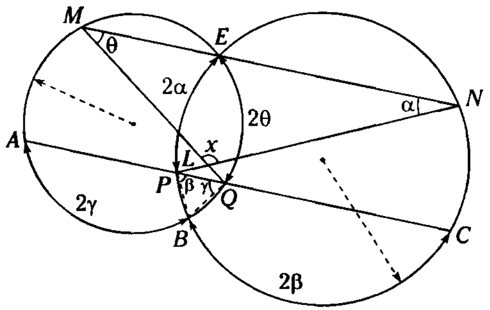


Figura 8.63

Piden x.

Sea $m\sphericalangle QMN = \theta$; $m\sphericalangle MNL = \alpha$

En $\triangle MNL$: $x+\theta+\alpha = 180°$ (I)

Como $2\gamma+2\beta = 280°$ (dato)

$\rightarrow$ $\gamma+\beta = 140°$

En $\triangle PBQ$: $m\sphericalangle PBQ = 40°$

Al trazar la cuerda BE (el trazo es imaginario)

$$m\sphericalangle PBQ = \frac{2\theta+2\alpha}{2}$$

$40° = \theta+\alpha$ (II)

Reemplazando (II) en (I)

$x+40° = 180°$

$\therefore$ $x = 140°$

CLAVE D

Resolución

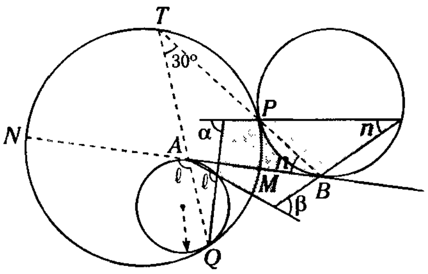


Figura 8.64

Piden $\alpha+\beta$.

Se sabe que al trazar $\overline{QT}$

$m\widehat{NT} = m\widehat{TM}$

También se sabe que al prolongar $\overline{BP}$, pasa por T debido a que

$m\widehat{NT} = m\widehat{TM}$

De la circunferencia mayor

$m\sphericalangle PTQ = 30°$ (ángulo inscrito)

En $\triangle TAB$

$30°+n + \ell = 180°$ (I)

En $\triangle$: $\alpha+\beta = \ell+n$ (II)

Reemplazando (II) en (I)

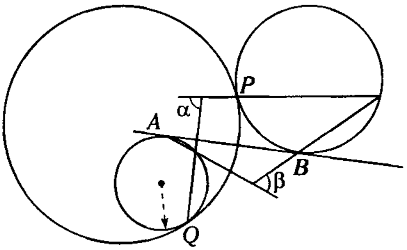
$30° + \alpha + \beta = 180°$

$\therefore$ $\alpha + \beta = 150°$

CLAVE E

Problema 15

Según la figura, A, B, P y Q son puntos de tangencia y $m\widehat{PQ} = 60°$. Calcule $\alpha+\beta$.



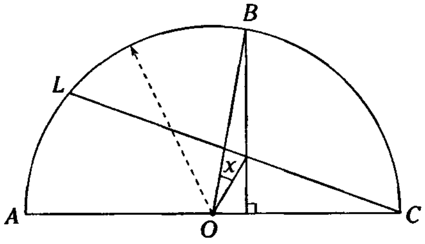
A) 120° B) 135° C) 100°

D) 127° E) 150°

Problema 16

De la figura, $m\widehat{BC} = 80°$ y $m\widehat{AL} = 40°$.

Calcule x.



A) 8° B) 12° C) 16°

D) 20° E) 24°

Resolución

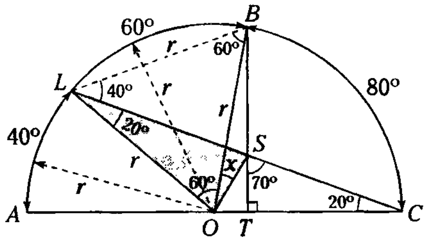


Figura 8.65

Piden x.

En la semicircunferencia $m\widehat{LB}=60°$

$\rightarrow\ LB=r$

Por ángulo inscrito

$$m\sphericalangle BLC=\frac{80°}{2}=40°$$

Por ángulo inscrito

$$m\sphericalangle LCA=\frac{40°}{2}=20°\ \rightarrow\ m\sphericalangle TSC=70°$$

$\triangle BLS$ es isósceles: $LS=r$

En $\triangle LSO$: se tiene $LS=LO=r$

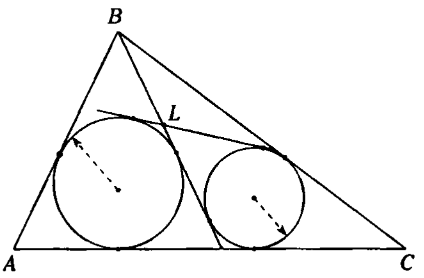
$\rightarrow\ x+60°=80°$

$\therefore\ x=20°$

CLAVE D

Problema 17

De la figura $AB=c$, $BC=a$ y $AC=b$. Calcule BL.



A) $\dfrac{b+c-a}{2}$

B) $\dfrac{a+b-c}{2}$

C) $\dfrac{a+c-b}{2}$

D) $\dfrac{a+b-2c}{2}$

E) $2a+2b-c$

Resolución

Piden $BL=x$.

Sea $LT=m$, $TP=\ell$

Por propiedad $LT=PQ=m$

Sea $AM=q=AM'$ y

$CN=t=CN'$

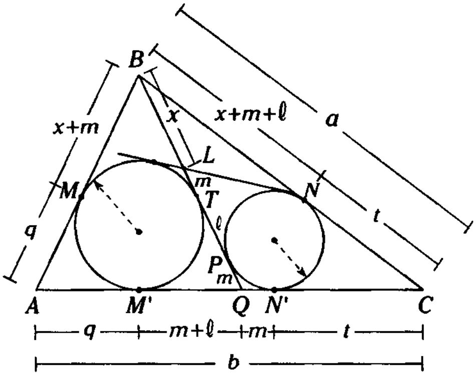


Figura 8.66

De la figura

$a=x+m+\ell+t$ (I)

$b=2m+\ell+q+t$ (II)

$c=x+m+q$ (III)

Sumando (I) y (III)

$a+c=2x+2m+\ell+t+q$ (IV)

Reemplazando (II) en (IV)

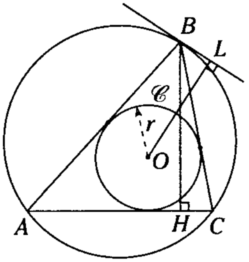
$a+c=2x+b$

$$\therefore\ x=\frac{a+c-b}{2}$$

CLAVE C

Problema 18

En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita y B es punto de tangencia. Si $OL = a$, calcule BH en función de a y r.



A) $a + 2r$ B) $a + r$ C) $2a - r$

D) $a + 3r$ E) $\dfrac{2a + r}{2}$

Resolución

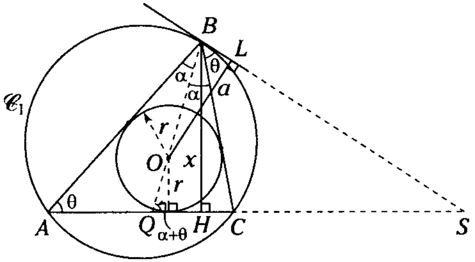


Figura 8.67

Piden $BH = x$.

Se traza $\overline{BOQ}$.

Por teorema: $m\sphericalangle ABO = m\sphericalangle OBC = \alpha$

Por ángulo inscrito y semiinscrito

$m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle LBC = \theta$

Se forma el triángulo BSQ, donde se nota que $BS = SQ$.

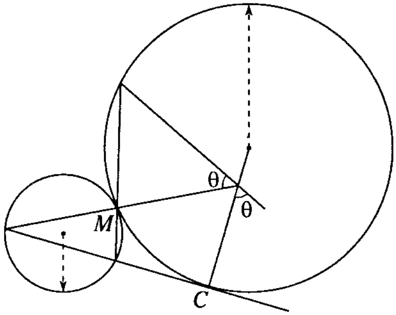
Por propiedad del triángulo isósceles

$x = a + r$

CLAVE B

Problema 19

En la figura, M y C son puntos de tangencia. Calcule θ.



A) 80° B) 40° C) 50°

D) 60° E) 70°

Resolución

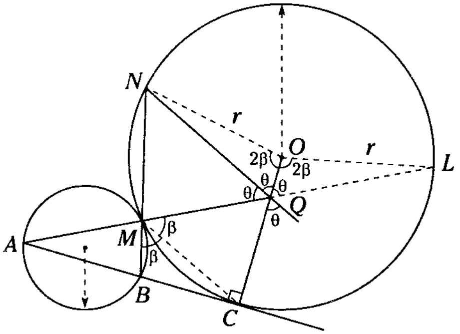


Figura 8.68

Piden θ.

Se prolonga $\overline{AQ}$ hasta L.

Por propiedad (IV) de circunferencia

$m\sphericalangle BMC = m\sphericalangle CML = \beta$

$m\overset{\frown}{NMC} = 2\beta$ (ángulo ex inscrito)

$m\overset{\frown}{LC} = 2\beta$ (ángulo inscrito)

$m\sphericalangle NOC = m\sphericalangle LOC = 2\beta$ (ángulo central)

$\triangle NOQ \cong \triangle LOQ$ (L.A.L.)

$\rightarrow$ $m\sphericalangle NQO = m\sphericalangle LQO = \theta$

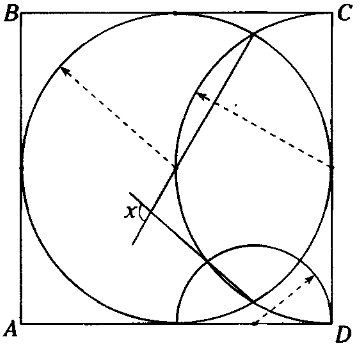
En Q: $\theta + \theta + \theta = 180°$

$\therefore$ $\theta = 60°$

CLAVE **D**

Problema 20

En la figura, se tiene una circunferencia inscrita en el cuadrado *ABCD*. Calcule x.



A) 114°30' B) 106°30' C) 110°30'
D) 102°30' E) 101°30'

Resolución

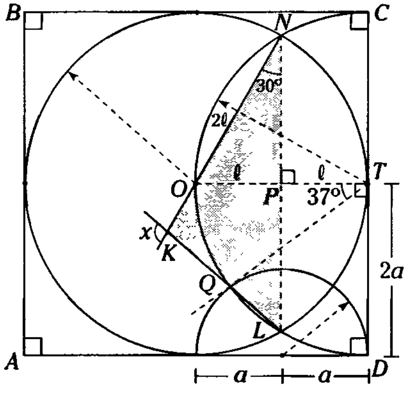


Figura 8.69

Piden x.

Se nota $\overline{NL}$: parte de la mediatriz de $\overline{OT}$.

$⊾ONP$: notable de 30° y 60°

$\rightarrow$ $m\sphericalangle ONP = 30°$

Como $QT = TD = 2a$

entonces Q es punto de tangencia.

Observación

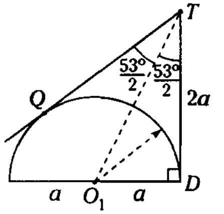


Figura 8.70

$m\sphericalangle QTO_1 = m\sphericalangle O_1TD$

Debido a la figura 8.70

$m\sphericalangle QTD = 53°$

$\rightarrow$ $m\overset{\frown}{OQ} = 37°$

Por ángulo inscrito en la circunferencia.

$$m\sphericalangle QLN = \frac{60°+37°}{2} = \frac{97°}{2}$$

$\triangle KNL$: $x + 30° + m\sphericalangle QLN = 180°$

$$x + 30° + \frac{97°}{2} = 180°$$

$$x + \frac{157°}{2} = 180°$$

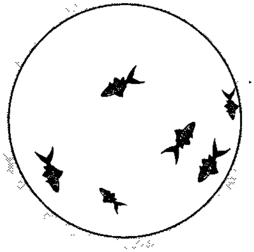
$$x = \frac{203°}{2}$$

$\therefore$ $x = 101°30'$

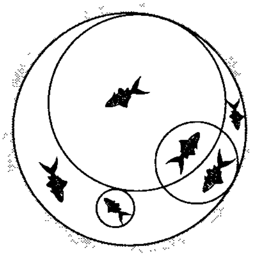
CLAVE **E**

1. **Haga usted el corte**

Dieciséis matemáticos decidieron ordenar dos pizzas de anchoa, durante el refrigerio. Al recibir su pedido, estos estudiosos descubrieron que había 16 pequeños pescados distribuidos en las dos pizzas: seis en una y diez en la otra, uno por cada matemático. También observaron con desgano que no estaban cortadas.

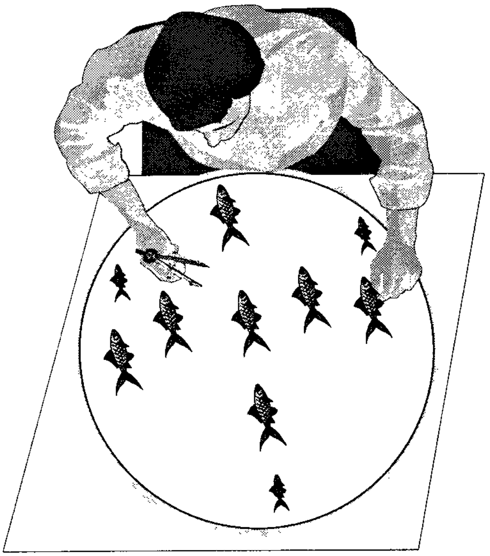


Dispuesto a tomar la iniciativa, el jefe del grupo sacó un compás con un lápiz muy aguzado de su bolsillo e hizo tres cortes circulares en la primera.



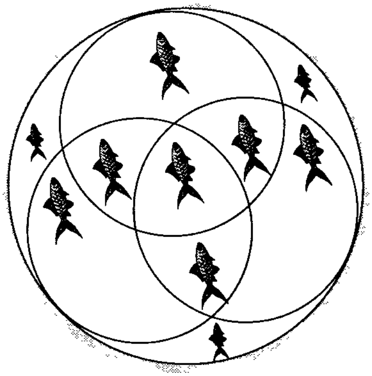
He utilizado tres circunferencias para dividirla de modo que cada corte tenga una anchoa, señaló. En tono grave agregó: *Hoy hemos resuelto un gran dilema, veamos si somos capaces de resolver otro. ¿Podemos partir la segunda de manera que cada pedazo contenga una sola anchoa? De esta manera, todos comeríamos un trozo con el delicioso acompañamiento.*

¿Puede usted ayudar a estos matemáticos?



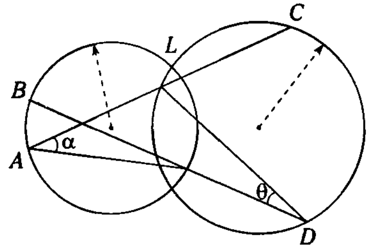
Resolución

Esta es la pizza dividida en 10 pedazos, cada una con una anchoa. ¿Puede encontrar otras soluciones?



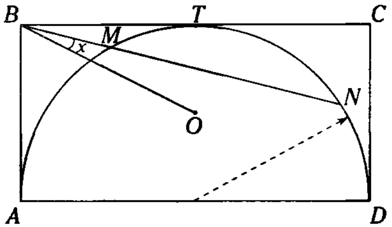
Problemas Propuestos

1. En la figura, $\alpha + \theta = 26°$.
Determine $m\widehat{CD} - m\widehat{AB}$.



A) 26° B) 32° C) 52°
D) 46° E) 40°

2. Según la figura, $m\widehat{NT} = 2(m\widehat{MT})$. Si O es el centro del rectángulo $ABCD$, calcule x.

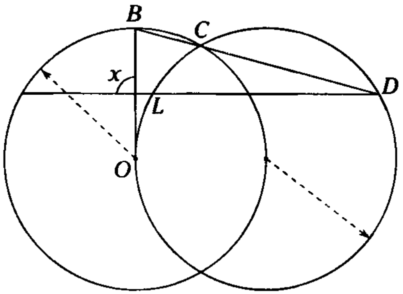


A) 11° B) 11°30' C) 15°
D) 15°30' E) 18°30'

3. Se tiene una circunferencia en la cual se ubican los puntos A, B y C, tal que $B \in \widehat{AC}$ y $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$. Si en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica el punto N, por el cual se traza la tangente $\overleftrightarrow{NM}$ (M es punto de tangencia), y la prolongación de $\overline{BC}$ es perpendicular a $\overline{MN}$, calcule $\dfrac{m\measuredangle CNM}{m\widehat{CM}}$.

A) 1/5 B) 1/4 C) 1/3
D) 1/2 E) 1

4. Según la figura, O es punto de tangencia y $m\widehat{CL} = m\widehat{LO}$. Halle x.



A) 50° B) 60° C) 80°
D) 90° E) 100°

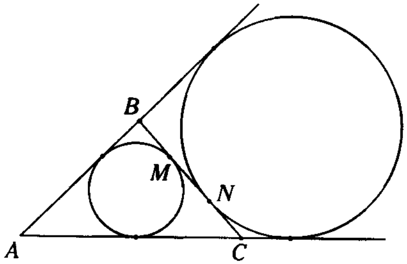
5. Desde un punto A exterior a una circunferencia, se trazan una tangente $\overline{AB}$ (B es punto de tangencia) y una secante $\overline{AEC}$, las cuales forman un ángulo cuya medida es θ. Si $m\measuredangle BED = 3\theta$ y D es punto medio del arco CE, identifique θ.

A) 30° B) 34° C) 36°
D) 40° E) 42°

6. En un cuadrante AOB de centro O se inscribe una circunferencia de centro O_1 tangente a $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\widehat{AB}$ en los puntos M, N y P respectivamente, tal que $\overline{AN}$ interseca a la circunferencia en el punto L. Si ON es cuatro veces la distancia del punto medio de $\overline{LE}$ a $\overline{LO_1}$ ($E \in \widehat{NP}$), calcule la $m\widehat{NE}$.

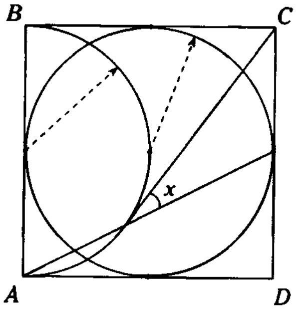
A) 25° B) 68° C) 75°
D) 76° E) 82°

7. En la figura, las circunferencias son inscritas y exinscritas al triángulo ABC. Si $AC=b$, $AB=c$, calcule MN.



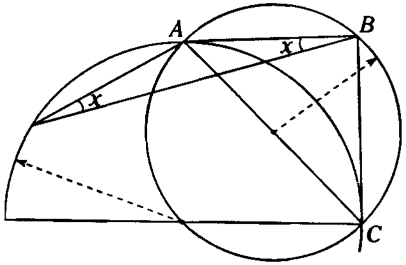
A) $\dfrac{c+b}{2}$ B) $3c-2b$ C) $2c-b$
D) $b-c$ E) $c-b$

8. De la figura, la circunferencia está inscrita al cuadrado $ABCD$. Calcule x.



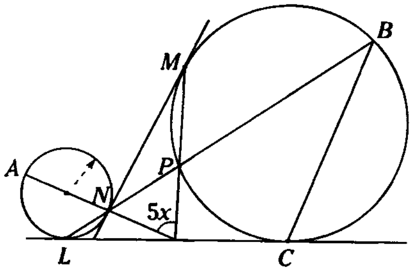
A) 18°30' B) 18° C) 26°30'
D) 37° E) 30°

9. De la figura, $AB=BC$. Calcule x.



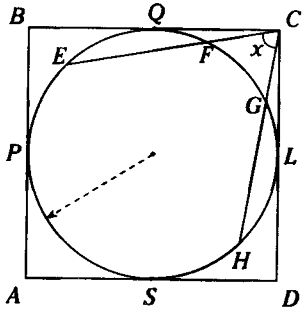
A) 10° B) 14° C) 15°
D) 18° E) 20°

10. De la figura, L, N, M y C son puntos de tangencia, dado que $m\sphericalangle PBC=3x$ y $m\overset{\frown}{AL}=4x$. Calcule x.



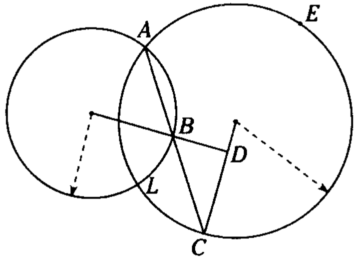
A) 16° B) 18° C) 18°30'
D) 22°30' E) 26°30'

11. De la figura, la circunferencia está inscrita al cuadrado $ABCD$.
Si $m\overset{\frown}{PE}=m\overset{\frown}{QF}=m\overset{\frown}{GL}=m\overset{\frown}{HS}$, calcule x.



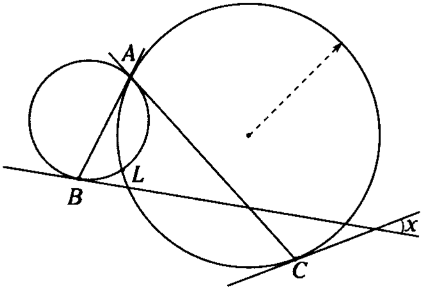
A) 55° B) 60° C) 65°
D) 70° E) 75°

12. De la figura, $m\widehat{AEC} - m\widehat{AB} = 200°$. Calcule la $m\sphericalangle BDC$.



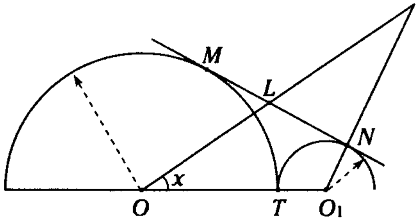
A) 100° B) 90° C) 80°
D) 110° E) 120°

13. De la figura A, B, C son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AB} > 216°$, calcule el mayor entero de x.



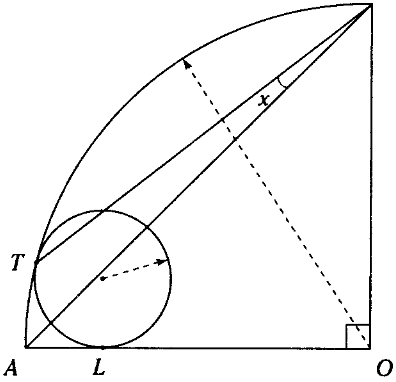
A) 33° B) 34° C) 35°
D) 36° E) 37°

14. De la figura, M, N y T son puntos de tangencia. Si $\dfrac{OT}{4} = TO_1 = ML = \dfrac{LN}{3}$, calcule x.



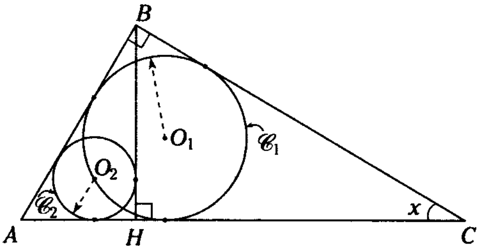
A) 8° B) 14° C) 16°
D) 26°30' E) 29°

15. De la figura, T y L son puntos de tangencia. Si $LO = 3(AL)$, calcule x.



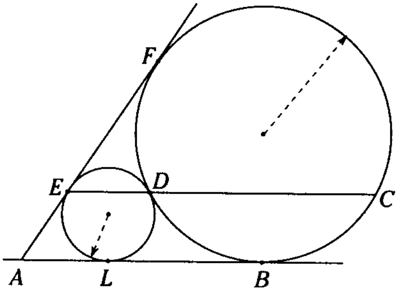
A) 6° B) 7° C) 8°
D) 16° E) 14°

16. De la figura, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ están inscritas en los triángulos ABC y ABH.



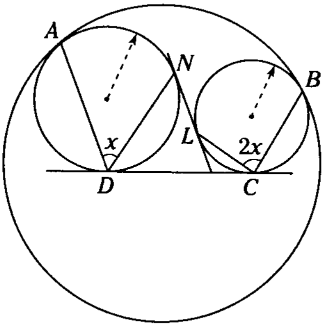
A) 15° B) 30° C) 37°
D) 22°30' E) 32°

17. Según la figura, B, D, L, E y F son puntos de tangencia; $\overline{CD} // \overline{AB}$. Calcule $m\widehat{FC}$.



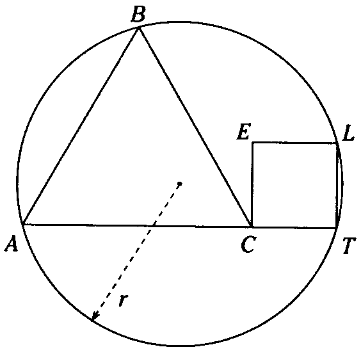
A) 120° B) 140°
C) 60°
D) 40° E) 100°

18. De la figura, los puntos A, B, C, D, N y L son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AB} = 108°$, halle x.



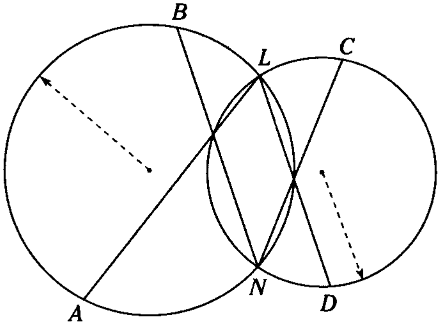
A) 42° B) 48°
C) 52°
D) 56° E) 60°

19. De la figura, $r = 16$ cm. Si el triángulo ABC es equilátero y $ELTC$ un cuadrado, determine la distancia de T a $\overline{LA}$.



A) 10 cm B) 8 cm
C) 6 cm
D) 4 cm E) 2 cm

20. De la figura, $m\widehat{BL} = m\widehat{LC}$ y $m\widehat{AB} = 176°$. Calcule la $m\widehat{CD}$.



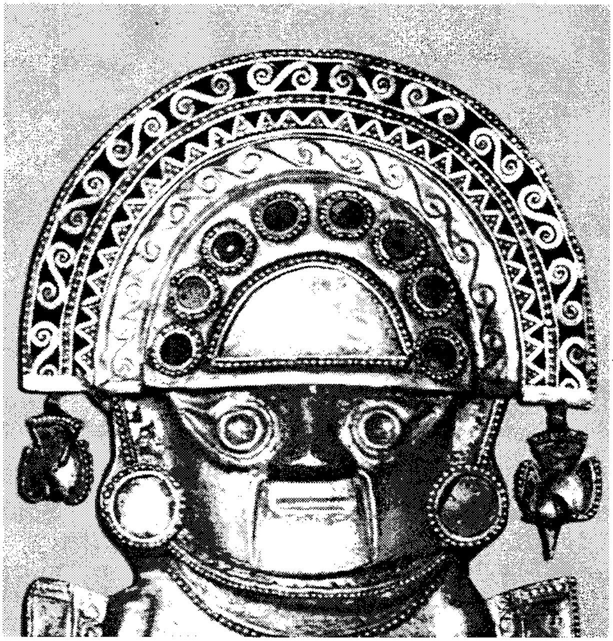
A) 167° B) 140°
C) 176°
D) 188° E) 180°

1	C
2	B
3	E
4	D
5	C
6	C
7	D
8	C
9	C
10	D
11	B
12	C
13	C
14	B
15	C
16	B
17	C
18	B
19	B
20	C

Claves

Capítulo IX

Figuras inscritas y circunscritas



En el tocado del Tumi de Illimo (Lambayeque) podemos encontrar la inscripción del movimiento del mar. En los penachos en forma de Spondylus podemos apreciar inscritas, también, cuentas de amatista crisocola (turquesa peruana) y ámbar.

Figuras inscritas y circunscritas

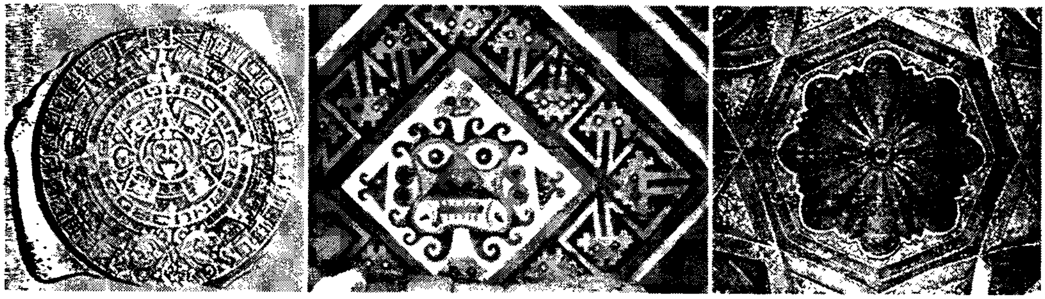
OBJETIVOS

- Definir y estudiar el polígono inscrito, exinscrito y circunscrito en una circunferencia.
- Conocer el polígono bicéntrico y sus propiedades.
- Estudiar los polígonos inscriptibles, exinscriptibles y circunscriptibles.

INTRODUCCIÓN

Sin duda, una de las cosas que el hombre a través del tiempo realiza, es grabar letreros o figuras en piedra, madera, metal u otro material y a este hecho se le llama inscribir y en Geometría inscribir significa trazar una figura dentro de otra, de manera que tengan puntos comunes sin cruzarse, mientras que circunscribir, es trazar una línea cerrada que contenga todos los vértices de otra o que este compuesta de lados tangentes todos ellos a la figura interior o inscrita.

Vemos así que los Aztecas inscribieron en piedra su calendario, los Mochicas lo hicieron en sus muros como la representación del AiA PAEC de la huaca de la Luna, hoy en día es común ver figuras inscritas y circunscritas en bóvedas de templos.



Las figuras inscritas, circunscritas y exinscritas están presentes en los grabados de muros, telares, estructuras, etc. que el hombre a través del tiempo ha realizado y seguirá realizando.

POLÍGONO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN

Un polígono está inscrito en una circunferencia, si todos sus vértices pertenecen a dicha circunferencia.

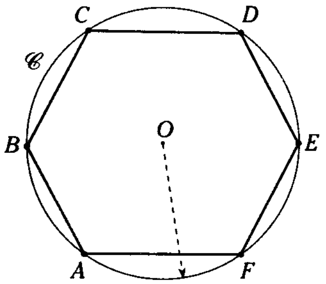


Figura 9.1

Sea 𝒞 una circunferencia de centro O.

Si A, B, C, D, E, y F pertenecen a 𝒞, designamos que el polígono $ABCDEF$ está inscrito en 𝒞.

Observación

A la circunferencia 𝒞 se le llama circunferencia circunscrita al polígono $ABCDEF$.

PROPIEDADES

- El centro de la circunferencia circunscrita equidista de los vértices del polígono inscrito en dicha circunferencia.

  Las mediatrices de todos los lados del polígono inscrito concurren en el centro de la circunferencia circunscrita.

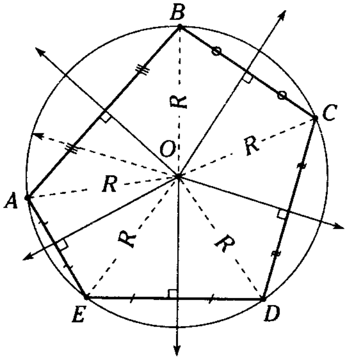
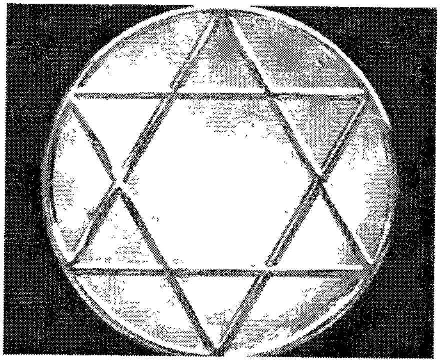


Figura 9.2

O : equidista de los vértices.

Las mediatrices de los lados concurren en O.



La estrellla de cinco vértices está inscrita en una circunferencia.

TRIÁNGULO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

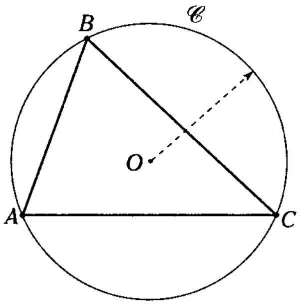


Figura 9.3

$\triangle ABC$: triángulo inscrito en $\mathscr{C}$.
$\mathscr{C}$: circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$.
O : centro de la circunferencia $\mathscr{C}$.

CUADRILÁTERO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

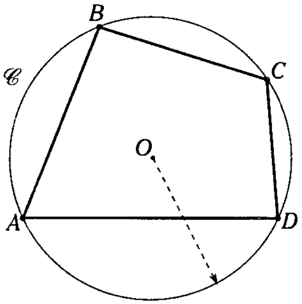


Figura 9.4

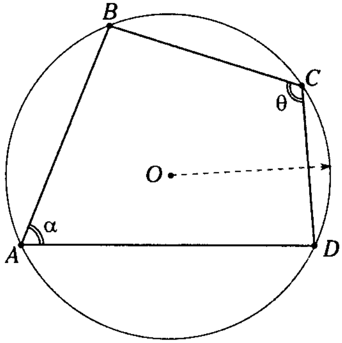
$\sqsupset ABCD$: cuadrilátero inscrito en $\mathscr{C}$.
$\mathscr{C}$: circunferencia circunscrita al cuadrilátero $ABCD$.

Observación

Por cuestiones prácticas, al cuadrilátero inscrito en $\mathscr{C}$ se le denominará cuadrilátero inscrito.

Teoremas

1. En todo cuadrilátero inscrito, la suma de las medidas de los pares angulares opuestos es 180°.

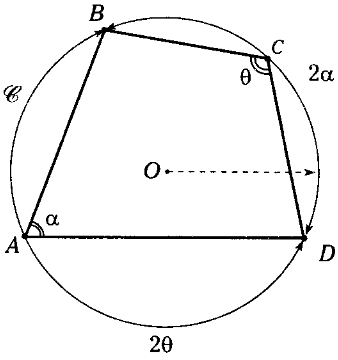


(a)

Sean: $m\angle BAD = \alpha$ y $m\angle BCD = \theta$
$\rightarrow \alpha + \theta = 180°$

Demostración

Por ángulo inscrito en una circunferencia.



(b)

Figura 9.5

Si $m\angle BAD = \alpha \rightarrow m\widehat{BCD} = 2\alpha$
y $m\angle BCD = \theta \rightarrow m\widehat{BAD} = 2\theta$
$\therefore$ en $\mathscr{C}$: $2\alpha + 2\theta = 360°$
$\rightarrow \alpha + \theta = 180°$

2. En todo cuadrilátero inscrito, las diagonales con los lados opuestos determinan ángulos de igual medida.

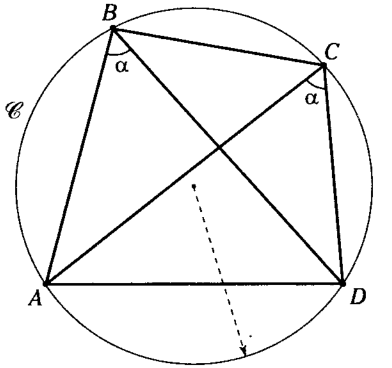


Figura 9.6

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$: son lados opuestos del ⏢$ABCD$

$\overline{BD}$ y $\overline{CA}$: son diagonales del ⏢$ABCD$

$\rightarrow$ m∢ABD = m∢ACD = α

Demostración

En la figura 9.6, los ángulos ABD y ACD están inscritos en $\mathscr{C}$ y por teorema de los ángulos inscritos, m∢$ABD = \dfrac{m\overset{\frown}{AD}}{2}$ y m∢$ACD = \dfrac{m\overset{\frown}{AD}}{2}$.

Por lo tanto, m∢ABD = m∢ACD.

3. En todo polígono inscrito de $2n$ lados, la suma de las medidas angulares tomados en forma alterna es $180°(n-1)$.

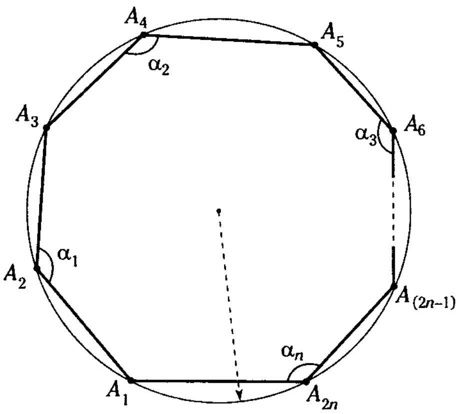


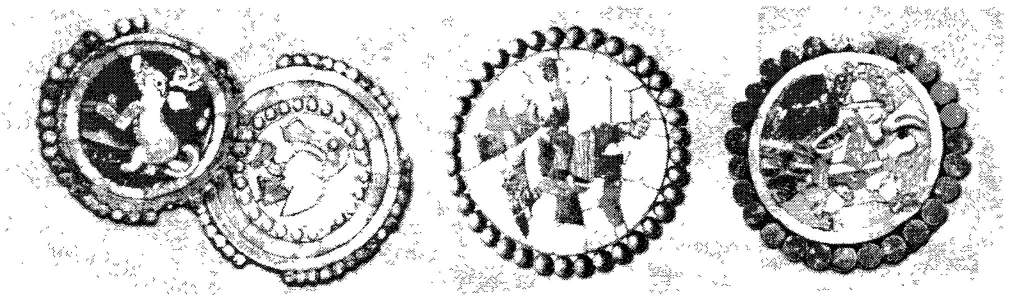
Figura 9.7

Sean $A_1, A_2, ... A_{(2n)}$ los vértices de un polígono de $2n$ lados inscrito en una circunferencia.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 180°(n-1)$$

Donde $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$

Para su demostración bastará utilizar convenientemente el primer teorema del cuadrilátero inscrito, a los cuadriláteros que se formaran al trazar diagonales desde el vértice A_1.



Las imágenes muestran figuras inscritas y circunscritas como el venado y el pelícano de la cultura moche, o el cóndor de la cultura Mochica, que están inscritas en adornos para las orejas.

POLÍGONO INSCRIPTIBLE EN UNA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN

Es aquel polígono en el cual por todos sus vértices se puede trazar una única circunferencia.

Si por A, B, ..., E, F. se puede trazar la circunferencia $\mathscr{C}$ entonces el polígono($ABC...EF$) es un polígono inscriptible.

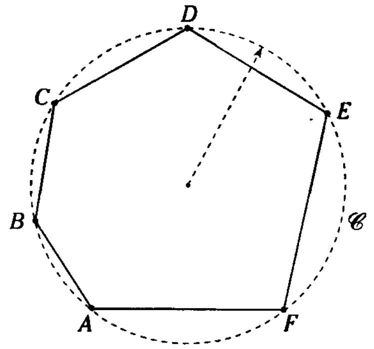
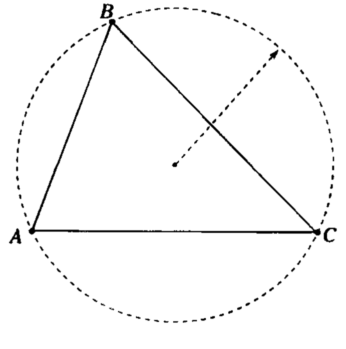


Figura 9.8

TRIÁNGULO INSCRIPTIBLE EN UNA CIRCUNFERENCIA

Teorema

Todo triángulo es inscriptible en una circunferencia.Sea el triángulo ABC, por A, B y C se puede trazar una circunferencia.

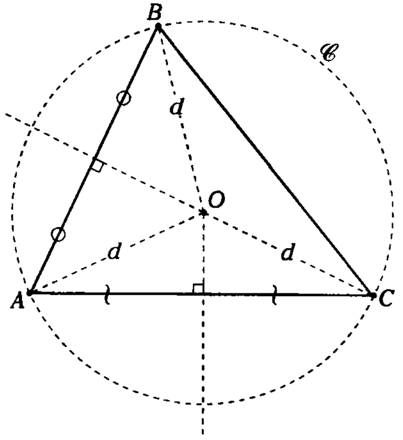


(a)

Demostración

En el triángulo ABC, trazamos las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, las cuales se intersecan en O. Del teorema de la mediatriz, $OA = OB = d$, aunque también $OA = OC = d$.

Por lo tanto, $OA = OB = OC = d$; y así con centro en O y radio de longitud d se puede trazar una circunferencia $\mathscr{C}$, la cual va a contener a los puntos A, B, y C.



(b)

Figura 9.9

Observación

En el triángulo OBC, la altura trazada desde O es mediana, bisectriz y parte de la mediatriz, de ahí que, en todo triángulo las mediatrices de sus tres lados son concurrentes (concurrentes significa que se intersecan en único punto).

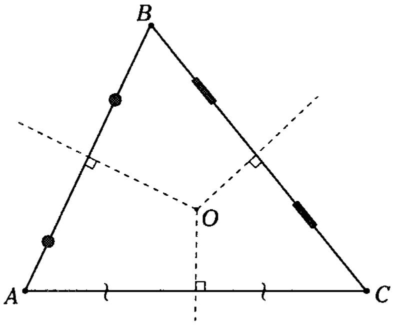


Figura 9.10

En el triángulo ABC, las mediatrices de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ concurren en O.

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE A UNA CIRCUNFERENCIA

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo.

Si por A, B, C, y D se pudiera trazar una circunferencia, el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrilátero inscriptible.

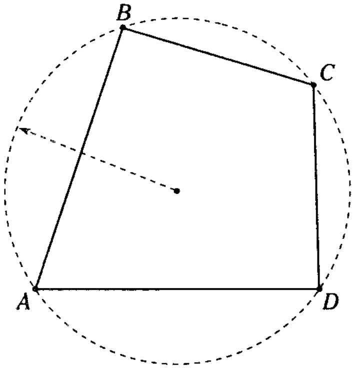
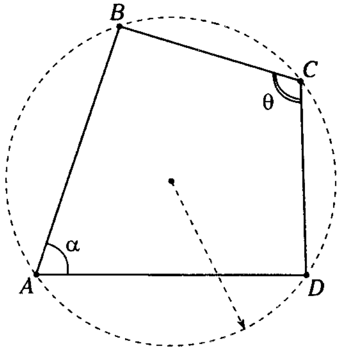


Figura 9.11

Teorema

Si en un cuadrilátero convexo, los pares angulares opuestos son suplementarios, entonces el cuadrilátero es inscriptible.



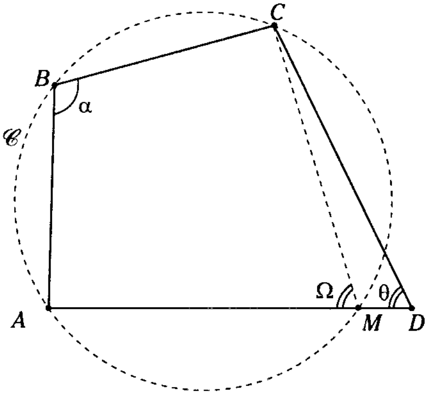
(a)

$ABCD$: cuadrilátero convexo.

Si $m\angle BAD + m\angle BCD = 180°$, el cuadrilátero $ABCD$ resulta inscriptible.

Demostración

Como todo triángulo es inscriptible por A, B y C, trazamos la circunferencia $\mathscr{C}$.



(b)

Asumiendo que D no pertenece a $\mathscr{C}$, tenemos dos posibilidades: este puede estar en la región exterior o en la región interior de $\mathscr{C}$.

Primero: Suponiendo que D pertenece a la región exterior, entonces $\overline{AD}$ interseca a $\mathscr{C}$ en M y en el cuadrilátero inscrito $ABCM$.

$\alpha + \Omega = 180°$

pero de la condición

$\alpha + \theta = 180°$

$\therefore \ \Omega = \theta$ (I)

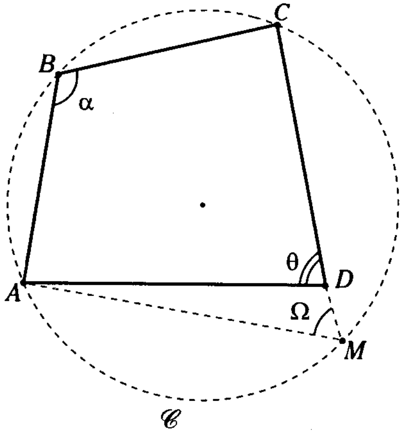
luego en el $\triangle MCD$: $\Omega \geq \theta$ (II)

de (I) y (II) la $m\measuredangle MCD = 0°$

entonces D pertenece a $\mathscr{C}$ $(M = D)$

Por lo tanto, A, B, C y D pertenecen a $\mathscr{C}$

Segundo: Ahora suponiendo que D pertenece a la región interior, prolongamos $\overline{CD}$ hasta intersecar a $\mathscr{C}$ en M.



(c)

Figura 9.12

En el cuadrilátero inscrito $ABCM$

$\alpha + \Omega = 180°$

pero de la condición

$\alpha + \theta = 180°$

$\therefore \ \theta = \Omega$ (I)

luego en el $\triangle AMD$: $\theta \geq \Omega$ (II)

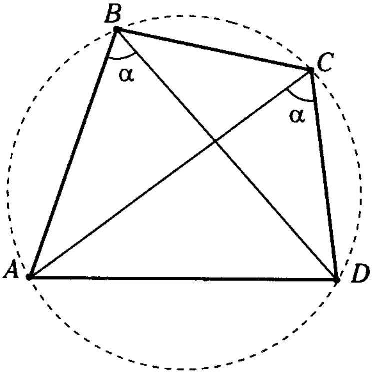
de (I) y (II) la $m\measuredangle MAD = 0°$

entonces D pertenece a $\mathscr{C}$ $(M = D)$

Por lo tanto, A, B, C y D pertenecen a $\mathscr{C}$.

Teorema

Si en un cuadrilátero convexo, las diagonales y los lados opuestos determinan ángulos congruentes; significa que es inscriptible.



(a)

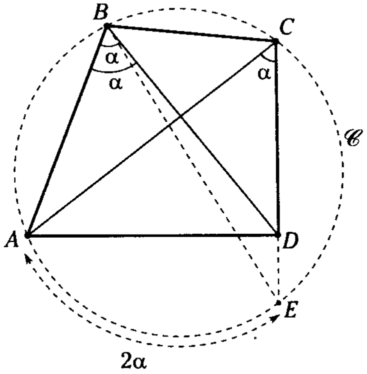
$ABCD$: cuadrilátero convexo.

Si $m\measuredangle ABD = m\measuredangle ACD$, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrilátero inscriptible.

Demostración

Asumiendo que la circunferencia contiene a los puntos A, B, C y no contiene a D, tenemos dos posibilidades:

Primero. Suponiendo que el punto D pertenece a la región interior de dicha circunferencia.



(b)

Figura 9.13

entonces la prolongación de $\overline{CD}$ interseca a $\mathscr{C}$ en E y, por la propiedad del ángulo inscrito

$m\sphericalangle ABE = m\sphericalangle ACE = \alpha$

pero por la condición:

$m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle ACD = \alpha$

$\therefore\ m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle ABE$

lo cual solamente sucede si $D = E$; así que $D \in \mathscr{C}$.

Observación

Dado un cuadrilátero *ABCD*, al prolongar el lado *AD* hasta el punto *E*, tal que $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle CDE$, determinamos que el cuadrilátero es inscriptible.

Cuadriláteros inscriptibles más frecuentes

Todo cuadrado, rectángulo y trapecio isósceles son cuadriláteros inscriptibles, y a ellos podemos agregar los siguientes cuadriláteros inscriptibles.

a. Si $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle ADC = 90°$, el cuadrilátero *ABCD es* inscriptible.

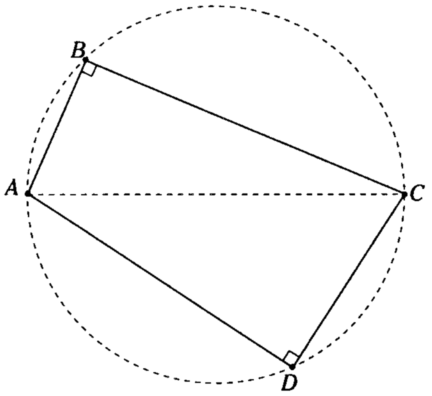


Figura 9.14

→ $\overline{AC}$ es el diámetro de la circunferencia que contiene a los puntos *A*, *B*, *C* y *D*.

b. Si $m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle ACD = 90°$, cuadrilátero *ABCD* es inscriptible.

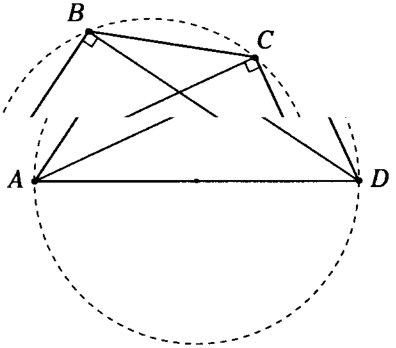


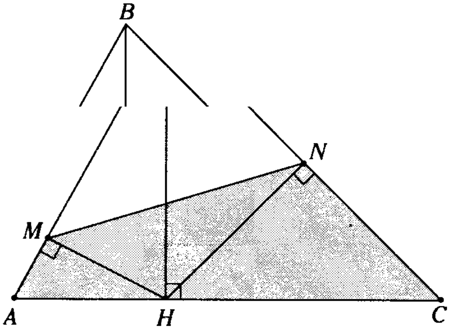
Figura 9.15

→ $\overline{AD}$ diámetro de la circunferencia que contiene a los puntos *A*, *B*, *C* y *D*.

Teorema de Taylor

En todo triángulo oblicuángulo, las proyecciones ortogonales del pie de una de sus alturas, sobre sus lados adyacentes y los extremos del lado relativo a dicha altura, son vértices de un cuadrilátero inscriptible.

1.

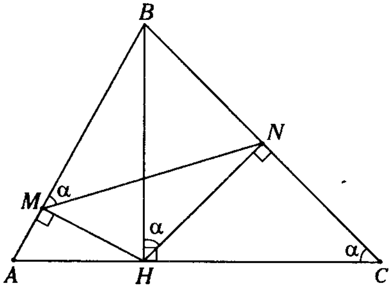


(a)

Sean M y N proyección ortogonal de H sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

$\square AMNC$: cuadrilátero inscriptible.

Demostración



(b)

Figura 9.16

- En el $\triangle BHC$

  $m\sphericalangle BHN = m\sphericalangle BCH = \alpha$

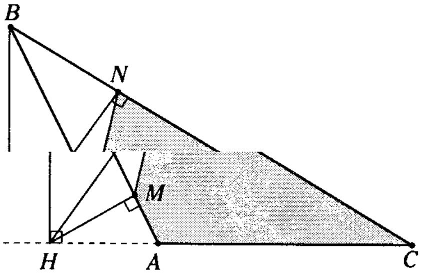
- $\square MBNH$: inscriptible

  $m\sphericalangle BMN = m\sphericalangle BHN = \alpha$

  $\rightarrow\ m\sphericalangle BMN = m\sphericalangle ACB = \alpha$

  Por lo tanto, $AMNC$: cuadrilátero inscriptible.

2.



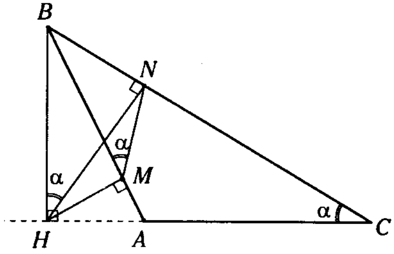
(a)

Sean M y N proyección ortogonal de H sobre $\overline{AB}$ y BC respectivamente.

$\square AMNC$: cuadrilátero inscriptible.

Demostración

Análogamente al caso anterior, se demuestra que el cuadrilátero $AMNC$ es inscriptible.



(b)

Figura 9.17

- En el $\triangle BHC$

  $m\sphericalangle BHN = m\sphericalangle BCH = \alpha$

- $\square MNBH$: inscriptible

  $m\sphericalangle BHN = m\sphericalangle BMN = \alpha$

  $\rightarrow\ m\sphericalangle BMN = m\sphericalangle BCA = \alpha$

  Por lo tanto, $AMNC$: cuadrilátero inscriptible.

Teorema

Si dos triángulos tienen respectivamente un ángulo de igual medida y sus lados opuestos de igual longitud, además las alturas relativas a dichos lados son congruentes, entonces dichos triángulos son congruentes.

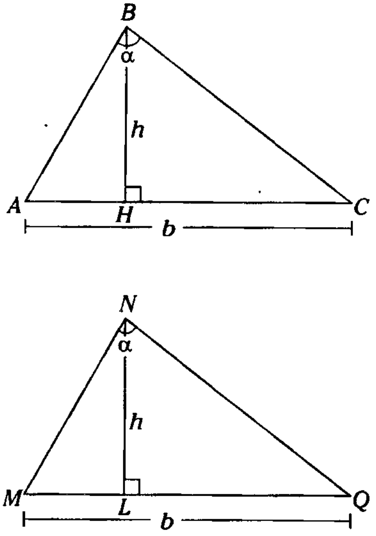


Figura 9.18

Si $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle MNQ = \alpha$;

$AC = MQ = b$ y $BH = NL = h$

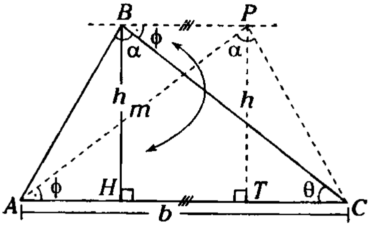
$\rightarrow$ el $\triangle ABC$ y el $\triangle MNQ$ son congruentes.

Demostración

La demostración de este teorema necesita una consideración muy importante ya que existen dos posibilidades.

$\triangle ABC \cong \triangle MNQ$ o $\triangle ABC \cong \triangle QNM$

Si consideramos $BC > BA$ y $NQ > NM$, solo se cumple el primer caso.



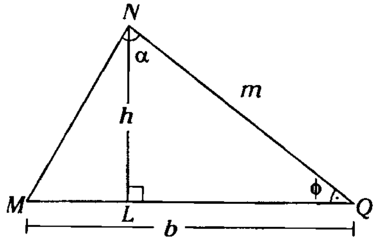


Figura 9.19

Al ser $m\sphericalangle NQM = \phi$, $m\sphericalangle BCA = \theta$ si $\phi = \theta$, quedará demostrado el teorema.

Trazamos el triángulo *APC* congruente al triángulo *QNM*, es decir,

$$AP = QN = m \text{ y } m\sphericalangle PAC = m\sphericalangle NQM = \phi$$

como $BH = PT = h$

$$\rightarrow \overline{BP} // \overline{AC}$$

pero también el cuadrilátero *ABPC* es inscriptible.

$\rightarrow$ $m\sphericalangle PBC = m\sphericalangle PAC = \phi$ y como $\overline{BP} // \overline{AC}$, entonces $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle PBC$

$$\therefore \ \theta = \phi$$

con lo cual queda demostrado el teorema debido a que la $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle NMQ$ y se cumple el caso (A.L.A.)

POLÍGONO CIRCUNSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN

Un polígono está circunscrito a una circunferencia, si todos sus lados son tangentes a dicha circunferencia.

Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia de centro O. Si $\overline{AB}$, $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$, y $\overline{AF}$ son tangentes a $\mathscr{C}$, entonces el polígono $ABCDEF$ esta circunscrito en $\mathscr{C}$.

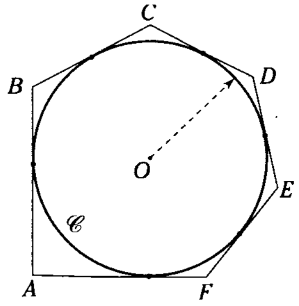


Figura 9.20

> **Observación**
>
> A la circunferencia $\mathscr{C}$, se le llama circunferencia inscrita en el polígono *ABCDEF*.
> Podemos decir entonces, que una circunferencia esta inscrita en un polígono si esta es tangente a todos los lados del polígono.

PROPIEDADES

- El centro de la circunferencia inscrita equidista de todos los lados del polígono circunscrito a $\mathscr{C}$.
- Las bisectrices interiores trazadas desde los vértices de un polígono circunscrito a una circunferencia concurren en el centro de dicha circunferencia.
- O: Equidista de los lados.
- Las bisectrices interiores concurren en O.

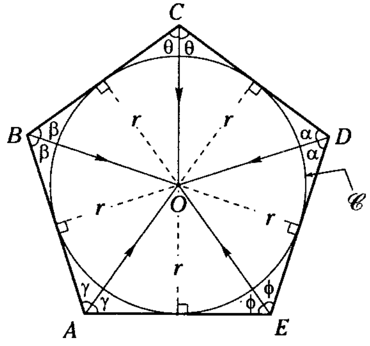


Figura 9.21

TRIÁNGULO CIRCUNSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA

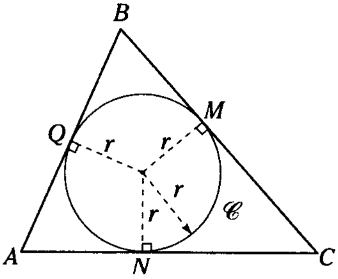


Figura 9.22

En la figura 9.22, el $\triangle ABC$ está circunscrito a la circunferencia $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$: circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$.

r : radio de la circunferencia inscrita (inradio).

> **Observación**
>
> El centro de la circunferencia inscrita equidista de los lados del triángulo circunscrito a dicha circunferencia.

Propiedad

En todo triángulo, la longitud de los segmentos tangentes determinados por la circunferencia inscrita es igual a la diferencia de la longitud del semiperimetro y la longitud del lado opuesto a dicho segmento.

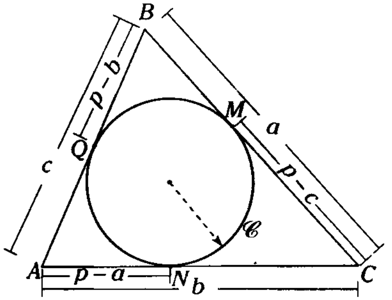


Figura 9.23

Asi en la figura 9.23:

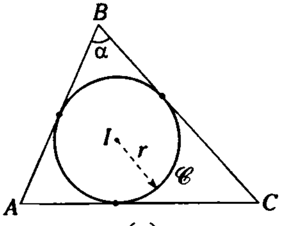
$$AN = p - a$$

$$BQ = p - b$$

$$CM = p - c$$

Teorema de Poncelet

En todo triángulo se cumple que la suma de las longitudes de dos lados es igual a la suma de la longitud del tercer lado y dos veces el inradio multiplicado por la cotangente de la mitad de la medida del ángulo que se opone al tercer lado.



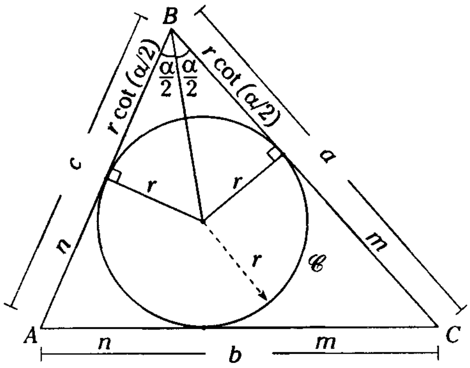
(*a*)

𝒞 : circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$.

r : inradio del $\triangle ABC$.

$$AB + BC = AC + 2r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Demostración



(*b*)

Figura 9.24

$$AB = n + r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = c \qquad \text{(I)}$$

$$BC = m + r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = a \qquad \text{(II)}$$

$$AC = n + m = b \qquad \text{(III)}$$

Sumando (I) y (II)

$$a + c = \underbrace{m + n} + 2r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

de (III)

$$\rightarrow \; a + c = b + 2r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\therefore \; AB + BC = AC + 2r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Caso particular del teorema de Poncelet

En todo triángulo rectángulo, la suma de las longitudes de los catetos es igual a la suma de la longitud de la hipotenusa y dos veces el inradio.

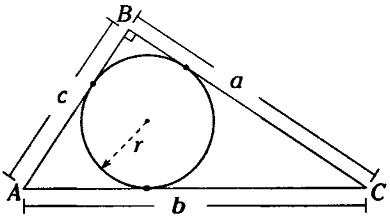


Figura 9.25

$$a + c = b + 2r$$

Demostración del teorema de Poncelet

Aplicando el teorema general

$$a + c = b + 2r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

donde $\alpha = 90°$

$$\rightarrow\ a + c = b + 2r$$

Aplicación del teorema de Poncelet

1. En todo triángulo rectángulo, si se traza la altura relativa a la hipotenusa, la longitud de esta altura es igual a la suma de las longitudes de los inradios de los triángulos rectángulos parciales y el del inicial.

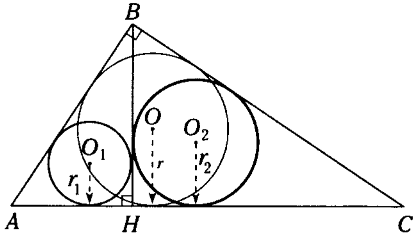


Figura 9.26

$\overline{BH}$: altura relativa a $\overline{AC}$

r_1 : inradio del ⊾ABH

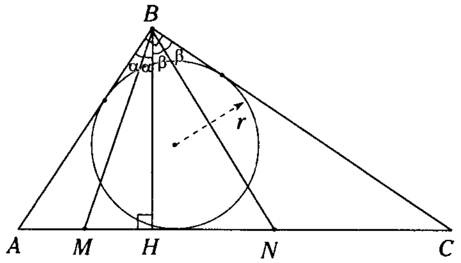
r_2 : inradio del ⊾HBC

r : inradio del ⊾ABC

$$\boxed{BH = r_1 + r_2 + r}$$

- Para su demostración bastará aplicar el teorema de Poncelet en los triángulos ABH, HBC y ABC.

2. En el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la altura BH y las bisectrices $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$ de los ángulos ABH y HBC, respectivamente. Así resulta que MN es igual a dos veces el inradio del triángulo ABC.



(a)

r : inradio del ⊾ABC.

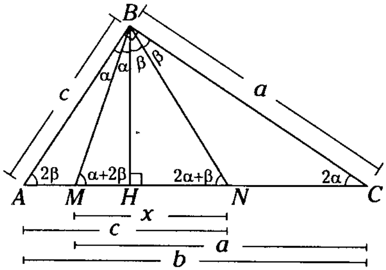
$\overline{BM}$: bisectriz del ∢ ABH.

$\overline{BN}$: bisectriz del ∢ HBC.

entonces

$$\boxed{MN = 2r}$$

Demostración



(b)

Figura 9.27

Sea m∢ABM = m∢MBH = α

$\rightarrow$ en el ⊾ABC: m∢BCA = 2α

Sea m∢HBN = m∢NBC = β

$\rightarrow$ en el ⊾ABC: la m∢BAC = 2β

△MBC: m∢BMC = m∢MBC = $\alpha + 2\beta$

$\rightarrow$ $MC = BC = a$

△NBA: m∢BNA = m∢NBA = $\beta + 2\alpha$

$\rightarrow$ $NA = AB = c$

como $AC = b \rightarrow AM = b - a$ y $CN = b - c$

En el ⊾ABC del teorema de Poncelet:

$$a + c = b + 2r \qquad \text{(I)}$$

De la figura 9.27

$$x = c - AM = c - (b - a)$$

$$a + c = b + x \qquad \text{(II)}$$

De I y II: $x = 2r$

CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

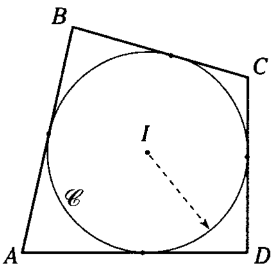


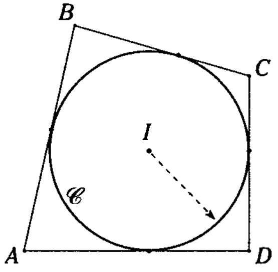
Figura 9.28

En la figura 9.28, el cuadrilátero *ABCD* está circunscrito a la circunferencia $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$: circunferencia inscrita en el ⏢*ABCD*.

Teorema de Pitot

En todo cuadrilátero circunscrito, la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos.



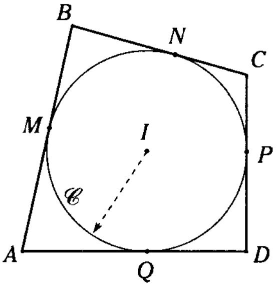
(a)

ABCD : ⏢ circunscrito a la circunferencia $\mathscr{C}$

$$\rightarrow \boxed{AB + CD = BC + AD}$$

Demostración

Sean *M*, *N*, *P* y *Q* los puntos de tangencia de la circunferencia $\mathscr{C}$ con $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, y $\overline{AD}$ respectivamente.



(b)

Figura 9.29

entonces $AM = AQ$; $BM = BN$; $CN = CP$; $DP = DQ$

como

$$AB + CD = (AM + MB) + (CP + PD)$$

por lo tanto, reemplazando tenemos

$$AB + CD = (AQ + BN) + (NC + QD)$$

agrupando convenientemente

$$AB + CD = (AQ + QD) + (BN + NC)$$

$$\therefore\ AB + CD = AD + BC$$

Teorema

En todo polígono circunscrito cuyo número de lados es par, la suma de las longitudes de los lados tomados en forma alternada y consecutivamente es igual a la suma de las longitudes de los otros lados restantes. $n = 2k$; $(\forall\, k \in \mathbb{N})$

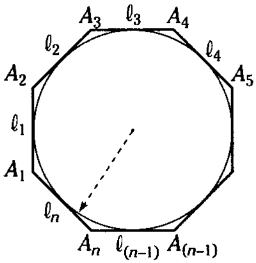
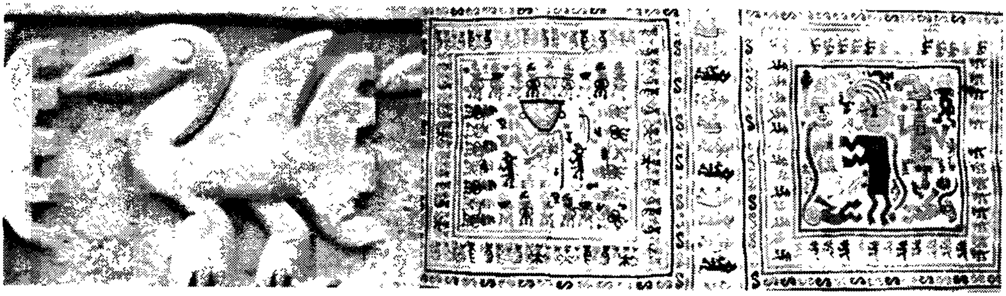


Figura 9.30

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=\frac{n}{2}} \ell(2i-1) = \sum_{j=1}^{j=\frac{n}{2}} \ell(2j)}$$



El cuadrilátero circunscrito se puede apreciar en El muro de la ciudadela Chan-Chan, donde las líneas están circunscritas a la representación de un pelícano, y en el telar mochica observamos cuadriláteros circunscritos a figuras antropomorfas.

POLÍGONO CIRCUNSCRIPTIBLE A UNA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN

Es aquel polígono al que se le se puede trazar una circunferencia tangente a todos sus lados.

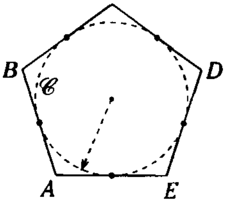
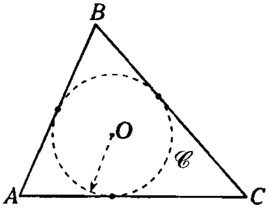


Figura 9.31

Dado el polígono *ABCDE*, se puede trazar una circunferencia $\mathscr{C}$ tangente a todos los lados del polígono. De esta manera, asumimos que el polígono *ABCDE* es **circunscriptible.**

Teorema

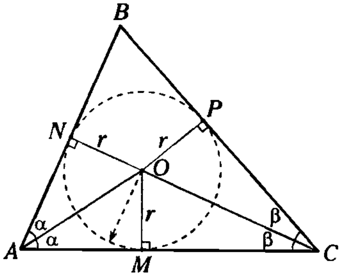
Todo triángulo es circunscriptible.



(a)

Dado un $\triangle ABC$, siempre se puede trazar una circunferencia tangente a sus tres lados.

Demostración



(b)

Figura 9.32

Por *A* y *C* trazamos las bisectrices interiores que se intersecan en *O*.

Del teorema de la bisectriz de un ángulo

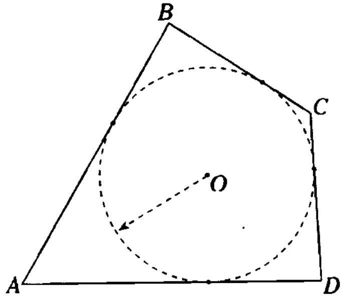
$$ON = OM = r \quad \text{y} \quad OM = OP = r$$

$$\therefore \quad ON = OP = OM = r$$

Es decir, *O* equidista de los tres lados, por lo que con centro en *O* y radio *r*, se puede trazar una circunferencia que será tangente a los tres lados.

Teorema

Si en un cuadrilátero la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos, se da que el cuadrilátero es circunscriptible.



(a)

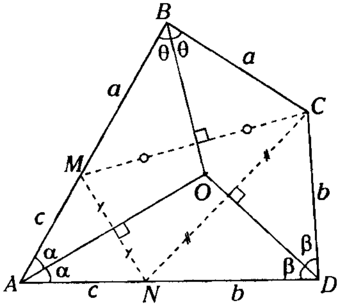
Si $AB + CD = BC + AD$

$\rightarrow$ ⏢ $ABCD$ es circunscriptible.

Demostración

En el cuadrilátero $ABCD$

Sea $AB + CD = BC + AD$



(b)

Asumiendo que $AB > BC$ y $AD > CD$; entonces $AB-BC=AD-CD$ en $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ podemos ubicar los puntos M y N respectivamente, tal que $BM=BC=a$ y $DN=DC=b$

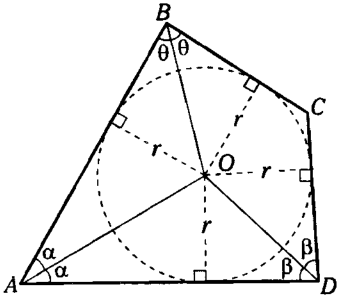
como $AB - BC = AD - CD$

$\rightarrow$ $AM = AN = c$

En el $\triangle MNC$, las mediatrices de $\overline{MN}$, $\overline{NC}$ y $\overline{MC}$ pasan por A, D y B respectivamente, pero como en todo triángulo las mediatrices son concurrentes (sea O el punto de concurrencia), AO, DO, y BO resultan ser mediatrices de $\overline{MN}$, $\overline{NC}$ y $\overline{MC}$, así como también bisectrices en los triángulos MAN; NDC y MBC.

Es decir O equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ para $\overrightarrow{AO}$ y de $\overline{DA}$ y $\overline{DC}$ para $\overrightarrow{DO}$ así como de $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$ para $\overrightarrow{BO}$, por lo tanto O equidista de los cuatro lados.

Entonces con centro en O y radio r (siendo r la distancia de O a los lados)se puede trazar una circunferencia que es tangente a los cuatro lados. Por lo tanto, el ⏢ $ABCD$ es un cuadrilátero circunscriptible.



(c)

Figura 9.33

Observación

Si en un polígono se puede inscribir una circunferencia, determinamos que el centro de dicha circunferencia es punto de concurrencia de las bisectrices trazadas desde los vértices del polígono.

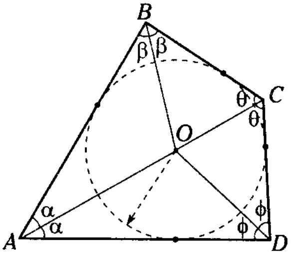


Figura 9.34

Nota

Si las bisectrices interiores de un polígono son concurrentes, dicho polígono es **circunscriptible.**

POLÍGONO EXINSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN

Es aquel polígono exterior a una circunferencia donde las rectas que contienen a sus lados son tangentes a dicha circunferencia.

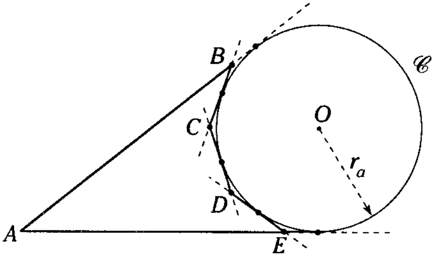
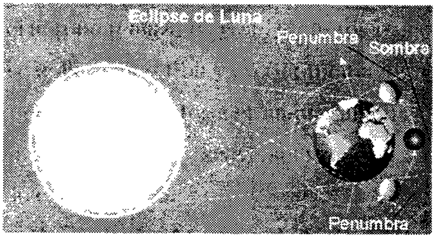
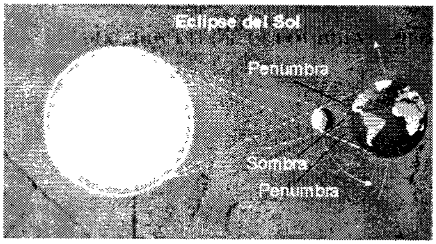


Figura 9.35

El polígono *ABCDE* está exinscrito a la circunferencia 𝒞 que a la vez está exinscrita al polígono *ABCDE.*





En los eclipses los rayos del sol, tangentes a la Luna y a la Tierra forma un cuadrilátero exinscrito al Sol.

Nota

- Al centro de la circunferencia exinscrita a la circunferencia 𝒞 se le denominará excentro.
- Al radio de la circunferencia exinscrita se le denominará exradio.

PROPIEDAD

El excentro equidista de todos los lados del polígono exinscrito.

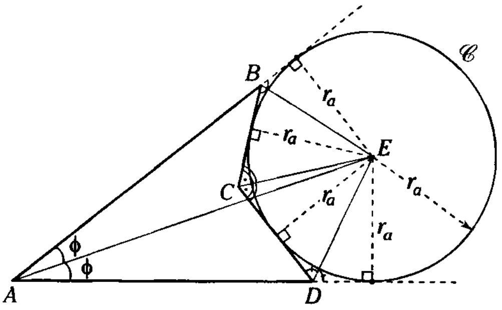


Figura 9.36

En la figura 9.36

E : es el excentro del polígono exinscrito $ABCD$.

$\mathscr{C}$: circunferencia exinscrita al polígono $ABCD$.

$ABCD$: polígono exinscrito.

TRIÁNGULO EXINSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA

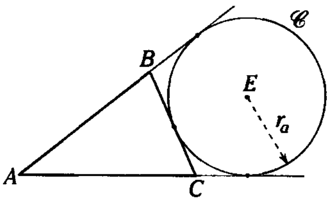


Figura 9.37

$\triangle ABC$: triángulo exinscrito a $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$: circunferencia exinscrita al $\triangle ABC$

E : excentro $\triangle ABC$.

r_a : exradio del $\triangle ABC$.

Nota

En la figura 9.38, los segmentos tangentes $\overline{AM}$ y $\overline{AN}$ tienen longitudes que son iguales a la longitud del semiperímetro de la región triangular ABC.

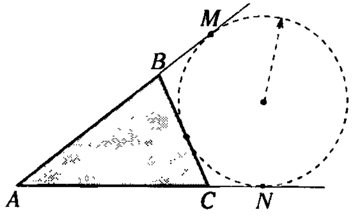


Figura 9.38

Sea

p : longitud del semiperímetro de la región triangular ABC.

$\rightarrow AM = AN = p$

CUADRILÁTERO EXINSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA

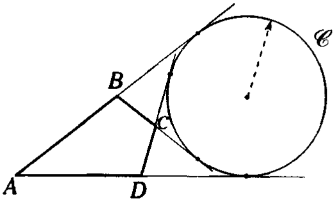


Figura 9.39

$ABCD$: cuadrilátero exinscrito a $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$: circunferencia exinscrita al $\square ABCD$.

Teorema de Steiner

En todo cuadrilátero exinscrito, la sustracción de las longitudes de dos lados opuestos es igual a la sustracción de las longitudes de los otros dos. Así en la figura anterior,

$$AB - CD = AD - BC$$

Demostración

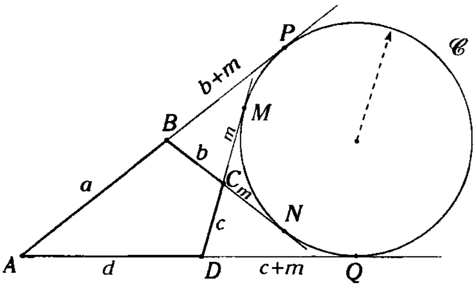
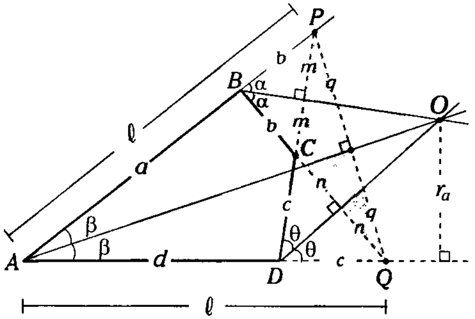


Figura 9.40



(b)

De la figura 9.40, $CM = CN = m$

$BP = BN = b + m$

$DM = DQ = c + m$

Por teorema: $AP = AQ$

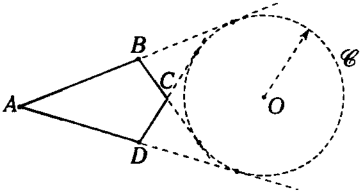
$\rightarrow\ a + b + m = d + c + m$

eliminando m: $a + b = d + c$

$\therefore\ a - c = d - b$

Teorema recíproco de Steiner

Si en un cuadrilátero la sustracción es de las longitudes de sus lados opuestos son iguales, el cuadrilátero es exinscriptible.



(a)

Si $AB - CD = AD - BC$

$\rightarrow$ $\exists$ una circunferencia $\mathscr{C}$ exterior, que es tangente a las prolongaciones de todos los lados del $\triangle ABCD$. Por lo tanto, el cuadrilátero $ABCD$ es exinscriptible.

Demostración

Si $AB - CD = AD - BC \rightarrow AB + BC = AD + DC$

así en la figura 9.41(b)

$\therefore\ a + b = c + d$

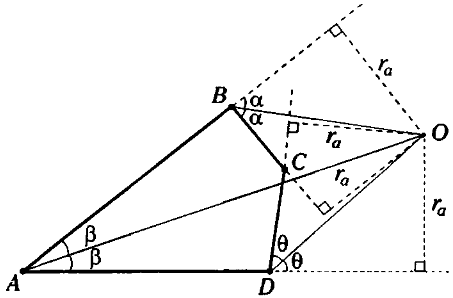
prolongamos $\overline{AB}$ hasta P, tal que $BP = BC = b$

prolongamos $\overline{AD}$ hasta Q, tal que $DQ = DC = c$

$\therefore\ AP = a + b$ y $AQ = d + c$

del dato: $AP = AQ$

- En los triángulos isósceles APQ, BPC y QDC, las alturas relativas a las bases $\overline{PQ}$, $\overline{PC}$ y $\overline{CQ}$ son mediatrices a la vez de dichos lados.
- En el triángulo PCQ, las mediatrices de los lados $\overline{PQ}$, $\overline{PC}$ y $\overline{CQ}$ son concurrentes en O, pero $\overleftrightarrow{AO}$, $\overleftrightarrow{BO}$ y $\overleftrightarrow{DO}$ son bisectrices de $\angle PAQ$, $\angle PBC$ y $\angle CDQ$. Por consiguiente, O equidista de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ respectivamente.



(c)

Figura 9.41

- En consecuencia, O equidista de los cuatro lados del $\triangle ABCD$.
- Entonces con centro en O y radio r_a se podría trazar una circunferencia, tangente a los cuatro lados del $\triangle ABCD$. (r_a: distancia de O a los lados.)
- $\triangle ABCD$ es exinscriptible.

CUADRILÁTERO BICÉNTRICO

Es aquel cuadrilátero que está inscrito en una circunferencia y circunscrito a otra.

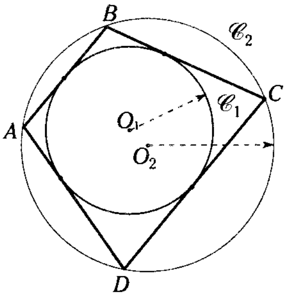


Figura 9.42

$\square ABCD$: cuadrilátero bicéntrico.

- Está circunscrito a $\mathscr{C}_1$
- Está inscrito en $\mathscr{C}_2$

Nota

Cuando un cuadrilátero es inscriptible y circunscriptible a la vez, también se le llama cuadrilátero bicéntrico.

PROPIEDAD

En todo cuadrilátero bicéntrico, los dos segmentos que tienen como extremos los puntos de tangencia de lados opuestos, del cuadrilátero circunscrito, son perpendiculares.

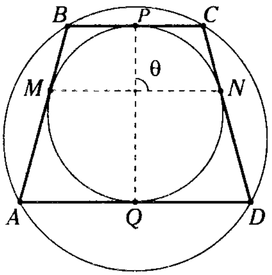
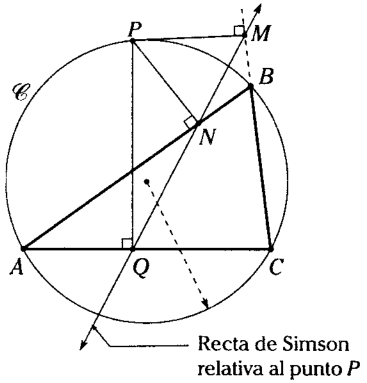


Figura 9.43

Sea $ABCD$ un cuadrilátero bicéntrico.
Si M, N, P y Q son puntos de tangencia, $\theta = 90°$.

RECTA DE SIMSON

En todo triángulo los pies de las perpendiculares, trazados a sus lados desde un punto cualesquiera de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo, son colineales (pertenecen a la recta de Simson).

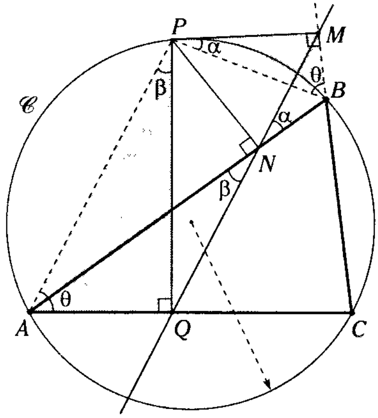


(a)

$\mathscr{C}$: circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$.

Sean M, N y Q los pies de las perpendiculares trazadas desde P a $\overline{BC}, \overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. afirmamos que M, N y Q son colineales.

Demostración



(b)

Figura 9.44

En la figura 9.44:

Trazamos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, entonces

- $APBC$: ⏢ inscrito

  $\rightarrow$ $m\sphericalangle PBM = m\sphericalangle PAC = \theta$

- ⏢ $NBMP$: inscriptible

  $\rightarrow$ $m\sphericalangle MPB = m\sphericalangle MNB = \alpha$

- ⏢ $AQNP$: inscriptible

  $\rightarrow$ $m\sphericalangle APQ = m\sphericalangle ANQ = \beta$

En el ⊿APQ: $\theta + \beta = 90°$

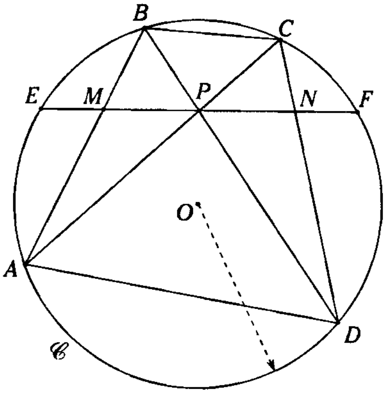
En el ⊿BPM: $\theta + \alpha = 90°$

$\rightarrow$ $\alpha = \beta$

Por lo tanto, M, N y Q son colineales.

TEOREMA DE PAPILLÓN

Si el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia biseca a una cuerda de dicha circunferencia, entonces también biseca al segmento de dicha cuerda limitado por los lados del cuadrilátero.

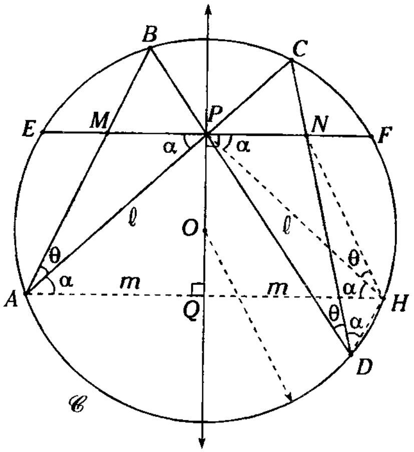


(a)

$\mathscr{C}$: circunferencia circunscrita al ⏢$ABCD$.

Si $EP=PF$, entonces $MP=NP$

Demostración



(b)

Figura 9.45

Sea O centro de $\mathscr{C}$

Como $EP = PF$, entonces la recta OP es perpendicular a $\overline{EF}$

- Trazamos $\overline{AH} \perp \overleftrightarrow{OP}$

  $\rightarrow$ $AQ = QH = m$

  $\therefore$ $AP = PH = \ell$

  (por el teorema de la mediatriz)

  y $m\sphericalangle PAH = m\sphericalangle PHA = \alpha$

  como $\overline{EF} // \overline{AH}$

  $\rightarrow$ $m\sphericalangle APE = m\sphericalangle HPF = \alpha$

- En $\mathscr{C}$: $m\sphericalangle CAH = m\sphericalangle CDH = \alpha$ ($\sphericalangle$ inscrito)

- ⏢$NPDH$: inscriptible

  $\rightarrow$ $m\sphericalangle PHN = \theta$

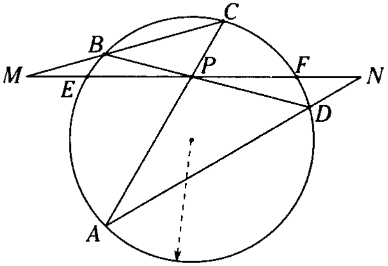
  $\rightarrow$ $\triangle APM \cong \triangle HPN$ (A.L.A.)

  $\therefore$ $PM = NP$

Caso particular del teorema de Papillón

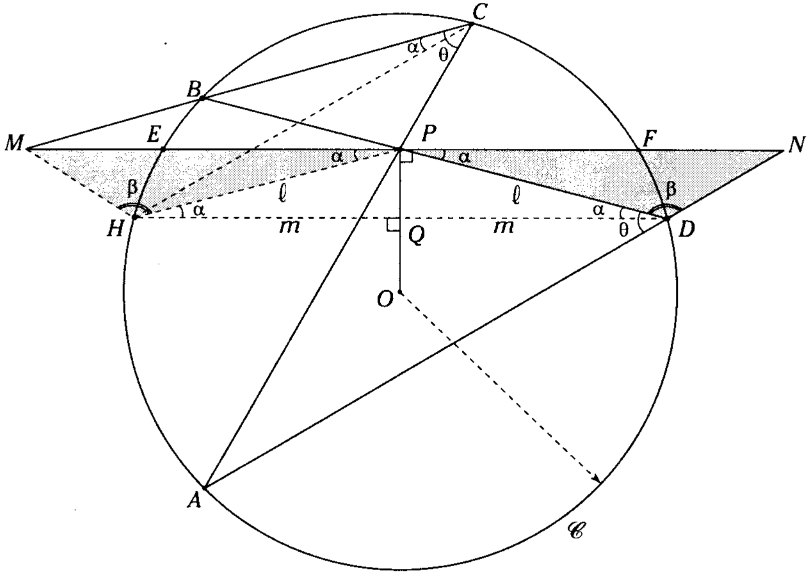
Si $EP = PF \rightarrow MP = NP$

Por lo tanto, también $ME = FN$



(a)

Demostración



(b)

Figura 9.46

Si $EP = PF \rightarrow \overline{OP} \perp \overline{EF}$

Trazamos $\overline{DH} \perp \overline{OP}$

$\rightarrow HQ = QD = m$ y $HP = PD = \ell$

$\therefore$ m$\measuredangle PDH$ = m$\measuredangle PHD = \alpha$ y

m$\measuredangle DPF$ = m$\measuredangle HPE = \alpha$

En $\mathscr{C}$: m$\measuredangle BCH$ = m$\measuredangle BDH = \alpha$

$\square PHMC$: es inscriptible

$\therefore$ $\theta + \beta = 180°$

Pero en $\mathscr{C}$: m$\measuredangle BDA$ = m$\measuredangle BCA = \theta$

m$\measuredangle PDN = \beta$

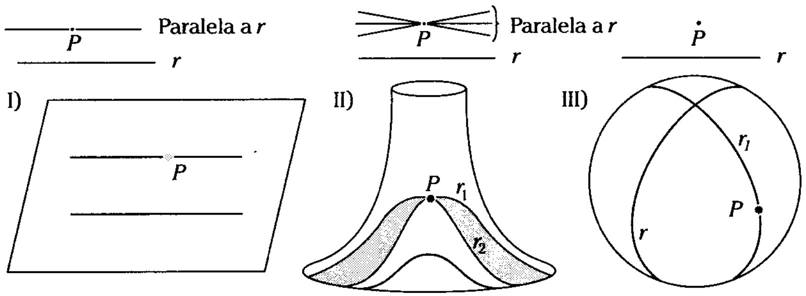
$\triangle PHM \cong \triangle PDN$ (A.L.A.)

$\therefore$ $MP = NP$

Importante

Hipótesis atrevidas

Desde que Euclides enunciara el axioma ***por un punto exterior a una recta pasa una recta paralela a esta recta y solamente una.***
Así dados una recta *r* y un punto *P* que no esté situado en ella, por *P* no podemos trazar más que una paralela a la recta *r*. (Ver figura I)
Hubo que esperar hasta que el siglo XIX para que Carl Gauss, Janos Bolyai, Nicolai Lobachevski y Bernhard Riemann consiguieran demostrar que se trataba efectivamente de un postulado, necesario e independiente de los demás ... y no de un teorema.



Geometría parabólica Geometría hiperbólica Geometría elíptica

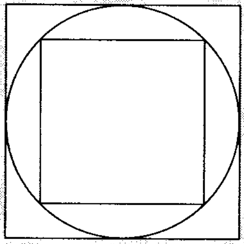
Nicolai Lobachevski

¿De qué manera llegaron estos matemáticos a tales resultados? Supusieron que el postulado de Euclides no era cierto y lo reemplazaron por otros axiomas.
Dados una recta *r* y un punto *P* exterior a esta recta: Gauss, Bolyai y Lobachevski admitieron la posibilidad de que pudiera existir una infinidad de paralelas a *r* que pasaran por *P*. (Ver figura II)
Riemann, por su parte, supuso el axioma de que no existía ninguna paralela a *r* que pasará por el punto *P* (Ver figura III). Todos se dieron cuenta entonces de que, con solo reemplazar el axioma de las paralelas, era posible construir dos geometrías distintas a la geometría euclidiana, igualmente coherentes y que no conducían a ninguna contradicción.
A la vista de las dos figuras en cuyas superficies se cumplen los axiomas de estos sucesores, nos resulta fácil comprender que Euclides adoptará la hipótesis de una sola paralela, respondiendo así de modo intuitivo al respecto del mundo físico que nos rodea.
Los nuevos y atrevidos puntos de vista sobre un postulado tan respetable iban a suscitar emociones muy vivas entre los matemáticos del siglo XIX.

Bernhard Riemann

LECTURA

CIRCUNFERENCIA VS. CUADRILÁTERO

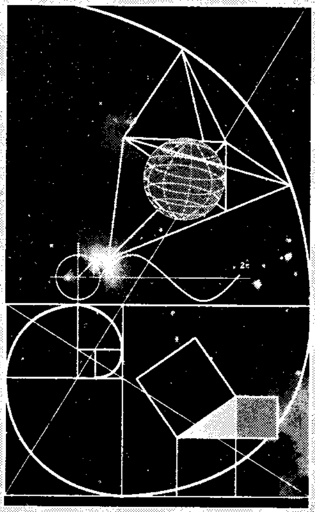


Si repasamos la historia, comprobaremos cómo los matemáticos han intentado encontrar las relaciones entre la circunferencia y el cuadrilátero. Cómo no tener en la mente uno de los tres problemas más famosos de la historia, la ***cuadratura del círculo***, en la cual muchos han hablado e intentado buscar la solución. Este afán ha producido algunos beneficios insospechados, permitir dominar la geometría y dar utilidad a las máquinas construidas para este fin.

Mas nos preguntamos cómo es posible, encontrar relación entre dos figuras distintas en su naturaleza. Esta búsqueda no tendría sentido sino recordamos que los antiguos geómetras encontraron relación entre circunferencia (línea curva) y su diámetro (línea recta), esa relación es el *número* π. Número misterioso y utilizado con bastante frecuencia en las construcciones de los egipcios, como en las pirámides (la relación entre el perímetro de la base y la altura es 2π).

Una utilidad importante de esta relación es el intento de calcular el área del círculo. Los pitagóricos (específicamente Brisón de Heraclea) lo intentaron inscribiendo y circunscribiendo cuadrados, que se transformaban en polígonos cuyas áreas comprendían la del círculo, y suponían por último que en un momento dado de la operación, el área del círculo era la media aritmética de las dos regiones poligonales.

Porque no mencionar a Claudio Ptolomeo y el teorema que lleva su nombre, en el cual relaciona los lados de un cuadrilátero inscrito y sus diagonales.



En esta búsqueda de relaciones podemos mencionar a **Brahmagupta** que encontró la generalización de la fórmula de Herón para cálculos de áreas de regiones triangulares. **Brahmagupta** lo aplicó a un cuadrilátero inscrito en una circunferencia.

Podemos también comentar de Pitot y el teorema que relaciona los lados de un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia.

En la actualidad se presentan ya otros tipos de interrogantes como aquella que indica encontrar el cuadrilátero inscrito de mínimo perímetro en una circunferencia o dadas las cuatro longitudes de un cuadrilátero determinar en qué posición de ellas se determina un cuadrilátero inscriptible. La resolución de las mismas genera nuevas interrogantes que simplemente permitirán el desarrollo de la geometría para estrechar más la relación entre circunferencia y cuadrilátero.

JEAN VICTOR PONCELET (Metz, 1788 - Paris, 1867)

Nació el 1 de julio de 1788 y muere el 22 de diciembre en Francia. Matemático e ingeniero, considerado como uno de los fundadores de la geometría descriptiva moderna. Poncelet fue pupilo de Gaspard Monge. Como teniente de ingenieros en 1812, participó en la campaña rusa de Napoleón, luego en 1814 volvió a Francia.

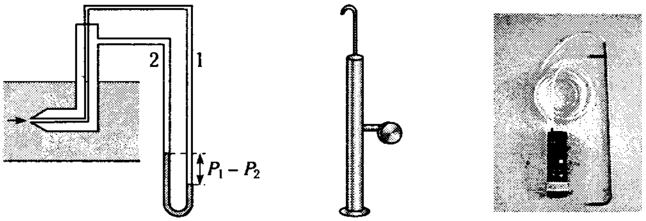
Durante su encarcelamiento Poncelet estudiaba la geometría descriptiva. Escribió un tratado en el *D'analyse et de géomètrie* (usos analíticos de la geometría). Este trabajo fue planeado originalmente como introducción del tratado en las características descriptivas de las figuras (1822), por lo cual Poncelet es considerado como uno de los geómetras descriptivos más grandes de la época. Crea lo que es principio de continuidad, que es un concepto que se agrega a la geometría sintética, lo cual conduce a la introducción de puntos imaginarios.

Poncelet, desde 1815 a 1825, ocupa la ingeniería militar en Metz y de 1825 a 1835 se desempeña como profesor de mecánicos en el **D'application de École**. Aplicó las matemáticas a las mejoras de turbinas y de Waterwheels.

HENRI PITOT (1695 - 1771)

Nació en 1695 y murió 1771. Pitot fue un físico francés, también ingeniero y militar, que llevó a cabo numerosas construcciones, entre las que destaca el acueducto de Saint-Climent. Estudio el rendimiento de las máquinas eléctricas (bombas y molinos) e ideó el llamado tubo de Pitot, con el que se puede medir la velocidad de una corriente fluida.

En geometría se hizo famoso por el teorema de los cuadriláteros circunscritos a una circunferencia.



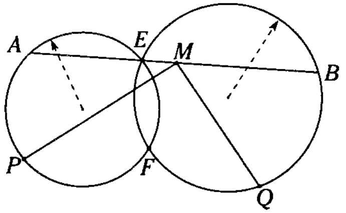
El tubo de Pitot

Problemas Resueltos

Problema 1

En la figura mostrada, calcule m∢PMQ. Si $AM = MB$; $m\overset{\frown}{AP} = m\overset{\frown}{PF}$ y $m\overset{\frown}{FQ} = m\overset{\frown}{QB}$.

A) 45°
B) 60°
C) 75°
D) 90°
E) 120°



Resolución

Piden m∢$PMQ = x$, así que prolongamos $\overline{QM}$ hasta N, tal que $MN = MQ = \ell$.
Como $AM = MB = m$, el $\triangle AMN \cong \triangle BMQ$ (L.A.L.) $\rightarrow$ $AN = BQ = b$

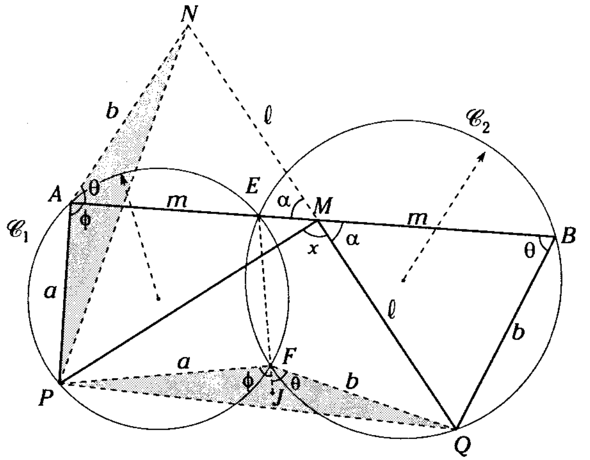


Figura 9.47

Como $m\overset{\frown}{AP} = m\overset{\frown}{PF}$

$\rightarrow$ $AP = PF = a$ y

$m\overset{\frown}{FQ} = m\overset{\frown}{QB}$

$\rightarrow$ $FQ = QB = b$

⏢$PAEF$: inscrito en $\mathscr{C}_1$

$\rightarrow$ m∢PFJ = m∢$PAE = \phi$

⏢$QBEF$: inscrito en $\mathscr{C}_2$

$\rightarrow$ m∢QFJ = m∢$QBE = \theta$

Se observa:

$\triangle PAN \cong \triangle PFQ$ (L.A.L.)

$\rightarrow NP = PQ = c$

Luego en el $\triangle PNQ$: como $NP=PQ$

$\therefore$ $x = 90°$

CLAVE D

Problema 2

Sea P un punto del arco AC de la circunferencia circunscrita al triángulo isósceles ABC de base AC. Si $PA = a$ y $PC = b$ $(b > a)$, halle PH. Considere que H es la proyección ortogonal de B sobre $\overline{PC}$.

A) $2a + b$ B) $b/2$ C) $b-a$

D) $\dfrac{a+b}{2}$ E) $\sqrt{ab}$

Resolución

Piden $PH = x$

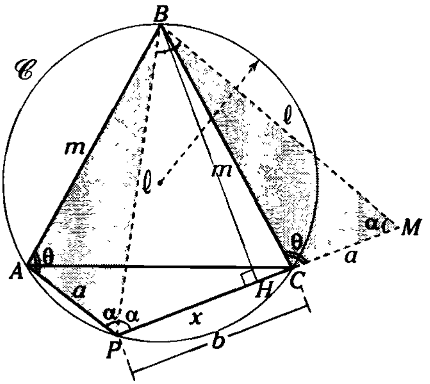


Figura 9.48

Prolongamos $\overline{PC}$ hasta M, tal que $CM = AP = a$

Como $AB = BC = m$ (dato) y

$m\measuredangle BCM = m\measuredangle BAP = \theta$ debido a que $APCB$ es un cuadrilátero inscrito.

Al trazar $\overline{BP}$ y $\overline{BM}$ se observa

$\triangle BCM \cong \triangle BAP$ (L.A.L.)

$\rightarrow\ BP = BM = \ell$

Luego en el $\triangle PBM$: (isósceles)

$$PH = HM = \frac{PM}{2}$$

$$\therefore\ x = \frac{a+b}{2}$$

CLAVE D

Problema 3

En un triángulo equilátero ABC se trazan las cevianas BM y CN que se intersecan en P, tal que $m\measuredangle ABM = m\measuredangle BCN$. Si $AM = 2(MC)$, determine $m\measuredangle APM$.

A) 60 B) 120° C) 45°

D) 90° E) 75°

Resolución

Piden $m\measuredangle APM = x$

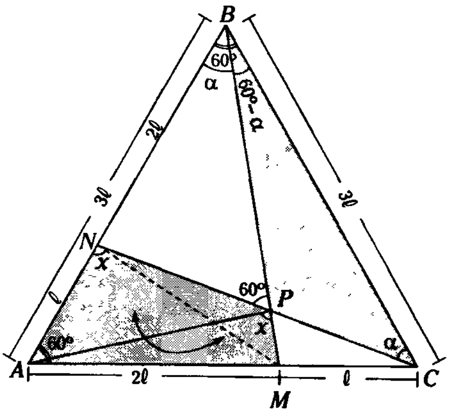


Figura 9.49

Sea $MC = \ell \ \rightarrow\ AM = 2\ell$

$\therefore\ AB = BC = AC = 3\ell$

Sea la $m\measuredangle ABM = \alpha$

$\rightarrow\ m\measuredangle BCN = \alpha$

Luego los triángulos ABM y BCN son congruentes (A.L.A.)

$\rightarrow\ BN = AM = 2\ell$

$\rightarrow\ AN = \ell$

Luego en el $\triangle PBC$, $m\measuredangle PBC = 60° - \alpha$

$\rightarrow\ m\measuredangle NPB = 60°$.

$\therefore$ ⏢$ANPM$ es inscriptible

$\rightarrow\ m\measuredangle APM = m\measuredangle ANM = x$

Observación

En el $\triangle ANM$: si $AM = 2(AN)$ y la $m\measuredangle NAM = 60°$ $\rightarrow$ el $\triangle ANM$ es notable de 30° y 60°.

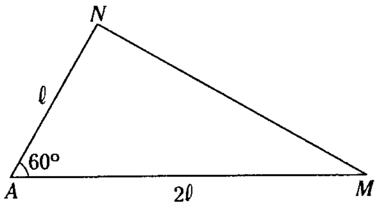


Figura 9.50

$\therefore$ $m\measuredangle ANM = 90°$

Por lo tanto, de la observación $x = 90°$

CLAVE D

Problema 4

En una semicircunferencia de diámetro AB y centro O, se ubican los puntos C y D; tal que $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en P. Si $OP = PD$ y $m\widehat{CD} = m\widehat{BD}$, señale la $m\measuredangle APO$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 90° E) 75°

Resolución

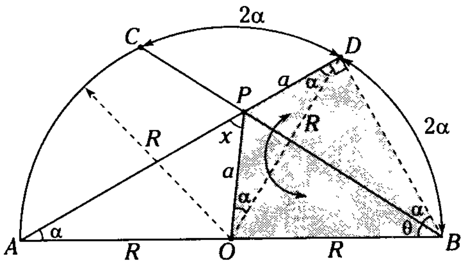


Figura 9.51

Piden $m\measuredangle APO = x$

Sea $m\widehat{CD} = m\widehat{DB} = 2\alpha$ y $OP = PD = a$

$\rightarrow$ $m\measuredangle DAB = \alpha = m\measuredangle CBD$

$OA = OD$ $\rightarrow$ $m\measuredangle ODA = m\measuredangle OAD = \alpha$

$OP = PD$ $\rightarrow$ $m\measuredangle POD = m\measuredangle PDO = \alpha$

$\square OPDB$: inscriptible

$\rightarrow$ $m\measuredangle OBP = m\measuredangle ODP = \alpha$

$\rightarrow$ $\theta = \alpha$

En el $\triangle ADB$: $\alpha + 2\alpha = 90°$ $\rightarrow$ $\alpha = 30°$

En el $\triangle ODP$: $x = 2\alpha$

$\therefore$ $x = 60°$

CLAVE C

Problema 5

Sea P un punto de la región interior de un paralelogramo $ABCD$, tal que $m\measuredangle BAP = m\measuredangle BCP$. Calcule $m\measuredangle APD + m\measuredangle BPC$.

A) 120° B) 90° C) 135°
D) 180° E) 60°

Resolución

Piden $m\measuredangle APD + m\measuredangle BPC = x + y$

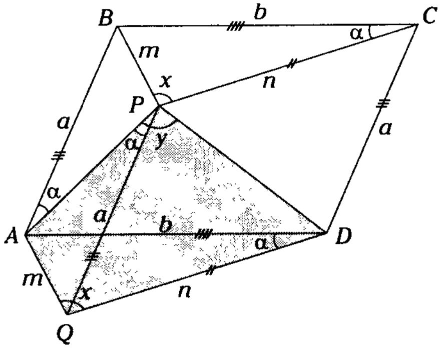


Figura 9.52

Construimos el $\triangle AQD \cong \triangle BPC$

$\rightarrow$ $\overline{DQ} \parallel \overline{CP}$; $DQ = CP = n$;

$\overline{AQ} \parallel \overline{BP}$ y $AQ = BP = m$

→ *QPCD* y *QPBA* son romboides

∴ $PQ = AB = CD = a$ y $\overline{PQ} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

luego m∢APQ = m∢PAB = α y del

$\triangle PBC \cong \triangle QAD$ → m∢AQD = m∢$BPC = x$

Como ⏢$APDQ$: es inscriptible

∴ $x + y = 180°$

CLAVE D

Problema 6

Dado un triángulo isósceles *ABC*, en la base $\overline{AC}$ se ubica el punto medio *M*. Si en la región interior se ubica el punto *P*, tal que m∢APM = m∢$BPC = 90°$, y m∢$PAB = 20°$, halle m∢PCM.

A) 10° B) 20° C) 15°
D) 30° E) 40°

Resolución

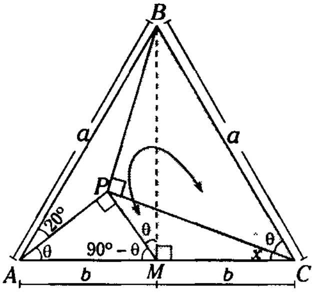


Figura 9.53

Piden m∢$PCM = x$

Por dato $AB = BC = a$ y

$AM = MC = b$

→ $\overline{BM}$ es altura

Se nota que ⏢$MPBC$: es inscriptible

→ m∢PMB = m∢$PCB = \theta$

y m∢$PMA = 90 - \theta$

En el ⊿APM: m∢$PAM = \theta$

En el △ABC: m∢BAC = m∢BCA

→ $20° + \theta = \theta + x$

∴ $x = 20°$

CLAVE B

Problema 7

En un triángulo rectángulo *ABC*, recto en *B*, se trazan las bisectrices interiores *AM* y *CN* que se intersecan en *I*. Si en $\overline{BN}$ se ubica el punto *P*, tal que $\overline{MP} \parallel \overline{CN}$, calcule m∢$IPM$.

A) 45° B) 30° C) 60°
D) 75° E) 53°

Resolución

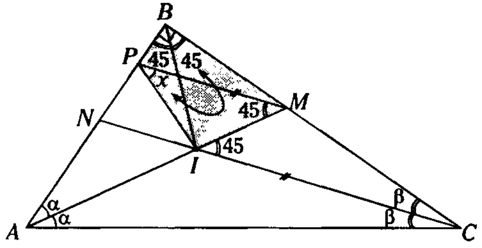


Figura 9.54

Piden m∢$IPM = x$

En el ⊿ABC

$2\alpha + 2\beta = 90°$ → m∢$MIC = \alpha + \beta = 45°$

Como $\overline{MP} \parallel \overline{CN}$ → m∢PMI = m∢$MIC = 45°$

En el ⊿ABC: *I* equidista de los tres lados, entonces $\overrightarrow{BI}$ es bisectriz del ∢ABC

Se nota que, ⏢$PBMI$ es inscriptible

→ m∢IPM = m∢$IBM = 45°$

∴ $x = 45°$

CLAVE A

Problema 8

En la figura mostrada, A y B son puntos de tangencia y $\overline{AC} \parallel \overline{PD}$. Determine x

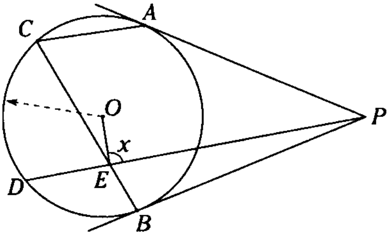
A) 60°

B) 45°

C) 90°

D) 75°

E) 135°



Resolución

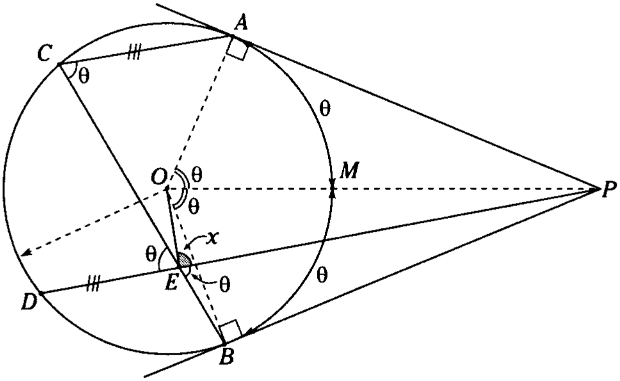


Figura 9.55

Piden x

Sea la $m\sphericalangle ACB = \theta \rightarrow m\overset{\frown}{AMB} = 2\theta$ y $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB} = \theta$

$\rightarrow m\sphericalangle AOP = m\sphericalangle BOP = \theta$

Como $\overline{AC} \parallel \overline{PD}$, por ángulos correspondientes

$\rightarrow m\sphericalangle BEP = m\sphericalangle BCA = \theta$

Se nota que el cuadrilátero $BEOP$ es inscriptible

$\therefore x = 90°$

CLAVE C

Problema 9

En un triángulo ABC, se traza la mediana AM. Si m$\measuredangle BAM$ = m$\measuredangle ACB$ y m$\measuredangle BAC = 45°$, calcule m$\measuredangle MAC$.

A) 10° B) 15° C) 16° D) 22°30' E) 18°

Resolución

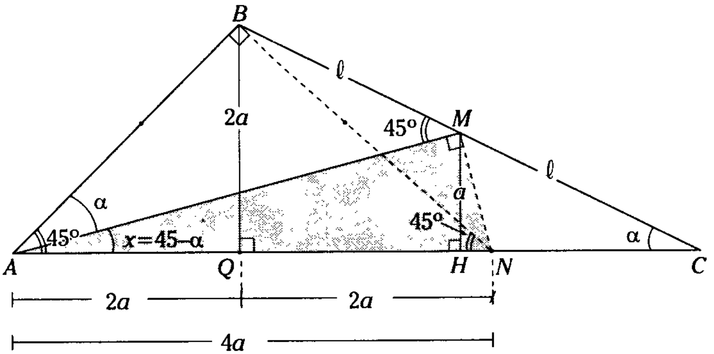


Figura 9.56

Piden m$\measuredangle MAC = x$,

Por dato m$\measuredangle BAM = \alpha$ y m$\measuredangle ACB = \alpha$

De la figura 9.56

En A: m$\measuredangle MAC = 45° - \alpha$ → m$\measuredangle AMB = 45°$

En $\overline{AC}$ ubicamos el punto N, tal que m$\measuredangle ANB = 45°$ → el ⏢$ABMN$ es inscriptible

∴ m$\measuredangle AMN$ = m$\measuredangle ABN = 90°$

Si $MH = a$ → $BQ = 2a$ (teorema de los puntos medios en el △QBC)

◺ABN: $AQ = BQ = QN = 2a$

En el ◺AMN: $MH = \dfrac{AN}{4}$ (notable de 15° y 75°)

∴ $x = 15°$

CLAVE B

Problema 10

Dado un cuadrado $ABCD$, se ubica un punto P en la región interior y en los lados $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos M, N y Q respectivamente, tal que m$\measuredangle PMB$ = m$\measuredangle PNA$ = m$\measuredangle PQC$. Si $MP = 4$, $NP = 7$ y $QP = 6$, indique m$\measuredangle PBA$.

A) 45° B) 60° C) 37° D) 53° E) 54°

Resolución

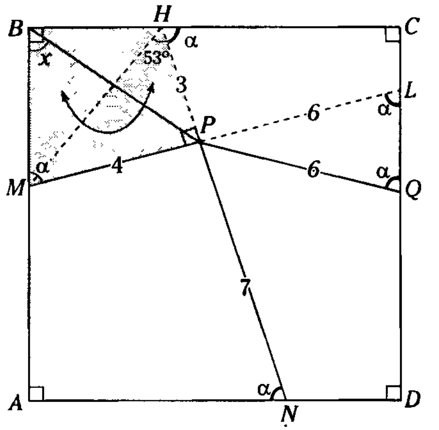


Figura 9.57

Como piden m∢$PBA = x$, así que prolongamos $\overline{MP}$ hasta L → m∢$MLD = \alpha$

∴ $PL = PQ = 6$

Prolongamos $\overline{NP}$ hasta H → m∢$NHC = \alpha$

Se observa que $MBHP$ es un cuadrilátero inscriptible → m∢$MPH = 90°$

Observación

Si en un cuadrado se cumple que $\alpha = \theta$

→ $ML = NH$

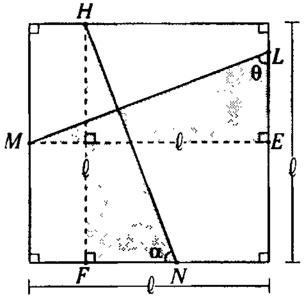


Figura 9.58

Debido a que los ⊿s EML y FHN son congruentes.

De la observación en el problema $HN = ML = 10$

→ $PH = 3$

Luego ⊿MPH (notable de 37° y 53°)

→ m∢$MHP = 53°$

∴ $x = 53°$

CLAVE D

Problema 11

En un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se ubica el punto P en la región interior, tal que m∢PBC = m∢PCA = m∢PAB (P: punto de Brocard) y m∢$ABC = 37°$. Indique m∢PAC.

A) 37° B) 53° C) 16°
D) 74° E) 45°

Resolución

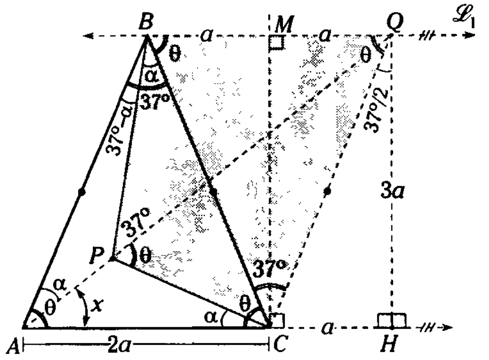


Figura 9.59

Solicitan m∢$PAC = x$

Del dato $AB = BC$

m∢BAC = m∢$BCA = \theta$

△ABC: $\theta = 143°/2$

Por B trazamos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ // $\overline{AC}$ y prolongamos $\overline{AP}$ hasta que se interseque con $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ en Q.

→ m∢QBC = m∢$BCA = \theta$

En △: $x + \alpha = \theta$

En △ABP: m∢$BPQ = 37°$

⌂$PBQC$: inscriptible (m∢QBC = m∢$QPC = \theta$)

→ m∢BCQ = m∢$BPQ = 37°$

$\triangle BCQ$: isósceles

Trazamos $\overline{CM} \perp \overline{BQ}$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle MCQ = 37°/2$ y $BM = MQ = a$

$\rightarrow$ ⊾AQH: $(QH = AH)$

$\therefore$ $x = 45°$

CLAVE E

Problema 12

En un cuadrado *ABCD*, se ubican los puntos *M* y *N* en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, tal que $CM = CN$. Si en el triángulo *MCD* se traza la altura *CH*, calcule m$\sphericalangle AHN$.

A) 60° B) 75° C) 105°
D) 90° E) 45°

Resolución

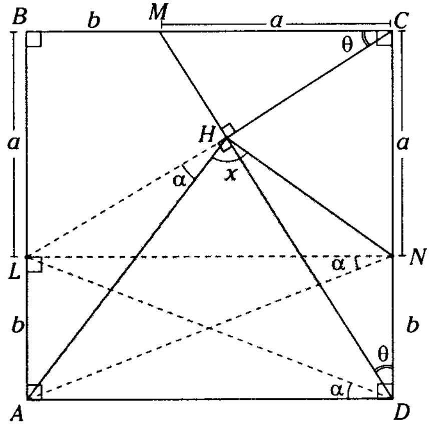


Figura 9.60

Piden m$\sphericalangle AHN = x$

En el ⊾MCD: m$\sphericalangle HCM$ = m$\sphericalangle MDC = \theta$

Al prolongar $\overline{CH}$ hasta L.

Se observa ⊾$LBC \cong$ ⊾MCD (A.L.A.)

$\rightarrow$ $BL = CM = a$

▭$ALND$: rectángulo

$\rightarrow$ m$\sphericalangle ADL$ = m$\sphericalangle ANL = \alpha$

⏢$ALHD$: inscriptible

$\rightarrow$ m$\sphericalangle ADL$ = m$\sphericalangle AHL = \alpha$

En el ⏢$ALHN$: inscriptible

$\rightarrow$ m$\sphericalangle AHN$ = m$\sphericalangle ALN = 90°$

$\therefore$ $x = 90°$

CLAVE D

Problema 13

En un triángulo rectángulo *ABC* recto en *B*, en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos *M* y *N*, tal que m$\sphericalangle NBC$ = 2(m$\sphericalangle NMC$) y m$\sphericalangle MNA$ = m$\sphericalangle MCB$. Calcule m$\sphericalangle BMC$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 36°

Resolución

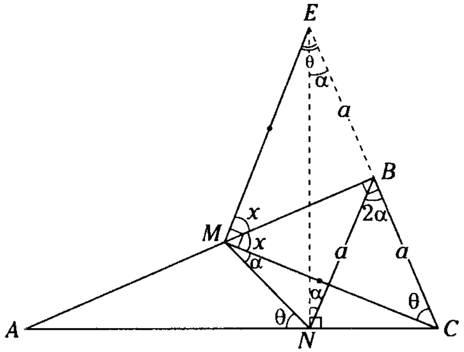


Figura 9.61

Piden m$\sphericalangle BMC = x$

Prolongamos CB hasta E, tal que $EB = BC = a$

$\rightarrow$ $ME = MC$ y m$\sphericalangle MEC$ = m$\sphericalangle MCB = \theta$

⏢$NMEC$: es inscriptible

$\rightarrow$ m$\sphericalangle NEC$ = m$\sphericalangle NMC = \alpha$

Como $NB = BE = BC = a$ $\rightarrow$ m$\sphericalangle ENC = 90°$

En el ⏢$NMEC$

m$\sphericalangle EMC$ = m$\sphericalangle ENC$

$\rightarrow$ $2x = 90°$

$\therefore$ $x = 45°$

CLAVE B

Problema 14

En un cuadrilátero inscriptible *ABCD*, con diámetro en $\overline{AD}$ se traza una semicircunferencia tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$. Si $AB = a$ y $CD = b$, señale *AD*.

A) $2a-b$ B) $a+b$ C) $\sqrt{ab}$ D) $2\sqrt{ab}$ E) $\dfrac{2ab}{a+b}$

Resolución

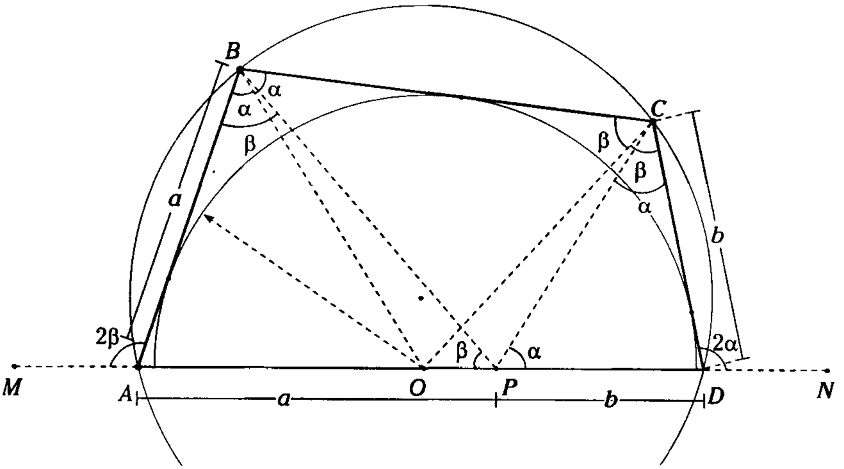


Figura 9.62

Piden *AD*

De la figura 9.62

$m\sphericalangle ABO = m\sphericalangle OBC = \alpha \rightarrow m\sphericalangle CDN = 2\alpha$

$m\sphericalangle BCO = m\sphericalangle OCD = \beta \rightarrow m\sphericalangle BAM = 2\beta$

Trazamos $\overline{BP}$ tal que

$AP = BP = a \rightarrow m\sphericalangle APB = m\sphericalangle ABP = \beta$

⏢*OBCP*: $m\sphericalangle OPB = m\sphericalangle OCB = \beta \rightarrow$ el ⏢*OBCP* es inscriptible

De lo cual: $m\sphericalangle CPD = m\sphericalangle OBC = \alpha$

△*PCD*: $m\sphericalangle PCD + \alpha = m\sphericalangle CDN = 2\alpha$

$\rightarrow m\sphericalangle PCD = \alpha$

Se observa que $AD = AP + PD = a + b$

$\therefore AD = a + b$

CLAVE **B**

Problema 15

Tenemos un triángulo ABC recto en B, donde el punto P se ubica en la región interior.
Si $m\sphericalangle PAC = m\sphericalangle PBA = m\sphericalangle PCB = 14°$ y $AB < BC$, halle $m\sphericalangle BCA$.

A) 18° B) 15° C) 16° D) 22° E) 28°

Resolución

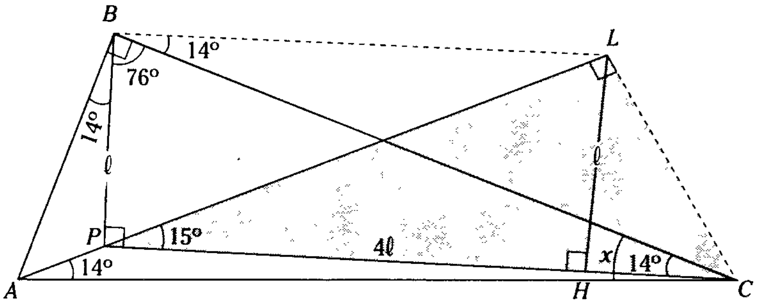


Figura 9.63

Piden $m\sphericalangle BCA = x$

Se nota $m\sphericalangle BPC = 90°$

⊿PBC: de 14° y 76° $\rightarrow$ $PC = 4(PB)$

Se prolonga $\overline{AP}$ hasta que $m\sphericalangle PLC = 90°$

Se puede observar que $ABLC$: ⏢ inscriptible

$\rightarrow$ $m\sphericalangle LAC = 14°$

Como $m\sphericalangle LBC = m\sphericalangle BCP = 14°$ $\rightarrow$ $\overline{BL} \parallel \overline{CP}$

Luego se traza

$$\overline{LH} \perp \overline{PC} \rightarrow LH = \frac{PC}{4} = \ell$$

⊿PLC: $m\sphericalangle LPC = 15°$

△APC: $m\sphericalangle ACP = 1°$

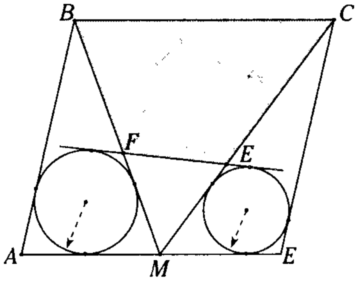
$\therefore$ $x = 15°$

CLAVE B

Problema 16

En la figura mostrada, $ABCD$ es un rombo y M es punto cualquiera de $\overline{AD}$. Si las circunferencias estas inscritas en los triángulos ABM y CMD ¿Qué tipo de cuadrilátero es $BCEF$?

A) Trapecio
B) Inscriptible
C) Circunscriptible
D) Exinscriptible
E) Bicéntrico



Resolución

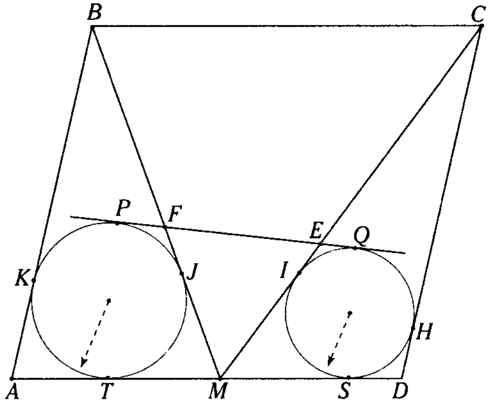


Figura 9.64

De la figura 9.64

$BJ + CI = BK + CH$ (I)

$AT + SD = AK + DH$ (II)

Sumando (I) y (II)

$BJ + CI + AT + SD = AB + CD$

Pero del rombo $ABCD$:

$AB + CD = BC + AD$

$\rightarrow\ BJ + CI + AT + SD = BC + AD$

$BJ + CI + AT + SD = BC + AT + TS + SD$

$\therefore\ BJ + CI = BC + TS$ (III)

Pero $TS = PQ = PF + EF + EQ$

también $PF = FJ$ y como $EI = EQ$

De la figura 9.64 y de III

$\rightarrow\ BF + FJ + CE + EI = BC + PQ$

$\therefore\ BF + FJ + CE + EI = BC + PF + EF + EQ$

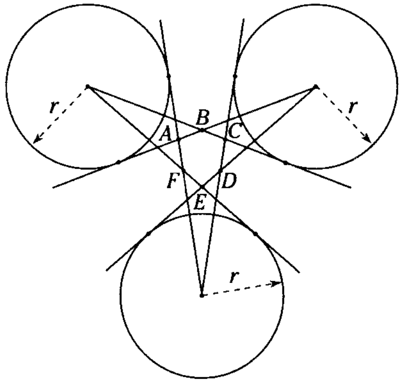
Finalmente $BF + CE = BC + EF$

Por lo tanto, el ⏢$BCEF$ es circunscriptible.

CLAVE C

Problema 17

En la figura mostrada, $ABCDEF$ es un exágono convexo. Dado que $AB + CD + EF = 10$ cm, calcule $BC + DE + FA$



A) 5 cm B) 8 cm C) 10 cm
D) 15 cm E) 20 cm

Resolución

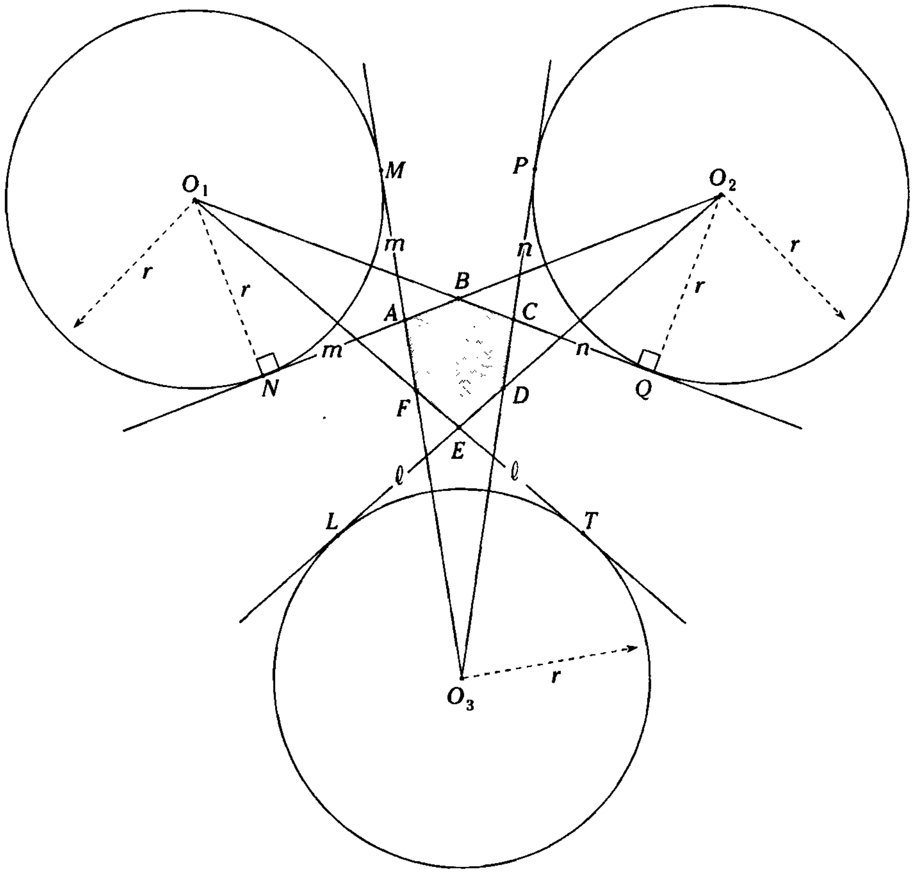


Figura 9.65

Piden $BC + DE + FA$

Se nota: $AM = AN = m$

$CP = CQ = n$

$EL = ET = \ell$

$\triangle O_1NB \cong \triangle O_2BQ$ (A.L.A.)

$\rightarrow NB = QB$

$\therefore AB + m = BC + n$ (I)

Análogamente $PD = DL$

$\therefore DC + n = ED + \ell$ (II)

También $FM = FT$

$\therefore AF + m = EF + \ell$ (III)

De (I), (II) y (III): ordenando convenientemente y sumando

$$AB+m+DC+n+EF+\ell=BC+n+ED+\ell+AF+m$$

$$AB+CD+EF=BC+ED+AF$$

$$\therefore\ BC+ED+AF=10\text{ cm}$$

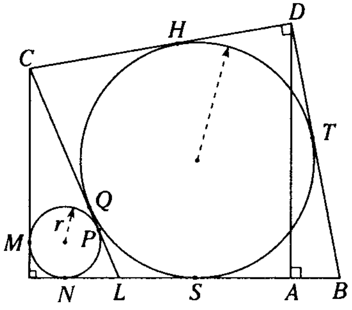
Observación

- Dado que $ABCDEF$ es un exágono circunscrito a una circunferencia, se cumple que $AB+CD+EF=BC+ED+AF$.
- Si en un exágono convexo $ABCDEF$ se cumple que $AB+CD+EF=BC+ED+AF$, entonces el exágono no necesariamente es circunscriptible.

CLAVE C

Problema 18

Según la figura, M, N, P, Q, S, T y H son puntos de tangencia. Si $CD=DB$, $LA=4$ y $DA=AB+6$, halle r.



A) 1 B) 4 C) 3

D) 2 E) 5

Resolución

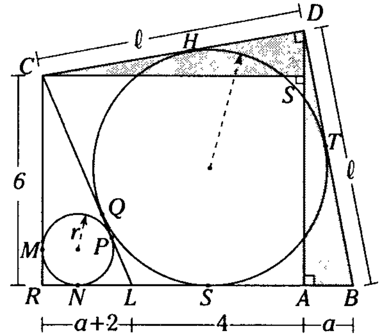


Figura 9.66

Piden r

Datos: $CD=DB=\ell$

$DA=AB+6$

Sea $AB=a \rightarrow DA=a+6$

Se traza $CS\perp DA$ y se nota $\triangle CSD\cong\triangle DAB$ (A.L.A.)

$\rightarrow DS=AB=a;\ SA=6$

Como $CSAR$ es un rectángulo: $CR=SA=6$

$CS=DA=a+6;\ RA=a+6$

$\rightarrow RL=a+2$

$\triangle CRL$: Teorema de Poncelet

$6+a+2=CL+2r$ (I)

$\square CDBL$: Teorema de Pitot

$CL+\ell=\ell+4+a$ (II)

Sumando (I) y (II)

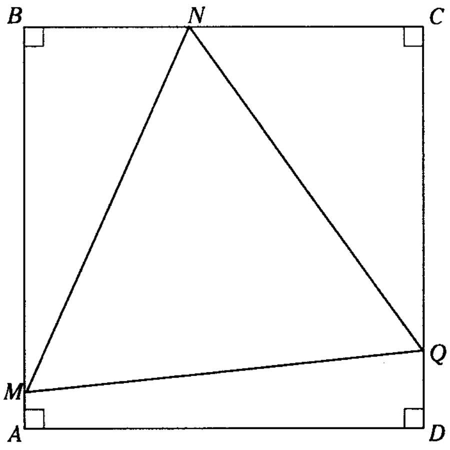
$8=4+2r$

$\therefore\ r=2$

CLAVE D

Problema 19

En la figura mostrada, $ABCD$ es un cuadrado de lado $3(\sqrt{3}-1)$ cm y MNQ es un triángulo equilátero de lado 2 cm. Calcule la suma de los inradios de los triángulos MBN y QCN. ($BN\neq NC$)



A) 0,5 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ E) 1

Resolución

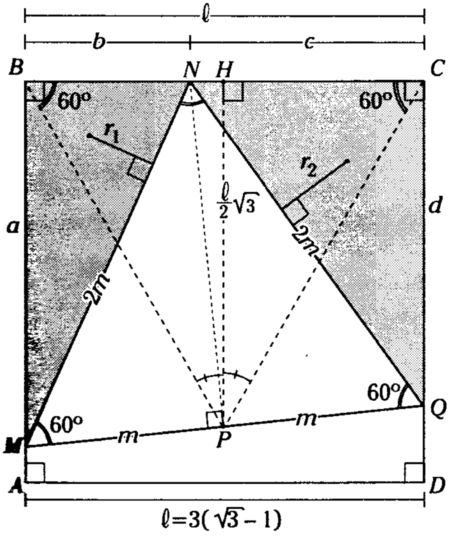


Figura 9.67

Piden $r_1 + r_2$

En el ⊾MBN del teorema de V. Poncelet

$$a + b = \frac{2m}{2} + 2r_1 \qquad \text{(I)}$$

En el NCQ del Teorema de V. Poncelet

$$c + d = \frac{2m}{2} + 2r^2 \qquad \text{(II)}$$

Sumando (I) y (II)

$$a + \underbrace{b + c}_{} + d = 4 + 2(r_1 + r_2)$$

$$a + d + \ell = 4 + 2(r_1 + r_2) \qquad \text{(III)}$$

Luego en el $\triangle MNQ$, trazamos $NP \perp MQ$

$$\rightarrow \; MP = PQ = m$$

Así los cuadriláteros $MBNP$ y $QCNP$ son inscriptibles

$$\rightarrow \; m\measuredangle PBN = m\measuredangle PMN = 60^\circ \text{ y}$$

$$m\measuredangle PCN = m\measuredangle PQN = 60^\circ$$

Por lo tanto, el triángulo PBC es equilátero de lado ℓ $\rightarrow$ $\overline{PH} \perp \overline{BC}$

pero en el ⏢ $MBCQ$: $PH = \dfrac{a+d}{2} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$$\rightarrow \; a + d = \ell\sqrt{3}$$

Luego en III

$$\ell + \ell\sqrt{3} = 4 + 2(r_1 + r_2)$$

$$\underbrace{\ell}_{3(\sqrt{3}-1)}(\sqrt{3}+1) = 4 + 2(r_1 + r_2)$$

$$6 = 4 + 2(r_1 + r_2)$$

$$\therefore \; r_1 + r_2 = 1$$

CLAVE E

Problema 20

Las diagonales de un cuadrilátero inscriptible se intersecan perpendicularmente en H. Si las proyecciones ortogonales de H sobre los lados en forma consecutiva de dicho cuadrilátero son los puntos A, B, C y D respectivamente, el cuadrilátero $ABCD$ es

A) inscriptible

B) exinscriptible

C) solo circunscriptible

D) bicéntrico

E) alabeado

Resolución

Sea el cuadrilátero *MNPQ* un cuadrilátero inscriptible de diagonales perpendiculares que se intersecan en *H*.

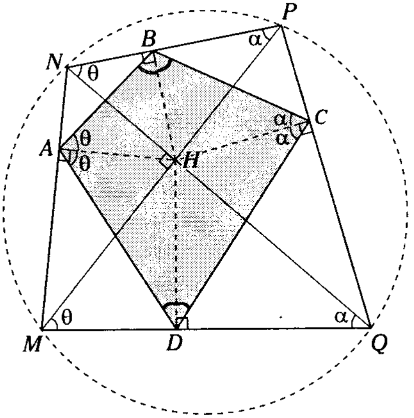


Figura 9.68

Si $m\sphericalangle PNQ=\theta$

NBHA: ⏢ inscriptible $\rightarrow$ $m\sphericalangle BAH=\theta$

Como *NPQM*: ⏢ inscriptible

$\rightarrow$ $m\sphericalangle PMQ=m\sphericalangle PNQ=\theta$

luego $\overline{AH}$ bisectriz del $<BAD$

Análogamente se deduce que

$\overrightarrow{BH}$: bisectriz $\sphericalangle ABC$

$\overrightarrow{CH}$: bisectriz $\sphericalangle BCD$

$\overrightarrow{DH}$: bisectriz $\sphericalangle CDA$

Por teoría *ABCD* es ⏢ circunscriptible.

De la figura, $\alpha+\theta=90°$ $\rightarrow$ $2\alpha+2\theta=180°$. Esto quiere decir que *ABCD* es ⏢ inscriptible, por lo tanto, *ABCD* resulta bicéntrico.

CLAVE D

Problema 21

En un triángulo *ABC*, las proyecciones ortogonales de un punto de la circunferencia circunscrita sobre los lados *BC* y *AC* son los puntos *P* y *Q* respectivamente. Calcule la razón de longitudes del $\overline{PQ}$ y de la proyección ortogonal del $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{PQ}$.

A) 0,5 B) 0,25 C) 0,3

D) 1 E) 2

Resolución

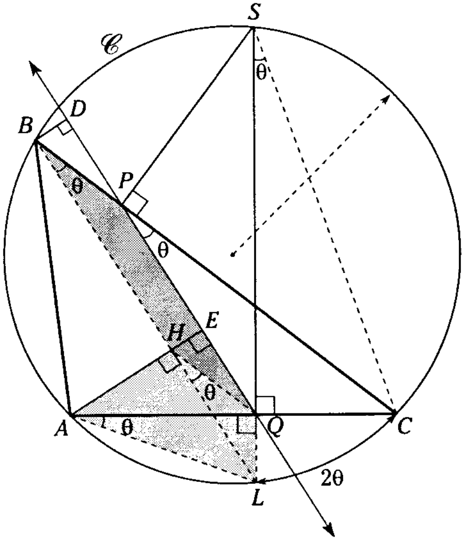


Figura 9.69

De la figura 9.69, *P* y *Q* son proyecciones ortogonales de *S* sobre $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente y *DE* es la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{PQ}$ y $\overleftrightarrow{PQ}\,//\,\overline{BH}$

Entonces piden $\dfrac{PQ}{DE}$

⏢*PSCQ*: inscriptible $\rightarrow$ $m\sphericalangle QPC=m\sphericalangle QSC=\theta$

Luego $m\overset{\frown}{LC}=2\theta$ $\rightarrow$ *B*, *H* y *L* son colineales

$m\sphericalangle CAL=\theta$ (ángulo inscrito)

⏢*AHQL*: inscriptible

$\rightarrow$ $m\sphericalangle QHL=m\sphericalangle QAL=\theta$

Entonces

$\overline{PQ}\,//\,\overline{BH}$ $\rightarrow$ $BH=DE$

$\rightarrow$ ▱*BPQH*: romboide, con lo cual $PQ=BH$

$\therefore\ \dfrac{PQ}{DE}=1$

> **Nota**
>
> La recta $\overleftrightarrow{AB}$ es la recta de Simson respecto del punto *S* de la circunferencia 𝒞.

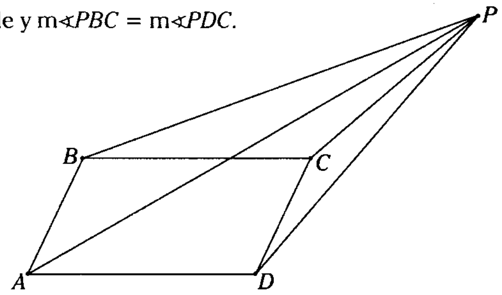
CLAVE D

Problema 22

En la figura, $ABCD$ es un romboide y $m\sphericalangle PBC = m\sphericalangle PDC$.

Calcule $\dfrac{m\sphericalangle APB}{m\sphericalangle CPD}$

A) 2
B) 4
C) 1
D) 3
E) 5



Resolución

Sea $m\sphericalangle PBC = m\sphericalangle PDC = \alpha$

Piden $\dfrac{m\sphericalangle APB}{m\sphericalangle CPD} = \dfrac{x}{y}$

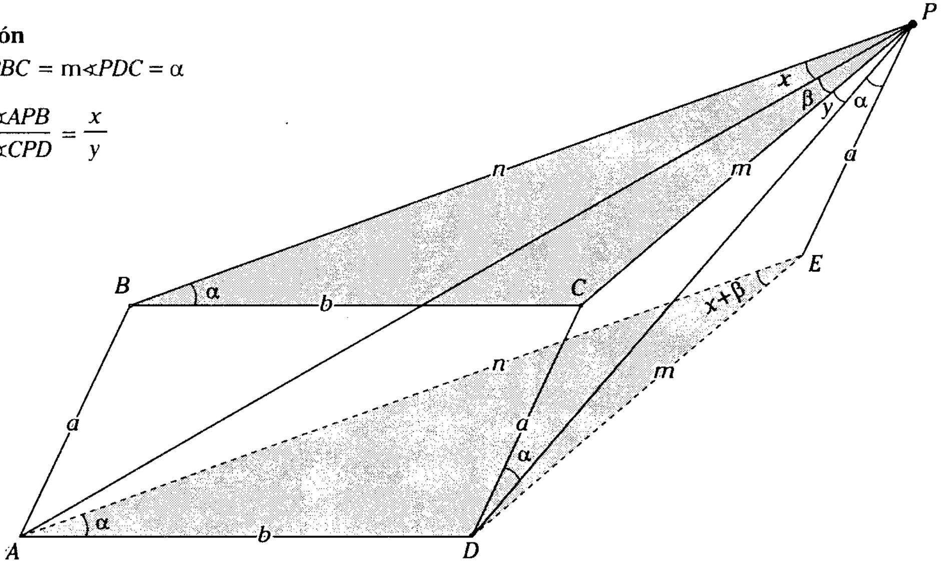


Figura 9.70

Construimos el paralelogramo $DCPE$ $\rightarrow$ $CP = DE = m$, $PE = CD = a$

Además $\overline{PE} // \overline{DC} // \overline{AB}$ $\rightarrow$ $ABPE$ es un paralelogramo, por eso $AE = BP = n$

Se observa $\triangle BCP \cong \triangle ADE$ (L.L.L.)

$\rightarrow$ $m\sphericalangle EAD = m\sphericalangle PBC = \alpha$ y $m\sphericalangle BPC = m\sphericalangle AED = x + \beta$

$\square DCPE$: $m\sphericalangle DPE = m\sphericalangle PDC = \alpha$ $\rightarrow$ el cuadrilátero $ADEP$ es inscriptible ($m\sphericalangle DAE = m\sphericalangle DPE$)

Propiedad del cuadrilátero inscriptible $m\sphericalangle APD = m\sphericalangle AED$

$\beta + y = x + \beta$

$\rightarrow$ $y = x$

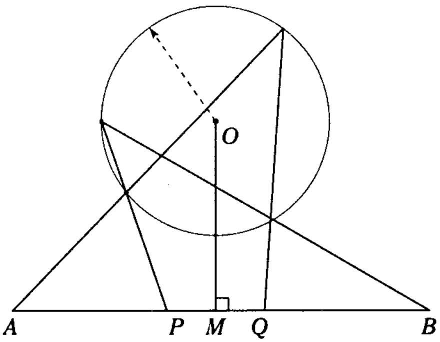
$\therefore$ $\dfrac{m\sphericalangle APB}{m\sphericalangle CPD} = 1$

CLAVE C

Problema 23

En la figura, $PM = MQ$. Si $BQ = a$, determine AP.

A) $2a$
B) $a\sqrt{2}$
C) $a\sqrt{3}$
D) a
E) $a/2$



Resolución

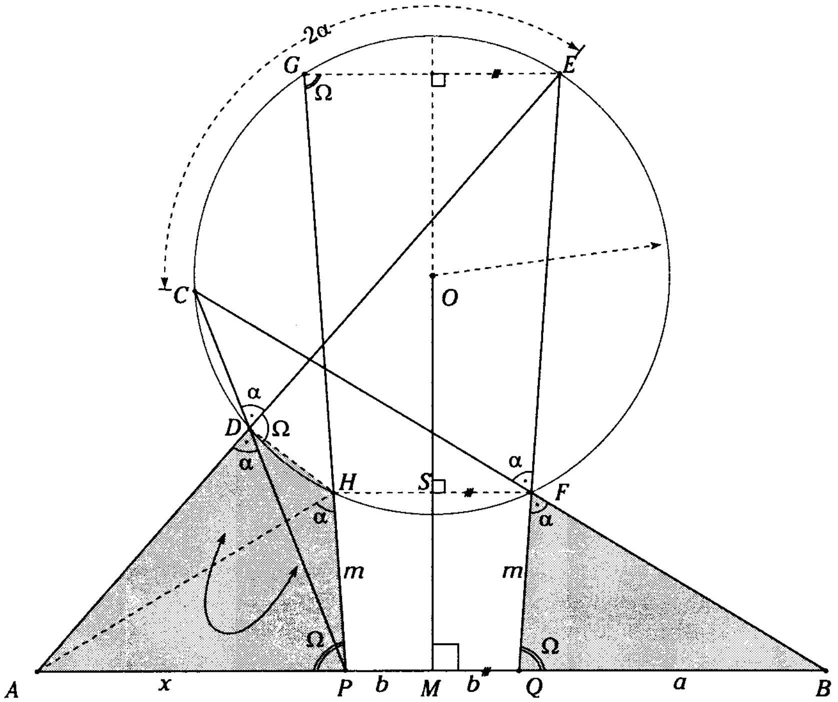


Figura 9.71

Piden $AP = x$

Se traza $\overline{FH}$ y $\overline{EG}$ perpendiculares a $\overleftrightarrow{OM}$, entonces $\overline{FH} \parallel \overline{EG} \parallel \overline{AB}$

Por lo tanto, P; H y G son colineales y H y P son los simétricos de F y Q respecto a $\overleftrightarrow{MS}$, entonces $PH = QF = m$

$AB \parallel GE$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle EGP$ = m$\sphericalangle GPA = \Omega$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle EDH$ = m$\sphericalangle EGH = \Omega$

$\square ADHP$: es inscriptible (m$\sphericalangle APH$ = m$\sphericalangle HDE$)

$\rightarrow$ m$\sphericalangle AHP$ = m$\sphericalangle ADP = \alpha$

En el trapecio isósceles $PHFQ$

m$\sphericalangle FQB$ = m$\sphericalangle HPA = \Omega$

$\triangle AHP \cong \triangle BFQ$ (A.L.A.)

$\rightarrow$ $AP = QB = a$

$\therefore$ $x = a$

CLAVE D

Problema 24

En un cuadrilátero inscriptible $ABCD$, donde $AD > BC$ y $CD > AB$, en $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos F y E respectivamente, tal que $AF = BC$ y $CE = AB$. Si M es punto medio de $\overline{EF}$, calcule m$\sphericalangle AMC$.

A) 60° B) 45° C) 90°
D) 75° E) 35°

Resolución

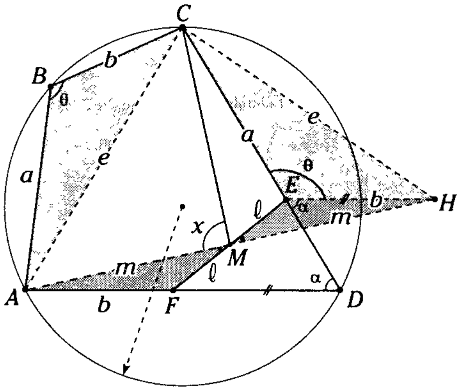


Figura 9.72

Piden m$\sphericalangle AMC = x$

Sean $AB = a$ y $BC = b$, entonces $CE = a$ y $AF = b$

En $ABCD$: $\alpha + \theta = 180°$

Prolongamos $\overline{AM}$ hasta H, tal que $MH = AM = m$

$\rightarrow$ $\triangle HME \cong \triangle AMF$ (L.A.L.)

$EH = AF = b$

además $\overline{EH} \parallel \overline{AF}$

m$\sphericalangle DEH$ = m$\sphericalangle EDA = \alpha$

En E: m$\sphericalangle CEH = \theta$

$\triangle CHE \cong \triangle ABC$ (L.A.L.)

$\rightarrow$ $CH = AC = e$

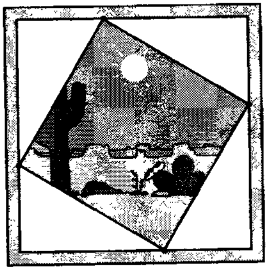
En el $\triangle ACH$: $AC = CH = e$ y $AM = MH = m$

$\therefore$ $x = 90°$

CLAVE C

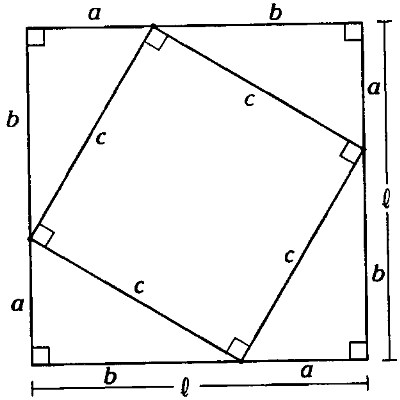
1. **El marco de mayor perímetro**

Un carpintero desea construir un marco de madera de forma cuadrada, que tenga la máxima longitud (mayor contorno o perímetro) para una fotografía cuadrada de lado ℓ. Si un vértice de la fotografía debe ir clavado en un lado del marco (ver figura), ¿qué longitud debe tener el lado del marco y en qué posición deben clavarse los vértices de la fotografía?



Resolución

Este problema se reduce a circunscribir un cuadrado en otro de longitud ℓ. Para resolverlo lo podríamos mantener al circunscrito fijo y el inscrito variable. Este último debe tener el mínimo perímetro.



En todo triángulo rectángulo

$$c^2 = a^2 + b^2$$

en la figura

$$\ell = a + b$$

entonces $b = \ell - a$

luego $c^2 = a^2 + (\ell - a)^2$

$$c^2 = 2a^2 - 2\ell a + \ell^2$$

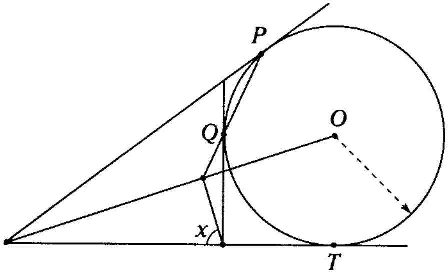
$$c^2 = \left(a\sqrt{2} - \frac{\ell}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\ell^2}{2}$$

De donde si queremos que c sea mínimo. $\left(a\sqrt{2} - \frac{\ell}{\sqrt{2}}\right)$ debe ser cero.

Esto sucede cuando el vértice de la foto está en el punto medio del marco, así $b = a$ y $c = a\sqrt{2} = b$,. como $\ell = a + b$, siendo $c = 1$, el perímetro máximo del marco será $4\sqrt{2}$.

Problemas Propuestos

1. En la figura, P, Q y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{PT} = 140°$, calcule x.

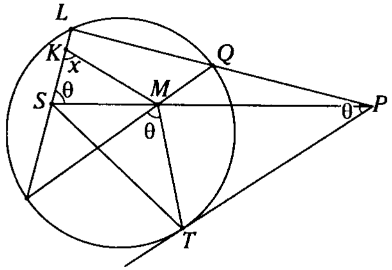


A) 45° B) 70° C) 40°
D) 80° E) 50°

2. Dado un cuadrado $ABCD$, en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos P y M, tal que $\overline{AM}$ y $\overline{DP}$ se intersecan perpendicularmente en Q. Si $PC = CQ$, halle $m\sphericalangle MCQ$.

A) 18° B) 22°30' C) 18°30'
D) 30° E) 26°30'

3. En la figura, T es punto de tangencia. Si $m\widehat{LQT} = 4(m\sphericalangle KMS)$ y $m\sphericalangle MTS = 40°$, señale x.



A) 40° B) 80° C) 70°
D) 35° E) 20°

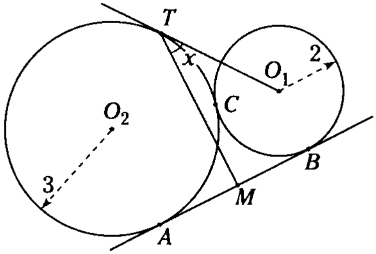
4. Desde un punto P exterior a una circunferencia $\mathscr{C}$, se trazan las tangentes PD y PC. (D y C, puntos de tangencia). Si en $\mathscr{C}$ se ubica el punto A y en $\overline{AD}$ se ubica el punto B, tal que $AB = BC$ y la $m\sphericalangle DAC = 50°$, determine $m\sphericalangle PBC$ ($A \in$ al mayor arco $\widehat{CD}$)

A) 50° B) 40° C) 80°
D) 60° E) 65°

5. En un cuadrado $ABCD$, M es punto medio de $\overline{BC}$ y en $\overline{AD}$ se ubica el punto N tal que $DN = 3(AN)$. Si $\overline{DM}$ y $\overline{CN}$ se intersecan en Q, calcule $m\sphericalangle AQN$.

A) 18°30' B) 26°30' C) 15°
D) 12°30' E) 14°

6. Calcule x, si $AM = MB$. Considere que T, A, B y C son puntos de tangencia.



A) 37° B) 53° C) 18°
D) 23° E) 14°

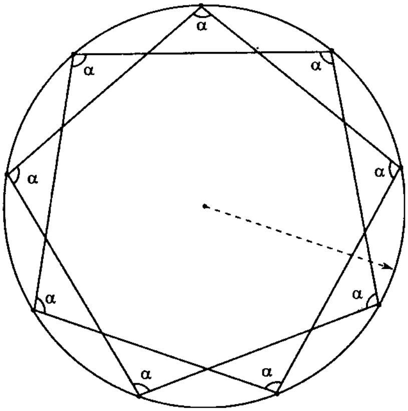
7. En un triángulo ABC, $AC = 4$ y $AB + BC = 8$. Si $m\sphericalangle ABC = 53°$, halle el inradio del triángulo ABC.

A) 1 B) 1,2 C) 1,5
D) 1,6 E) 1,8

8. En un cuadrilátero $ABCD$ circunscrito a una circunferencia, $AB=9$; $BC=4$, $m\sphericalangle BAD=53°$ y $m\sphericalangle ABC=90°$. Indique CD.

A) 4 B) 6 C) 5
D) 8 E) $4\sqrt{2}$

9. En la figura, calcule α.



A) 90° B) 100° C) 110°
D) 120° E) 108°

10. En un triángulo ABC, se traza la altura BH. Dado que M y N son las proyecciones de H sobre $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, además P y Q son las proyecciones de N y M sobre $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{PQ}$ y $\overline{BH}$.

A) 45° B) 72° C) 90°
D) 120° E) 60°

11. En un trapezoide simétrico $ABCD$, $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle ADC = 100°$. Si en $\overline{BD}$ se ubica el punto E, tal que $m\sphericalangle EAD = 2(m\sphericalangle EAB) = 40°$, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$.

A) 20° B) 30° C) 40°
D) 37° E) 53°

12. En un cuadrilátero $ABCD$, $m\sphericalangle BAD = 90°$, y $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BDC)$. Si en la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto E y $m\sphericalangle ECD = mABD = x$, señale el valor de x.

A) 60° B) 30° C) 45°
D) 75° E) 40°

13. Dado ABC un triángulo inscrito en una circunferencia $\mathscr{C}_1$ y se ubican los puntos P y Q respectivamente, tal que $\overline{PQ}$ es tangente a la circunferencia inscrita en el triángulo ABC y secante a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N. Si $m\widehat{PB} = m\widehat{BQ}$, calcule la medida del ángulo determinado por los segmentos que unen los puntos de tangencia de los lados opuestos del cuadrilátero circunscrito $AMNC$.

A) 60° B) 45° C) 75°
D) 90° E) 72°

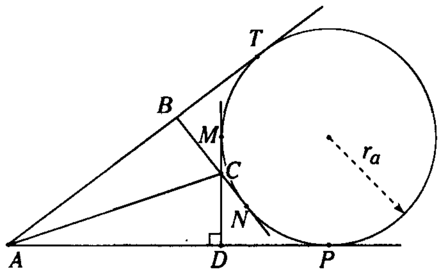
14. Dado un cuadrado $ABCD$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos M y N, tal que $\overline{AM}$ y $\overline{AN}$ intersecan $\overline{BD}$ en P y Q, respectivamente. Si O es el punto medio de MN y la $m\sphericalangle MAN = 45°$. indique la $m\sphericalangle POQ$.

A) 90° B) 60° C) 135°
D) 67°30' E) 75°

15. Dado un triángulo isósceles ABC ($AB = BC$), en la región interior se ubica el punto P, tal que $m\sphericalangle PAB = m\sphericalangle PBC = m\sphericalangle PCA$. Si $m\sphericalangle ABC = 28°$, calcule $m\sphericalangle PAC$.

A) 37° B) 28° C) 62°
D) 31° E) 53°

16. En la figura mostrada, $AB + CD = 15$; $BC = 7$; $AT = 20$ y $r_a = 8$. Calcule el inradio del triángulo ACD, si M, N, P y T son puntos de tangencia.



A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 1,2 E) 3

17. En la base $\overline{AC}$ de un triángulo isósceles ABC y en la región interior se ubican los puntos M y P respectivamente.
Si $m\sphericalangle PAB = m\sphericalangle PCA$, halle $m\sphericalangle APM + m\sphericalangle BPC$

A) 100° B) 135° C) 150°
D) 180° E) 240°

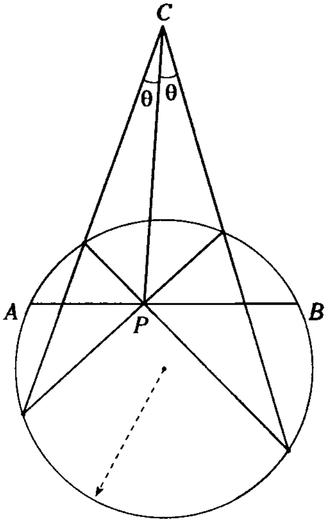
18. La recta de Simson correspondiente a un punto P de la circunferencia circunscrita a un triángulo de ortocentro H interseca a $\overline{HP}$ en M. Calcule HM/MP

A) 0,6 B) 0,7 C) 0,5
D) 2 E) 1

19. Calcule la medida del ángulo formado por las rectas de Simson trazadas desde los puntos P y Q de la circunferencia circunscrita a un triángulo. Considere que PQ y el radio de dicha circunferencia presentan igual longitud.

A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 75°

20. Según la figura, $AP = PB$. Indique $m\sphericalangle CPB$



A) 60° B) 70° C) 75°
D) 85° E) 90°

1	B
2	E
3	C
4	A
5	D
6	A
7	A
8	C
9	B
10	C
11	B
12	C
13	D
14	A
15	E
16	C
17	D
18	E
19	B
20	E

Claves

Capítulo X

Puntos notables

La acrobacia es un arte que consiste en dominar la posición del centro de masa (centroide o gravicentro) para lograr el equilibrio no solo de la persona, sino de todo el equipo y los objetos que cargan.

Puntos notables

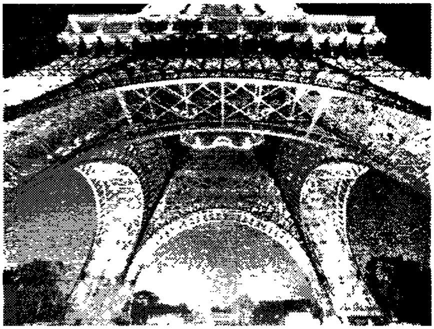
OBJETIVOS

- Conocer las propiedades de los puntos notables.
- Resolver problemas utilizando los conceptos y propiedades de los puntos notables.
- Conocer los triángulos especiales asociados a los puntos notables y sus propiedades respectivas
- Identificar y hallar los puntos notables de los polígonos.

INTRODUCCIÓN

En la naturaleza podemos apreciar, la concurrencia de algunos ríos pequeños en un punto, la concentración de fuerzas que actúan sobre un cuerpo en reposo o la concurrencia de los rayos solares reflejados en un espejo parabólico.

Geométricamente, el punto de concurrencia es el punto común de tres o más líneas; y notamos en los casos anteriores que la concurrencia de fuerzas o rayos cumplen ciertas propiedades que son de bastante utilidad para la humanidad y de allí lo importante de su estudio, es así como en ciertas figuras geométricas como el triángulo y el cuadrilátero, la concurrencia de ciertas líneas notables de una misma especie o una misma permite conocer otras propiedades en dichas figuras.



Es importante conocer el punto donde se concentran las fuerzas en la estructura de un puente para que este se encuentre en equilibrio.

PUNTOS NOTABLES

Son aquellos puntos de concurrencia de líneas notables de una misma característica[1].

Teorema
En todo triángulo sus tres medianas son concurrentes.

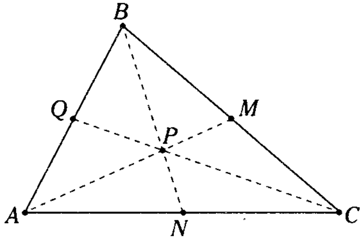


Figura 10.1

En el $\triangle ABC$:
$\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$: son medianas relativas a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.
$\rightarrow$ $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son concurrentes en P.

Demostración

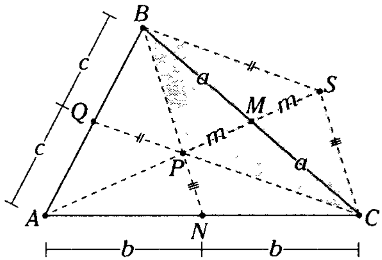


Figura 10.2

Sean $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ medianas del $\triangle ABC$ que se intersecan en P.

$\rightarrow$ $AN=NC$ y $AQ=QB$

luego prolongamos $\overline{AP}$ hasta S.

tal que $AP=PS$.

Del teorema de los puntos medios

$\triangle ABS$: $\overline{QP} \parallel \overline{BS}$

$\triangle ACS$: $\overline{NP} \parallel \overline{CS}$

Como: $\overleftrightarrow{QPC} \parallel \overline{BS}$ y $\overleftrightarrow{NPB} \parallel \overline{CS}$ entonces $PBSC$ es un paralelogramo, por lo tanto, sus diagonales se bisecan.

$\rightarrow$ $PM=MS$ y $BM=MC$

$\therefore$ $\overline{AM}$: mediana del $\triangle ABC$ relativa a $\overline{BC}$.

con lo cual queda demostrado que $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son medianas concurrentes en P.

BARICENTRO (G)

Es el punto de concurrencia de las tres medianas de un triángulo.

Teorema
El baricentro divide a cada una de las medianas en la razón de dos a uno desde el vértice.

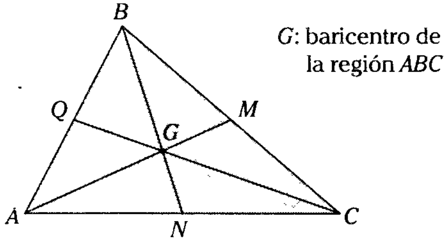


Figura 10.3

Entonces $\dfrac{GA}{GM}=\dfrac{GB}{GN}=\dfrac{GC}{GQ}=2$.

Demostración

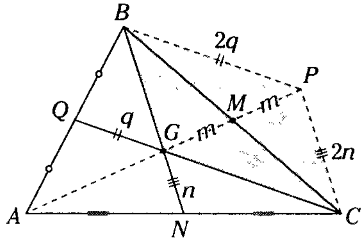


Figura 10.4

(1) Al referirnos a líneas de una misma característica queremos indicar por ejemplo que todas tienen que ser medianas.

Sean $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ medianas del $\triangle ABC$ que se intersecan en G.

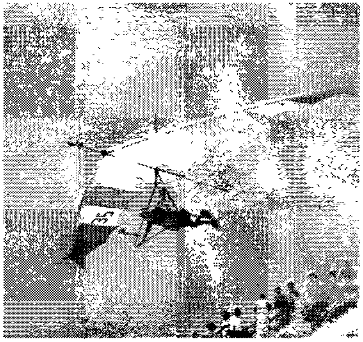
$\rightarrow$ $AN = NC$ y $BQ = QA$

Luego prolongamos $\overline{AG}$ hasta P, tal que $GP = AG$.

$\rightarrow$ En el $\triangle ABP$ del teorema de los puntos medios, $\overline{GQ} // \overline{BP}$ y $GQ = \dfrac{BP}{2} = q$.

Análogamente en el $\triangle APC$,

$$\overline{GN} // \overline{PC} \text{ y } GN = \frac{PC}{2} = n .$$



En el deporte de las "Alas delta" la posición del piloto tiene que coincidir con el centroide de este gran cometa para poder planear y transportarse por las corriente de aire descendente.

Como $\overline{BP} // \overline{GC}$ y $\overline{PC} // \overline{BG}$ entonces $GBPC$ es un paralelogramo de lo cual se concluye que $\overline{GP}$ y $\overline{BC}$ se bisecan en M. Por lo que $\overline{AM}$ es mediana.

Así también $GC = BP = 2q$ y $GB = PC = 2n$.

$\rightarrow$ $BG = 2(GN)$; $CG = 2(CQ)$ y

también $AG = GP = 2m$ y $GM = MP = m$

$\rightarrow$ $AG = 2(GM)$

$$\therefore \quad \frac{GA}{GM} = \frac{GB}{GN} = \frac{GC}{GQ} = 2$$

Teorema

Las tres alturas de un triángulo o sus respectivas prolongaciones son concurrentes.

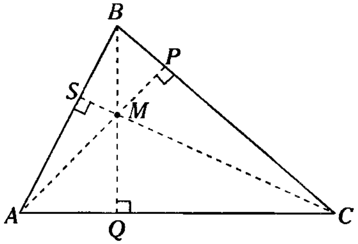


Figura 10.5

En el $\triangle ABC$:

$\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CS}$: son alturas relativas a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.

$\rightarrow$ $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CS}$: son concurrentes en M

Demostración

En el $\triangle ABC$ trazamos las alturas $\overline{AP}$ y $\overline{CS}$ que se intersecan en M.

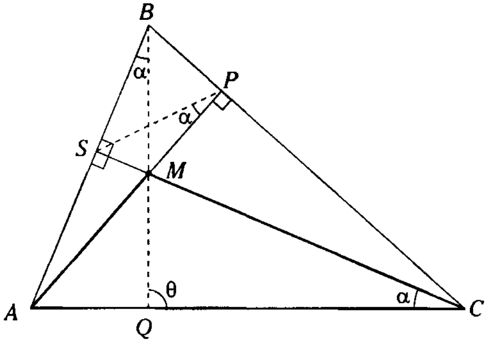


Figura 10.6

Luego trazamos la ceviana $\overline{BQ}$, tal que $M \in \overline{BQ}$.

$\rightarrow$ En el $\square ASPC$: inscriptible,

$m\sphericalangle SPA = m\sphericalangle SCA = \alpha$.

$\rightarrow$ En el $\square MSBP$: inscriptible,

$m\sphericalangle SBM = m\sphericalangle SPM = \alpha$.

Luego en la figura 10.6, $\bowtie BSCQ$:

$90^\circ + \alpha = \theta + \alpha$

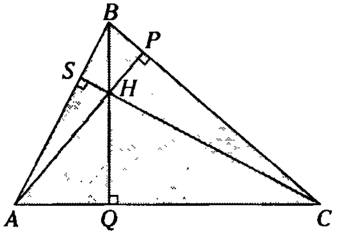
$\therefore \ \theta = 90^\circ$

Entonces $\overline{BQ}$ es altura por lo tanto las tres alturas concurren en M.

Análogamente se demuestra cuando un triángulo es obtusángulo.

ORTOCENTRO (H)

Es el punto de concurrencia de las alturas de un triángulo o sus respectivas prolongaciones.

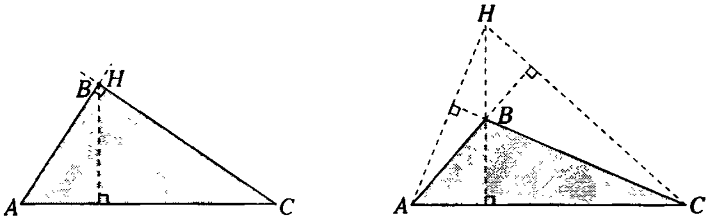


Si $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CS}$ son alturas del $\triangle ABC$.
→ H es ortocentro del triángulo ABC.

Figura 10.7

$\triangle ABC$: Como es acutángulo, el ortocentro está en la región interna del triángulo.

- Si un triángulo es rectángulo, el ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto.
- Si un triángulo es obtusángulo, el ortocentro está en la región externa del triángulo.



$\sphericalangle ABC$: recto
(*a*)

$\sphericalangle ABC$: obtuso
(*b*)

Figura 10.8

Importante

Dado un triángulo ABC en donde A y C permanecen fijos y el vértice B se desplaza paralelamente a la $\overleftrightarrow{AC}$ los ortocentros de los triángulos ABC describen una parábola.
H: ortocentro del $\triangle ABC$.
H_1: ortocentro del $\triangle AB_1C$.
H_2: ortocentro del $\triangle AB_2C$.

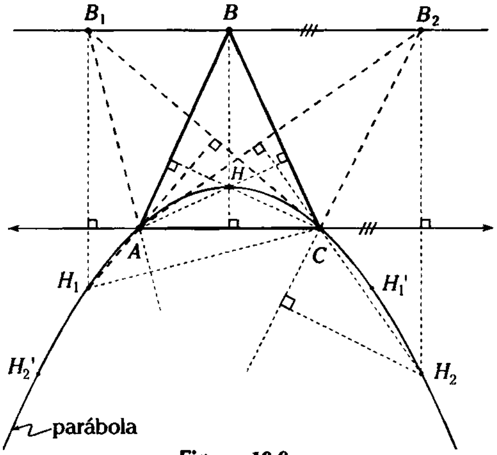


Figura 10.9

Teorema

En todo triángulo las bisectrices interiores son concurrentes.

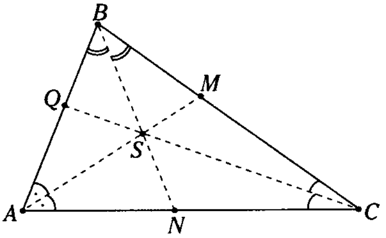


Figura 10.10

En el $\triangle ABC$:

Sea $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$: bisectrices interiores, relativas a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.

$\rightarrow$ $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son concurrentes en S.

Demostración

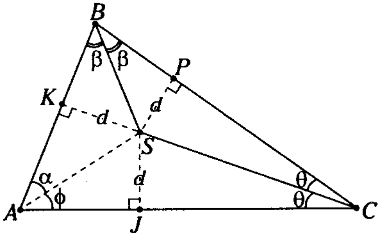


Figura 10.11

Sea S el punto de intersección de las bisectrices BN y CQ.

$\rightarrow$ Del teorema de la bisectriz

- $\overrightarrow{BS}$: $SK=SP=d$ (I)
- $\overrightarrow{CS}$: $SP=SJ=d$ (II)

De (I) y (II): $SK=SJ=d$

$\rightarrow$ Los triángulos AKS y AJS son congruentes (L.L.L.)

$\therefore$ $\alpha=\phi$

Esto prueba que $\overline{AS}$ es una porción de la bisectriz interior del $\triangle ABC$ trazada desde A ($\overline{AM}$).

Por lo tanto, queda demostrado que las tres bisectrices interiores son concurrentes en S.

INCENTRO (*I*)

Es el centro de la circunferencia inscrita en un triángulo.

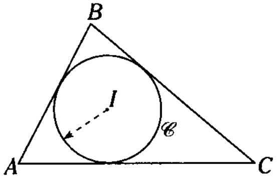


Figura 10.12

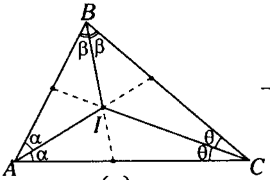
Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$.

I: centro de $\mathscr{C}$.

$\rightarrow$ I: incentro del $\triangle ABC$.

Teorema

En todo triángulo, las bisectrices interiores concurren en el incentro.

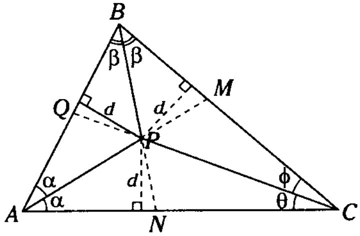


(a)

Sea I el incentro del $\triangle ABC$.

$\rightarrow$ las bisectrices interiores del $\triangle ABC$ concurren en I.

Demostración



(b)

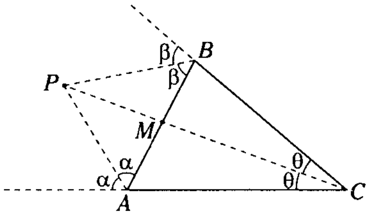
Figura 10.13

En el $\triangle ABC$ trazamos las bisectrices interiores $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ que se intersecan en P.

Y como P equidista de los tres lados y está en la región interna con centro en P y radio d trazamos una circunferencia que viene a ser la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$. Se concluye que P es el centro de la circunferencia inscrita, y de esta manera resulta incentro del $\triangle ABC$.

Teorema

En todo triángulo, las bisectrices exteriores trazadas de dos vértices y la bisectriz interior trazada del tercer vértice, concurren en un punto.

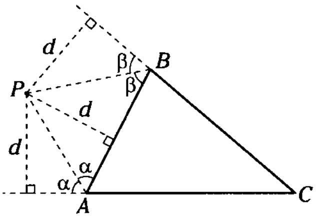


(a)

Sean $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$ bisectrices exteriores trazadas desde A y B y $\overrightarrow{CM}$ bisectriz interior trazada desde C.
$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ y $\overrightarrow{CM}$ son concurrentes en P.

Demostración

En el triángulo ABC trazamos las bisectrices exteriores desde A y B las cuales se intersecan en P.



(b)

Figura 10.14

Del teorema de la bisectriz para $\overrightarrow{AP}$, P equidista de $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$. Para $\overrightarrow{BP}$, P equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$, por lo tanto P equidista de $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, es decir, P pertenece a la bisectriz interior trazada desde C en consecuencia $\overrightarrow{CP}$ es bisectriz interior.
Por lo tanto, dos bisectrices exteriores y una tercera interior son concurrentes.

Nota

Si P equidista de los tres lados del $\triangle ABC$ y está en la región externa, entonces P es centro de la circunferencia exinscrita relativa a un lado.

EXCENTRO (E)

Es el centro de la circunferencia exinscrita en un triángulo.

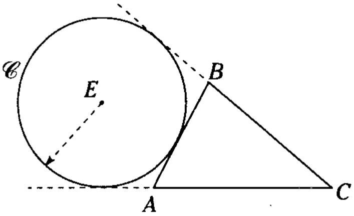


Figura 10.15

$\mathscr{C}$ circunferencia ex inscrita al $\triangle ABC$ relativa al lado AB.
E: centro de $\mathscr{C}$.
$\rightarrow$ E: excentro del $\triangle ABC$ relativo al lado $\overline{AB}$.

Observación

Así como hay un excentro relativo al lado $\overline{AB}$, también hay uno para el lado $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente por lo tanto todo triángulo tiene tres excentros uno relativo a cada lado.
Así en la figura E_a, E_b y E_c son excentros relativos a los lados BC, AC y AB respectivamente.

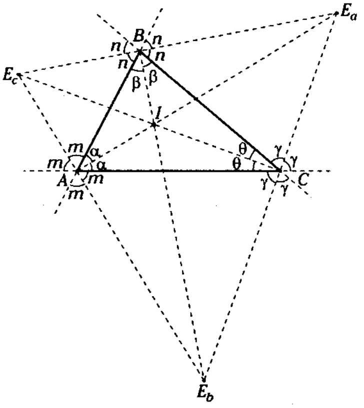
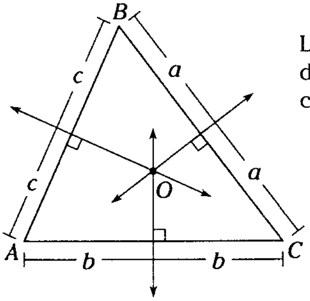


Figura 10.16

$\triangle E_a E_b E_c$: Es el triángulo exincentral del $\triangle ABC$.

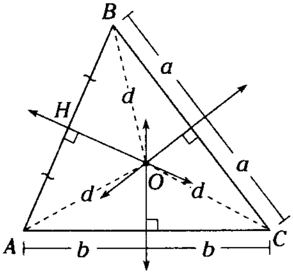
Teorema
En todo triángulo, las mediatrices de sus lados son concurrentes.



Las mediatrices de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ concurren en O.

(*a*)

Demostración
Las mediatrices de los lados BC y AC de un triángulo ABC se intersecan en el punto O.



Luego del teorema de la mediatriz $OA = OB = OC = d$
$\rightarrow$ en el $\triangle AOB$ (isósceles) la altura $\overline{OH}$ es parte de la mediatriz de $\overline{AB}$. Por lo tanto, las tres mediatrices concurren en O.

(*b*)

Figura 10.17

CIRCUNCENTRO (O)

Es el centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo.

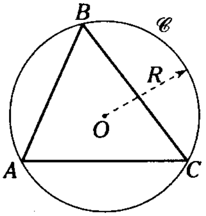
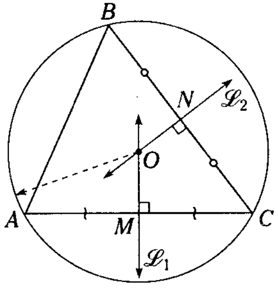


Figura 10.18

Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$.
O es el centro de $\mathscr{C}$.
$\rightarrow$ O es el circuncentro del $\triangle ABC$.
R: es el circunradio del $\triangle ABC$.

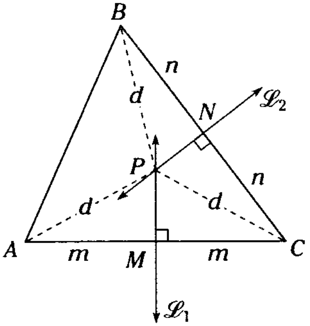
Teorema
Las mediatrices de dos lados de un triángulo se intersecan en el circuncentro de dicho triángulo.



(*a*)

Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ mediatriz de $\overline{AC}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ mediatriz de $\overline{BC}$.
$\rightarrow$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} = \{O\}$. Siendo O el circuncentro del $\triangle ABC$.

Demostración
En el $\triangle ABC$, sea P el punto de intersección de las mediatrices $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.



(*b*)

Figura 10.19

Del teorema de la mediatriz
para $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$: $PA = PC = d$
para $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: $PC = PB = d$
$\rightarrow$ P equidista de los tres vértices (A, B y C)
$\therefore$ P es el circuncentro de $\triangle ABC$.

Nota

Las mediatrices de los tres lados de un triángulo concurren en el circuncentro de dicho triángulo.

Observación

- Si el triángulo es acutángulo, el circuncentro se encuentra en la región interna del triángulo.
- Si el triángulo es obtusángulo, el circuncentro se encuentra en la región externa del triángulo.
- Si el triángulo es rectángulo, el circuncentro se encuentra en el triángulo (punto medio de la hipotenusa).

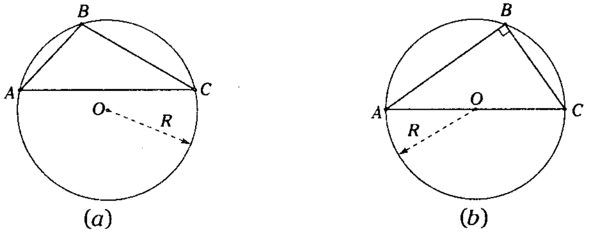


Figura 10.20

Teorema

En todo triángulo acutángulo ABC de circuncentro O.

$$m\sphericalangle AOC = 2(m\sphericalangle ABC)$$

Demostración

En el triángulo ABC trazamos la circunferencia circunscrita $\mathscr{C}$ de centro O.

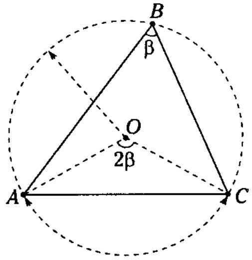


Figura 10.21

De la figura 10.21, O: circuncentro del $\triangle ABC$

Si $m\sphericalangle ABC = \beta$

$\rightarrow$ $m\,\overset{\frown}{AC} = 2\beta$ (Por $\sphericalangle$ inscrito)

y $m\sphericalangle AOC = 2\beta$ (Por $\sphericalangle$ central)

$\therefore$ $m\sphericalangle AOC = 2(m\sphericalangle ABC)$

Observación

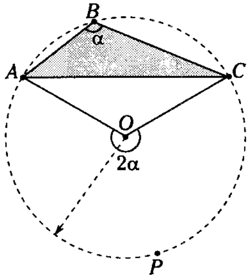


Figura 10.22

Si el triángulo es obtusángulo.

O: circuncentro del $\triangle ABC$

Si $m\sphericalangle ABC=\alpha$

$\rightarrow$ Por $\sphericalangle$ inscrito $m\overset{\frown}{APC} = 2\alpha$

Punto de Brocard

Dado un triángulo ABC si en la región interior se ubica el punto P, tal que la $m\sphericalangle PAB = m\sphericalangle PBC = m\sphericalangle PCA$, entonces P es el punto de Brocard respecto del triángulo ABC. (Todo triángulo no equilátero tiene dos puntos de Brocard).

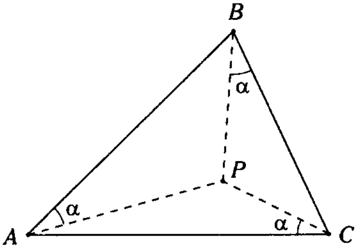


Figura 10.23

(Henri Brocard: Matemático Francés (1845-1922) que contribuyó notablemente, con el estudio del triángulo, al publicar diversos artículos en los años 1870-1890).

Observación

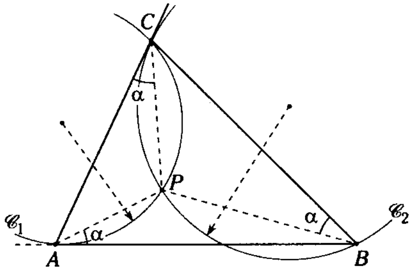


Figura 10.24

Si trazamos circunferencias circunscritas a los triángulos APC y BPC (ver figura 10.24), estas tendrán que ser tangentes a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente en A y C. Así, para ubicar el punto de Brocard (P) por A trazamos una perpendicular a $\overline{AB}$ que interseca a la mediatriz de $\overline{AC}$ en O_1 y por C una perpendicular a $\overline{AC}$ que interseca a la mediatriz de $\overline{BC}$ en O_2, por lo tanto las circunferencias de centros O_1; O_2 y radios $\overline{O_1A}$ y $\overline{O_2C}$ se intersecan en P (punto de Brocard).

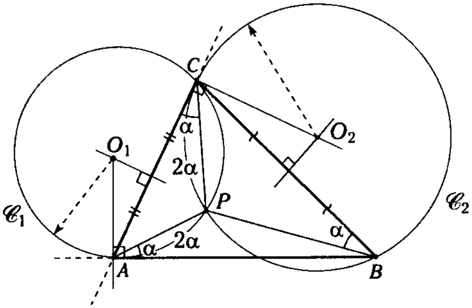


Figura 10.25

De la figura, $\mathscr{C}_1$: tangente a $\overline{AB}$ en A.

$$\rightarrow \quad m\sphericalangle PAB = \frac{m\overset{\frown}{AP}}{2} = \alpha \quad y \quad m\overset{\frown}{AP} = 2\alpha$$

por ángulo inscrito la $m\sphericalangle ACP = \alpha$ pero $\mathscr{C}_2$ es tangente a $\overline{AC}$ en C.

$$\rightarrow \quad m\sphericalangle PCA = \frac{m\overset{\frown}{PC}}{2} = \alpha \quad y \quad m\overset{\frown}{PC} = 2\alpha$$

$\therefore$ $m\sphericalangle PBC = \alpha$

con lo cual la $m\sphericalangle PAB = m\sphericalangle PBC = m\sphericalangle PCA = \alpha$

$\therefore$ P es un punto Brocard.

Nota

Si en vez del punto C se considera el punto B y trazamos una perpendicular a $\overline{BC}$ hasta intersecar a la mediatriz de $\overline{BC}$ en O_1 y luego procedemos análogamente al caso anterior, encontraremos el otro punto de Brocard.

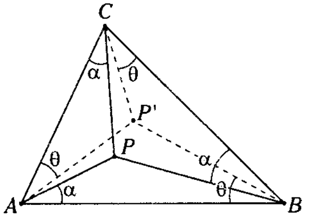


Figura 10.26

P y P' son puntos de Brocard del $\triangle ABC$, además $\alpha = \theta$

TEOREMA DE NAGEL

En todo triángulo, el segmento que une los pies de dos alturas, es perpendicular, al circunradio relativo al tercer vértice.

I.

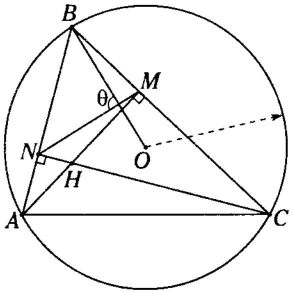


Fig. 10.27

O: circuncentro del $\triangle ABC$

AM y CN: alturas del $\triangle ABC$

$\rightarrow$ $\overline{MN} \perp \overline{BO}$.

$\therefore$ $\theta = 90°$

Demostración

En el $\triangle ABC$: O es circuncentro y H es ortocentro.

Notamos en el $\triangle BOC$:

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$\rightarrow$ $\alpha + \beta = 90°$ (I)

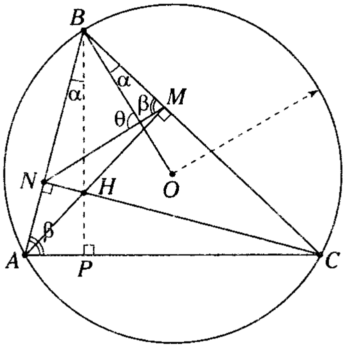


Figura 10.28

$ANMC$: ⏢ inscriptible

$\rightarrow$ $m\sphericalangle NMB = m\sphericalangle NAC = \beta$

$\therefore$ $\theta = \alpha + \beta$ (II)

De (I) y (II):

$\therefore$ $\theta = 90°$

II. Si el triángulo ABC es obtusángulo, también se cumple el teorema de Nagel.

En el $\triangle ABC$: $\Omega > 90°$

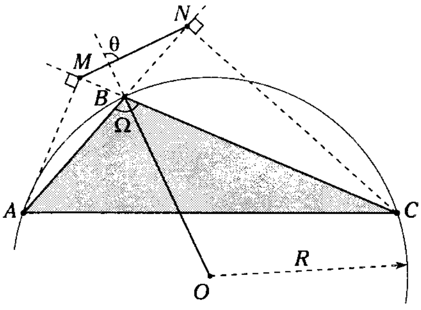


Figura 10.29

$\overline{AM}$ y $\overline{CN}$: alturas del $\triangle ABC$.

$\rightarrow$ $\overline{MN} \perp \overleftrightarrow{BO}$

$\therefore$ $\theta = 90°$

Demostración

En el $\triangle ABC$: O es circuncentro y H es el ortocentro.

De la figura 10.30: $m\sphericalangle BOC = 2(m\sphericalangle BAC) = 2\alpha$

$\triangle BOC$: $2\alpha + 2\beta = 180°$

$\rightarrow \alpha + \beta = 90°$

$\square AMNC$: inscriptible

$\rightarrow m\sphericalangle NMC = m\sphericalangle NAC = \alpha$

En el $\triangle$ $\theta = \alpha + \beta$

$\therefore \theta = 90°$

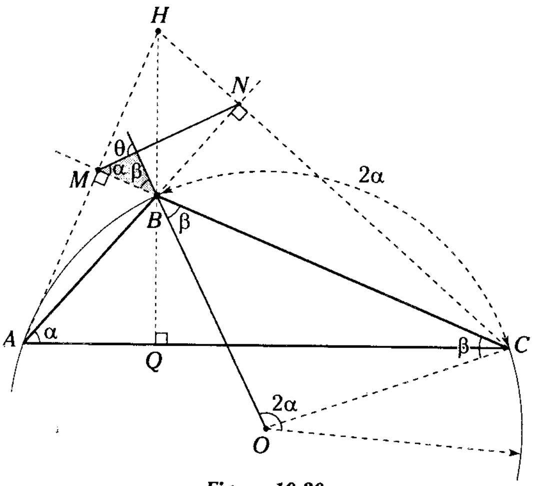


Figura 10.30

TRIÁNGULOS ESPECIALES ASOCIADOS A LOS PUNTOS NOTABLES

TRIÁNGULO MEDIANO

Es aquel triángulo cuyos vértices son los pies de las medianas de un triángulo.

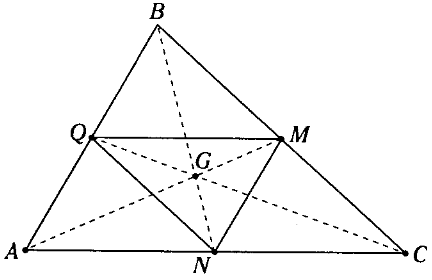


Figura 10.31

Sea AM, BN y CQ medianas del $\triangle ABC$.

$\triangle MNQ$: triángulo mediano del $\triangle ABC$.

$\triangle ABC$: triángulo antimediano del $\triangle MNQ$.

Nota

Al triángulo mediano también se le conoce como triángulo complementario.

Propiedades

El baricentro de toda región triangular es también baricentro de la región triangular asociado a su triángulo mediano.

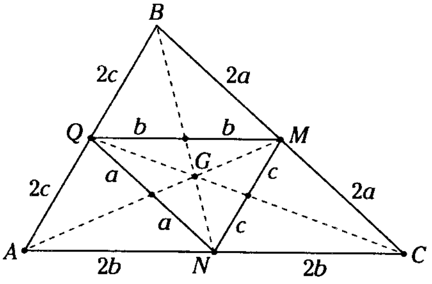


Figura 10.32

G: baricentro de $\triangle ABC$

G: baricentro de $\triangle MNQ$

$\triangle MNQ$: $\triangle$ mediano del $\triangle ABC$

El circuncentro de todo triángulo es ortocentro de su triángulo mediano.

$\triangle MNQ$: $\triangle$ mediano del $\triangle ABC$

O: circuncentro del $\triangle ABC$

O: ortocentro del $\triangle MNQ$

TRIÁNGULO ÓRTICO

Es aquel triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas de un triángulo

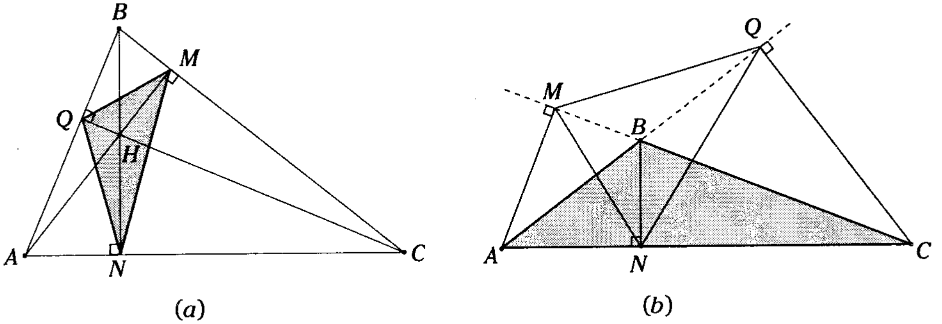


Figura 10.33

Sean AM, BN y CQ alturas del $\triangle ABC$.
$\triangle MNQ$: triángulo órtico del $\triangle ABC$.
$\triangle ABC$: triángulo antiórtico del $\triangle MNQ$.

Propiedades

En todo triángulo acutángulo, el ortocentro es incentro de su triángulo órtico.

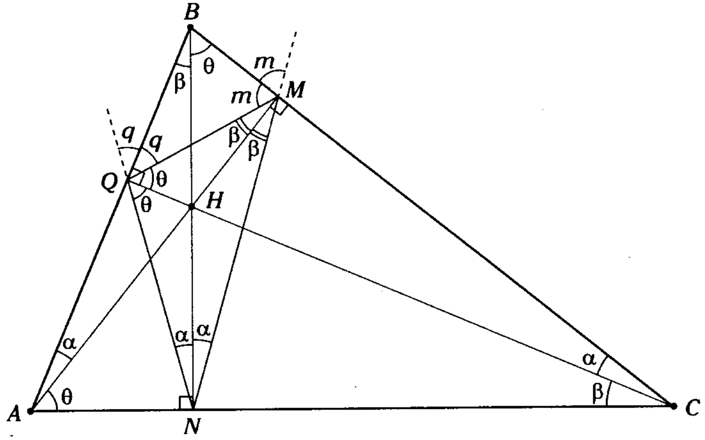


Figura 10.34

$\triangle MNQ$: $\triangle$órtico del $\triangle ABC$
H: ortocentro del $\triangle ABC$
H: incentro del $\triangle MNQ$
A, B y C son excentros del $\triangle MNQ$.

En todo triángulo obtusángulo, el ortocentro es uno de los excentros de su triángulo órtico.

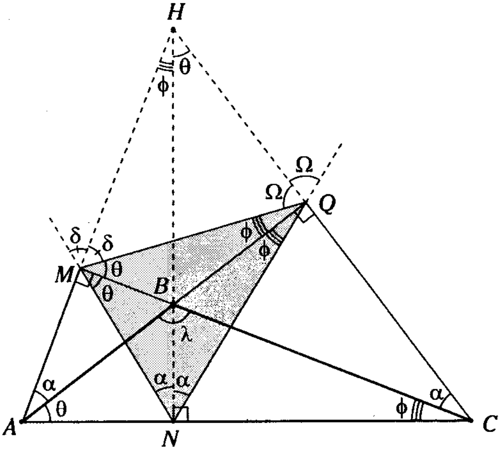


Figura 10.35

$\triangle ABC$: $\triangle$ obtusángulo (obtuso en B)
m$\measuredangle ABC = \lambda$ ($\lambda > 90°$)
$\triangle MNQ$: $\triangle$órtico del $\triangle ABC$.
H: ortocentro del $\triangle ABC$.
A, H y C: excentros del $\triangle MNQ$.

Nota

El vértice B del $\triangle ABC$ es el incentro del $\triangle MNQ$.

TRIÁNGULO EXINCENTRAL

Es el triángulo cuyos vértices son los excentros de un determinado triángulo.

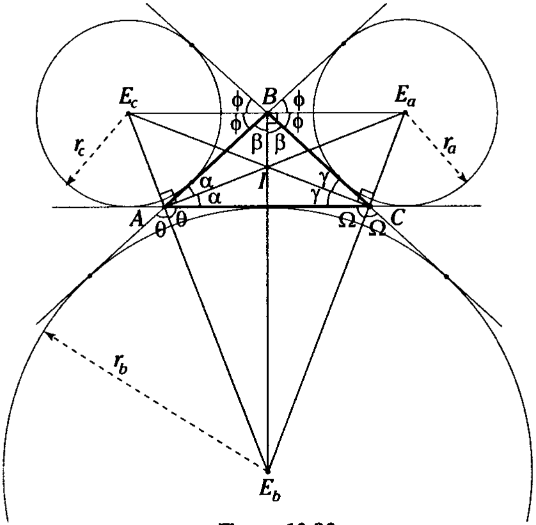


Figura 10.36

$\triangle E_aE_bE_c$: $\triangle$ exincentral del $\triangle ABC$.
I: incentro del $\triangle ABC$
I: ortocentro del $\triangle E_aE_bE_c$
$\triangle ABC$: $\triangle$ antincentral del $\triangle E_aE_bE_c$

Nota

Se observa que el $\triangle ABC$ es el $\triangle$ órtico del $\triangle E_aE_bE_c$ y este a su vez es el antiórtico del $\triangle ABC$.

TRIÁNGULO TANGENCIAL

Es el triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita, con los lados del triángulo.

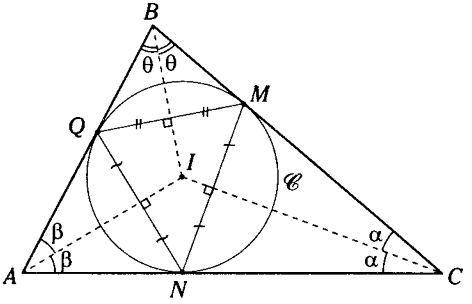


Figura 10.37

Sea $\mathscr{C}$: circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$.
M, N y Q: puntos de tangencia.
$\triangle MNQ$: $\triangle$ tangencial el $\triangle ABC$.

Propiedades

- Todo triángulo tangencial es acutángulo.
- El incentro de todo triángulo es el circuncentro de su triángulo tangencial.

TRIÁNGULO PEDAL

Es el triángulo cuyos vértices son los pies de las perpendiculares trazadas desde un punto cualquiera, del plano determinado por un triángulo dado, sobre los lados o sus respectivas prolongaciones.

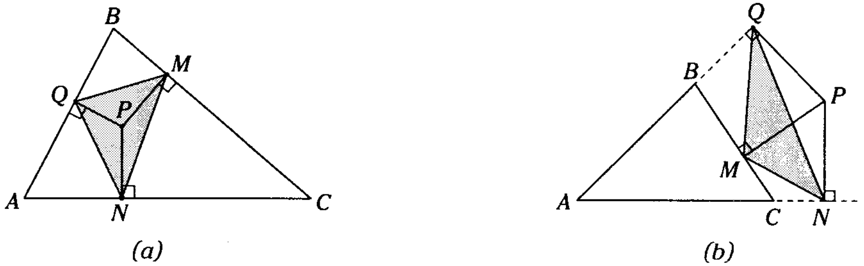


Figura 10.38

$\triangle MNQ$: $\triangle$ pedal del $\triangle ABC$ respecto del punto P.

$\triangle MNQ$: $\triangle$ pedal del $\triangle ABC$ respecto del punto P.

Nota

Al triángulo pedal también se le conoce como triángulo podar.
- Si P coincide con el ortocentro, el triángulo pedal es el triángulo órtico del triángulo.
- Si P coincide con el circuncentro, el triángulo pedal es el triángulo mediano del triángulo.
- Si P coincide con el incentro, el triángulo pedal es el triángulo tangencial.
- Cuando P pertenece a la circunferencia circunscrita, no existe triángulo pedal porque los pies de las perpendiculares son colineales (recta de Simson).

Teorema

En todo triángulo rectángulo, la distancia del incentro a la altura relativa a la hipotenusa es igual a la diferencia de los inradios de los triángulos parciales, que se determinan cuando se traza dicha altura.

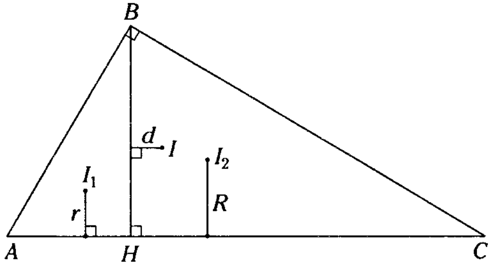


Figura 10.39

I: incentro del $\triangle ABC$.
r y R: inradios de los triángulos ABH y HBC.

$d = R - r$

Demostración

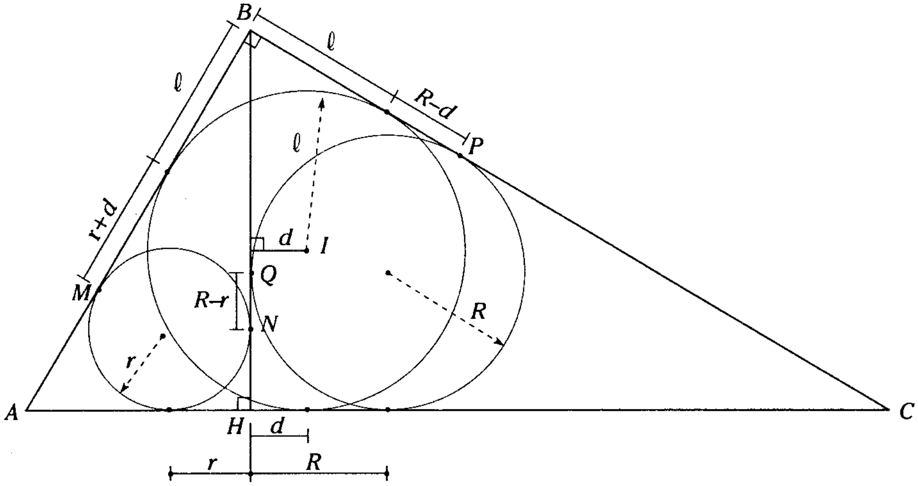


Figura 10.40

En la figura 10.40 se ha trazado las circunferencias inscritas en los ⊾ AHB, BHC y ABC.

$BM = BN = \ell + (r + d)$

$BP = BQ = \ell + (R - d)$

también $BM = BQ + QN$

Reemplazando $\ell + (r + \text{d}) = \ell + (R - d) + (R - r)$

$\therefore\ d = R - r$

Teorema

La circunferencia circunscrita a un triángulo biseca al segmento que une el incentro con cualquiera de los excentros de dicho triángulo.

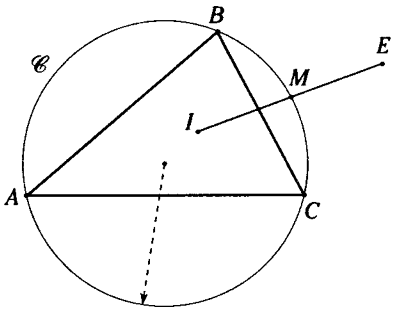


Figura 10.41

I: incentro del $\triangle ABC$.

E: excentro del $\triangle ABC$ relativo al lado $\overline{BC}$.

$\mathscr{C}$: circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$.

$\mathscr{C} \cap \overline{IE} = \{M\}$

$\rightarrow\ IM = ME$

Demostración

Sea I: incentro del $\triangle ABC$

E: excentro del $\triangle ABC$

Sabemos que A, I y E son colineales

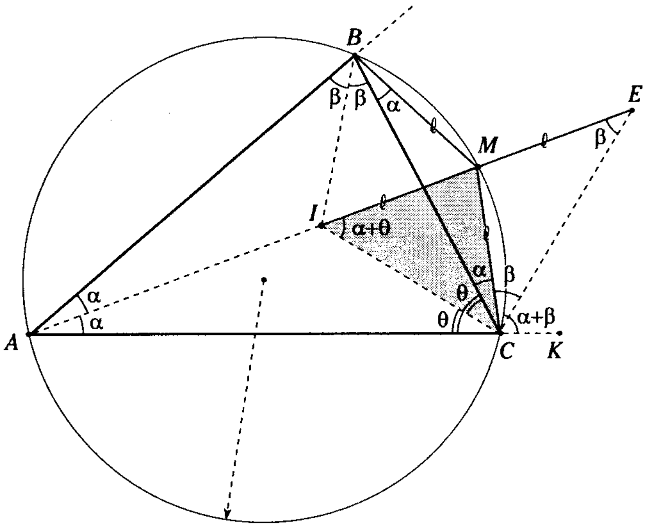


Figura 10.42

$m\measuredangle ACI = m\measuredangle BCI = \theta$

$m\measuredangle BAI = m\measuredangle IAC = \alpha$

$\rightarrow\ m\measuredangle MBC = m\measuredangle MCB = \alpha$

$\therefore\ m\measuredangle CIM = m\measuredangle MCI = \alpha + \theta$

$m\measuredangle BCE = m\measuredangle ECK = \alpha + \beta$

$\therefore\ m\measuredangle MCE = \beta$

Se observa

$\triangle IMC$: isósceles $IM = MC = \ell$

$\triangle CME$: isósceles $EM = CM = \ell$

$\rightarrow\ IM = ME$

Teorema

La longitud de la flecha relativa a un lado del triángulo inscrito en una circunferencia es igual a la semidiferencia del exradio relativo a dicho lado y el inradio.

MN: flecha relativa al lado *BC* ($MN=f_a$)

$$f_a=\frac{r_a-r}{2}$$

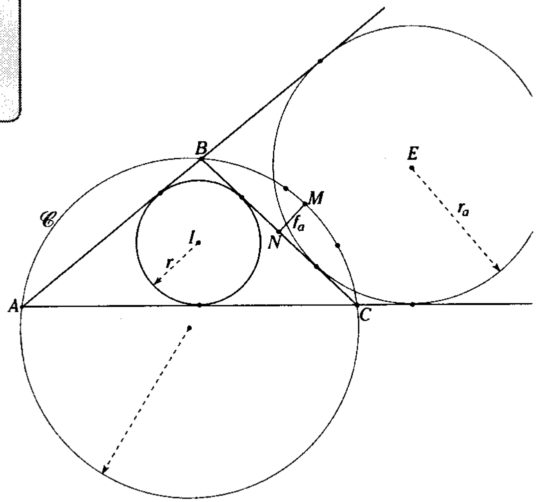


Figura 10.43

Demostración

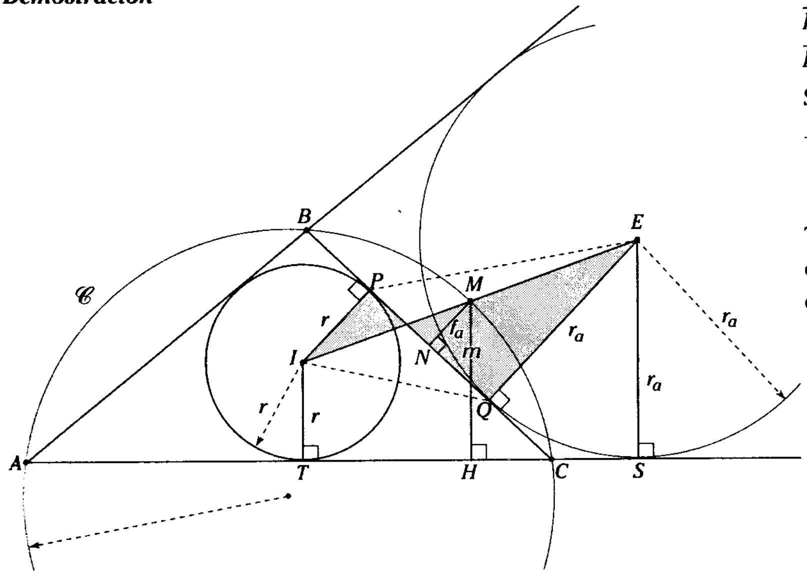


Figura 10.44

$\overline{IP}\perp\overline{BC}$; $\overline{EQ}\perp\overline{BC}\rightarrow\overline{IP}\,//\,\overline{EQ}$

Sabemos que $IM=ME$

$\rightarrow$ en el trapecio *IPEQ*

$$f_a=\frac{r_a-r}{2}$$

También podemos observar que en el trapecio *TIES*

$$m=\frac{r_a+r}{2}$$

Teorema

En todo triángulo la suma de los exradios es igual a la suma del inradio y cuatro veces el circunradio.

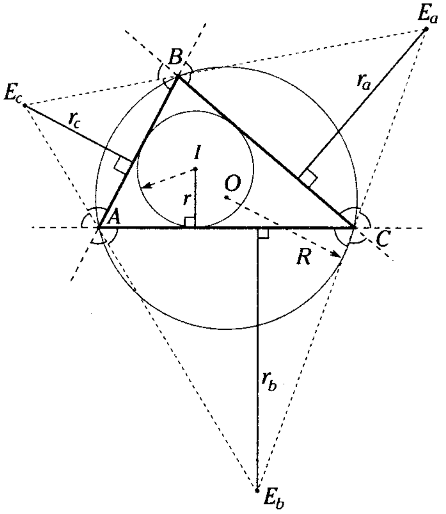


Figura 10.45

r_a, r_b, r_c : exradios del $\triangle ABC$

r : inradio

R : circunradio

Teorema de Steiner

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R$$

Demostración

Sabemos que

$AP = CQ = \ell$ y $AH = HC$

$\rightarrow PH = HQ$

$E_cN = NE_a$

Entonces

$$R - m = \frac{r_b - r}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$R + m = \frac{r_a + r_c}{2} \qquad \text{(II)}$$

Sumando (I) y (II)

$$2R = \frac{r_a + r_b + r_c - r}{2}$$

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

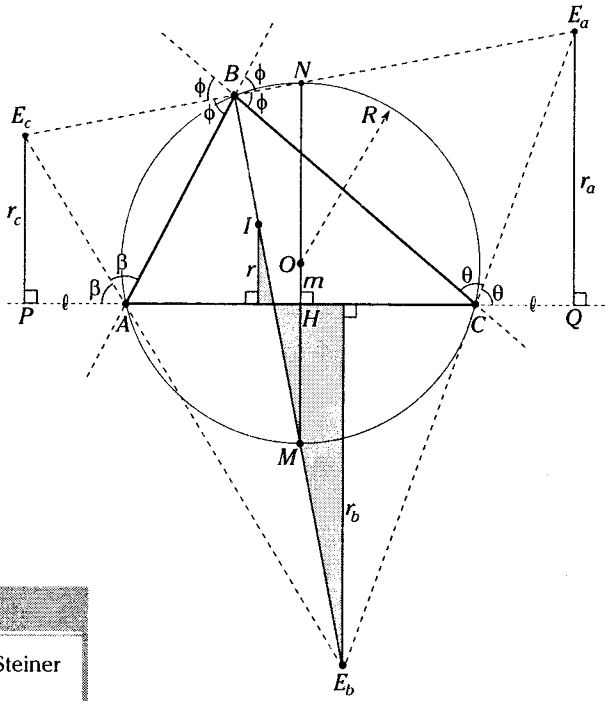


Figura 10.46

Nota

Otra demostración del teorema de Steiner lo veremos en el capítulo de áreas.

Teorema

La suma de las longitudes de las flechas relativas a los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia es igual a dos veces el circunradio menos el inradio del triángulo.

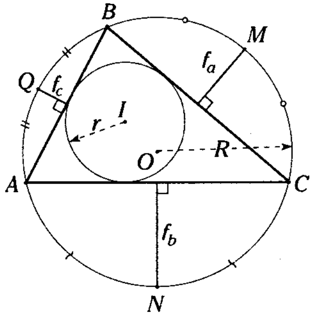


Figura 10.47

Sean r el inradio del $\triangle ABC$ y R el circunradio donde f_a, f_b y f_c son las longitudes de las flechas relativas a los lados entonces

$$f_a + f_b + f_c = 2R - r$$

Demostración

Sabemos que

$$f_a = \frac{r_a - r}{2}, \quad f_b = \frac{r_b - r}{2} \quad \text{y} \quad f_c = \frac{r_c - r}{2}$$

entonces sumando:

$$f_a + f_b + f_c = \frac{r_a + r_b + r_c - 3r}{2}$$

del teorema de Steiner:

$$4R + r = r_a + r_b + r_c$$

$$f_a + f_b + f_c = \frac{(4R + r) - 3r}{2}$$

$$\therefore \quad f_a + f_b + f_c = 2R - r$$

TEOREMA DE CARNOT

En todo triángulo acutángulo, la suma de las distancias del circuncentro a cada lado del triángulo es igual a la suma del circunradio con el inradio de dicho triángulo.

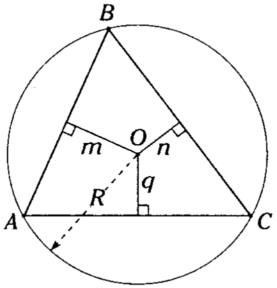


Figura 10.48

Sea r el inradio de $\triangle ABC$

O: circuncentro del $\triangle ABC$

R: circunradio del $\triangle ABC$

entonces $m + n + q = R + r$

Demostración

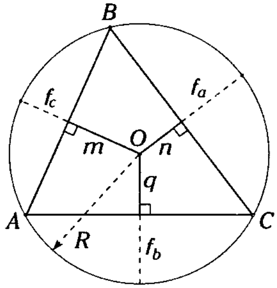


Figura 10.49

En la figura 10.49

$$m + f_c + n + f_a + q + f_b = 3R$$
$$m + n + q + f_a + f_b + f_c = 3R$$

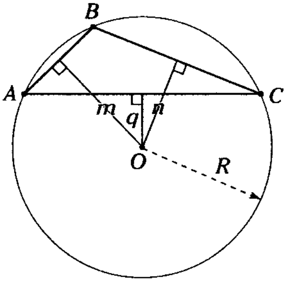
del teorema anterior

$$f_a + f_b + f_c = 2R - r$$

$$\therefore \quad m + n + q = R + r$$

Observación

Si el triángulo es obtusángulo, se cumple



$$m+n-q=R+r$$

Figura 10.50

TEOREMA JAPONES (MYKAMI KAYASHI)

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible, la suma de los inradios de los triángulos parciales determinados por una diagonal es igual a la suma de los inradios de los triángulos parciales determinados por la otra diagonal.

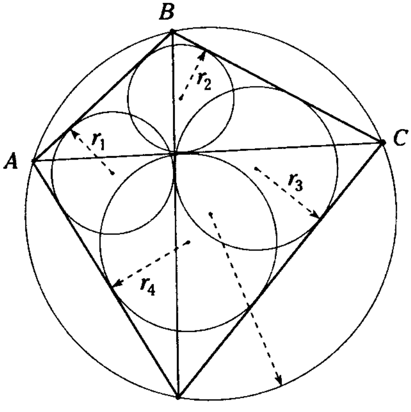


Figura 10.51

Sea r_1, r_2, r_3 y r_4 inradios del $\triangle ABD$; $\triangle ABC$; $\triangle BCD$ y $\triangle ADC$ respectivamente.

Entonces $\boxed{r_1+r_3=r_2+r_4}$

Demostración

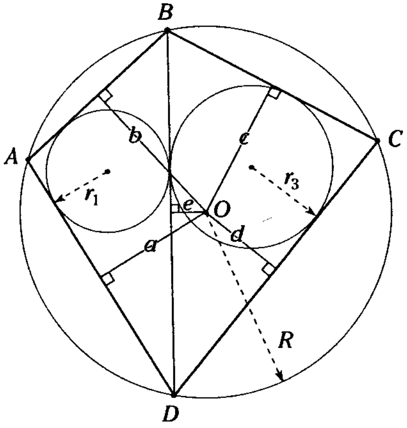


Figura 10.52

Del teorema de Carnot

$\triangle ABD$: $a+b-e=R+r_1$

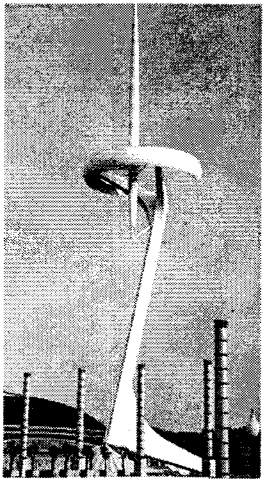
$\triangle BCD$: $c+d+e=R+r_3$ (I)

$\therefore\ a+b+c+d=2R+r_1+r_3$

Análogamente, para los triángulos ABC y ADC

$\therefore\ a+b+c+d=2R+r_2+r_4$ (II)

De (I) y (II): $r_1+r_3=r_2+r_4$



La antena de telecomunicaciones de Madrid concentran las ondas de radio y TV (punto de concurrencia de ondas) para transmitir una señal más nítida.

GEOMETRÍA APLICADA

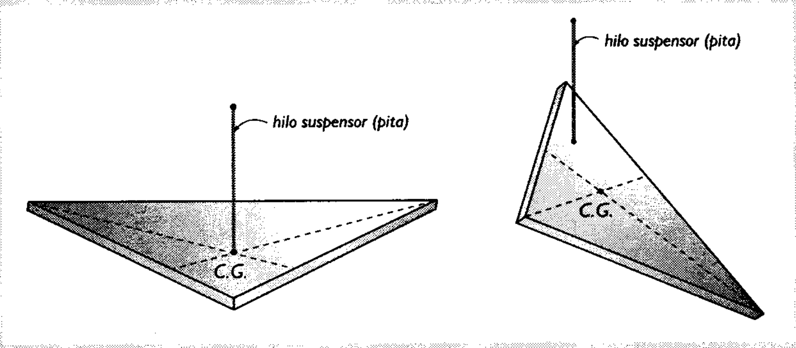
Para realizar las grandes construcciones, el hombre se ha preocupado por buscar la estabilidad de las cosas, el equilibrio de los objetos y una de ellas se presenta en las construcciones como viviendas, templos, fortalezas, monumentos, etc.

El equilibrio y la estabilidad tienen relación con la ubicación del centro de gravedad, centro de masa, así como también del centro de presiones cuando un cuerpo está en flotación.

El centro de gravedad de un cuerpo es el punto en el cual todo el peso se concentra y permite el equilibrio del cuerpo. Respecto de las figuras geométricas también se presenta por ejemplo si se tiene una región triangular (que puede ser de una plancha metálica triangular). Su equilibrio se da en el centro de gravedad, ya que todo el peso se concentra ahí, y el centro de gravedad relacionando en la figura geométrica, (región triangular) es el baricentro, esto nos da la idea de estudiar, analizar la concurrencia de líneas asociadas a un triángulo.

Centro de gravedad - Placa triangular

Si se tiene una placa triangular de cartón, luego se le suspende a través de su centro de gravedad en un ambiente donde los efectos del aire sean despreciables, entonces esta placa triangular permanece en equilibrio en una posición horizontal.



C.G. Centro de gravedad (posición horizontal).
La pita y la placa ubicados en diferentes planos.

En cambio si se suspende una placa triangular de cartón, luego se lo suspende a través de un punto que no es su centro de gravedad en un ambiente donde los efectos del aire son despreciables, entonces la placa adopta una posición vertical.

C.G. Centro de gravedad (posición vertical).
La pita y la placa ubicados en el mismo plano.
La posición de tres personas que saltan al vacío, son vértices de un triángulo, que en plena caída deben controlar la posición del (C.G.) baricentro del triángulo.

LECTURA

EL ICEBERG DE LOS CENTROS TRIANGULARES

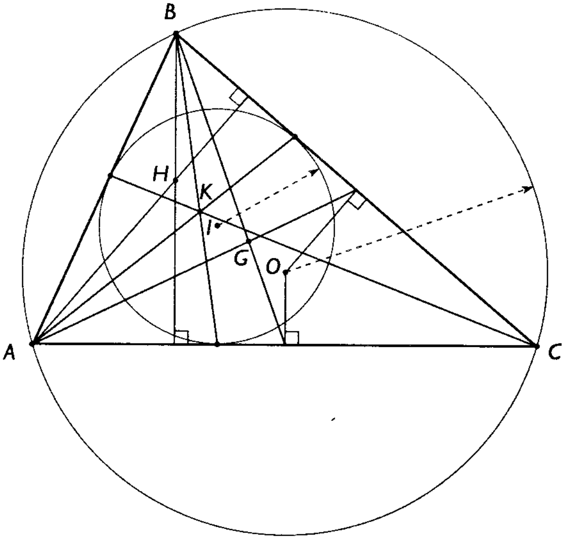
En toda publicación de Geometría (y ésta no es la excepción), en donde aparecen triángulos, surgen siempre con gran protagonismo "Los cuatro jinetes del apocalipsis".

Baricentro - Circuncentro - Ortocentro - Incentro

Resulta sorprendente notar que estos cuatros puntos representa solo la punta del iceberg de los centros triangulares.

Tiene el punto de Fermat cuya suma de distancias a los vértices es mínima, tiene el punto de Georgonne donde concurren las rectas que unen los vértices con los puntos de los lados opuestos que son tangentes a la circunferencia inscrita; tiene el centro de la circunferencia de los nueve puntos ... y existen decenas de puntos que se pueden estudiar. El gran especialista C.H. Kimberling ha publicado en los últimos años algunos artículos - resumen destacando las principales virtudes de los cien puntos más especiales de un triángulo.

Así que ya lo sabe, puede inventar su propio punto y pasar el resto de su vida comparándolo con los demás. Quizás haya cosas más importantes que hacer.



Para el $\triangle ABC$:

H: ortocentro

K: punto de Gergonne

I: incentro

G: baricentro

O: circuncentro

FUENTE: ALSINA, Claudi, *Sorpresas geométricas, los polígonos, los poliedros y usted.* Red Olímpica 2000. pp. 54.

BIOGRAFIA

CHRISTIAN HEINRICH VON NAGEL (1803 - 1882)

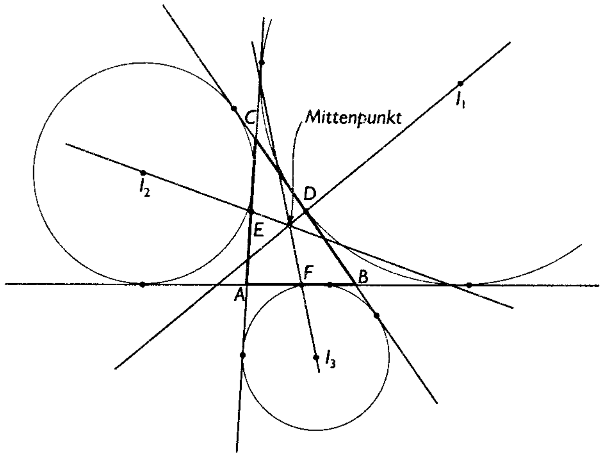
Geómetra y educador que durante cuatro años, asistió a conferencias en Matemáticas y de Física junto a J.G. Von Bohnenberger y F.J.P. Riecke en Universitat Tubingen. En el año 1826, Nagel fue profesor de las Matemáticas y de la ciencia natural en el Lyceum y el de Realschule en Tubingen, y continuó sus estudios de Matemáticas en la Universidad. Cerca de 1830, recibió el grado de Ph.D escribiendo su disertación, construendis exes aequatione algebraica de los rectangulis y de los triangulis, bajo la dirección de Von Bohnenberger y fue designado en Privatdezen en Matemáticas en la Universidad de Tubingen.

Al inicio de 1830, Nagel aportó como profesor de Matemática y de la ciencia natural en el Gynasium en Ulm.

Seis de las publicaciones de Nagel, y una división de sus contribuciones a la geometría del triángulo, se unieron en un libro, cuyo título es *El desarrollo de la geometría moderna del triángulo* quienes apoyaron a publicar fueron Bautista Peter, der Neucrem Drereck geometrie, Wissenschaftsverlag, Manheim, en el año 1882 en Twicklung.

En una de las publicaciones de Nagel, los pueblos de la existencia se dan para dos puntos ahora conocidos como el punto de Nagel, el punto de Gergonne y Mittenpunkt.

Hoy gracias al museo de Ulmer podemos proveer del retrato de Nagel, pintura por Johannes Friedel en 1847.



Teorema Mittenpunkt

Sea el triángulo ABC y los puntos D, E y F son puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. I_1, I_2, I_3 son los centros de la circunferencias exinscritas del triángulo, las rectas I_1D, I_2E; I_3F se intersecan en el punto Mittenpunkt, este teorema fue estudiado por C. Von Nagel en el año 1836.

FUENTE: www.webs.ono.com/user000/ricardpeiro/teorema35.html

Problema 1

De la figura, A y L son puntos de tangencia y $BD=DA$. Calcule $\frac{BA}{BC}$.

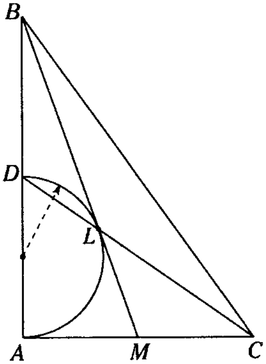
A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

E) $\frac{\sqrt{6}}{2}$



Resolución

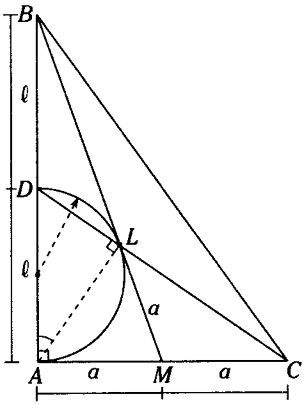


Figura 10.53

Piden $\frac{BA}{BC}$

Propiedad en la circunferencia m∢$DLA=90°$

⊿ALC: $AM=LM=MC=a$

Como por dato $BD=DA$

Entonces se observa que △ABC: L es baricentro

Por propiedad en △ABC, $BL=2(ML)=2a$

⊿BAM: teorema de Pitágoras

$$(AB)^2=(3a)^2-a^2 \rightarrow AB=2\sqrt{2}a$$

⊿BAC: teorema de Pitágoras

$$(BC)^2=(2\sqrt{2}a)^2-(2a)^2 \rightarrow BC=2\sqrt{3}\,a$$

Como piden

$$\frac{AB}{BC}=\frac{2\sqrt{2}\,a}{2\sqrt{3}\,a}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

CLAVE C

Problema 2

En un triángulo ABC, se trazan las bisectrices interiores AM y CN, las cuales se intersecan en I. Si $AB\neq BC$ y $NI=IM$. Calcule m∢ABC.

A) 37° B) 45° C) 60°

D) 53° E) 90°

Resolución

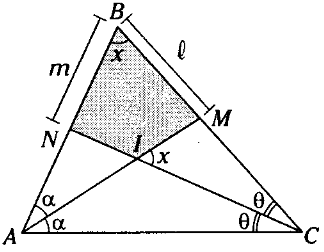


Figura 10.54

Piden m∢$ABC=x$

Del dato $AB\neq BC$ $\rightarrow$ $m\neq \ell$

I: Incentro del △ABC $\rightarrow$ $\overline{BI}$: bisectriz del ∢ABC.

En ⌂$NBMI$: Como $m\neq \ell$ y $NI=IM$

$\rightarrow$ $NBMI$: ⌂ inscriptible y m∢$MIC=x$

En △ABC: Propiedad

$$m∢AIC=90°+\frac{x}{2}$$

En I: $90°+\frac{x}{2}+x=180°$

$$\frac{3x}{2}=90°$$

$$\therefore\ x=60°$$

CLAVE C

Problema 3

En un triángulo ABC de ortocentro H, m∢$BAC = 70°$. En la región exterior y relativa al lado $\overline{AC}$ se ubica el punto P.
Si m∢HPC = m∢HBC. Calcule m∢APH.

A) 20° B) 15° C) 10°
D) 35° E) 55°

Resolución

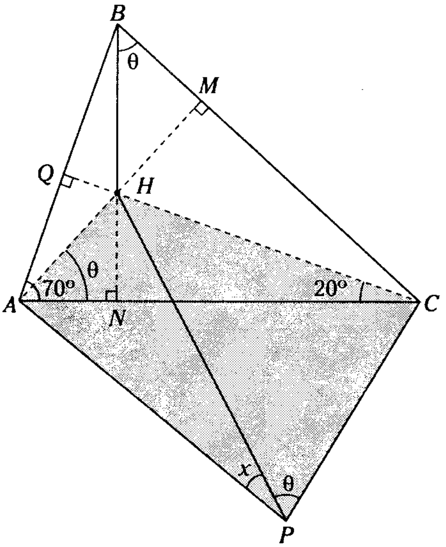


Figura 10.55

Piden m∢$APH = x$
Sea H: punto de concurrencia de las alturas $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$.

→ m∢HAC = m∢$HBC = \theta$

En ⊾AQC: como m∢$BAC = 70°$ → m∢$ACQ = 20°$
Como m∢HAC = m∢$HPC = \theta$ → $AHCP$ es inscriptible.

→ m∢APH = m∢$ACH = 20°$

∴ $x = 20°$

CLAVE A

Problema 4

En un cuadrilátero convexo $ABCD$, las diagonales se intersecan en M, si $AM = MC$, m∢BDC=2(m∢BAC) y m∢BDA=2(m∢BCA)
Calcule m∢CMD.

A) 45° B) 60° C) 120°
D) 90° E) 135°

Resolución

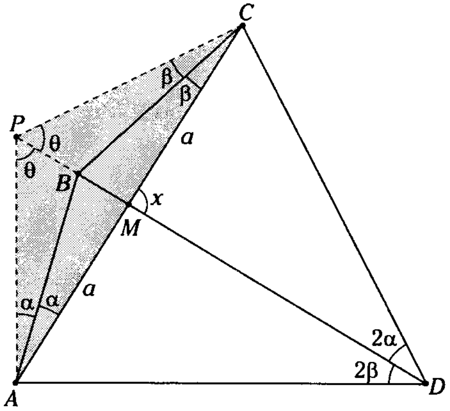


Figura 10.56

Piden m∢$CMD = x$
Prolongamos DB hasta P y trazamos AP, tal que

m∢$PAB = \alpha$ → m∢PAC = m∢$PDC = 2\alpha$

Por lo cual el ⏢$APCD$ es inscriptible

→ m∢PCA = m∢$PDA = 2\beta$

y m∢PCB = m∢$BCA = \beta$
Para el △APC: se observa que B es incentro

→ m∢APB = m∢BPC

En △APC, como $\overline{PM}$ es bisectriz interior y mediana entonces $\overline{PM}$: altura.

∴ $x = 90°$

CLAVE D

Problema 5

De las siguientes proposiciones dé el valor de verdad (V) o falsedad (F)

I. Si en un triángulo ABC, se ubica un punto P en la región interior y $m\sphericalangle PAC > m\sphericalangle PAB$, $m\sphericalangle PBA > m\sphericalangle PBC$, entonces $m\sphericalangle PCA > m\sphericalangle PCB$.

II. Si en un triángulo ABC, en su región interior se ubica el punto P, en los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos N y M respectivamente, tal que los triángulos BPM y APN sean equiláteros y $(AN)^2 + (BM)^2 = (NM)^2$, entonces P es ortocentro del triángulo ABC.

III. En un triángulo equilátero ABC, el segmento de recta cuyos extremos son el incentro y el excentro relativo a $\overline{BC}$, queda dividido por el lado BC en dos segmentos cuya razón es de 1 a 2.

A) FVF B) VVV C) VVF D) FFF E) FFV

Resolución

I. **VERDADERO**

Piden demostrar que $m\sphericalangle PCA > m\sphericalangle PCB$

Si trazamos las bisectrices de los ángulos interiores, se ubica el incentro I.

Como $\alpha > \theta \rightarrow P$ se encuentra en la región interior determinada por el ángulo BAI.

Como $\beta > \gamma \rightarrow P$ se encuentra en la región interior determinada por el ángulo CBI.

Esto significa que P pertenece a la región interior $\triangle BIC$, se concluye $m\sphericalangle PCA > m\sphericalangle PCB$.

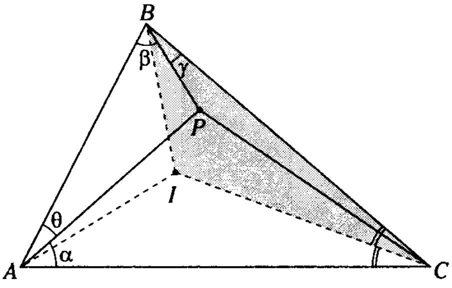
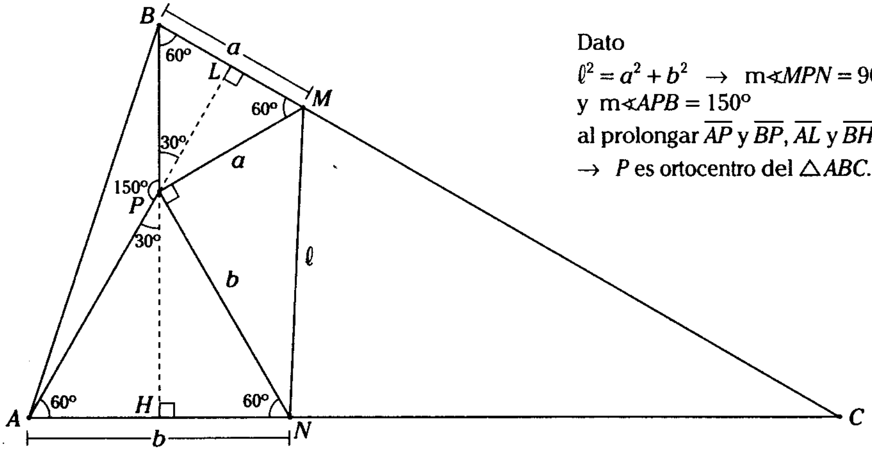


Figura 10.57

II. **VERDADERO**



Dato

$\ell^2 = a^2 + b^2 \rightarrow m\sphericalangle MPN = 90°$

y $m\sphericalangle APB = 150°$

al prolongar $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$, $\overline{AL}$ y $\overline{BH}$ son alturas

$\rightarrow$ P es ortocentro del $\triangle ABC$.

Figura 10.58

III. **FALSO**

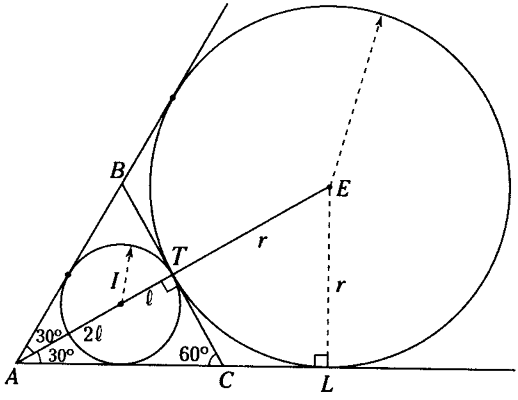


Figura 10.59

Piden indicar si T divide a $\overline{IE}$ en la razón de 1 a 2.

⊾ ALE: notable 30° y 60°

$AE = 2r$

$3\ell + r = 2r$

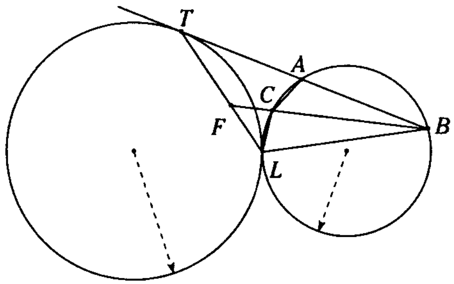
$r = 3\ell$

$\rightarrow \dfrac{IT}{TE} = \dfrac{\ell}{3\ell} = \dfrac{1}{3}$

CLAVE C

Problema 6

De la figura, T y L son puntos de tangencia; $AC = CL$. Indique que punto notable es F del triángulo LAB.



A) baricentro
B) ortocentro
C) incentro
D) excentro
E) circuncentro

Resolución

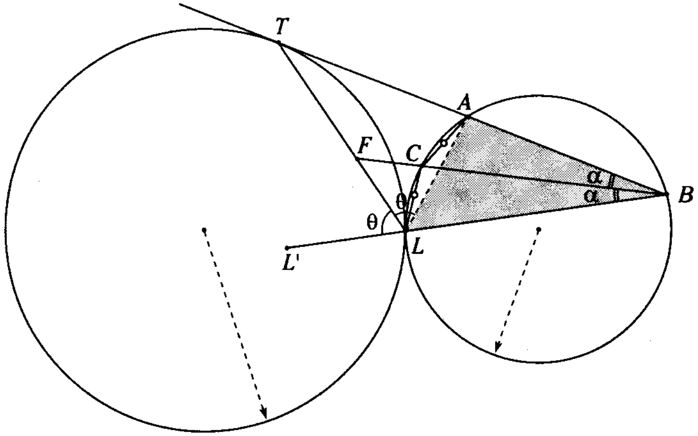


Figura 10.60

Piden indicar que punto notable es F del $\triangle LAB$.

Como $AC = CL \rightarrow m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{CL}$

y $m\measuredangle ABC = m\measuredangle CBL = \alpha$

Siendo T y L puntos de tangencia; en el $\triangle ALB$

Por propiedad

$m\measuredangle TLL' = m\measuredangle TLA = \theta$

En $\triangle ALB$

$\overrightarrow{LF}$: bisectriz del $\measuredangle ALL'$

$\overrightarrow{BF}$: bisectriz del $\measuredangle ABL$

Por lo tanto es excentro del $\triangle LAB$ relativo a $\overline{LA}$.

CLAVE D

Problema 7

En un triángulo ABC isósceles de base AC, se ubica el punto P en la región interior, tal que $m\sphericalangle BCP=20°$, $m\sphericalangle PCA = 50°$ y $m\sphericalangle APC = 100°$. Calcule $m\sphericalangle AOP$ si O es circuncentro del triángulo ABP.

A) 37° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 75°

Resolución

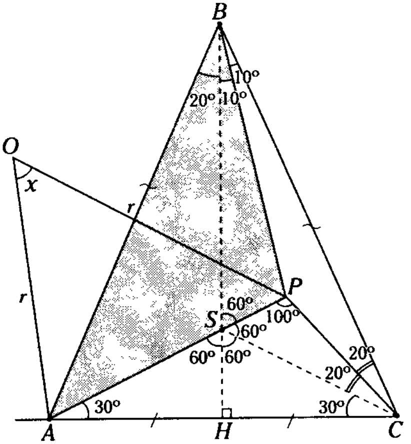


Figura 10.61

Piden $m\sphericalangle AOP = x$.
Se traza la altura $\overline{BH}$, luego al trazar $\overline{SC}$: $AS = SC$, $m\sphericalangle SCA = m\sphericalangle SAC = 30°$.
En el triángulo BSC: P es incentro

$$\rightarrow\ m\sphericalangle SBP = m\sphericalangle CBP = \frac{20°}{2} = 10°$$

Propiedad $m\sphericalangle AOP = 2(m\sphericalangle ABP)$

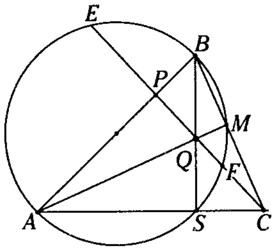
$$\rightarrow\ x = 2(30°)$$

$$\therefore\ x = 60°$$

CLAVE D

Problema 8

Según la figura, $m\widehat{EB} = m\widehat{BMF}$, $PQ = QS$, ¿Qué punto notable es Q para el triángulo ABC?



A) incentro
B) circuncentro
C) baricentro
D) ortocentro
E) punto de Brocard

Resolución

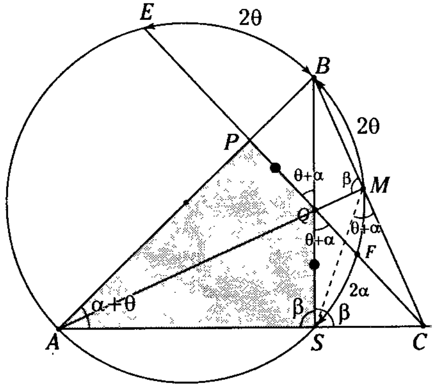


Figura 10.62

Piden Q que punto notable es del $\triangle ABC$
Dato $m\widehat{EB} = m\widehat{BMF} = 2\theta$
Sea $m\widehat{FS} = 2\alpha$.

Por $\sphericalangle$ inscrito, $m\sphericalangle BAS = \dfrac{m\widehat{BMS}}{2}$

$$\rightarrow\ m\sphericalangle BAS = \theta + \alpha \ \text{ y}$$

$m\sphericalangle EQB = \dfrac{2\theta+2\alpha}{2}$ ($\sphericalangle$ interior), $m\sphericalangle EQB = \alpha + \theta$

$ABMS$: ⏢ inscrito $\rightarrow$ $m\sphericalangle SMC = m\sphericalangle BAS = \theta + \alpha$
$QMCS$: ⏢ inscriptible $\rightarrow$ $m\sphericalangle QSC = m\sphericalangle BMQ = \beta$
$\rightarrow$ $APQS$: ⏢ inscriptible
En la circunferencia $m\sphericalangle BMA = m\sphericalangle BSA = \beta$
En S: $\beta + \beta = 180°$

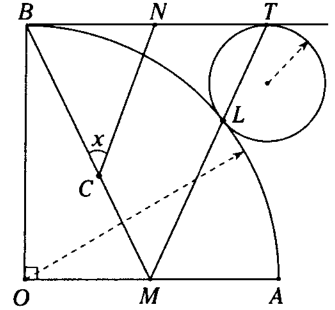
$$\rightarrow\ \beta = 90°$$

Como $m\sphericalangle BSA = 90°$, también se sabe $m\sphericalangle APC = 90°$
Por lo tanto Q es ortocentro del $\triangle ABC$.

CLAVE D

Problema 9

De la figura, B, T y L son puntos de tangencia. Si $BC=2(CM)$ y $BN=NT=\dfrac{BO}{2}$, calcule x.



A) 52°30' B) 53° C) 51°
D) 38°30' E) 40°30'

Resolución

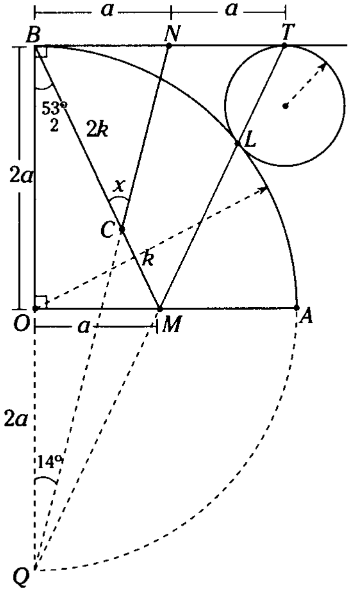


Figura 10.63

Piden x

Por propiedad, T, L, M y Q son colineales como $BN=NT$ y $BC=2(CM)$. Dado que en el triángulo TBQ, C es baricentro, concluimos que N, C y Q son colineales.

⊾ NBQ : not. 14° y 76° : $m\sphericalangle BQN=14°$

⊾ BOM : not. $\dfrac{53°}{2}$ y $\dfrac{127°}{2}$: $m\sphericalangle MBO=\dfrac{53°}{2}$

En △ BCQ:

$$x=14°+\frac{53°}{2}$$

$$x=\frac{81°}{2}$$

$$\therefore\ x=40°30'$$

CLAVE E

Problema 10

En los arcos AB y BC, de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, se ubican los puntos M y N respectivamente, tal que $m\widehat{AM}=m\widehat{BN}$ y $m\widehat{BM}=m\widehat{CN}$. Si $\overline{MN}$ interseca $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q, ¿qué punto notable es el circuncentro del triángulo ABC para el triángulo PBQ?

A) incentro B) circuncentro
C) ortocentro
D) baricentro E) excentro

Resolución

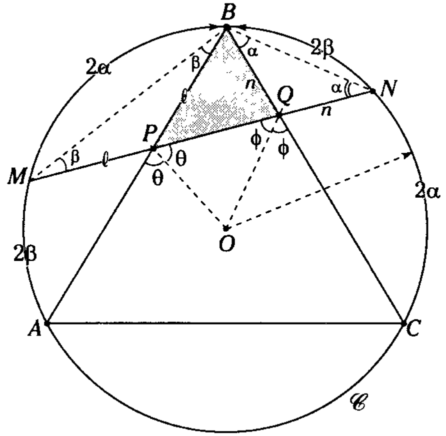


Figura 10.64

Piden señalar qué punto notable es O del $\triangle PBQ$

Sea $m\widehat{AM} = m\widehat{BN} = 2\beta \rightarrow m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle BMN = \beta$

y $MP = PB = \ell$

Sea $m\widehat{BM} = m\widehat{CN} = 2\alpha$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle NBC = m\sphericalangle BNM = \alpha$ y $BQ = QN = n$

Del dato O: circuncentro del $\triangle ABC$.

Por propiedad: si $PM = PB = \ell \rightarrow \overline{PO}$: bisectriz del $\sphericalangle NPA$, así también:

$BQ = QN = n \rightarrow \overline{QO}$: bisectriz del $\sphericalangle MQC$.

Por lo tanto O es excentro del triángulo PBQ.

Nota

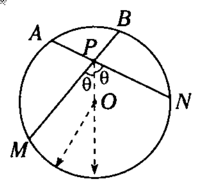


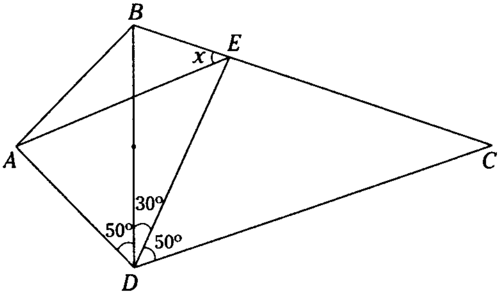
Figura 10.65

Si $AP = PB$ entonces $\overrightarrow{PO}$: bisectriz del $\sphericalangle MPN$

CLAVE **E**

Problema 11

Según la figura, $ABCD$ es un trapezoide simétrico. Calcule x.



A) 40° B) 30° C) 25°
D) 32° E) 60°

Resolución

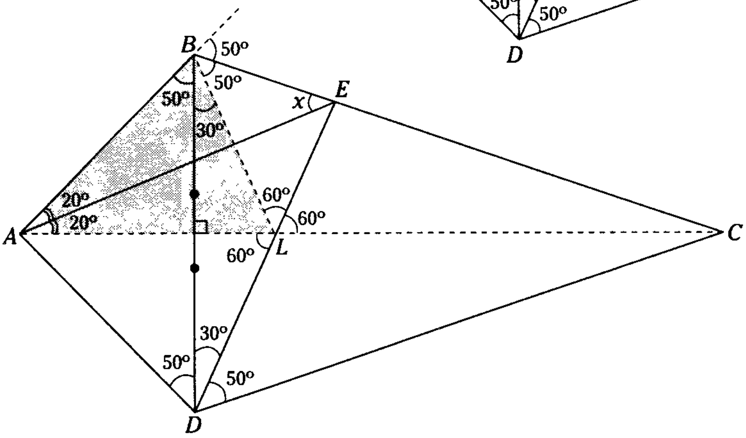


Figura 10.66

Piden x

Como $m\sphericalangle ADB \neq m\sphericalangle BDC \rightarrow \overline{AC}$ es el eje de simetría

Por propiedad de la mediatriz $BL = LD$.

Se nota que $\overline{LE}$ bisectriz del $\sphericalangle$exterior en L del $\triangle ABL$

$\overline{BE}$ bisectriz del $\sphericalangle$exterior $\rightarrow E$ es excentro del $\triangle ALB$

Quiere decir que m∢BAE = m∢LAE = $\frac{40°}{2}$ = 20°

En △ABE: por propiedad

$x + 20° = 50°$

$\therefore\ x = 30°$

CLAVE B

Problema 12

En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior $\overline{AM}$, luego se ubican los puntos L y N en $\overline{AM}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, $\overline{MN} \cap \overline{LC} = \{T\}$, tal que m∢$ABM$ = m∢AMN, $BM = NC$, $AB = MC$, m∢MLC = m∢MTL. Indique que punto notable es L para el triángulo ABC.

A) incentro
B) circuncentro
C) baricentro
D) ortocentro
E) excentro

Resolución

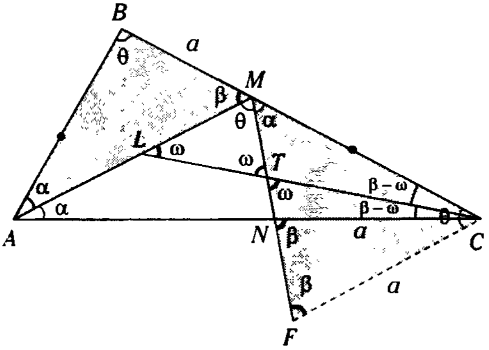


Figura 10.67

Piden que se indique que punto notable es L del △ABC.

De los datos, notamos: m∢BAM = m∢NMC = α

Luego se traza $\overline{CF}$, tal que m∢ABM = m∢MCF = θ

△ABM ≅ △MCF(A.L.A.)

→ m∢BMA = m∢MFC,

$BM = FC$

Como $NC = FC$ → m∢CNF = m∢NFC

Del △AMN: m∢MAN = α

ya que α + θ + β = 180°

Del △MLC y △NTC: (Por ∢exterior)

m∢MCL = m∢TCN = β – ω

Por lo tanto L es incentro △ABC

CLAVE A

Problema 13

En un triángulo isósceles ABC de base AC se traza la ceviana interior AM, tal que $MC = 2(MB)$, en $\overline{AM}$ se ubica el punto L, tal que m∢BLC=90°, calcule m∢LBC, si m∢MAC = 42°.

A) 42° B) 46° C) 48°
D) 54° E) 60°

Resolución

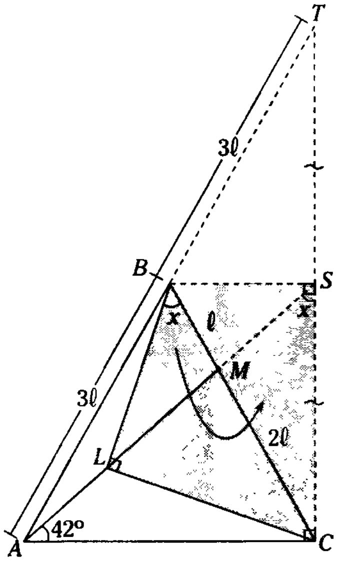


Figura 10.68

Piden m∢$LBC = x$
Se prolonga $\overline{AB}$ hasta T, tal que $BT = AB$
→ m∢$TCA = 90°$
En el △TCA: como $\overline{CB}$: mediana y
$CM = 2(MB) = 2\ell$
Entonces M: baricentro del △ACT
Al prolongar $\overline{AM}$ hasta S → $TS = SC$, m∢$BSC = 90°$
$BSCL$: ⏢ inscriptible → m∢$LSC = x$
◺SCA: $x = 90° - 42°$
∴ $x = 48°$

CLAVE C

Problema 14

El triángulo PQR es el triángulo exincentral del triángulo ABC($B \in \overline{PQ}$ y $C \in \overline{PR}$), si el ángulo determinado por $\overline{PR}$ con $\overline{AB}$ y el ángulo ACR son complementarios. ¿De qué naturaleza es el triángulo ABC?

A) Acutángulo
B) Rectángulo
C) Obtusángulo
D) Isósceles
E) Equilátero

Resolución

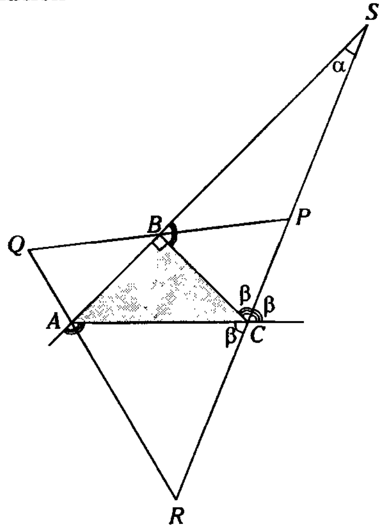


Figura 10.69

Piden indicar de que naturaleza es el △ABC
Sean m∢$ASC = \alpha$; m∢$ACR = \beta$
Dato $\alpha + \beta = 90°$
Podemos ver en △SBC: m∢$SBC = 90°$
Por lo tanto △ABC es rectángulo.

CLAVE B

Problema 15

En un triángulo ABC, se traza el triángulo mediano MNL ($M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{BC}$), luego se ubican los ortocentros H_1, H_2 y H_3 de los triángulos AML, MBN y LNC. Calcule la razón de perímetros para las regiones triangulares MNL y $H_1H_2H_3$.

A) 1/2
B) 2
C) 3
D) 2/3
E) 1

Resolución

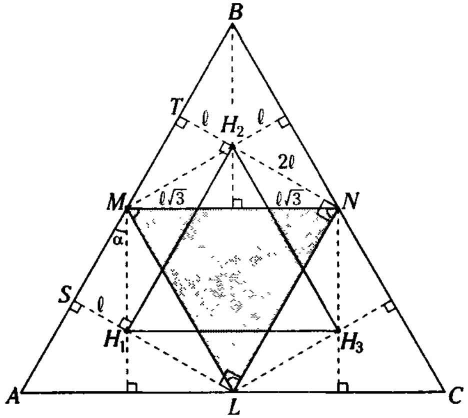


Figura 10.70

Piden $\dfrac{2p_{\triangle MNL}}{2p_{\triangle H_1H_2H_3}}$

Donde
$2p_{\triangle MNL}$: perímetro de la región triangular MNL.
$2p_{\triangle H_1H_2H_3}$: perímetro de la región triangular $H_1H_2H_3$.
△MNL es el triángulo mediano
→ △AMN ≅ △MBN ≅ △LNC

$H_1S = H_2T \rightarrow ST = H_1H_2 = NL$

Como podemos ver $\overline{H_1H_2} // \overline{TS}$; $H_1H_2 = 2\ell\sqrt{3}$

También $\overline{H_2H_3} // \overline{BC}$; $\overline{H_1H_3} // \overline{AC}$

$\rightarrow \triangle H_1H_2H_3$: es equilátero

$\triangle MNL \cong \triangle H_1H_2H_3$ (L.L.L.)

$$\frac{2p_{\triangle MNL}}{2p_{\triangle H_1H_2H_3}} = 1$$

CLAVE E

Problema 16

En un triángulo acutángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubica el punto T, tal que las distancias de T hacia los vértices A, B y C son 2, 4 y 3 respectivamente. Si T pertenece al triángulo órtico de dicho triángulo. Calcule el perímetro de la región limitada por el triángulo órtico.

A) $\frac{10\sqrt{5}}{7}$ B) $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

D) $\frac{16\sqrt{5}}{3}$ E) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

Resolución

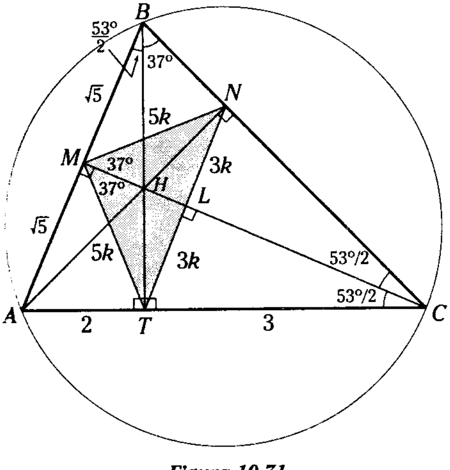


Figura 10.71

Piden $(2p)_{\triangle MNT}$

Se trazan las alturas $\overline{CM}$, $\overline{AN}$ y $\overline{BT}$, ubicándose el ortocentro H.

$\triangle ATB$: not. $\frac{53°}{2}$ y $\frac{127°}{2}$

$\triangle BTC$: not. 37° y 53°

Por teorema: $m\measuredangle TMC = m\measuredangle NMC = 37°$

$\triangle MLT$: not. 37° y 53°

$\triangle TLC$: not. $\frac{53°}{2}$ y $3k\sqrt{5} = 3$

$$k = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$(2p)_{\triangle MNT} = 5k + 5k + 6k$$

$$(2p)_{\triangle MNT} = 16k$$

$$(2p)_{\triangle MNT} = 16\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \ (2p)_{\triangle MNT} = 16\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Nota

Al prolongar las alturas de un triángulo hasta intersecar a la circunferencia circunscrita, los puntos de intersección son vértices de un triángulo cuyo perímetro de la región que limita es el doble del perímetro de la región limitada por el triángulo órtico.

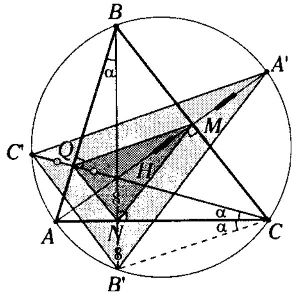


Figura 10.72

$$2p_{\triangle A'B'C'} = 2[2p_{\triangle MNQ}]$$

Para su demostración basta recordar que

$m\measuredangle HCA = m\measuredangle B'CA \rightarrow HN = NB'$

análogamente $HM = MA'$ y $HQ = QC'$

$\therefore A'B' = 2(MN)$; $B'C' = 2(NQ)$ y $A'C' = 2(MQ)$

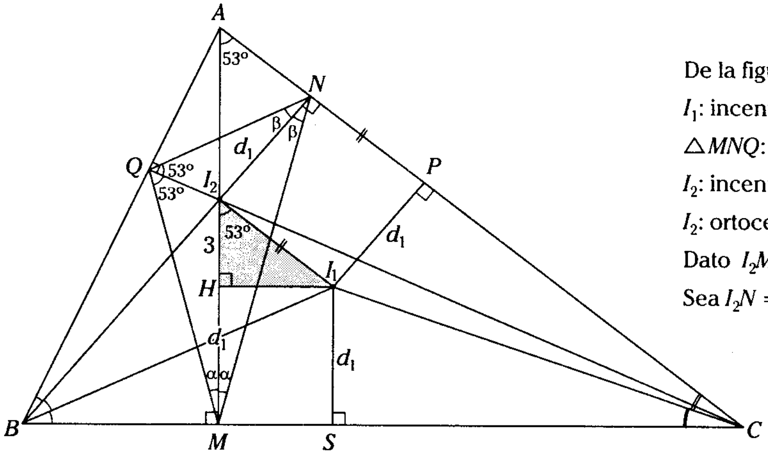
CLAVE B

Problema 17

En un triángulo ABC de incentro I_1, se ubica el incentro I_2 de su triángulo órtico MNQ (M en $\overline{BC}$ y N en $\overline{AC}$) donde $\overline{AC} \parallel \overline{I_1I_2}$. Calcule I_1I_2 si m$\sphericalangle MQN = 106°$ y la diferencia de las distancias de I_2 a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente es 3.

A) 3 B) 4 C) $3\sqrt{2}$ D) 5 E) 6

Resolución



De la figura

I_1: incentro del $\triangle ABC$

$\triangle MNQ$: $\triangle$ órtico del $\triangle ABC$

I_2: incentro del $\triangle MNQ$

I_2: ortocentro del $\triangle ABC$

Dato $I_2M - I_2N = 3$

Sea $I_2N = d_1$

Figura 10.73

Piden $I_1I_2 = x$

Sean $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$: alturas del $\triangle ABC$ que son concurrentes en I_2.

$$m\sphericalangle MQI_2 = m\sphericalangle NQI_2 = \frac{106°}{2} = 53°$$

I_2QAN: ⏢ inscriptible $\rightarrow$ m$\sphericalangle I_2AN = 53°$

Como $\overline{I_1I_2} \parallel AC$ $\rightarrow$ m$\sphericalangle MI_2I_1 = 53°$

Dato: $I_2M - I_2N = 3$ $\rightarrow$ $I_2M - d_1 = 3$ pero $I_1P = I_2N = I_1S = HM = d_1$

$\therefore$ $I_2M - HM = 3$

$\rightarrow$ $I_2H = 3$

◺ I_2HI_1: Triángulo notable de 37° y 53°

$\rightarrow$ $I_1I_2 = 5$

CLAVE D

Problema 18

En un triángulo isósceles ABC, m∢ABC=120° y $AC=4\sqrt{3}$. Calcule la distancia del circuncentro al excentro relativo a $\overline{BC}$ del triángulo ABC.

A) 2/3 B) $6\sqrt{2}$ C) 2 D) $4\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

Resolución

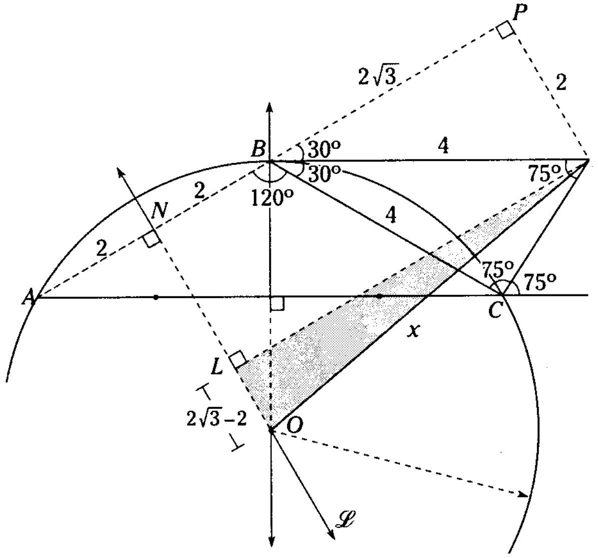


Figura 10.74

Piden $EO=x$, se trazan las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ que se intersecan en O, también se trazan las bisectrices de los ángulos exteriores de B, C, que se intersecan en E.

Se nota $BE=BC=4$, ⊾BPE Not. 30° y 60° → $PE=2$ y $BP=2\sqrt{3}$

Se traza $\overline{EL} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ ($\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ mediatriz de $\overline{AB}$)

Se observa

$$LO = NO - NL$$
$$LO = 2\sqrt{3} - 2$$

⊾OLE: Por teorema de Pitágoras

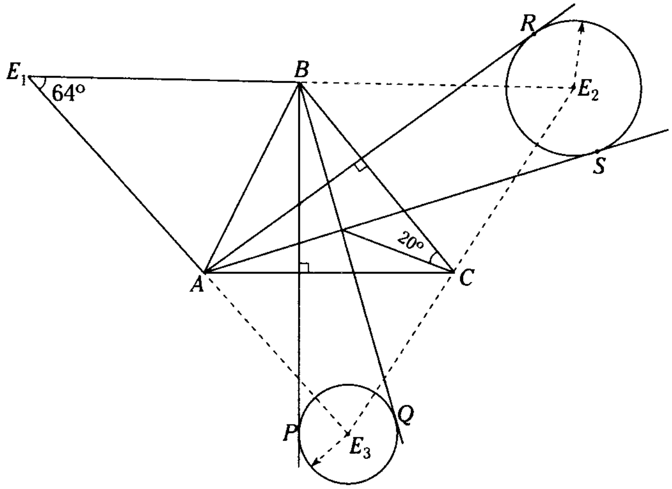
$$x^2 = \left(2(\sqrt{3}-1)\right)^2 + \left(2(\sqrt{3}+1)\right)^2$$
$$x^2 = 4\left(4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}\right)$$
$$x^2 = 4(8)$$
$$\therefore\ x = 4\sqrt{2}$$

CLAVE D

Problema 19

En la figura, E_1 y E_2 son excentros del triángulo ABC, calcule m∢$E_1E_3E_2$ (P, Q, R y S son puntos de tangencia).

A) 51°
B) 61°
C) 71°
D) 81°
E) 90°



Resolución

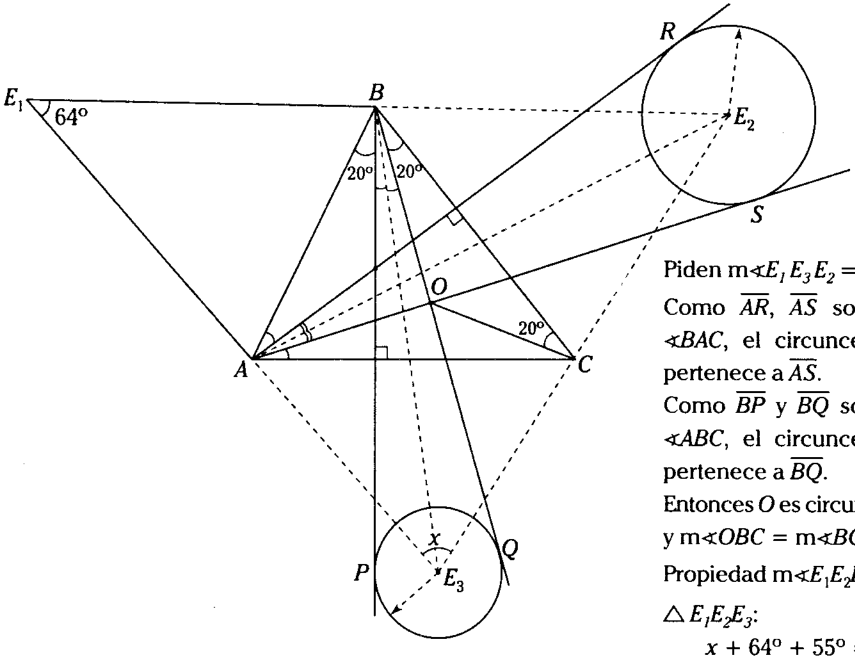


Figura 10.75

Piden m∢$E_1E_3E_2 = x$

Como $\overline{AR}$, $\overline{AS}$ son isogonales del ∢BAC, el circuncentro del △ABC: pertenece a $\overline{AS}$.

Como $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ son isogonales del ∢ABC, el circuncentro del △ABC: pertenece a $\overline{BQ}$.

Entonces O es circuncentro del △ABC y m∢OBC = m∢BCO = 20°.

Propiedad m∢$E_1E_2E_3 = 90° - \frac{70°}{2} = 55°$

△ $E_1E_2E_3$:

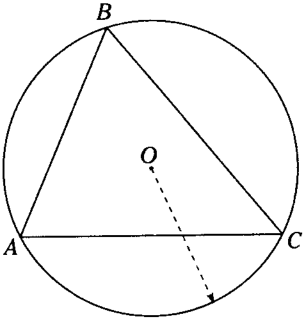
$$x + 64° + 55° = 180°$$

$$\therefore\ x = 61°$$

CLAVE B

Problema 20

Según la figura, el triángulo *ABC*, se hace girar tal que sus vértices son *A'*, *B'*, *C'*. ($A' \in \overset{\frown}{AB}$, $B' \in \overset{\frown}{BC}$ y $C' \in \overset{\frown}{AC}$). Si $\overline{AB} \cap \overline{A'B'} = \{M\}$, $\overline{BC} \cap \overline{B'C'} = \{N\}$, $\overline{AC} \cap \overline{A'C'} = \{L\}$, indique que punto notable es *O* del triángulo *MNL*.



A) baricentro
B) incentro
C) ortocentro
D) circuncentro
E) punto de Nagel

Resolución

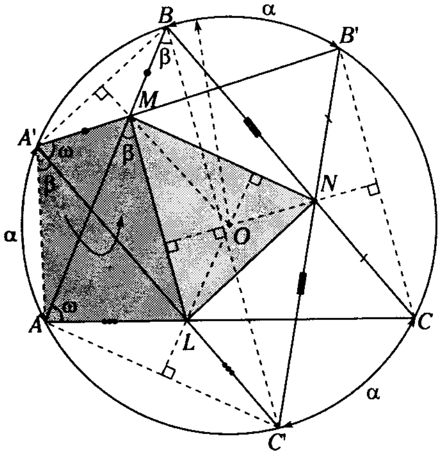


Figura 10.76

Piden indicar que punto notable es *O* del $\triangle MNL$.

Se sabe $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$

$\rightarrow$ *AA'BB'*, *BB'CC'*, *CC'AA'*: Son trapecios isósceles.

Se sabe que $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle B'A'C' = \omega$

A' MLA: ⏢ inscriptible

$\rightarrow$ $m\sphericalangle AA'L = m\sphericalangle AML = \beta = m\sphericalangle ABC$. Es decir que $\overline{ML} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{B'C}$ y cuando se prolonga $\overline{NO}$ es perpendicular a $\overline{ML}$.

Análogamente se encuentra $\overline{MN} \parallel \overline{A'C} \parallel \overline{AC'}$ y cuando se prolonga $\overline{LO}$ es perpendicular a $\overline{MN}$.

$\therefore$ *O* es ortocentro del $\triangle MNL$.

Observación

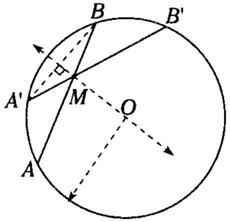


Figura 10.77

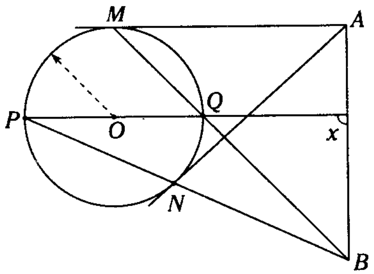
Si *AA'BB'*: trapecio isósceles.

$\rightarrow$ $AM = MB'$, $A'M = MB$ y $\overleftrightarrow{OM} \perp \overline{AB}$

CLAVE C

Problema 21

En la figura mostrada, *M* y *N* son puntos de tangencia. Calcule *x*.



A) 60°
B) 75°
C) 90°
D) 45°
E) 105°

Resolución

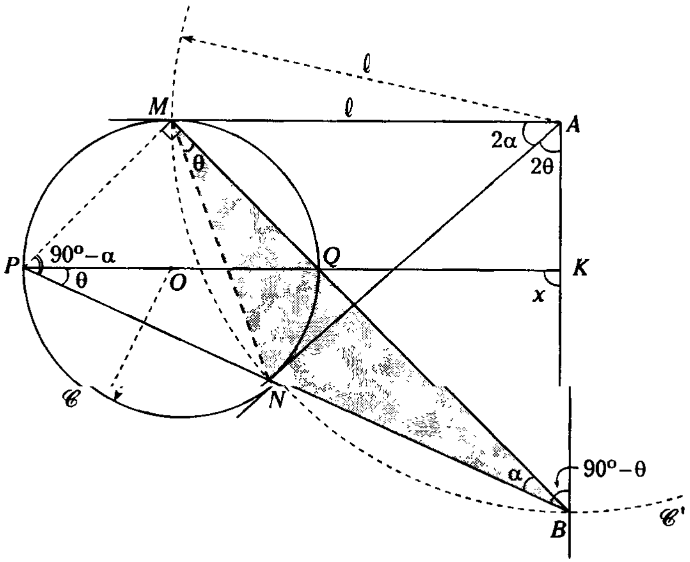


Figura 10.78

Piden x

En la figura 10.78, sea $m\sphericalangle PBM = \alpha$

Se sabe que $m\sphericalangle PMQ = 90°$,

entonces $m\sphericalangle MPB = 90° - \alpha$

En $\mathscr{C}$: $m\overset{\frown}{MQN} = 2(90° - \alpha) = 180° - 2\alpha$

Como $m\sphericalangle MAN + m\overset{\frown}{MQN} = 180°$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle MAN = 2\alpha$

Debido a que $AM = AN = \ell$ y $m\sphericalangle MAN = 2(m\sphericalangle MBN)$ y

tomando como centro el punto A y radio AM se traza la circunferencia $\mathscr{C}'$ entonces B pertenece a $\mathscr{C}'$, es decir A es circuncentro del triángulo MNB.

Entonces $AB = AM = \ell$, por lo cual si $m\sphericalangle NAB = 2\theta$ entonces $m\sphericalangle NBA = 90° - \theta$

De la figura 10.78, $m\sphericalangle NPQ = m\sphericalangle NMQ = \dfrac{m\sphericalangle NAB}{2} = \theta$

En $\triangle PKB$:

$\rightarrow$ $x + \theta + 90° - \theta = 180°$

$\therefore$ $x = 90°$

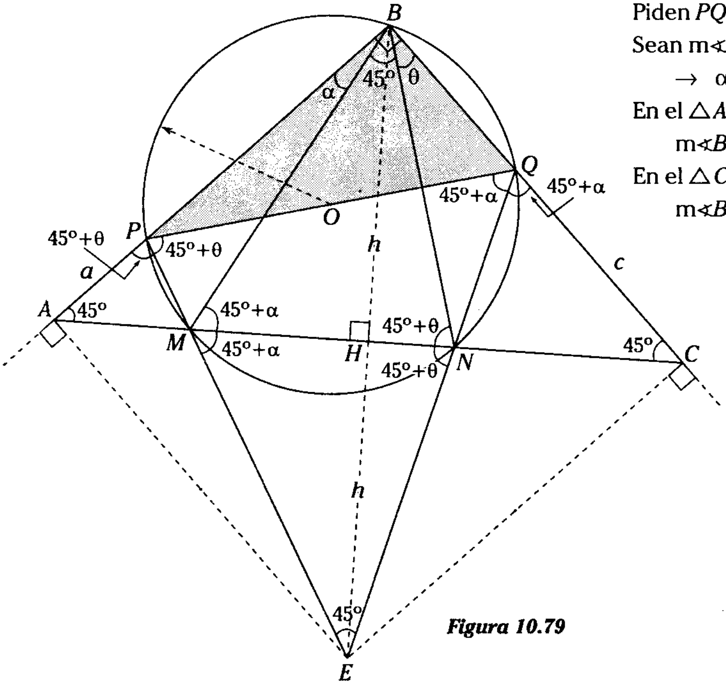
CLAVE C

Problema 22

Dado un triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, en AC se ubican los puntos M y N, tal que m∢MBN es igual a 45°, la circunferencia circunscrita al triángulo MBN interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, en P y Q respectivamente; si $AP = a$ y $CQ = c$, calcule PQ.

A) $\dfrac{a+c}{2}$ B) $a-c$ C) $a+c$ D) $\sqrt{a.c}$ E) $\dfrac{2a.c}{a-c}$

Resolución



Piden $PQ = x$

Sean m∢$ABM = \alpha$ y m∢$NBC = \theta$

$\rightarrow\ \alpha + \theta = 45°$

En el $\triangle ABM$

m∢$BMC = 45° + \alpha$

En el $\triangle CBN$

m∢$BNA = 45° + \theta$

Figura 10.79

$MPBQN$: Pentágono inscrito (figura 10.79)

$\therefore$ E: excentro del $\triangle PBQ$

como también

m∢BMH = m∢$EMH = 45° + \alpha$

$\rightarrow\ BH = HE$

Se nota que $EABC$ es un cuadrado, donde $\overline{EA}$ y $\overline{EC}$ son exradios del PBQ.

De la figura 10.80

$PQ = AP + QC$

$\therefore\ PQ = a + c$

CLAVE C

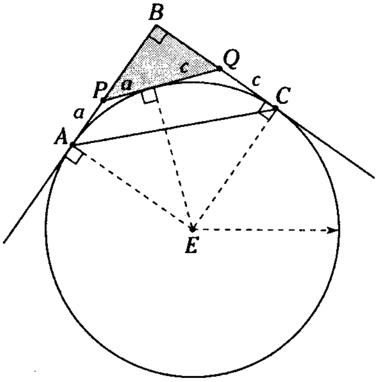
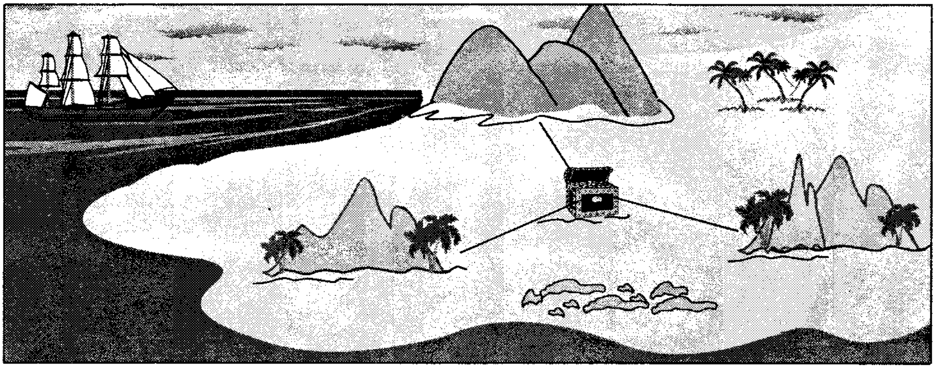


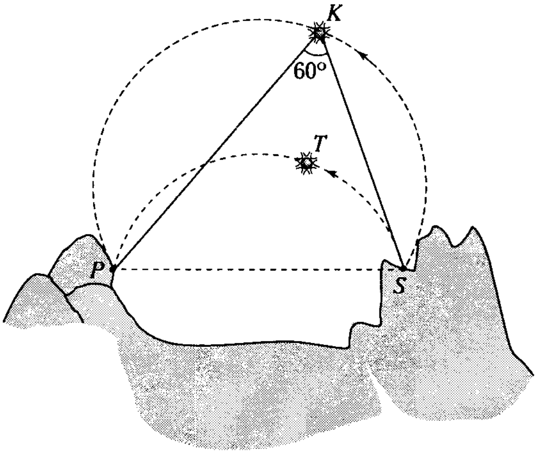
Figura 10.80

Problemas Recreativos

1. **El tesoro del pirata.** Un pirata se encontraba en una isla con un tesoro. Al ver que unos buques se acercaban decidió esconder el tesoro; pero, por la premura del tiempo solo alcanzó a notar que desde el punto donde está enterrado el tesoro se ve a las tres más grandes rocas de la isla, bajo ángulos de igual medida. Años después, cuando regresó a buscar el tesoro, observó que todo había cambiado salvo las rocas. ¿Cómo puede recuperar el tesoro?



2. En el planeta Vanila, dos estrellas Kaqui y Tuta tienen diferentes trayectorias, aunque se les ve salir y ocultarse al mismo tiempo y en los mismos lugares. La posición de Tuta (T) es siempre el incentro del triángulo, cuyos vértices son Kaqui (K) y los puntos donde salen (S) y donde se ponen (P) dichas estrellas. Si para cualquier posición de Kaqui (K) se da que $m\measuredangle PKS = 60°$, calcule la longitud de la trayectoria que describe Kaqui considerando que la longitud de la trayectoria que describe Tuta es ℓ.

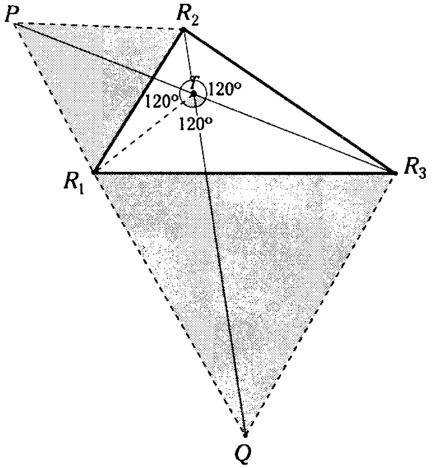


Resolución 1

Como las rocas grandes son vértices de un triángulo, el punto desde el cual se ven dichas rocas bajo un mismo ángulo, es el punto donde

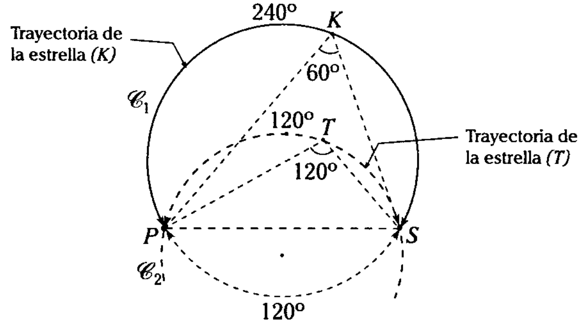
$m\sphericalangle R_1TR_2 = m\sphericalangle R_2TR_3 = m\sphericalangle R_3TR_1 = 120°$ y para ubicar este punto bastara con construir exteriormente al triángulo $R_1R_2R_3$, dos triángulos equiláteros. Sobre dos lados cualesquiera, luego el punto T de intersección de $\overline{PR_3}$ y $\overline{QR_2}$ es el punto de buscado (a este punto se le denomina punto de Torricelli).

Así en la figura, el punto T es el punto desde el cual se observan los vértices bajo ángulos de igual medida.



Resolución 2

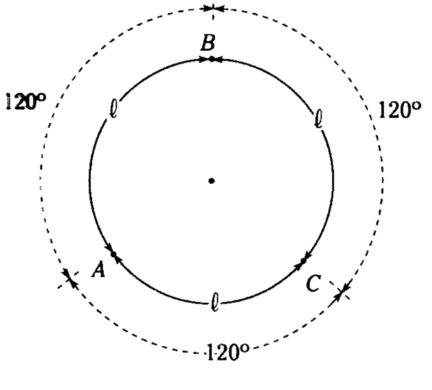
Como la medida del ángulo PKS siempre es 60°, la trayectoria que describe K es un arco capaz de 240°, si T es el incentro del $\triangle PKS$, entonces $m\sphericalangle PTS = 90° + \dfrac{m\sphericalangle PTS}{2} = 120°$



T: incentro del $\triangle PKS$

$m\widehat{PKS} = 240°$

$m\widehat{PTS} = 120°$



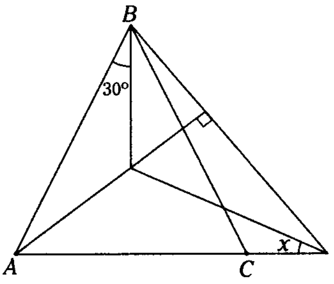
En $\mathscr{C}_1$:

Completando el arco PKS, entonces $m\widehat{PS} = 120°$, como $m\widehat{PTS} = m\widehat{PS} = 120°$, entonces $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$

Si $m\widehat{AC} = 120°$ y long. $\widehat{AC} = \ell \rightarrow m\widehat{ABC} = 240°$ y long. $\widehat{ABC} = 2\ell$. Luego en el problema la trayectoria de la estrella Kaqui es dos veces la trayectoria de la estrella Tuta entonces la longitud de la trayectoria K es 2ℓ.

Problemas Propuestos

1. En la figura ABC es equilátero. Calcule x.

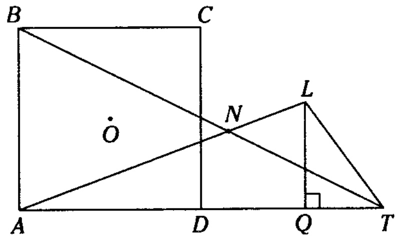


A) 20° B) 30° C) 45°
D) 25° E) 37°

2. En un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se traza la ceviana interior CM, luego se ubica el incentro I en el triángulo MCB. Si $m\sphericalangle AMC = m\sphericalangle IAC$, $m\sphericalangle ABC = 40°$, calcule $m\sphericalangle BAI$.

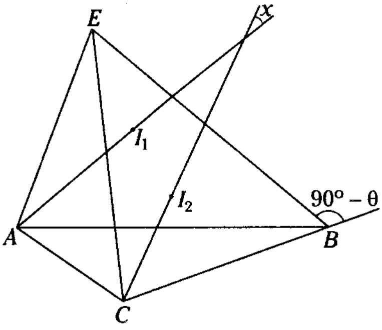
A) 20° B) 40° C) 10°
D) 50° E) 30°

3. De la figura Q, es circuncentro del triángulo NLT. Indique que punto notable es el centro O del cuadrado $ABCD$ para el triángulo BNA.



A) baricentro B) ortocentro
C) circuncentro
D) excentro E) incentro

4. En la figura, E es excentro del triángulo ABC, I_1 y I_2 son incentros de los triángulos EAB y ECB respectivamente, calcule x, si $m\sphericalangle ACE = \theta$



A) $\theta/2$ B) 2θ C) $3\theta/2$
D) $5\theta/2$ E) 3θ

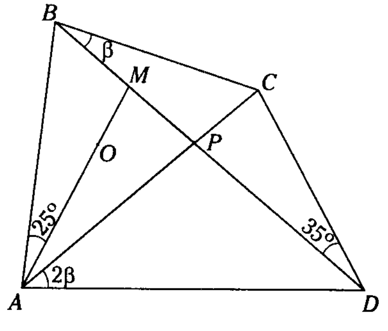
5. Un triángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro O, se ubican los circuncentros O_1 y O_2 de los triángulos BOC y AOC, las cuales pertenecen a los arcos BC y AC respectivamente. Calcule $m\overset{\frown}{AB}$.

A) 90° B) 100° C) 110°
D) 120° E) 150°

6. En un triángulo $ABC(AB=BC)$, se ubica el incentro I, luego se ubican los puntos M, N en $\overline{AC}$, tal que $m\sphericalangle MIC=90°$, $AM=NC$ y $m\sphericalangle MIN=\theta$. Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) $90° - \theta$ B) $90° - 2\theta$ C) $180° - \theta$
D) $45° + 2\theta$ E) $180° - 2\theta$

7. En la figura O, es circuncentro del triángulo ABP y $AC = AD$, calcule m$\sphericalangle BMA$.



A) 125° B) 130° C) 110°
D) 135° E) 140°

8. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

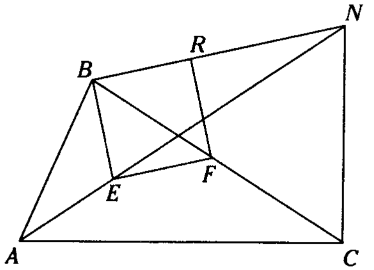
I. Un triángulo exincentral es equilátero solo si sus respectivo triángulo órtico es equilátero.

II. En un triángulo los puntos medios de los lados y los vértices de su respectivo triángulo órtico son concíclicos.

III. Dado un triángulo y su triángulo órtico aquel es el triángulo exincentral de dicho triángulo órtico.

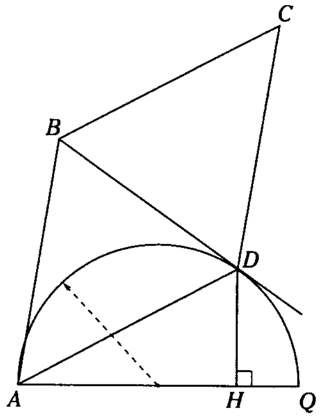
A) FFV B) VFV C) VVF
D) VFF E) FVF

9. Según la figura, E es incentro del triángulo ABC, $BRFE$ es un cuadrado, $RN = a$ y $NC = b$, Calcule BR.



A) $a^2 + b^2$
B) $-a^2 + \sqrt{2b^2}$
C) $\frac{(a^2+b^2)}{2}$
D) $\frac{\left(-a+\sqrt{4b^2-a^2}\right)}{2}$
E) $a^2 - b^2$

10. Según la figura $ABCD$ es un rombo; $HQ = 8$ y D es punto de tangencia, calcule la distancia entre los ortocentros de los triángulos BCD y ABD.

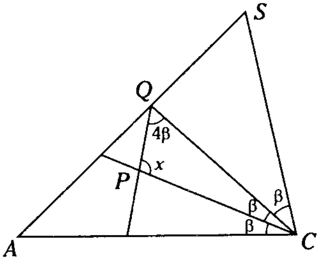


A) 8 B) 12 C) 16
D) 20 E) 24

11. En un triángulo ABC acutángulo ($BC > AB$), la recta de Euler interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N respectivamente tal que $BM = BN$. Si H y O son el ortocentro y el circuncentro respectivamente. Calcule m$\sphericalangle AHO$.

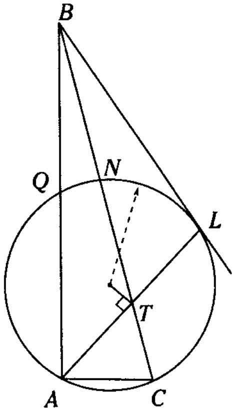
A) 110° B) 120° C) 140°
D) 150° E) 160°

12. De la figura $PQ = QS$, $m\measuredangle QSC \neq QPC$. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AP}$ y $\overline{SC}$.



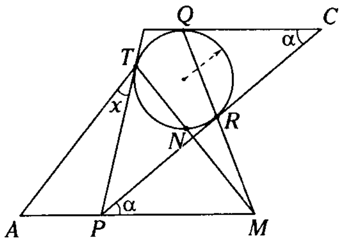
A) 78° B) 90° C) 105°
D) 110° E) 120°

13. De la figura, $BN = 2(NT)$ y L es punto de tangencia. Calcule $\dfrac{m\widehat{LQ}}{m\measuredangle LAC}$.



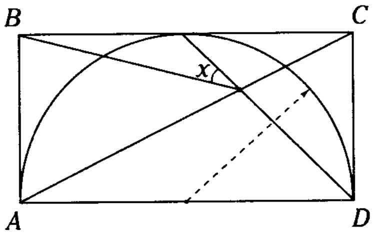
A) 1 B) 3/2 C) 2
D) 5/3 E) 3

14. En la figura T, R y Q son puntos de tangencia, el circuncentro del triángulo TRM, es el circuncentro del triángulo ATM. Calcule x, si $m\widehat{TN} = 100°$.



A) 30° B) 40° C) 35°
D) 45° E) 60°

15. En la figura, se muestra el rectángulo $ABCD$, Calcule x (Observación se soluciona por triángulos notables de 14°).



A) 37° B) 53° C) 60°
D) 30° E) 31°

16. En un triángulo ABC, $AB = BC$, $m\measuredangle ABC = 120°$. se ubica el excentro E relativo a $\overline{BC}$, luego se ubica el circuncentro O del dicho triángulo. Calcule la medida del ángulo que determina $\overline{AE}$ y la bisectriz del ángulo AOE.

A) 75° B) 75° 30' C) 105°
D) 97° 30' E) 107°

17. En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia, se ubican los ortocentros H, H_2, H_3 y H_4 de los triángulos ABC, BCD, CDA y ABD. Indique que tipo de cuadrilátero es (H, H_2, H_3 y H_4).

A) bicentro B) inscrito
C) inscriptible
D) trapezoide simétrico E) trapecio

18. En un trapecio $ABCD(\overline{AD}//\overline{BC})$, D es el circuncentro del triángulo ABC. ¿Qué punto notable es A del triángulo CBD?

A) incentro
B) ortocentro
C) circuncentro
D) baricentro
E) excentro

19. En un cuadrilátero $ABCD$, tal que $AB=BC$ y $m\sphericalangle BDC=2(m\sphericalangle BAC)$, $m\sphericalangle BDA=2(m\sphericalangle BCA)$. ¿Qué punto notable es D del triángulo ABC?

A) incentro
B) excentro
C) circuncentro
D) baricentro
E) ortocentro

20. De las siguientes proposiciones, dé el valor de verdad.

I. Todo triángulo mediano es un triángulo pedal.
II. El incentro de todo triángulo órtico es el ortocentro de su triángulo antiórtico.
III. El incentro del triángulo ex incentral es ortocentro del triángulo antincentral.
IV. Un triángulo tangencial puede ser rectángulo.
V. Todo triángulo pedal es órtico.

A) VVFFF B) VVFVV C) VFVVV
D) VFFVF E) FVVVF

21. Las circunferencias S_1 y S_2 de centros O_1 y O_2 respectivamente se intersecan en A y B, el rayo O_1B interseca a S_2 en F y el rayo O_2B interseca a S_1 en E. ¿Qué punto notable es B del triángulo EAF?

A) ortocentro
B) baricentro
C) incentro
D) circuncentro
E) punto de Brocard

22. En un triángulo isósceles ABC, $(AB = BC)$, en los lados AB y BC se ubican los puntos M y N respectivamente tal que $AM=BN$. Si la mediatriz de $\overline{MN}$ interseca a $\overline{CA}$ en Q, calcule $\dfrac{m\sphericalangle ABC}{m\sphericalangle MQN}$.

A) 2 B) 1/2 C) 3
D) 4 E) 1

23. Sean C y D dos puntos de una semicircunferencia de diámetro AB tal que B y C están en semiplanos distintos respecto a la recta AD sean M, N y P los puntos de $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{DB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ respectivamente. Si la distancia del circuncentro del triángulo ACP a la recta MN es 10 cm, calcule la distancia del circuncentro del triángulo BDP a la recta MN.

A) 5 cm B) $5\sqrt{2}$ cm C) $5\sqrt{3}$ cm
D) 10 cm E) 20 cm

24. En un exágono convexo $ABCDEF$ los lados opuestos son paralelos y $m\sphericalangle BAF=m\sphericalangle CDE=90°$. Si las distancias entre $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AF}$, $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ son respectivamente iguales de d, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$.

A) 60° B) 30° C) 36°
D) 72° E) 45°

1	B	9	D	17	C
2	C	10	C	18	E
3	C	11	D	19	C
4	C	12	B	20	A
5	D	13	C	21	C
6	E	14	B	22	E
7	C	15	E	23	D
8	C	16	D	24	E

Claves

Capítulo XI

Proporcionalidad de segmentos

El Partenón en la Acrópolis de Atenas, cuya construcción fue realizada por los griegos en el siglo V a.n.e., presenta las proporciones del rectángulo áureo.

Proporcionalidad de segmentos

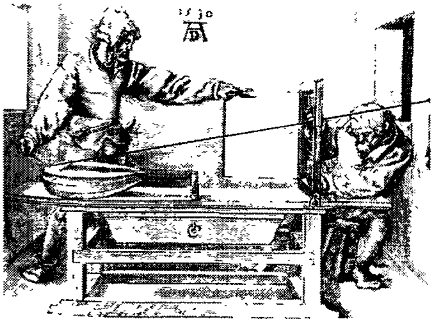
OBJETIVOS

- Conocer los conceptos de razones y proporciones de segmentos.
- Establecer diversas relaciones entre los segmentos de recta de una determinada figura.
- Relacionar la teoría de proporcionalidad de segmentos con los capítulos posteriores.

INTRODUCCIÓN

Calcular la altura de un árbol a partir de su sombra es tan sencillo como aplicar una regla de tres simples: la misma proporción entre tu estatura y la sombra que proyectas es la que existe entre la altura del árbol (la incógnita) y el otro valor conocido (la sombra).

Entonces podemos ver que la proporción, es una correspondencia de las partes de una cosa con el todo o entre cosas relacionadas entre sí. Pero no solamente el concepto de proporcionalidad sirve para resolver problemas, los griegos en aras de determinar la dimensión ideal del cuerpo humano hicieron una serie de mediciones y cuando "la razón entre el mayor y el menor es la misma que la razón entre el segmento formado por la unión de los dos y el mayor" llamaron a ello la proporción matemática de la belleza.



En el siglo XVI, la perspectiva simbólica fue reemplazada por una perspectiva visual que intuyó un espacio sistema de magnitudes. De esta manera, el estudio minucioso de las proporciones originó una nueva imagen del mundo como lugar mensurable (grabado de la obra de Durero).

Fue Tales de Mileto quien por primera vez utiliza el concepto de proporcionalidad y observamos que en la actualidad algunas ramas de la ciencia se basan en el teorema de Tales para el desarrollo de sus teorías. Por ejemplo se emplea en la interpolación de ángulos en Trigonometría, en escalas termométricas y la solubilidad en Química, etc.

RAZÓN DE DOS SEGMENTOS

Se denomina razón de dos segmentos al cociente de valores numéricos expresados en la misma unidad.

Ejemplo 1

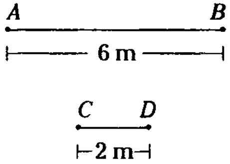


Figura 11.1

En la figura 11.1, $\overline{AB}$ tiene como longitud 6 m y $\overline{CD}$ tiene como longitud 2 m, por lo que la razón de dichos segmentos será $\frac{AB}{CD}=\frac{6}{2}=3$.

> **Nota**
>
> En los enunciados de los problemas de este capítulo, la razón de dos segmentos se pueden indicar de las siguientes formas:
>
> $\frac{MN}{PQ}=\frac{5}{3}$; $3(MN)=5(PQ)$; $MN:PQ=5:3$ y se lee MN y PQ se encuentran en la razón de 5 a 3.

Teorema

Existe un punto y solo un punto que pertenece a un segmento de recta, que divide a dicho segmento en una razón dada (razón geométrica).

Demostración

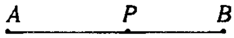


Figura 11.2

Sea P un punto que pertenece al segmento AB, tal que $\frac{AP}{PB}=n$ (razón dada).

Entonces $\frac{AP}{PB}=\frac{n}{1}$, de donde $\frac{AP}{AP+PB}=\frac{n}{n+1}$, es decir, $\frac{AP}{AB}=\frac{n}{n+1}$ donde $\frac{n}{n+1}$ es menor que la unidad, es decir, al moverse el punto P desde A hasta B la razón $\frac{AP}{AB}$ varía desde cero hasta uno, entonces solo habrá una posición de P de tal manera que la razón $\frac{AP}{PB}=n$.

> **Nota**
>
> Debido a que el punto P pertenece al segmento AB se dice que dicho punto divide internamente a dicho segmento en la razón $\frac{AP}{PB}$.

Teorema

Existe un punto y solo un punto que pertenece a la prolongación de un segmento, tal que dicho punto divide a dicho segmento en una razón dada (razón geométrica), de tal forma que esta razón sea mayor que la unidad.

Demostración

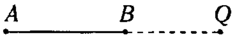


Figura 11.3

Sea Q un punto que pertenece a la prolongación de $\overline{AB}$, tal que $\frac{AQ}{BQ}=n$ (razón dada), entonces $\frac{AQ}{BQ}=\frac{n}{1}$ de donde $\frac{AQ}{AQ-BQ}=\frac{n}{n-1}$, es decir,

$\frac{AQ}{AB}=\frac{n}{n-1}$ donde $\frac{n}{n-1}$ es mayor que la unidad.

es decir, al moverse el punto Q desde B al infinito la razón $\frac{AQ}{AB}$ varía desde uno hasta el infinito, por lo tanto habrá una sola posición de Q, para lo cual $\frac{AQ}{BQ} = n$.

Nota

Debido a que el punto Q pertenece a la prolongación de $\overline{AB}$, se dice que dicho punto divide externamente a dicho segmento en la razón $\frac{AQ}{BQ}$.

SEGMENTOS PROPORCIONALES

Dos segmentos rectilíneos, son proporcionales a otros dos, cuando tienen la misma razón (cuando se menciona razón nos estamos refiriendo a razón geométrica).

Ejemplo 2

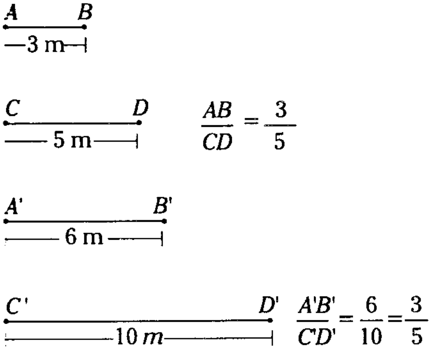


Figura 11.4

Como podemos ver al tener AB, CD y $A'B'$, $C'D'$ la misma razón, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ resultan ser proporcionales a $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$, es decir, se cumple $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

Si existe correspondencia directa entre los valores de a, c y b, d, la proporción será directa, es decir, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Si la razón de los dos primeros es igual a la inversa de los dos segundos, se formará la proporción inversa, es decir, $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$.

Y si la razón entre el primero (a) y su correspondiente (b) es igual a la razón inversa del segundo (c) y su correspondiente (d), se tendrá la proporción recíproca, es decir, $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$. Cualquiera de los segmentos de la proporción $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$ se llama cuarta proporcional.

Si en la mencionada proporción fueran iguales el segundo y el tercero (b=c), se tendrá $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$.

En este caso, el segmento, cuya longitud es b, resulta ser media proporcional de los otros dos.

La media proporcional significa que

$$b^2 = ad$$

$$b = \sqrt{ad}$$

DIVISIÓN O PROPORCIÓN ARMÓNICA

Si dos puntos dividen a un segmento, uno internamente y el otro externamente en una misma razón, entonces dichos puntos se denominarán conjugados armónicos con relación a dicho segmento.

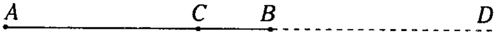


Figura 11.5

La figura 11.5 muestra al segmento AB que es dividido internamente por el punto C, en la razón $\frac{AC}{CB}$, y externamente por el punto D en la razón $\frac{AD}{BD}$.

$$\boxed{\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}}$$

Los puntos C y D se llaman conjugados armónicos, respecto de A y B y recíprocamente; a los cuatro puntos A, B C y D se les llaman armónicos.

Teorema

Si dos puntos C y D son conjugados armónicos, con respecto de los puntos A y B, recíprocamente; también A y B serán conjugados armónicos de C y D.

Por hipótesis tenemos que $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$, de donde

$$\boxed{\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AC}}$$

Se plantea así que A y B son conjugados armónicos de C y D.

Teorema

Si dos puntos C y D dividen armónicamente a un segmento AB, (O es el punto medio de este segmento) entonces se tiene que $(OA)^2=(OC)(OD)$ (Relación de Newton).

Demostración

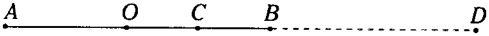


Figura 11.6

Si O: punto medio de $\overline{AB}$; entonces $AO = OB$.
Como C y D son conjugados armónicos de A y B, obtenemos que

$$\frac{AO+OC}{OB-OC}=\frac{AO+OD}{OD-OB}$$

$$\frac{AO+OC}{AO-OC}=\frac{AO+OD}{OD-AO}$$

$$(AO+OC)(OD-AO)=(AO-OC)(AO+OD)$$

$$AO.OD-AO.AO+OC.OD-OC.AO=AO.AO+AO.OD-OC.AO-OC.OD$$

$$-2(AO)^2 = -2(OC)(OD)$$

$$\therefore \boxed{(AO)^2=(OC)(OD)}$$

Teorema

Si dos puntos C y D dividen armónicamente a un segmento dado AB, se produce que

$$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD} \quad \text{(Relación de Descartes)}$$

Demostración

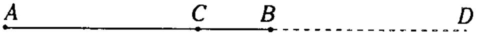


Figura 11.7

Sean C y D conjugados armónicos de A y B. entonces

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}$$

$$\frac{AC}{AB-AC}=\frac{AD}{AD-AB}$$

$$(AC)(AD)-(AC)(AB)=(AD)(AB)-(AD)(AC)$$

$$2(AC)(AD) = (AD)(AB) + (AC)(AB)$$

Dividiendo entre $(AB)(AC)(AD)$.

$$\therefore \boxed{\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}}$$

Esta relación se aplica especialmente en óptica geométrica.

TEOREMA DE TALES

Si dos rectas cualesquiera son intersecadas por una serie de rectas paralelas, entonces dichas rectas paralelas determinan, sobre las dos rectas dadas, segmentos proporcionales respectivamente.

Demostración

Para realizar la demostración basta probar:

1. Si para dos segmentos cualesquiera de la primera recta, estas son congruentes (de igual longitud), entonces los segmentos correspondientes en la segunda recta también son congruentes.
2. Si en la primera recta, uno de los segmentos determinados es igual a la suma de otros dos determinados en la misma recta, entonces el correspondiente de dicho segmento en la segunda recta es también igual a la suma de los correspondientes de los otros dos determinados en la segunda recta.

Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ las rectas dadas y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_5}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_6}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_7}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_8}$ las rectas paralelas, si $AB = EF = a$, debemos probar que $\overline{A'B'}$ y $\overline{E'F'}$ son congruentes.

Trazemos $\overline{A'P}$ y $\overline{E'Q}$ paralelos a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$.

Podemos notar que $AA'PB$ y $EE'QF$ son paralelogramos.

$\rightarrow$ $m\measuredangle A'PB' = m\measuredangle E'Q'F'$

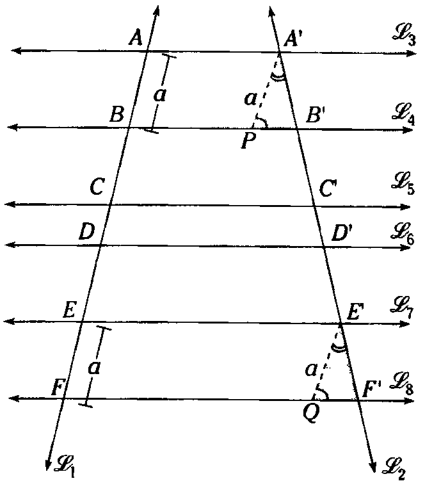
$m\measuredangle PA'B' = m\measuredangle QE'F'$

$A'P = AB = a$

$E'Q = EF = a$

$\triangle A'PB' \cong \triangle E'QF'$ (A.L.A)

$\therefore$ $A'B' = E'F'$



(*a*)

Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ las rectas dadas y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_5}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_6}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_7}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_8}$ las rectas paralelas,

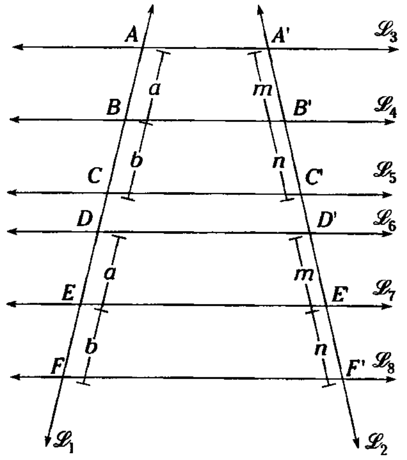
si $AB = DE = a \rightarrow A'B' = D'E' = m$

si $BC = EF = b \rightarrow B'C' = E'F' = n$

Se observa que

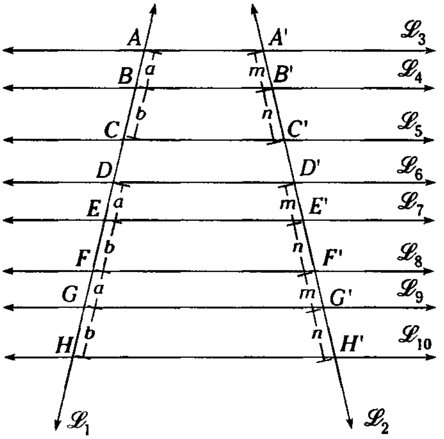
$DF = AC, DF = AB + BC$

$D'F' = A'C', D'F' = A'B' + B'C'$



(*b*)

De lo anterior, trazamos dos rectas $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_9}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_{10}}$ paralelas a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, tal que los segmentos determinados sean a y b, como se muestra en la figura 11.8(c).



(*c*)

Por lo cual, $AC = a + b$ y $DH = 2(a + b)$

$$\frac{AC}{DH} = \frac{a+b}{2(a+b)} = \frac{1}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$A'C' = m+n,\ D'H' = 2(m+n)$$

$$\frac{A'C'}{D'H'} = \frac{m+n}{2(m+n)} = \frac{1}{2} \qquad \text{(II)}$$

Igualando se tiene

$$\boxed{\frac{AC}{DH} = \frac{A'C'}{D'H'}}$$

Permutando DH y $A'C'$ se tiene

$$\boxed{\frac{AC}{A'C'} = \frac{DH}{D'H'}}$$

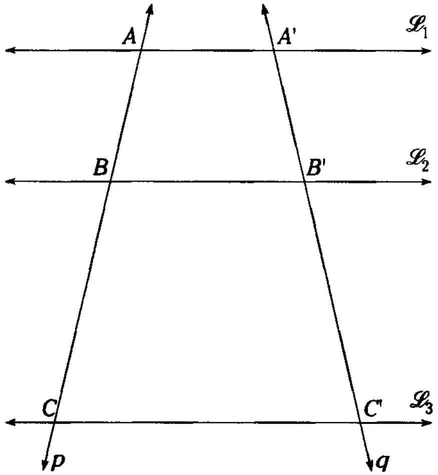
Nota

Lo que se ha concluido es cuando la razón es 1/2, pero podría ser para cualquier razón n/m $\{n, m\} \subset \mathbb{R}^+$.
Este teorema no tiene recíproco.

¿Ahora nos preguntamos si cumple el teorema de Tales cuando la razón es de la forma $\frac{r_1}{r_2}$, donde $\{r_1, r_2\} \subset \mathbb{I}$?

Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ supongamos que los segmentos AB y BC tienen una medida común ℓ, la cual está contenida n veces en AB y m en BC; la razón de los segmentos será

$$\frac{AB}{BC} = \frac{n\ell}{m\ell} = \frac{n}{m} \qquad \text{(III)}$$



(*d*)

Figura 11.8

Si por cada uno de los segmentos de división de AB y BC trazamos paralelas a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, se sabe que los segmentos $A'B'$ y $B'C'$ también quedan divididos en n segmentos congruentes en $A'B'$ y m segmentos congruentes en $B'C'$, por lo que la razón de los dos segmentos es

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{n\ell'}{m\ell'} = \frac{n}{m} \qquad \text{(IV)}$$

(Siendo ℓ' la longitud de los segmentos determinados en $\overleftrightarrow{q}$).
Como consecuencia de igualar (III) y (IV)

$$\boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}} \qquad \text{(V)}$$

La igualdad anterior se cumple para cualquiera que sea la **medida común** entre los segmentos AB y BC.

Los segmentos AB y BC carecen de unidad común, por ser inconmensurables el uno con el otro.

Sea $AB = n\ell$ (VI)

Supongamos que ℓ (unidad n-ésima parte de AB) esté contenida más m veces, pero menos $(m+1)$ veces en BC, es decir,

$$m\ell < BC < (m+1)\ell \quad \text{(VII)}$$

Por consiguiente, si a la relación (VII) la dividimos entre AB se tiene

$$\frac{m\ell}{AB} < \frac{BC}{AB} < \frac{(m+1)\ell}{AB}$$

$$\frac{m\ell}{n\ell} < \frac{BC}{AB} < \frac{(m+1)\ell}{n\ell}$$

$$\frac{m}{n} < \frac{BC}{AB} < \frac{(m+1)}{n} \quad \text{(VIII)}$$

Si por los puntos de división de los segmentos AB y BC se trazan paralelas a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, se tendrá

$$A'B' = n\ell' \quad \text{(IX)}$$

$$m\ell' < B'C' < (m+1)\ell' \quad \text{(X)}$$

Ahora si la relación (X) la dividimos entre $A'B'$, se tiene

$$\frac{m\ell'}{A'B'} < \frac{B'C'}{A'B'} < \frac{(m+1)}{A'B'}\ell$$

$$\frac{m\ell'}{n\ell'} < \frac{B'C'}{A'B'} < \frac{(m+1)}{n\ell'}\ell$$

$$\frac{m}{n} < \frac{B'C'}{A'B'} < \frac{(m+1)}{n} \quad \text{(XI)}$$

A la igualdad (XI) multiplicamos por (–1)

$$-\left(\frac{m+1}{n}\right) < \frac{-B'C'}{A'B'} < -\frac{m}{n} \quad \text{(XII)}$$

Sumando (VIII) y (XII)

$$\frac{m}{n} - \left(\frac{m+1}{n}\right) < \frac{BC}{AB} - \frac{B'C'}{A'B'} < \left(\frac{m+1}{n}\right) - \frac{m}{n}$$

$$-\frac{1}{n} < \frac{BC}{AB} - \frac{B'C'}{A'B'} < \frac{1}{n}$$

$$\left|\frac{BC}{AB} - \frac{B'C'}{A'B'}\right| < \frac{1}{n}$$

Recordemos que n es un número natural ($n>0$) $\frac{1}{n}$ y tiende a cero (0) cuando crece indefinidamente. Por ende

$$\boxed{\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}}$$

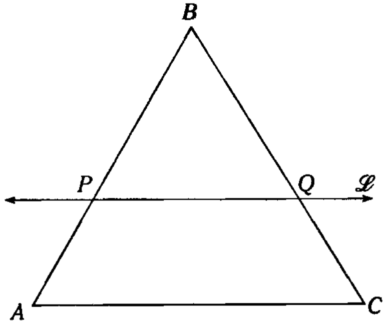
También

$$\boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}}$$

Comparando la igualdad anterior con (V) podemos concluir que el teorema de Tales es **general**.

Corolario 1

Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo determina; en los otros dos lados, segmentos directamente proporcionales.



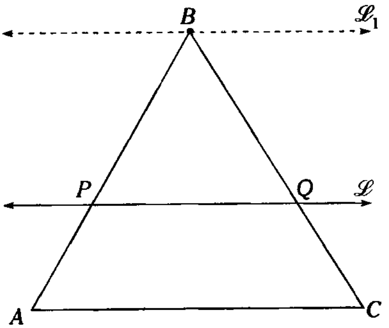
(*a*)

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AC}$

Se cumple

$$\boxed{\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}}$$

Demostración



(b)

Figura 11.9

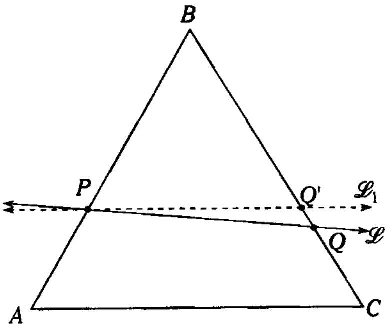
Se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AC}$, al aplicar el teorema de Tales se tendrá

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$$

Recíproco del corolario 1

Si en un triángulo, una recta secante a dos lados determina segmentos directamente proporcionales, entonces dicha recta es paralela al tercer lado.

Demostración



(*a*)

Sea $\dfrac{BP}{PA} = \dfrac{BQ}{QC}$ (I)

Por P se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ paralela a $\overline{AC}$.

Aplicando el corolario 1

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BQ'}{Q'C} \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I), (II)

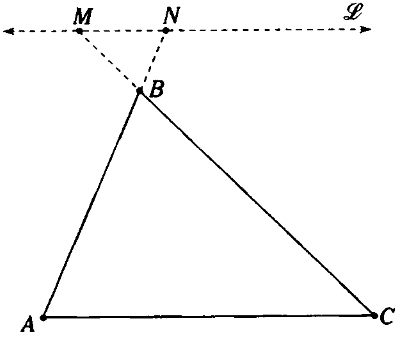
$$\frac{BQ}{QC} = \frac{BQ'}{Q'C}$$

De lo anterior podemos afirmar que Q es Q' debido a que ya demostró que para un punto de un segmento tiene una razón dada.

$$\therefore \ \overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AC}$$

Corolario 2

Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo que interseca a las prolongaciones de los otros dos lados, determina segmentos directamente proporcionales.

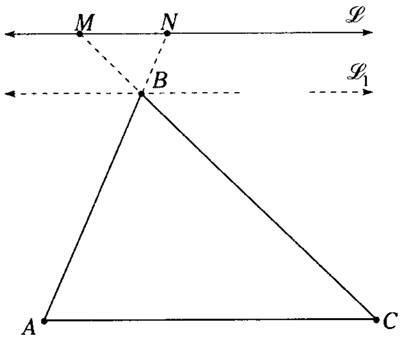


(*b*)

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AC}$,
se cumple

$$\frac{NB}{NA} = \frac{MB}{MC}$$

Demostración



(c)

Figura 11.10

Se traza $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathcal{L}} // \overline{AC}$, así al aplicar el Teorema de Tales para ($\mathcal{L}$; $\mathcal{L}_1$) y ($\mathcal{L}$; $\overleftrightarrow{AC}$) se tendría que

$$\frac{NB}{NA} = \frac{MB}{MC}$$

Recíproco del corolario 2

Si en un triángulo, una recta sec0ante a las prolongaciones de dos lados determina segmentos directamente proporcionales, entonces dicha recta es paralela al tercer lado.

Demostración

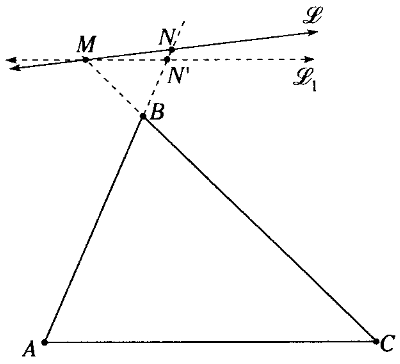


Figura 11.11

Sea $\frac{AB}{BN} = \frac{CB}{BM}$ (I)

por M se traza $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ paralela a $\overline{AC}$.

Aplicando el corolario 2

$$\frac{AB}{BN'} = \frac{CB}{BM} \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I) y (II)

$$\frac{AB}{BN} = \frac{AB}{BN'}$$

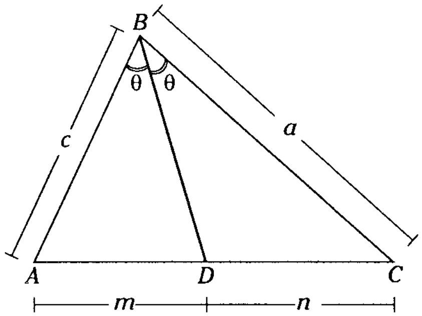
De lo anterior $BN = BN'$

Como tienen igual longitud podemos decir que N es N', también $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ es $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$.

$\therefore \ \overleftrightarrow{\mathcal{L}} // \overline{AC}$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR

En todo triángulo, una bisectriz interior divide internamente al lado al cual es relativo en segmentos proporcionales a los lados contiguos (adyacentes) a dicha bisectriz.

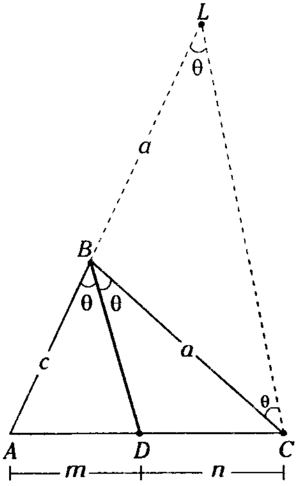


(a)

Del gráfico al ser $\overline{BD}$ bisectriz que divide internamente a $\overline{AC}$, entonces

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \rightarrow \boxed{\frac{m}{n} = \frac{c}{a}}$$

Demostración



(*b*)

Figura 11.12

Al trazar $\overline{CL}//\overline{BD}$, podemos notar que

$m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle ALC = \theta$

$m\sphericalangle BCL = m\sphericalangle DBC = \theta$

Observamos así que

$BC = BL = a$

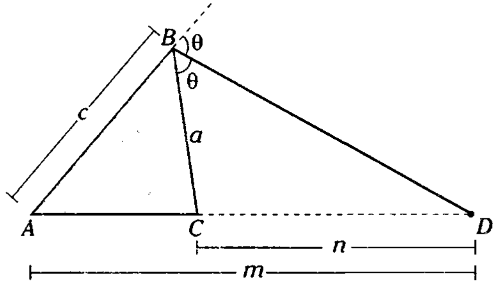
En el triángulo ALC (Por corolario 1) $\boxed{\dfrac{m}{n} = \dfrac{c}{a}}$

Nota

Si en un triángulo, al trazar una ceviana interior, esta determina sobre su lado relativo dos segmentos proporcionales a sus lados contiguos (adyacentes), entonces dicha ceviana es bisectriz interior. (Teorema recíproco).

TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

En todo triángulo, una bisectriz exterior divide externamente al lado al cual es relativo en segmentos proporcionales a los lados contiguos (adyacentes).

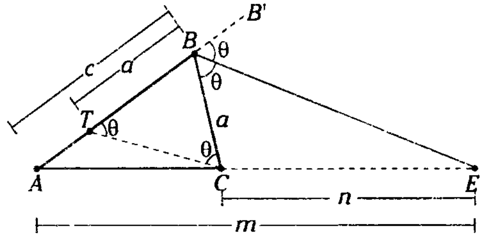


(*a*)

De la figura, $\overline{BD}$ es una bisectriz exterior que divide externamente a $\overline{AC}$.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} \rightarrow \boxed{\frac{m}{n} = \frac{c}{a}}$$

Demostración



(*b*)

Figura 11.13

Al trazar $\overline{CT}//\overline{BE}$, podemos notar que

$m\sphericalangle CTB = m\sphericalangle B'BE = \theta$

$m\sphericalangle TCB = m\sphericalangle CBE = \theta$

Se observa que $BC = BT = a$

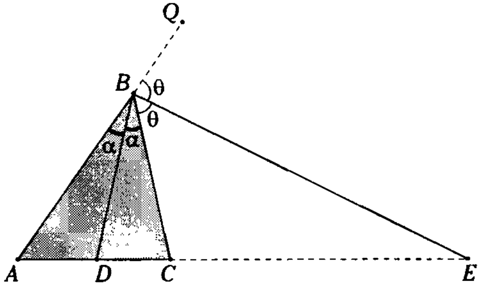
En el triángulo ABE (Por corolario 1) $\boxed{\dfrac{m}{n} = \dfrac{c}{a}}$

Nota

Si en un triángulo, al trazar una ceviana exterior, esta determina sobre su lado relativo dos segmentos proporcionales a sus lados contiguos (adyacentes), entonces dicha ceviana es bisectriz exterior. (Teorema recíproco)

Teorema

En un triángulo, las bisectrices de un ángulo interior y de su correspondiente ángulo exterior dividen armónicamente al lado opuesto a dicho ángulo.



(*b*)

De la figura 11.13,

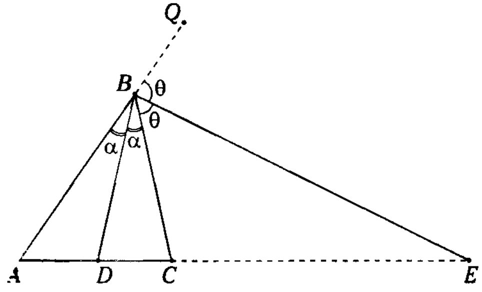
$\overline{BD}$: bisectriz del ángulo interior *ABC*

$\overline{BE}$: bisectriz del ángulo exterior *CBQ*

Se cumple lo siguiente:

D y *E* dividen armónicamente al lado *AC*.

Demostración



(*b*)

Figura 11.14

En el $\triangle ABC$ (Teorema de la bisectriz interior)

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC} \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle ABC$ (Teorema de la bisectriz exterior)

$$\frac{AE}{CE}=\frac{AB}{BC} \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I) y (II)

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AE}{CE}$$

Por lo tanto, *D* y *E* dividen armónicamente a $\overline{AC}$.

HAZ ARMÓNICO

Es el conjunto de cuatro rayos que tienen en común el origen y que determinan sobre cualquier transversal a ellos cuatro puntos armónicos.

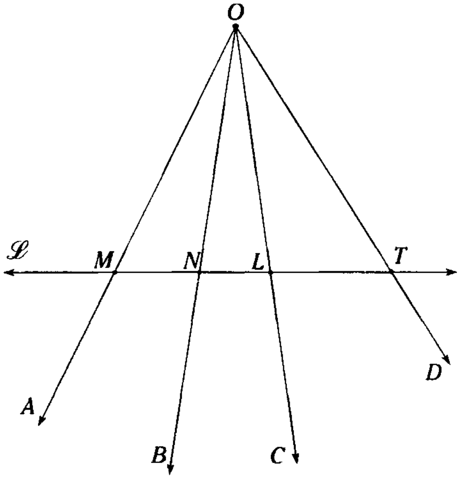
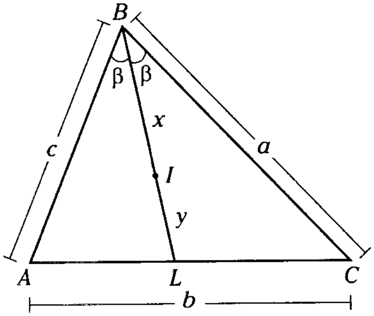


Figura 11.15

O	:	centro del haz armónico.
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$	:	recta transversal a los cuatro rayos.
$\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$	:	conjugados armónicos de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ y viceversa.
M, *N*, *L* y *T*	:	puntos armónicos.

TEOREMA DEL INCENTRO

En todo triángulo, el incentro divide internamente a una bisectriz interior en segmentos proporcionales a la suma de longitudes de dos lados contiguos (adyacentes) a la bisectriz y la longitud del lado al cual es relativo a dicha bisectriz.

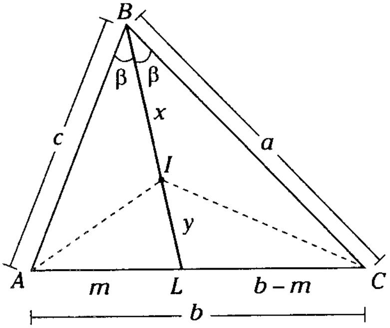


(a)

De la figura 11.16(a), I es incentro del $\triangle ABC$, que divide internamente a $\overline{BL}$. Se cumple así

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{a+c}{b}}$$

Demostración



(b)

Figura 11.16

Se trazan $\overline{AI}$ y $\overline{CI}$ (siendo bisectrices)

Sea $AL=m \rightarrow LC=b-m$

En el $\triangle ABL$, se aplica el teorema bisectriz interior.

$$\frac{x}{y}=\frac{c}{m} \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle BCL$, se aplica el teorema bisectriz interior

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b-m} \qquad \text{(II)}$$

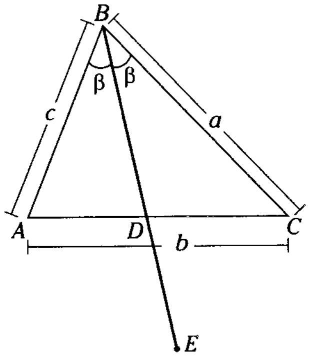
De (I), (II)

$$\frac{x}{y}=\frac{c+a}{m+(b-m)}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{x}{y}=\frac{c+a}{b}}$$

TEOREMA DEL EXCENTRO

En todo triángulo, el excentro divide externamente a una bisectriz interior en segmentos proporcionales a la suma de longitudes de los lados contiguos (adyacentes) a la bisectriz y la longitud del lado, al cual es relativo a dicha bisectriz.

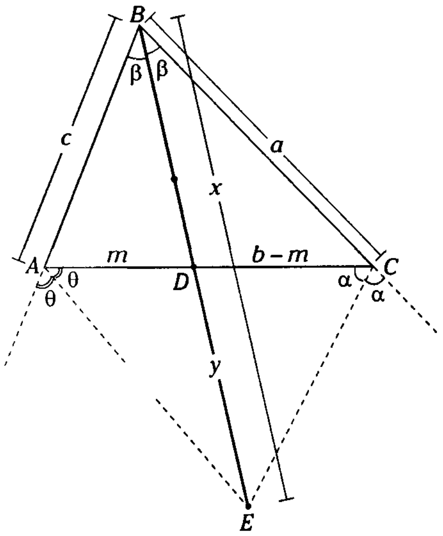


(a)

En la figura 11.17(a), E es excentro del $\triangle ABC$ relativo a $\overline{AC}$, que divide externamente a $\overline{BD}$.

Sea $BE=x$, $DE=y$, se cumple $\boxed{\frac{x}{y}=\frac{a+c}{b}}$

Demostración



(b)

Figura 11.17

Como E es excentro del $\triangle ABC$, se trazan las bisectrices exteriores $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$.

Sea $AD = m$, $DC = b - m$, $BE = x$, $DE = y$

En el $\triangle ADB$, se aplica el teorema bisectriz exterior

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{m} \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle CDB$, se aplica el teorema bisectriz exterior

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b-m} \qquad \text{(II)}$$

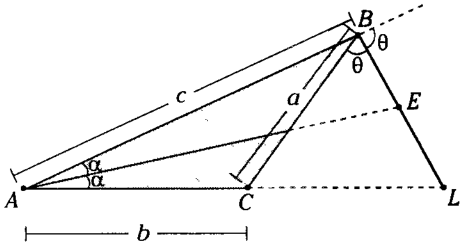
de (I) y (II)

$$\frac{x}{y} = \frac{c+a}{m+(b-m)}$$

$$\therefore \boxed{\frac{x}{y} = \frac{c+a}{b}}$$

Teorema

En un triángulo, el excentro relativo a un lado divide internamente a una bisectriz exterior en segmentos proporcionales a la diferencia de las longitudes de los lados contiguos (adyacentes) a la bisectriz y la longitud del tercer lado.



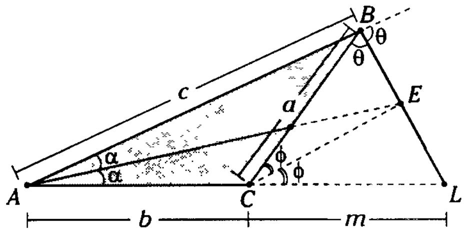
(a)

De la figura 11.17(a)

E es excentro del $\triangle ABC$, relativo a $\overline{BC}$; por lo que se cumple

$$\boxed{\frac{BE}{EL} = \frac{c-a}{b}}$$

Demostración



(b)

Figura 11.18

Como E: excentro del $\triangle ABC$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle BCE = m\sphericalangle LCE = \phi$

$m\sphericalangle BAE = m\sphericalangle LAE = \alpha$

En $\triangle ABL$: Del teorema de la bisectriz interior

$$\frac{BE}{EL} = \frac{c}{b+m} \qquad \text{(I)}$$

En $\triangle BCL$: Del teorema de la bisectriz interior

$$\frac{BE}{EL} = \frac{a}{m} \qquad \text{(II)}$$

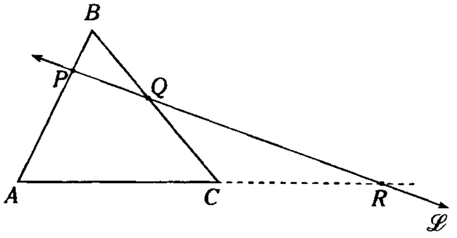
De (I) y (II)

$$\frac{BE}{EL} = \frac{c-a}{(b+m)-m}$$

$$\therefore \boxed{\frac{BE}{EL} = \frac{c-a}{b}}$$

TEOREMA DE MENELAO

Toda recta secante (transversal) a un triángulo, que divide internamente a dos lados y externamente al tercero, determina en dicho triángulo seis segmentos, tales que el producto de las longitudes de tres de ellos sin extremo en común es igual al producto de las longitudes de los otros tres.



(*a*)

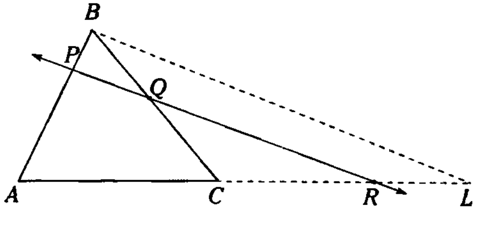
De la figura 11.19(a), la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es secante al triángulo *ABC*.

Se cumple

$$\boxed{\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{AR}=1}$$

$$\therefore\quad \boxed{AP\,.\,BQ\,.\,CR=PB\,.\,QC\,.\,AR}$$

Demostración



(*b*)

Figura 11.19

Se traza $\overline{BL}$ paralela a $\overleftrightarrow{PR}$, mientras que en el $\triangle ABL$ se aplica el corolario del teorema de Tales.

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AR}{RL} \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle BCL$, se aplica el corolario del teorema de Tales

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{RL}{CR} \qquad \text{(II)}$$

De (I) × (II)

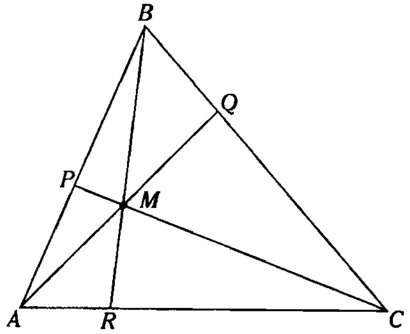
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}=\frac{AR}{RL}\cdot\frac{RL}{CR}$$

$$\boxed{\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{AR}=1}$$

$$\therefore\quad \boxed{AP\,.\,BQ\,.\,CR=PB\,.\,QC\,.\,AR}$$

TEOREMA DE CEVA

En todo triángulo, cada una de las cevianas interiores concurrentes divide internamente al lado al cual es relativo en dos segmentos, tal que el producto de las longitudes de tres de ellos, sin extremo en común, es igual al producto de las longitudes de los otros tres.



(*a*)

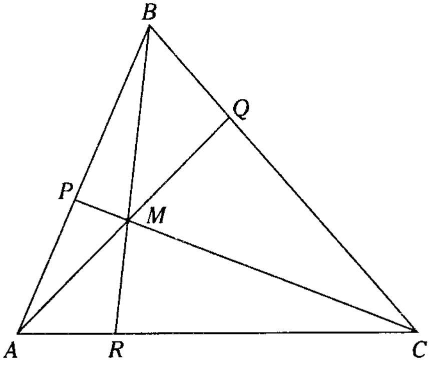
De la figura 11.20(a), las cevianas interiores $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ y $\overline{CP}$ son concurrentes en *M*, si los pies de las cevianas dividen internamente a los lados del $\triangle ABC$.

Se cumple de esta manera

$$\boxed{\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1}$$

$$\therefore\quad \boxed{AP\,.\,BQ\,.\,CR=PB\,.\,QC\,.\,RA}$$

Demostración



(*b*)

Figura 11.20

Del $\triangle ABR$ ($\overleftrightarrow{PC}$ es secante), se aplica el teorema de Menelao

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BM}{MR}\cdot\frac{CR}{CA}=1 \qquad \text{(I)}$$

Del $\triangle BRC$ ($\overleftrightarrow{QA}$ es secante), se aplica el teorema de Menelao

$$\frac{MR}{BM}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{AC}{AR}=1 \qquad \text{(II)}$$

de (I) × (II)

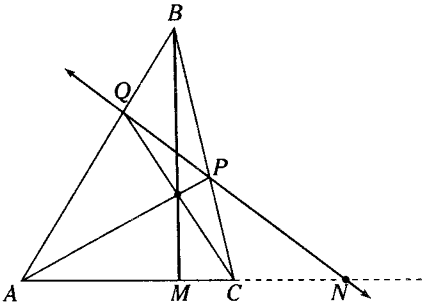
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BM}{MR}\cdot\frac{CR}{CA}\times\frac{MR}{BM}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{AC}{AR}=1$$

$$\rightarrow \frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{AR}=1$$

$$\therefore\ AP.BQ.CR=PB.QC.AR$$

Teorema

En un triángulo, al trazar tres cevianas interiores concurrentes y la recta que contiene a los pies de dos cevianas e interseca a la prolongación del tercer lado, se cumple que los cuatro puntos determinados en la recta, que contiene al tercer lado, forman una cuaterna armónica.

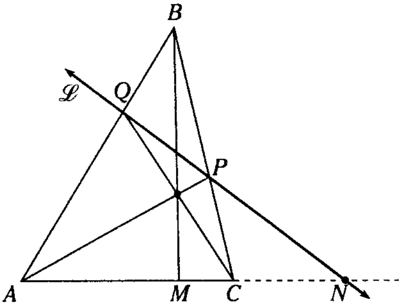


(*a*)

En la figura 11.21(a) $\overline{AP}$, $\overline{CQ}$ y $\overline{BM}$: cevianas concurrentes. Por lo cual se cumple

A, M, C, N: forman una cuaterna armónica

Demostración



(*b*)

Figura 11.21

$\triangle ABC$: teorema de Menelao

$$AQ.BP.CN=QB.PC.AN$$

$$\frac{AQ.BP}{QB.PC}=\frac{AN}{CN} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle ABC$: teorema de Ceva

$$AQ.BP.CN=QB.PC.AN$$

$$\frac{AQ.BP}{QB.PC}=\frac{AN}{CN} \qquad \text{(II)}$$

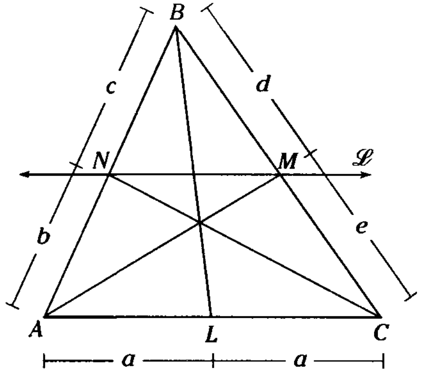
Igualando (I) y (II)

$$\frac{AM}{CM}=\frac{AN}{CN}$$

$\therefore$ *A, M, C* y *N* forman una cuaterna armónica.

Teorema

En un triángulo, al trazar una mediana relativa a un lado y dos cevianas interiores relativas a los otros dos lados y, que son además concurrentes, entonces la recta que contiene a los pies de las dos cevianas es paralela al lado que contiene al pie de la mediana.

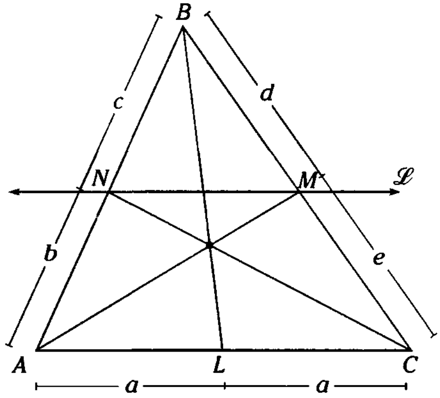


(a)

En la figura 11.22(a) $\overline{BL}$: mediana y
$\overline{AM}$, $\overline{CN}$: cevianas interiores

se cumple $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AC}$.

Demostración



(b)

Figura 11.22

En el $\triangle ABC$, teorema de Ceva

$a(c)(e) = b(d)(a)$

$(c)(e) = (b)(d)$

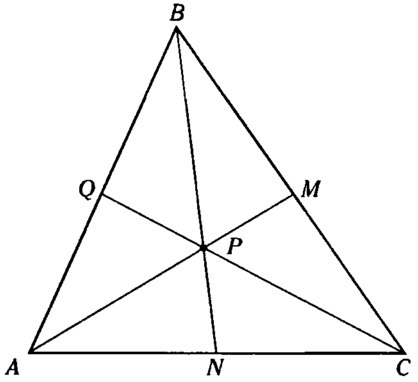
$\frac{c}{b} = \frac{d}{e}$

La relación anterior es recíproco del corolario del teorema de Tales.

$\therefore \ \overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AC}$

TEOREMA DE VAN AUBEL

En todo triángulo, al trazar tres cevianas concurrentes se cumple que el punto de concurrencia divide a cualquier ceviana en segmentos, cuya razón es igual a la suma de las razones de los segmentos determinados por las otras dos cevianas en sus lados adyacentes.



(a)

$\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son cevianas concurrentes en P.

Para $\overline{BN}$ se cumple

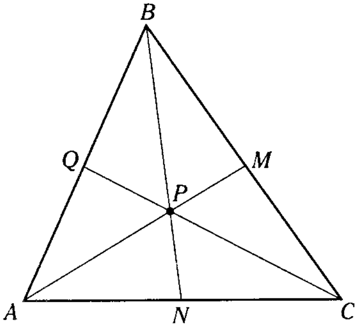
$$\frac{BP}{PN} = \frac{BQ}{QA} + \frac{BM}{PC}$$

Análogamente se cumple para $\overline{AM}$ y $\overline{CQ}$.

$$\frac{AP}{PM} = \frac{CM}{MB} + \frac{CN}{NA}$$

$$\frac{CP}{PQ} = \frac{CM}{MB} + \frac{CN}{NA}$$

Demostración



(b)

Figura 11.23

En el $\triangle ABN$: del teorema de Menelao (QPC: recta secante)

$$\frac{BQ}{QA}\cdot\frac{PN}{BP}\cdot\frac{AC}{NC}=1 \qquad \text{(I)}$$

en el $\triangle NBC$: del teorema de Menelao ($\overline{APM}$: recta secante)

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{PN}{BP}\cdot\frac{AC}{AN}=1 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) tenemos

$$\frac{BQ}{QA}=\frac{BP}{PN}\cdot\frac{NC}{AC} \qquad \text{(III)}$$

$$\frac{BM}{MC}=\frac{BP}{PN}\cdot\frac{AN}{AC} \qquad \text{(IV)}$$

Sumando (III) y (IV)

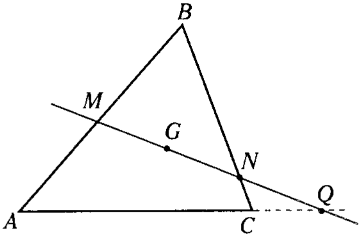
$$\frac{BQ}{QA}+\frac{BM}{MC}=\frac{BP}{PN}\cdot\left(\frac{NC+AN}{AC}\right)^{1}$$

$$\therefore\ \frac{BP}{PN}=\frac{BQ}{QA}+\frac{BM}{MC}$$

Teorema

En un triángulo ABC, de baricentro G, al trazar una recta por G que interseca a dos lados y a la prolongación del tercero en los puntos M; N y Q respectivamente, se cumple que

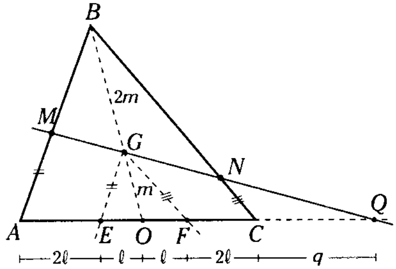
$$\frac{1}{GM}=\frac{1}{GN}+\frac{1}{GQ}$$



(a)

Si G: baricentro del $\triangle ABC$ $\rightarrow$ $\dfrac{1}{GM}=\dfrac{1}{GN}+\dfrac{1}{GQ}$

Demostración



(b)

Figura 11.24

Trazamos la mediana $\overline{BO}$.

Se sabe que $AO = OC \rightarrow G$ pertenece a $\overline{BO}$

Por propiedad: $BG = 2(GO) = 2m$

Sea $AO = OC = 3\ell$ y $CQ = q$

por G trazamos $\overline{GE}\,//\,\overline{BA}$ $\rightarrow$ $AE = 2(EO) = 2\ell$

por G trazamos $\overline{GF}\,//\,\overline{BC}$ $\rightarrow$ $CF = 2(FO) = 2\ell$

luego se observa

$$\overline{GE}//\overline{MA} \rightarrow \frac{GQ}{GM}=\frac{4\ell+q}{2\ell} \qquad \text{(I)}$$

$$\overline{GF}//\overline{NC} \rightarrow \frac{GQ}{GN}=\frac{2\ell+q}{2\ell} \qquad \text{(II)}$$

de (I) y (II)

$$\frac{GQ}{GM}-\frac{GQ}{GN}=\frac{2\ell}{2\ell}=1$$

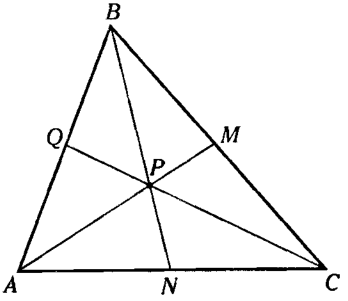
Dividiendo entre GQ

$$\frac{1}{GM}-\frac{1}{GN}=\frac{1}{GQ}$$

$$\therefore\ \frac{1}{GM}=\frac{1}{GQ}+\frac{1}{GN}$$

TEOREMA DE GERGONNE

En todo triángulo, al trazar tres cevianas concurrentes, la suma de las razones de los segmentos limitados por el punto de concurrencia y los pies de cada ceviana con la ceviana que la contiene es uno.

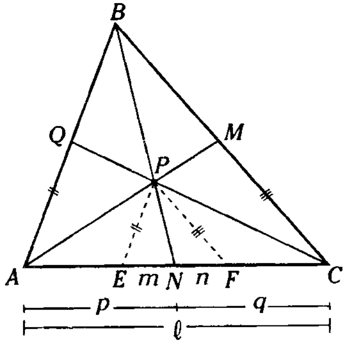


(*a*)

Si $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son cevianas concurrentes en *P*.

$$\rightarrow \boxed{\frac{MP}{AM}+\frac{NP}{BN}+\frac{QP}{CQ}=1}$$

Demostración



(*b*)

Figura 11.25

Trazamos $\overline{PE}//\overline{AB}$ y $\overline{PF}//\overline{BC}$ así en la figura 11.25(b) aplicando el corolario del teorema de Tales en:

$\triangle ABN$ y $\triangle NBC$

$$\frac{NP}{BN}=\frac{m}{p}=\frac{n}{q}=\frac{m+n}{p+q}=\frac{m+n}{\ell} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle AQC$: Por el corolario

$$\frac{QP}{CQ}=\frac{p-m}{\ell} \qquad \text{(II)}$$

$\triangle AMC$: Por el corolario

$$\frac{MP}{AM}=\frac{q-n}{\ell} \qquad \text{(III)}$$

de (II) + (III) y ordenando

$$\frac{QP}{CQ}+\frac{MP}{AM}=\frac{(p+q)-(m+n)}{\ell} \qquad \text{(IV)}$$

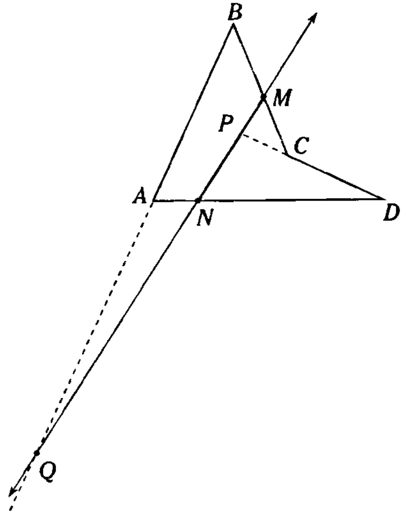
Reemplazando (I) en (IV)

$$\frac{QP}{CQ}+\frac{MP}{AM}=1-\frac{NP}{BN}$$

$$\therefore \ \frac{MP}{AM}+\frac{NP}{BN}+\frac{QP}{QC}=1$$

Teorema

Si en un cuadrilátero no convexo se traza una recta secante que interseca a dos lados, esta determina en cada lado dos segmentos, se cumple de esta manera, que el producto de las longitudes de cuatro segmentos no consecutivos son iguales.

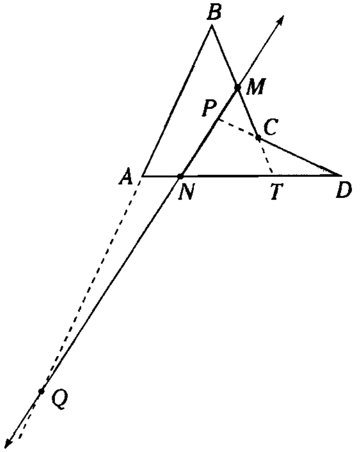


(*a*)

Si $\overleftrightarrow{MQ}$: secante al ⏢ *ABCD*

$$\boxed{BM.PC.ND.AQ=NA.BQ.PD.MC.}$$

Demostración



(*b*)

Figura 11.26

Se prolonga BC hasta T.

$\triangle BAT$ (Teorema de Menelao primer caso, donde $\overleftrightarrow{MQ}$: secante)

$$MT.NA.BQ = BM.TN.AQ$$

$$\rightarrow \frac{MT}{NT} = \frac{BM.AQ}{NA.BQ} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle CDT$ (Teorema de Menelao segundo caso, $\overleftrightarrow{MN}$: secante)

$$\frac{PD}{PC} \cdot \frac{MC}{MT} \cdot \frac{NT}{ND} = 1$$

$$\rightarrow \frac{MT}{NT} = \frac{PD.MC}{PC.ND} \qquad \text{(II)}$$

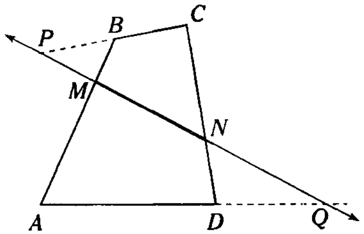
Igualando (I) y (II)

$$\frac{BM.AQ}{NA.BQ} = \frac{PD.MC}{PC.ND}$$

$$\therefore\ BM.PC.ND.AQ = NA.BQ.PD.MC$$

Teorema

Si en un cuadrilátero convexo, se traza una recta secante que interseca a dos lados, esta determina en cada lado dos segmentos. Así, se cumple que el producto de las longitudes de cuatro segmentos no consecutivos son iguales.

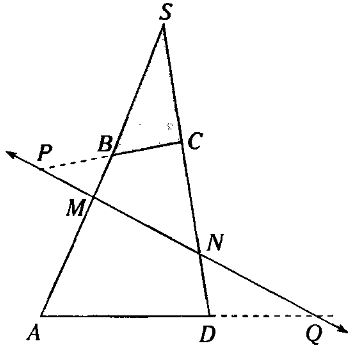


(*a*)

Si $\overleftrightarrow{PQ}$: secante

$$\boxed{AM.PB.CN.DQ = MB.PC.ND.AQ}$$

Demostración



(*b*)

Figura 11.27

Se prolongan AB y DC hasta que se intersequen en S.

$\triangle ASD$ (Teorema de Menelao primer caso)

$$AM.SN.DQ = MS.ND.AQ$$

$$\rightarrow \frac{MS}{SN} = \frac{AM.DQ}{ND.AQ} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle BSC$ (Teorema de Menelao segundo caso)

$$\frac{MS}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{NC}{NS} = 1$$

$$\rightarrow \frac{MS}{NS} = \frac{MB.PC}{PB.NC} \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I) y (II)

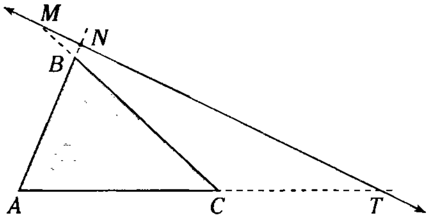
$$\frac{AM.DQ}{ND.AQ} = \frac{MB.PC}{PB.NC}$$

$$\therefore\ AM.PB.NC.DQ = MB.PC.ND.AQ$$

Teorema de Menelao (Segundo caso)

Si en un triángulo se traza una recta secante, que interseca a las prolongaciones de sus tres lados, esta determina seis segmentos.

Se cumple, por consiguiente, que el producto de las longitudes de tres segmentos no consecutivos son iguales.

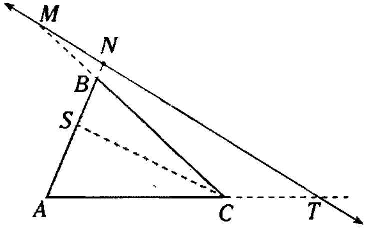


(a)

Sea $\overleftrightarrow{MT}$: secante a la prolongación de los lados del triángulo ABC.

$$AN.CT.BM = AT.BN.CM.$$

Demostración



(b)

Figura 11.28

Se traza $\overline{CS} // \overleftrightarrow{MT}$

$\triangle ANT$: (Corolario del teorema de Tales)

$$\frac{SN}{AN}=\frac{CT}{AT} \rightarrow SN=AN\cdot\frac{CT}{AT} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle SBC$: (Corolario del teorema de Tales)

$$\frac{SN}{BN}=\frac{CM}{BM} \rightarrow SN=BN\cdot\frac{CM}{BM} \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I) y (II)

$$AN.\frac{CT}{AT}=BN\cdot\frac{CM}{BM}$$

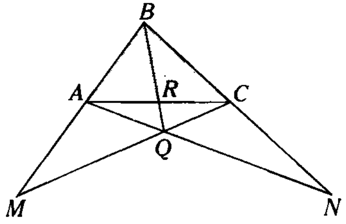
$$\therefore\ AN.CT.BM = AT.BN.CM$$

o se puede plantear

$$\frac{AN}{BN}\cdot\frac{BM}{CM}\cdot\frac{CT}{AT}=1$$

Teorema de Ceva (Segundo caso)

Si en un triángulo dos cevianas exteriores y una ceviana interior son concurrentes, estas determinan seis segmentos, en el cual se cumple que el producto de las longitudes de tres segmentos no consecutivos es igual.



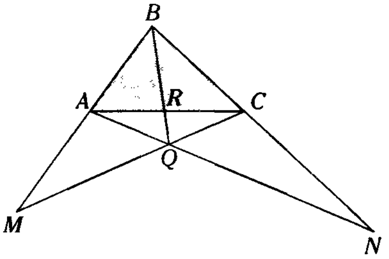
(a)

Si $\overline{CM}, \overline{AN}$: cevianas exteriores del $\triangle ABC$

BR: ceviana interior del $\triangle ABC$

$$NB.CR.AM = NC.AR.MB$$

Demostración



(b)

Figura 11.29

En el $\triangle BRC$ (Teorema de Menelao segundo caso)

$$\frac{QB}{QR}\cdot\frac{AR}{AC}\cdot\frac{NC}{NB}=1 \rightarrow \frac{QB}{QR.AC}=\frac{NB}{AR.NC} \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle BRA$ (Teorema de Menelao segundo caso)

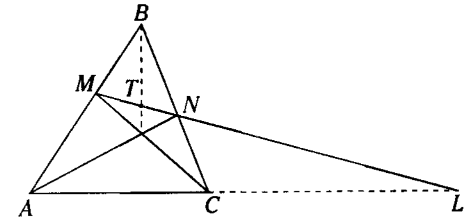
$$\frac{QB}{QR}\cdot\frac{CR}{CA}\cdot\frac{MA}{MB}=1 \rightarrow \frac{QB}{QR.AC}=\frac{MB}{CR.MA} \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I) y (II)

$$\frac{NB}{AR.NC}=\frac{MB}{CR.MA}$$

$$\therefore\ NB.CR.MA=MB.AR.NC$$

Teorema

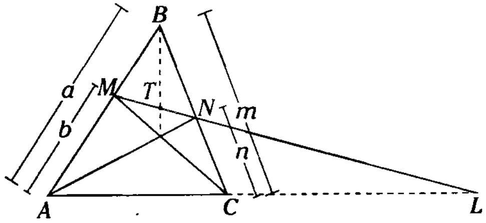


(*a*)

Si en el triángulo *ABC*: $\overline{ML}$ es secante, entonces *M*, *T*, *N* y *L* son puntos armónicos, esto significa que

$$\boxed{\frac{MT}{TN}=\frac{ML}{NL}}$$

Demostración



(*b*)

Figura 11.30

$\triangle MBN$ (Teorema de Ceva segundo caso)

$$a.(MT).n=m.(NT)b\ \rightarrow\ \frac{a.n}{m.b}=\frac{NT}{MT}\quad \text{(I)}$$

$\triangle MBN$ (Teorema de Menelao segundo caso)

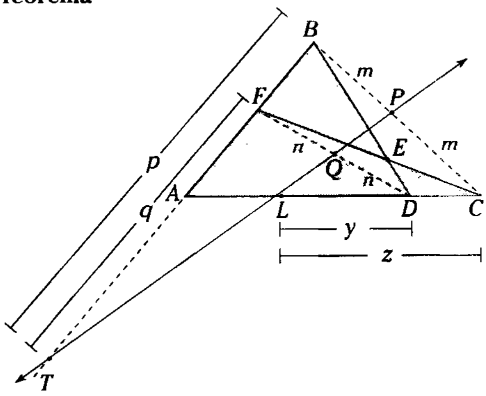
$$\rightarrow\ \frac{m}{n}\cdot\frac{(NL)}{(ML)}\cdot\frac{b}{a}=1\ \rightarrow\ \frac{a.n}{m.b}=\frac{NL}{ML}\quad \text{(II)}$$

Igualando (I) y (II)

$$\frac{NT}{MT}=\frac{NL}{ML}$$

$$\therefore\ \frac{MT}{NT}=\frac{ML}{NL}$$

Teorema

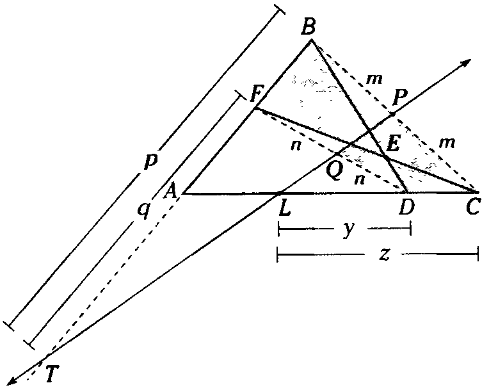


(*a*)

Si en el cuadrilátero *ABEC* se traza la recta $\overline{PT}$, que contiene a los puntos medios de $\overline{BC}$ y *FD*, asumimos

$$\boxed{\frac{p}{q}=\frac{z}{y}}$$

Demostración



(*b*)

Figura 11.31

En el $\triangle FBCD$ (Teorema)

$DQ.TF.BP.CL=QF.TB.PC.DL$

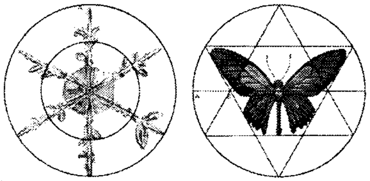
$n.q.m.z=n.p.m.y$

$$\frac{p}{q}=\frac{z}{y}$$

LECTURA

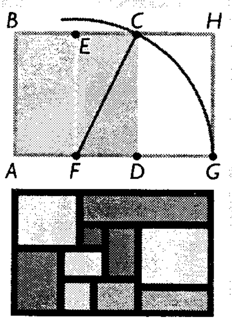
LA DIVINA PROPORCIÓN

El tratado de la *Divine Proporcione*, que fue escrito por Luca Pacioli (1445 - 1510), presenta un acentuado sabor platónico. En la parte de su obra dedicada a la geometría, trata de los cinco poliedros regulares que constituirán el tema fundamental del tratado (1509).



Tanto los copos de nieve como la mariposa se ajustan a la proporción áurea.

La relación existente entre dos objetos o cantidades cuando la razón entre la mayor y la menor es igual a la existente entre la suma de las dos (la totalidad) y la mayor, y que es simbolizada por la letra Phi (ϕ), en honor a Fidias. Numéricamente posee propiedades excepcionales ($\phi = 1{,}618 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$) aparte de presentarse en la naturaleza. Tanto los copos de nieve como las mariposas se ajustan a la proporción divina.

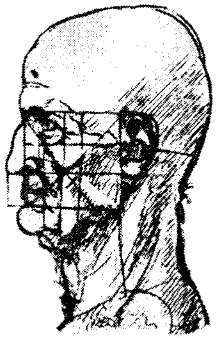


El rectángulo de oro

- *La construcción geométrica de un rectángulo de oro, parte del cuadrado ABCD que posteriormente se divide en dos partes iguales a través de la línea de trazo discontinuo EF. Con centro en F y radio FC se traza el arco CG. Luego se construye el rectángulo de oro ABHG pero también CDGH es un rectángulo de oro.*
- *Todos los rectángulos de este diseño están contenidos en el rectángulo de oro y el rectángulo interior de la parte intermedia también tiene esa misma proporción.*

Esta imporante razón ya era conocida por los griegos, que combinaban sus conocimientos de matemáticas, con su arte y su arquitectura, admiraban lo que ellos llamaban la sección y construyeron el partenon de Atenas utilizando sus proporciones.

Más adelante Leonardo de Pisa (1175 - 1250) (Fibonacci) y sus seguidores lo bautizarían como Sección Áurea o Número de Oro y que ha intrigado a los expertos durante siglos la relación 1:1618, se manifiesta en pentágonos, decágonos y en los círculos, pero notablemente en el rectángulo de oro, figura cuyos dos lados guardan entre sí la proporción mágica.



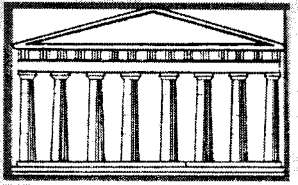
Simetría en la cara
En el dibujo de Leonardo da Vinci el artista a recubierto el rostro con rectángulos de oro.

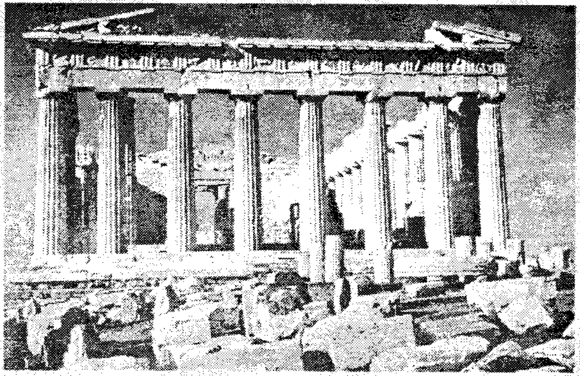
Se dice que el rectángulo de oro es la forma geométrica más satisfactoria: se han encontrado ejemplos en todas partes.

Se cree que hasta los egipcios lo utilizaron para construir sus pirámides, ni qué decir de los griegos. En el Renacimiento, Leonardo Da Vinci realizó un dibujo de un hombre anciano, probablemente él mismo, y cubrió el dibujo de rectángulos de los cuales una serie es casi un conjunto de rectángulos áureos.

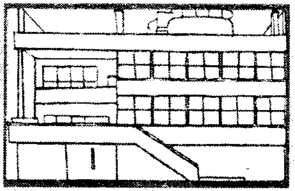
Podríamos mencionar la presencia del número áureo en la serie de Fibonacci, en los pétalos de las flores, en la música y en obras maestras de arte.

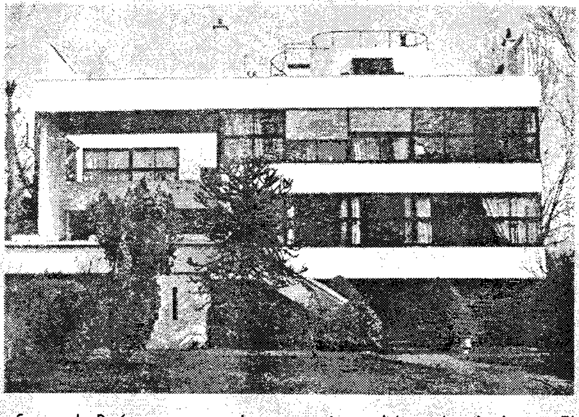
En los últimos años, la validez de su conexión con la belleza ha sido objeto de gran discusión. No obstante, como claramente indican los cuadros de esta página, el rectángulo de oro se ve a menudo en el arte. (Da Vinci, Seurat, Mondrian)





En un templo antiguo, el Partenón de Atenas (a la derecha) encaja dentro de un rectángulo de oro, casi exactamente una vez incorporado su ruinoso frontón (arriba). Ya desde el siglo V a.n.e. los constructores griegos tenían conocimiento del equilibrio armonioso de la relación de Oro.





En una moderna villa, esta casa en las afueras de París representa el uso consciente del rectángulo de oro. El rectángulo existe no tan solo en el diseño completo de arriba, sino también verticalmente en el área a la izquierda de las escaleras. Le Corbusier es el arquitecto constructor,

FUENTE: Bergamini, David, *Colección científica de Matemáticas; Colección científica de Time - life*. EEUU. Ediciones Culturales Internacionales S.A. de C.V. 2[da] edición. pp. 94-95.

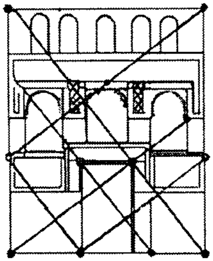
LECTURA

PROPORCIÓN CORDOBESA

En diversos trabajos de investigación sobre arquitectura y pintura; aparece un rectángulo que no está en la proporción áurea, sino que la relación entre sus lados es de 1,3... (Sin ir más lejos, si la resolución de tu ordenador es de 800 × 600, se encuadra en la misma proporción).

Si el número áureo podría establecerse como la relación existente entre el lado del decágono regular y el radio de la circunferencia circunscrita al mismo, pareció lógico buscar una relación de la misma naturaleza con la que dicha proporción quedara geométricamente fundamentada.

La misma quedó establecida al obtener la proporción buscada como la relación entre el radio de la circunferencia circunscrita al octógono regular y el lado de éste.

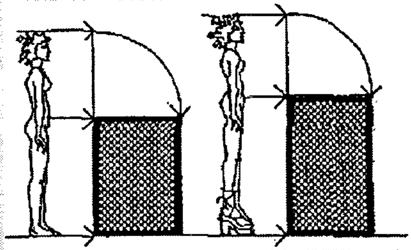


Cualquier matemático, o buen aficionado, sabe que esta relación es $\frac{R}{L}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

Dicho cociente es $c=1{,}306562964...$ que se conoce como **número cordobés**.

Al ser más fácil construir un octógono regular que un pentágono, dicha proporción se extendió rápidamente quedando de manifiesta en múltiples obras pictóricas y arquitectónicas.

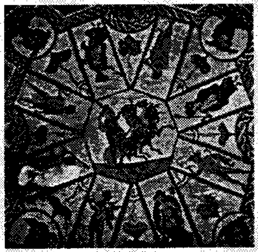
Como ejemplos podríamos citar la *Bóveda Cordobesa* o las bellas arcadas de la mezquita de *Córdoba*.



Proporción cordobesa y la proporción áurea

Según los trabajos del alemán *Fechner*, esta proporción se establece en multitud de obras pictóricas. Para el arquitecto Rafael de la Hoz Arderius (uno de los máximos investigadores del tema), considerando las últimas técnicas de medición obtenidas del *Papiro Rhind* (museo Británico) entre las diagonales de un rectángulo con dicha proporción, queda perfectamente encajada la Gran Pirámide.

Y como los anteriores podríamos citar más ejemplos.



Bóveda de la mezquita de Córdoba.

Los estudios efectuados sobre el tema indican que la proporción dicha está más extendida de lo que hasta ahora se creía.

BIOGRAFÍA

TALES DE MILETO (624 - 546 a.n.e.)

Nació en la ciudad de Mileto, aproximadamente en el año 624 a.n.e. y murió en el año 546 a.n.e. Tradicionalmente Tales es considerado como uno de los siete sabios de Grecia, siendo, junto con Solón, de los más citados en las diversas listas en que se los agrupaba. Las referencias acerca de su vida son confusas y contradictorias.

Respecto a su propio origen, por ejemplo, unos lo consideran de origen fenicio, habiendo sido posteriormente hecho ciudadano de Mileto, mientras otros le hacen natural de Mileto y de sangre noble.

Se dice que viajó por Egipto, donde aprendió Geometría y donde pudo medir la altura de las pirámides a partir de su sombra. Se le ha tenido siempre por astrónomo y geómetra práctico, atribuyéndosele algunos descubrimientos matemáticos como el Teorema que lleva su nombre. Quizá la referencia más exacta de su vida sea la predicción del eclipse que tuvo lugar en el año 585 a.n.e., lo que le valió gran renombre y fama. Respecto a su obra, unos afirman que no escribió nada y otros lo consideran autor de varias obras; entre ellas, *Astrología Náutica*.

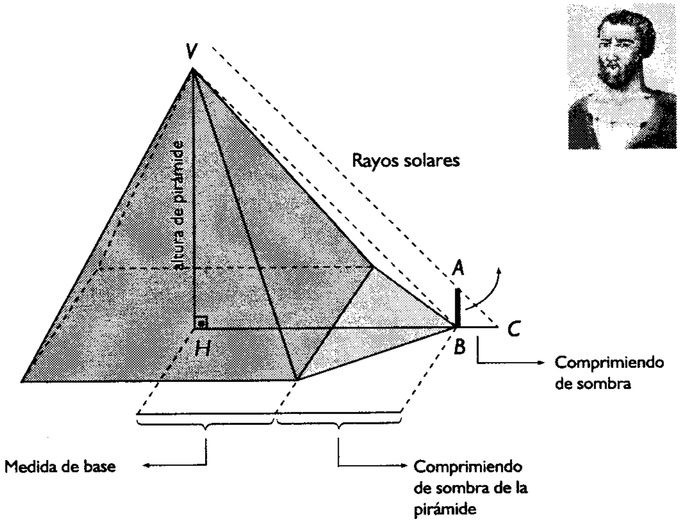
Respecto a su cosmología, afirmaba, según las referencias que nos han trasmitido los antiguos, que la Tierra estaba sobre el agua, flotando como un disco. Se le atribuye la afirmación *Todo es agua* que ha sido interpretada en el sentido de que el agua era el elemento originario de la realidad, el principio de todas las cosas, o bien en el sentido de que todas las cosas estaban constituidas o formadas por agua. ¿De dónde procede esta idea? Algunos afirman que Tales la tomó de la mitología oriental; la mayoría, sin embargo, tiende a atribuirle un origen experimental, bien derivado de la experiencia de lo húmedo y de la importancia de la humedad en el desarrollo de la vida, o bien de la observación de la evaporación del agua, que hace que este elemento se transforme en otro. En todo caso, fue el primero que planteó la cuestión de la naturaleza última del mundo, concibiendo las cosas como formas cambiante de un primer y único elemento: el agua.

Lo importante de su pensamiento es, su concepción sobre la noción de la unidad en la diversidad. De esta manera, intentó explicar las diferencias que se perciben en la multiplicidad de lo real, y como tal, dicho principio o *arjé* era de carácter material.

Sea como fuere, Tales es considerado el primer filósofo por cuanto, frente a las explicaciones de la realidad de carácter mítico y religioso, nos ofrece por primera vez una explicación basada en la razón, es decir, en la que no se apela a entidades sobrenaturales para explicar lo real ni se admite lo contradictorio, rechazándose, además, la heterogeneidad entre la causa y el efecto: si la realidad es física, su causa ha de ser también física (el agua, por ejemplo).

Escuela de Mileto. La continuidad de la reflexión filosófica de Tales, a través de Anaximandro y Anaxímenes, dio lugar a que se les agrupara en la llamada **Escuela de Mileto**, cuyas principales características podríamos resumir así:

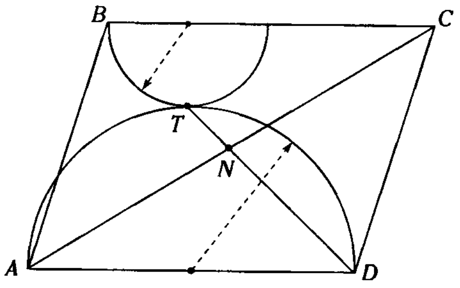
1. Los milesios, también llamados *físicos*, se preocupan por determinar el principio último, la naturaleza última de la realidad, planteándose por lo tanto el problema de la unidad en la diversidad
2. Esa primera causa de lo real tiene que ser eterna y de carácter material: no hay en ellos idea de *creación*, de comienzo absoluto.
3. Su explicación es de carácter racional: se reclama la homogeneidad entre la causa y el efecto para rechazar, además, el recurso a lo mágico y a lo contradictorio.
4. Hay algún tipo de ley que regula el funcionamiento del universo y es posible encontrarla mediante la razón; la idea de ley remite, en este caso, a un principio de unidad de lo real.
5. Por último, no hay una distinción clara entre ciencia y filosofía, entendidos los términos en sentido.



Problema 1

En la figura, $ABCD$ es un romboide, si la razón de las radios de las semicircunferencias es 3/7 y T es punto de tangencia.

Calcule $\frac{TN}{ND}$.



A) 1/7 B) 2/7 C) 2/3

D) 2/5 E) 3/5

Resolución

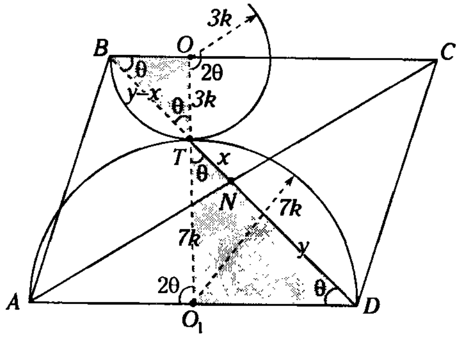


Figura 11.32

Piden

$$\frac{TN}{ND}=\frac{x}{y}$$

De la figura 11.32, O, T y O_1 son colineales y $\overline{BC}\,//\,\overline{AD}$

$\rightarrow$ m$\measuredangle COT$ = m$\measuredangle TO_1A$ = 2θ

Como el $\triangle BOT$ y el $\triangle TO_1D$ son isósceles:

$\rightarrow$ m$\measuredangle BTO$ = m$\measuredangle O_1TD$=θ y B, T y D son colineales.

En el romboide $ABCD$:

$BN = ND$

$BT + x = y$

$\rightarrow$ $BT = y - x$

Por corolario del teorema de Tales

$$\frac{y-x}{x+y}=\frac{3k}{7k}$$

$$7(y-x) = 3(x+y)$$

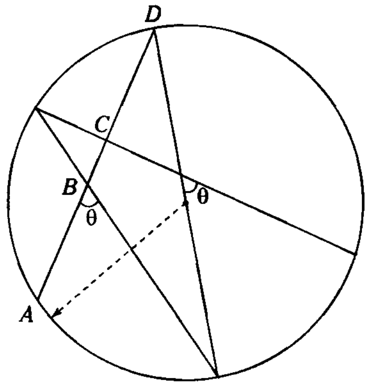
$$7y-7x = 3x+3y$$

$$\therefore\quad \frac{x}{y}=\frac{2}{5}$$

CLAVE D

Problema 2

De la figura, AB=2 y CD=3. Calcule BC.



A) 1,5 B) 2 C) 1

D) 3 E) 2,5

Resolución

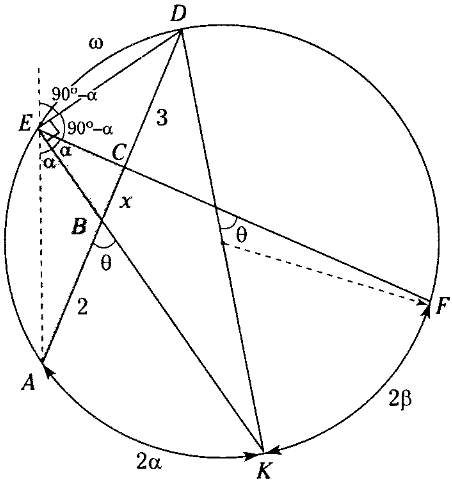


Figura 11.33

Piden

$BC=x$

Por ángulo interior:

$$\theta=\frac{2\alpha+w}{2}\ \rightarrow\ \alpha=2\theta-w$$

$$\theta=\frac{2\beta+w}{2}\ \rightarrow\ \beta=2\theta-w$$

$$\rightarrow\ \beta=\alpha$$

y por ∢ inscrito:

m∢AEK = m∢KEF = α

En $\triangle AEC$

$\overline{EB}$ y $\overline{ED}$: bisectriz interior y exterior

→ Cuaterna armónica:

$$\frac{2}{x}=\frac{5+x}{3}$$

$$6=(5+x)x$$

$$\rightarrow\ (6)(1)=(5+x)(x)$$

∴ $x=1$

CLAVE C

Problema 3

En un cuadrado $ABCD$ de centro O, se ubica el punto L en AD, tal que $AL=2(LD)$, en la prolongación de OL se ubica el punto P, tal que m∢$OAP=90°$. Calcule $\frac{OL}{LP}$.

A) 1/3 B) 1/2 C) 3/4
D) 1/5 E) 2/3

Resolución

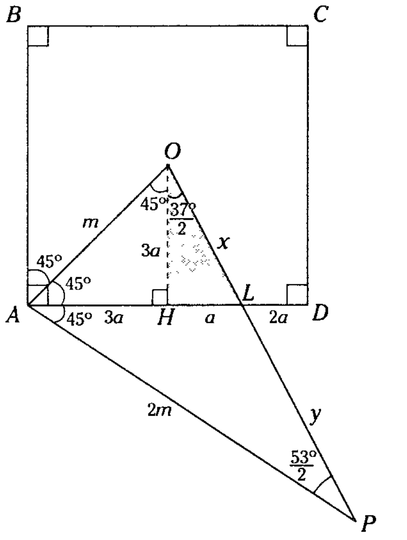


Figura 11.34

Piden

$$\frac{OL}{LP}=\frac{x}{y}$$

Se traza

$\overline{OH}\perp\overline{AD}\rightarrow HA=HD$ (I)

Por dato

$AL=2(LD)$ (II)

De (I) y (II):

$AH=3a$

$HL=a$

$LD=2a$

⊿ OHL: Notable $\dfrac{37°}{2},\dfrac{143°}{2}$

⊿ OAP: Notable $\dfrac{53°}{2},\dfrac{127°}{2}$

Por el teorema de la bisectriz en ⊿ OAP:

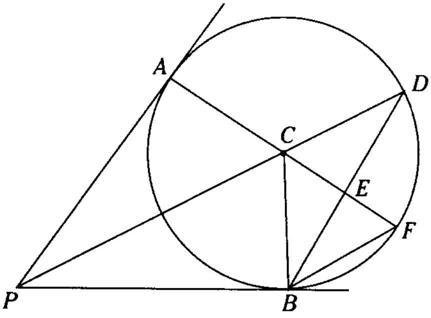
$$\frac{x}{y}=\frac{AO}{AP}=\frac{n}{2r}$$

$$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{1}{2}$$

CLAVE B

Problema 4

En la figura, $\overline{PD}//\overline{BF}$, A y B son puntos de tangencia, $BC=4(CE)$ y $BE=6$. Calcule ED.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 2,5 E) 1,5

Resolución

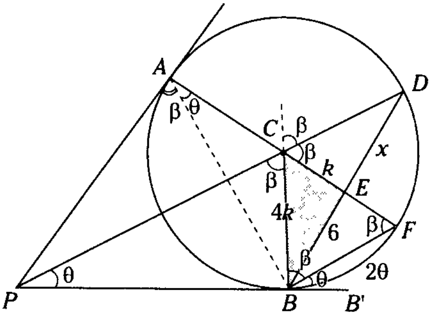


Figura 11.35

Piden

$ED=x$

Del dato $\overline{PD}\,//\,\overline{BF}$

$m\sphericalangle DPB=m\sphericalangle FBB'=\theta$

$m\sphericalangle PCB=m\sphericalangle CBF=\beta$

Por $\sphericalangle$inscrito

$$m\sphericalangle FAB=\frac{2\theta}{2}=\theta$$

$ACBP$: ⏢ inscriptible $\rightarrow$ $m\sphericalangle PAB=m\sphericalangle PCB=\beta$

Por $\sphericalangle$inscrito

$m\sphericalangle AFB=\beta$ $\rightarrow$ $\triangle BCF$: isósceles y $EF=3k$

Por corolario del teorema de Tales

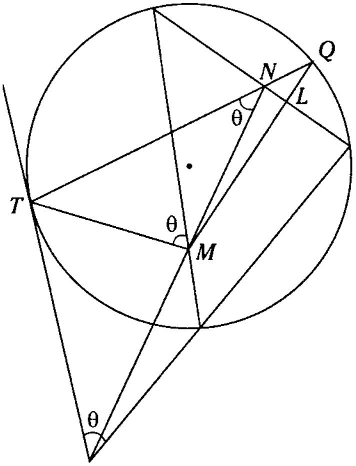
$$\frac{x}{6}=\frac{k}{3k}$$

$$\therefore\ x=2$$

CLAVE B

Problema 5

En la figura, T es punto de tangencia, $MN=3(NL)$ y $ML=8$. Calcule LQ.



A) 6 B) 8 C) 4
D) 2 E) 5

Resolución

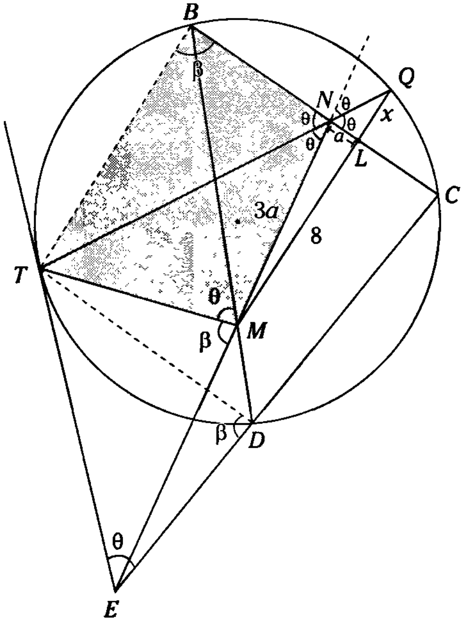


Figura 11.36

Piden

$LQ=x$

Sea

$NL=a, MN=3a$

Se trazan

$\overline{TB}, \overline{TD}$

TBCD: ⌂ inscrito → m∢*TBC* = m∢*TDE* = β

TMDE: ⌂ inscriptible → m∢*TME* = m∢*TDE* = β

TBNM: ⌂ inscriptible → m∢*BNT* = m∢*BMT* = θ

Por el teorema de la bisectriz exterior en △ *MNL*:

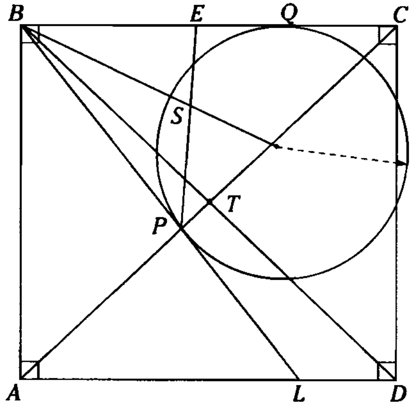
$$\frac{3a}{a}=\frac{8+x}{x}$$

$\therefore \quad x=4$

CLAVE C

Problema 6

En la figura *ABCD*, *P* y *Q* son puntos de tangencia, $AP=6(TP)$, $2(PS)=3(SE)$ y $PL=6$. Calcule *EQ*.



A) 2/3 B) 4 C) 6/5
D) 8/3 E) 7/6

Resolución

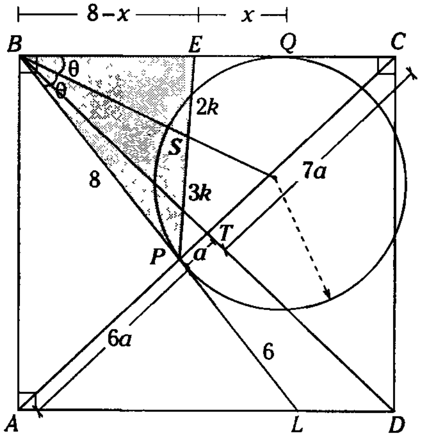


Figura 11.37

Piden $EQ=x$

Por dato

$$\frac{ES}{SP}=\frac{2}{3}, \; AP=6(PT)$$

Por corolario del teorema de Tales

$$\frac{BP}{6}=\frac{8a}{6a}$$

$\rightarrow\ BP=8$

En la circunferencia

$BQ=BP=8$

$\triangle PBE$: Teorema bisectriz interior

$$\frac{8-x}{8}=\frac{2k}{3k}$$

$3(8-x)=8(2)$

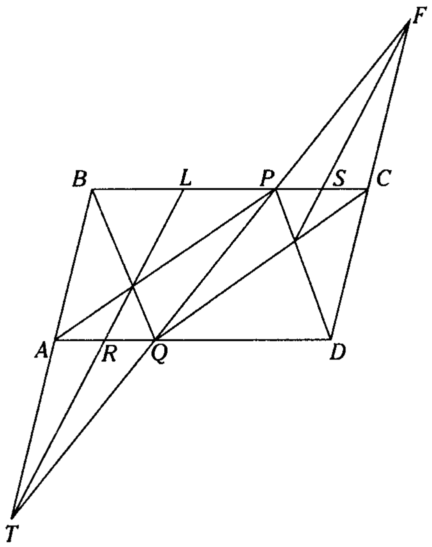
$8=3x$

$$\therefore\ x=\frac{8}{3}$$

CLAVE D

Problema 7

Según la figura, $ABCD$ y $BPDQ$ son paralelogramos, si $\frac{QD}{AR}=k$. Calcule $\frac{LP}{PS}$.



A) k B) $k/2$ C) $k/3$

D) $k/4$ E) $2k$

Resolución

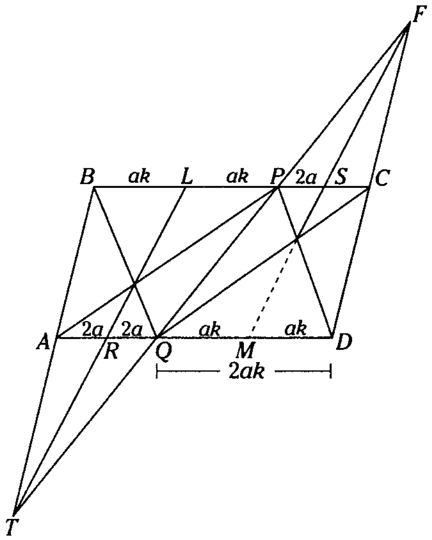


Figura 11.38

Piden

$$\frac{LP}{PS}$$

Dato

$$\frac{QD}{AR}=k$$

Si $AR=2a$

$\rightarrow\ QD=2ak$

$\triangle TBP$: Al aplicar teorema de Ceva

$\rightarrow\ BL=LP$ y $AR=RQ$

$\triangle QFD$: Al aplicar teorema de Ceva

$\rightarrow\ QM=MD$ y $PS=SC$

Como $ABCD$ paralelogramo $\rightarrow BC=AD$

Luego

$LP=ak$

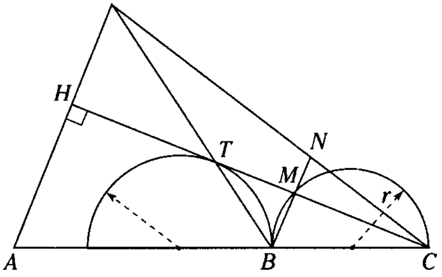
$PS=2a$

$$\therefore\ \frac{LP}{PS}=\frac{k}{2}$$

CLAVE B

Problema 8

En la figura, T y B son puntos de tangencia; $MC=8$, $TM=7$ y $3(BN)=4(r)$. Calcule TH.



A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

Resolución

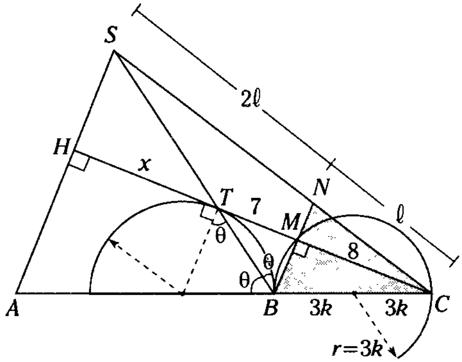


Figura 11.39

Piden

$TH=x$

Dato

$\frac{BN}{r}=\frac{4}{3}$ → Si $BN=4k$; $r=3k$

$\triangle BNC$: Teorema de la bisectriz exterior

$$\frac{BN}{BC}=\frac{SN}{SC}$$

$$\rightarrow \frac{4k}{6k}=\frac{SN}{SC} \rightarrow \frac{SN}{SC}=\frac{2}{3}$$

Quiere decir

$SN=2\ell$ y $SC=3\ell$

$\triangle SHC$: Aplicamos el corolario del teorema de Tales.

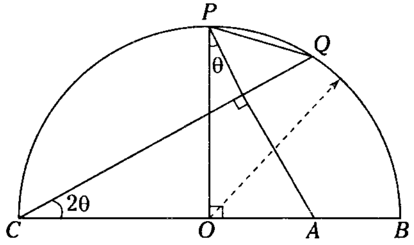
$$\frac{x+7}{8}=\frac{2\ell}{\ell}$$

$\therefore\ x=9$

CLAVE C

Problema 9

De la figura, $\frac{PQ}{OC}=\frac{2}{3}$. Calcule $\frac{CA}{AB}$



A) 3/4 B) 2 C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D) $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolución

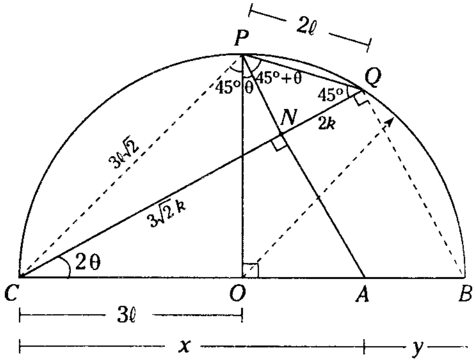


Figura 11.40

Piden

$$\frac{CA}{AB}=\frac{x}{y}$$

Se trazan $\overline{BQ}$ y $\overline{CP}$

Por ∢ inscrito:

$$m\measuredangle PQC=45^\circ$$

Propiedad:

$$\bowtie OPQC \qquad m\measuredangle OPQ+45^\circ=90^\circ+2\theta$$

$$\rightarrow \quad m\measuredangle OPQ=45^\circ+2\theta$$

$\triangle CPQ$: Teorema bisectriz interior

$$\frac{CP}{PQ}=\frac{CN}{NQ}$$

$$\frac{3\ell\sqrt{2}}{2\ell}=\frac{CN}{NQ}$$

$\triangle CQB$: Corolario del teorema de Tales

$$\frac{x}{y}=\frac{CN}{NQ}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

CLAVE D

Problema 10

En un triángulo ABC, se traza una recta que contiene al baricentro de la región triangular e interseca a los lados AB y AC en P y Q respectivamente. Si $AP(QC)+PB(AQ)=40$, calcule $(AP)(AQ)$.

A) 26 B) 39 C) 40

D) 41 E) 45

Resolución

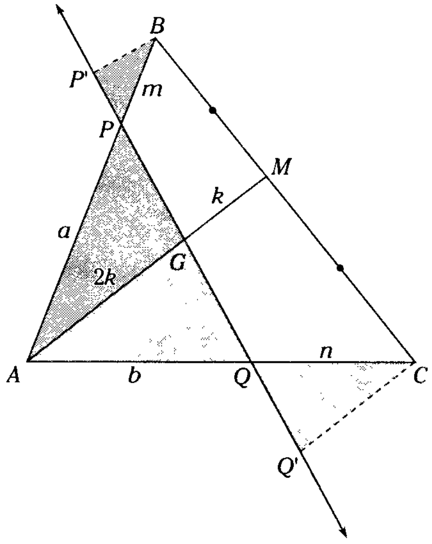


Figura 11.41

Piden $AP(AQ)=ab$

Dato

$$an+bm=40$$

Como G: baricentro $AG=2(GM)=2k$

Se trazan $\overline{CQ'}//\overline{AM}//\overline{P'B}$

$\triangle QCQ' \sim \triangle QAG$ (A.A.A)

$$\frac{CQ'}{2k}=\frac{n}{b}$$

$$\rightarrow \quad CQ'=\frac{2kn}{b}$$

$\triangle BPP' \sim \triangle APG$(A.A.A)

$$\frac{BP'}{2k}=\frac{m}{a}$$

$$\rightarrow \quad BP'=\frac{2mk}{a}$$

En el trapecio $BCQ'P'$:

Por base media

$$k=\frac{\frac{2kn}{b}+\frac{2mk}{a}}{2}$$

Simplificando

$$1=\frac{n}{b}+\frac{m}{a}$$

$\rightarrow\ ab=na+mb=40$

$\therefore\ ab=40$

CLAVE C

Problema 11

En un triángulo *ABC* isósceles, donde la base es $\overline{AC}$, se trazan las bisectrices interiores *AM*, *BL* y exterior *CN*. Calcule la m∢*MLN*

A) 90° B) 120° C) 180°
D) 210° E) 217°

Resolución

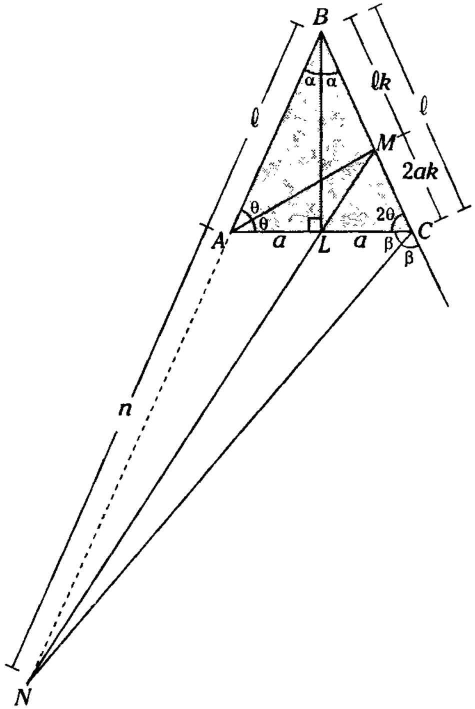


Figura 11.42

Piden: m∢*MLN*

$\triangle ABC$: Teorema de la bisectriz interior

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{MC}=\frac{\ell}{2a}$$

$\triangle ABC$: Teorema de la bisectriz exterior

$$\frac{BC}{AC}=\frac{BN}{AN}$$

$$\rightarrow\ \frac{\ell}{2a}=\frac{(\ell+n)}{n}$$

En $\triangle ABC$ se tiene que

$$(\ell k)(a)(n)=(2ak)(a)(\ell+n)$$

$$(\ell k)(a)(n)=(2ak)(a)\frac{\ell n}{2a}$$

$\rightarrow\ 1=1$

Esto quiere decir que se cumple el recíproco del teorema de Menelao. ($\overleftrightarrow{MLN}$: secante)

$\rightarrow$ *M*, *L* y *N* son colineales

$\therefore$ m∢*MLN* = 180°

Observación

En general, si *PQ* > *QR*, resulta que *A*, *B* y *C* son colineales. Esto se va a tratar en el capítulo de teorema de configuración.

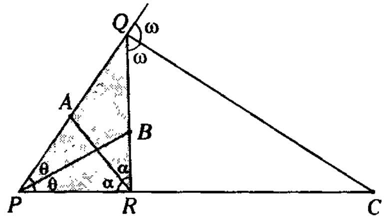


Figura 11.43

CLAVE C

Problema 12

En un triángulo *ABC*, se trazan la bisectriz interior *BL* y la ceviana interior *AM*, tal que son perpendiculares en *T*, luego se traza la ceviana *CN*, que contiene a *T* y *LC*=2(*AL*). Calcule $\frac{CT}{TN}$.

A) 2 B) 3 C) 5/2
D) 5/3 E) 4/3

Resolución

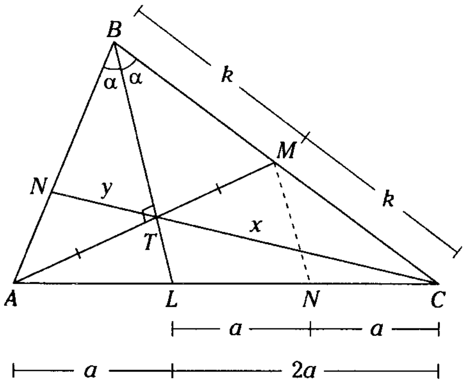


Figura 11.44

Piden $\dfrac{CT}{TN}=\dfrac{x}{y}$

Dato $LC=2(AL)=2a$

Como $AT=TM$ se traza $\overline{MN}//\overline{TL}$

$\rightarrow\ AL=LN=a$ y $NC=a$

$\triangle BLC$: Corolario del teorema de Tales

$$\frac{BM}{MC}=\frac{LN}{NC}=1$$

$\rightarrow\ BM=MC=k$

$\triangle ABC$: Teorema de Van Aubel

$$\frac{x}{y}=\frac{CM}{MB}+\frac{CL}{LA}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{k}{k}+\frac{2a}{a}$$

$$\therefore\ \frac{x}{y}=3$$

CLAVE B

Problema 13

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se ubican los puntos P y Q sobre $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, tal que $CP=CQ=2$, $\overline{AP}\cap\overline{BQ}=\{R\}$, se traza una recta que contiene a R y C, intersecando a $\overline{AB}$ en S, luego la prolongación de QP interseca a la prolongación de AB en L. Si $AB=10$ y $AC=8$, calcule LS.

A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 26

Resolución

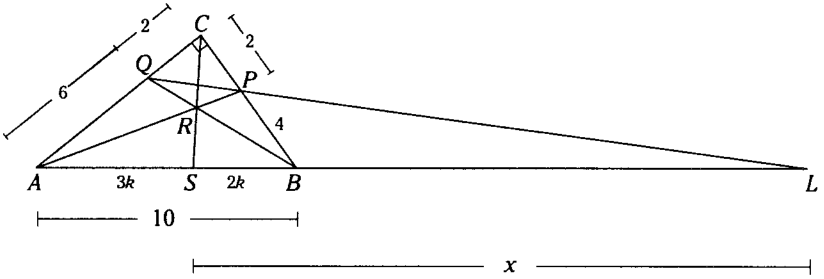


Figura 11.45

Piden $LS=x$

$\triangle ACB$: $BC=6\ \rightarrow\ PB=4$

$\triangle ACB$: Teorema de Ceva $(6)(2)(SB)=(2)(4)(AS)$

$$\frac{SB}{AS}=\frac{2}{3}$$

De la figura $3k+2k=10$

$k=2$

$\triangle ACB$: Teorema de Menelao

$$(\overset{3}{\cancel{6}})(\cancel{2})(x-4)=(\cancel{2})(\overset{2}{\cancel{4}})(x+6)$$

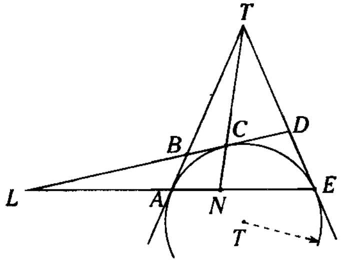
$$3(x-4)=2(x+6)$$

$$\therefore\ x=24$$

CLAVE D

Problema 14

Según la figura, A, C y E son puntos de tangencia, $AN=2$ y $NE=5$. Calcule LA.



A) 14/3 B) 4 C) 22/3
D) 20/3 E) 10/3

Resolución

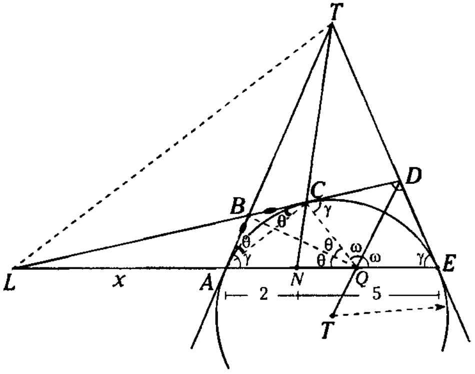


Figura 11.46

Piden $LA=x$

De la figura 11.46, $\triangle CDQ \cong \triangle EDQ$ (A.L.A)

$\rightarrow$ m$\sphericalangle DCQ$ = m$\sphericalangle DEQ$

Como m$\sphericalangle BAQ$ = m$\sphericalangle DCQ=\gamma$

Se nota que $ABCQ$: ⏢ inscriptible

$\rightarrow$ En $\triangle LQC$

QB: bisectriz interior y QD: bisectriz exterior

$\rightarrow$ L, B, C, D son puntos armónicos

Como se observa $\overrightarrow{TL}$, $\overrightarrow{TA}$, $\overrightarrow{TN}$, $\overrightarrow{TE}$ forman el haz armónico, con centro en T.

$\rightarrow$ L, A, N, E: son puntos armónicos

Luego

$$\frac{x}{2}=\frac{x+7}{5}$$

$$5x=2(x+7)$$

$$\therefore\ x=\frac{14}{3}$$

CLAVE A

Problema 15

En una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O, se trazan las tangentes PA y PB (A y B puntos de tangencia). Si $\overline{PO}\cap\mathscr{C}=\{Q\}$, $\overleftrightarrow{AO}\cap\overleftrightarrow{PB}=\{C\}$, $\overline{CO}$ interseca a $\mathscr{C}$ en L y $\overline{AQ}\perp\overline{PB}$. Calcule $\frac{AL}{LC}$.

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución

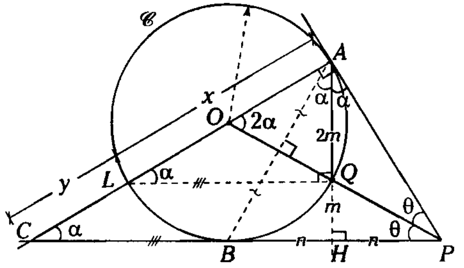


Figura 11.47

Piden $\frac{AL}{LC}=\frac{x}{y}$

Se sabe que $\overleftrightarrow{OP}$ mediatriz de

$\overline{AB}\rightarrow$ m$\sphericalangle APO$ = m$\sphericalangle BPO=\theta$

Si la m$\sphericalangle QAP=\alpha$ $\rightarrow$ m$\sphericalangle QOA=2\alpha$ y m$\widehat{AQ}=2\alpha$

$\rightarrow$ m$\widehat{BQ}$ = m$\widehat{AQ}=2\alpha$ y m$\sphericalangle BAQ=\alpha$

Por lo tanto para el $\triangle PAB$: Q es ortocentro, incentro, baricentro $\rightarrow \frac{AQ}{QH}=\frac{2}{1}$

además m$\sphericalangle AQL=90°\rightarrow \overline{QL}//\overline{PC}$

En el $\triangle CAH$: por el corolario del teorema de Tales

$$\frac{x}{y}=\frac{2m}{m}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y}=2$$

CLAVE C

Problema 16

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores BQ y CM que se intersecan en P, en $\overline{BC}$ se ubica el punto N, tal que $\frac{BM}{AM}=\frac{BN}{NC}=\frac{AQ}{QC}=\frac{1}{2}$ y $\overleftrightarrow{NP}\cap\overline{AB}=\{S\}$. Calcule $\frac{BS}{SA}$.

A) 0,5 B) 0,33 C) 0,25
D) 2 E) 1

Resolución

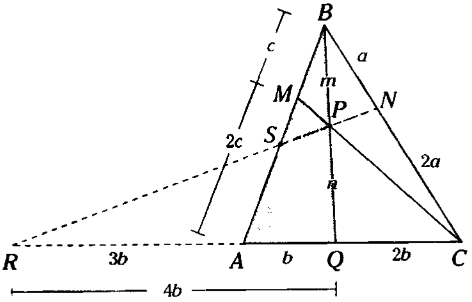


Figura 11.48

Piden $\frac{BS}{SA}$

En el $\triangle ABQ$: la recta $\overline{MPC}$ es secante, por lo cual del teorema de Menelao.

$$\frac{BM}{AM}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{AC}{QC}=1$$

Reemplazando: $\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{3b}{2b}=1 \rightarrow \frac{m}{n}=\frac{3}{4}$

En el $\triangle QBC$: la recta $\overline{NSR}$ es secante, por lo cual del teorema de Menelao.

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{CN}{BN}\cdot\frac{RQ}{RC}=1$$

Reemplazando

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2a}{a}\cdot\frac{RQ}{RC}=1 \rightarrow \frac{RQ}{RC}=\frac{2}{3}$$

De la figura 11.48

$$\frac{RQ}{RQ+2b}=\frac{2}{3} \rightarrow RQ=4b$$

Finalmente en el $\triangle ABC$: la recta RSN es secante, por lo cual del teorema de Menelao

$$\frac{BS}{SA}\cdot\frac{CN}{BN}\cdot\frac{AR}{CR}=1$$

$$\frac{BS}{SA}\left(\frac{2a}{a}\right)\left(\frac{3b}{6b}\right)=1$$

$$\therefore \quad \frac{BS}{SA}=1$$

CLAVE E

Problema 17

En un triángulo ABC por su baricentro G, se traza una recta secante $\mathscr{L}$ que interseca a AB, BC y la prolongación de AC en M, N y Q respectivamente. Si $MG=2$ y $GN=3$, calcule NQ.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 9

Resolución

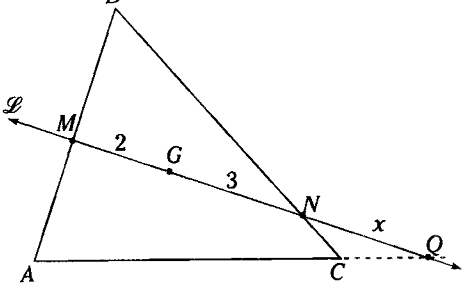


Figura 11.49

Piden $NQ=x$

Del teorema de la recta secante trazada por el baricentro de un triángulo, tenemos

$$\frac{1}{GM}=\frac{1}{GN}+\frac{1}{GQ} \rightarrow$$

reemplazando

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{(3+x)}$$

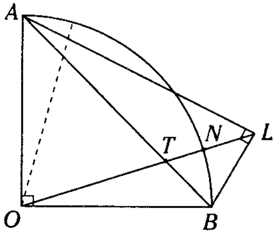
$$\frac{1}{3+x}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ x=3$$

CLAVE B

Problema 18

Según la figura, $OL=12$, $\sqrt{5}\,(LN)=3\,(NT)$, calcule AB.



A) $2\sqrt{10}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $4\sqrt{10}$
D) $4\sqrt{5}$ E) $3\sqrt{10}$

Resolución

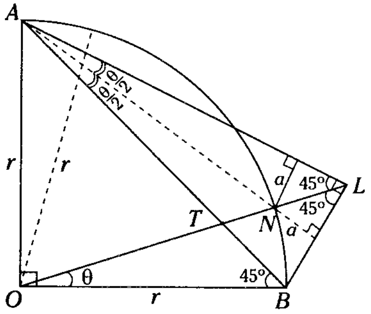


Figura 11.50

Piden $AB=x$

Dato $\frac{LN}{NT}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

En ⊿AOB: $x=r\sqrt{2}$ (I)

De la figura 11.50: $ALBO$: cuadrilátero inscriptible

$\rightarrow$ $m\measuredangle ALO=m\measuredangle ABO=45°$ y $m\measuredangle OLB=45°$

$m\measuredangle LAB=m\measuredangle LOB=\theta$

Por circunferencia ($\measuredangle$central, $\measuredangle$ inscrito)

$$m\measuredangle NAB=\frac{m\overset{\frown}{AB}}{2}=\frac{\theta}{2}$$

En $\triangle AON$: $ON=AO=r$,

Del dato $OL=12$ y del gráfico: $OL=r+a\sqrt{2}$

$\rightarrow\ r+a\sqrt{2}=12$

Como $\overline{LN}$ y $\overline{AN}$: son bisectrices, N: incentro ⊿ALB

Aplicando el teorema el teorema del incentro.

$$\frac{LN}{NT}=\frac{AL+LB}{AB} \quad \text{(II)}$$

⊿ALB: Por teorema de Poncelet

$$AL+LB=AB+2a \quad \text{(III)}$$

Reemplazando (III) en (II)

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{r\sqrt{2}+2a}{r\sqrt{2}}$$

$$3\sqrt{2}r=r\sqrt{10}+(2a)\sqrt{5}$$

$$3\sqrt{2}r=\sqrt{10}\underbrace{(r+a\sqrt{2})}$$

$$3\sqrt{2}r=\sqrt{10}\ (12)$$

$$r\sqrt{2}=4\sqrt{10}$$

En (I)

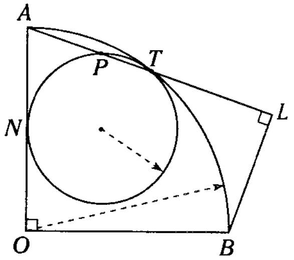
$$\therefore\ x=4\sqrt{10}$$

CLAVE C

Problema 19

De la figura N y T son puntos de tangencia. $NO=NA$, calcule $\frac{AP}{TL}$.

A) 3/7
B) 2/5
C) 4/7
D) 5/8
E) 5/7



Resolución

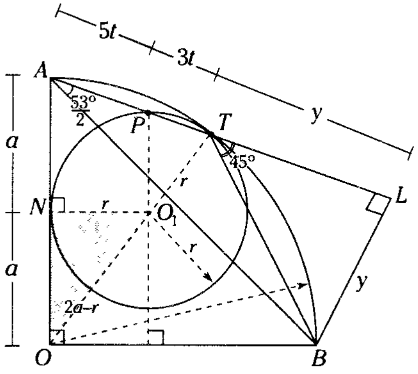


Figura 11.51

Piden $\frac{AP}{TL}=\frac{x}{y}$ (I)

⊾ O_1NO Se aplica teorema de Pitágoras

$r^2+(a)^2=(2a-r)^2$

$\not{r^2}+a^2=4a^2+\not{r^2}-4ar \rightarrow \frac{a}{r}=\frac{4}{3}$

$\triangle ATO$:

Por corolario del teorema de Tales $\frac{AP}{PT}=\frac{5}{3}$

$\rightarrow$ m$\measuredangle AOT$=37°, m$\measuredangle TOB$ = m$\overset{\frown}{TB}$ =53°

Por $\measuredangle$inscrito: m$\measuredangle$ $TAB=\frac{53°}{2}$

⊾ TLB not. 45°: $TL=LB=y$

⊾ ALB not. $\frac{53°}{2}$: $5t+3t+y=2y$

$8t=y$

En (I) $\frac{x}{y}=\frac{5t}{8t}$

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{5}{8}$

CLAVE **D**

Problema 20

En un triángulo *ABC*, se traza el triángulo mediano *MNL* ($M\in\overline{AC}$, $L\in\overline{BC}$), luego se traza una recta $\mathscr{L}$ que contiene a *B*, e interseca a $\overline{NL}$, $\overline{AL}$ y a la prolongación de $\overline{LM}$ en *D*, *E* y *F* respectivamente. Si $BD=6$ y $DE=4$, halle *EF*.

A) 10 B) 20 C) 24
D) 30 E) 60

Resolución

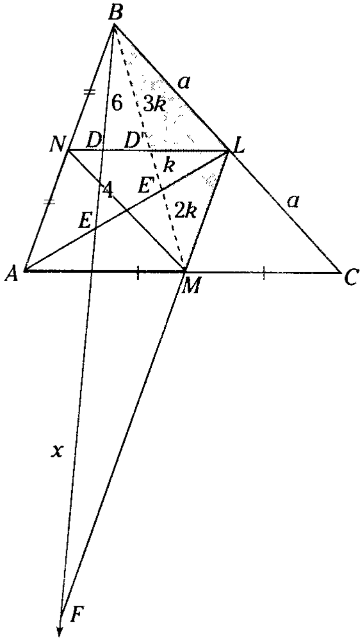


Figura 11.52

Piden $EF=x$

$\triangle ABC$: $\overline{BM}$: mediana y como $\overline{NL}//\overline{AC}$

$\rightarrow$ $\overline{BD'}$ también es mediana en el $\triangle NBL$

$\triangle NLM$: E: baricentro $\rightarrow E'M=2(D'E')$

$\triangle BMC$: Propiedad: $BD'=D'M$

Como se observa $\frac{BD'}{D'E}=\frac{BM}{E'M}$

$\rightarrow$ B, D', E', M: son puntos armónicos

Por lo cual L es el centro de un haz armónico. Así, podemos afirmar que B, D, E y F son puntos armónicos.

$\frac{BD}{DE}=\frac{BF}{EF}$

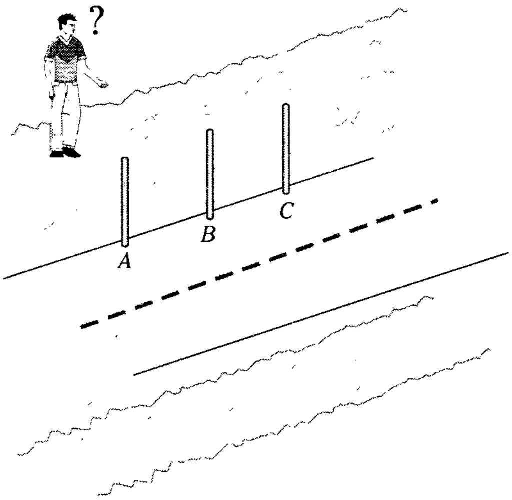
$\frac{6}{4}=\frac{10+x}{x}$

$\therefore$ $x=20$

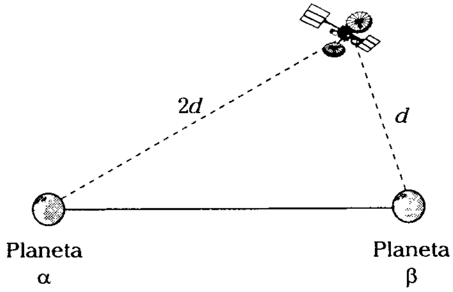
CLAVE **B**

Problemas Recreativos

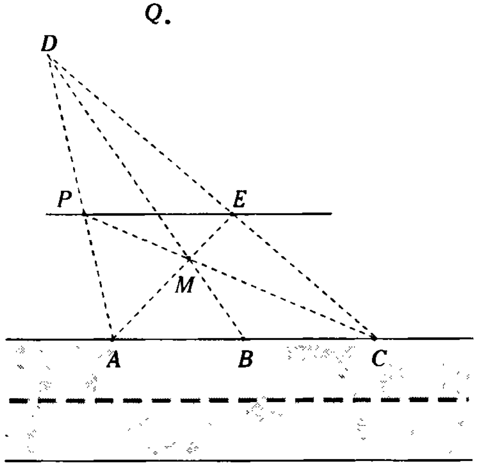
1. Imagine que en uno de los bordes de una carretera rectilínea, están clavadas tres varillas, tal que la varilla del medio equidista de las otras dos. Si se le encarga diseñar una carretera paralela a la primera, ¿cómo realizaría el proceso?



2. En un sistema planetario imaginario, hay dos planetas α y β. Si un satélite artificial está programado para orbitar a uno de estos planetas, de modo que la distancia del satélite al planeta α sea el doble de la distancia del satélite al planeta β, ¿cuál es el recorrido que realiza el satélite? Considere que la distancia entre los planetas α y β es constante.



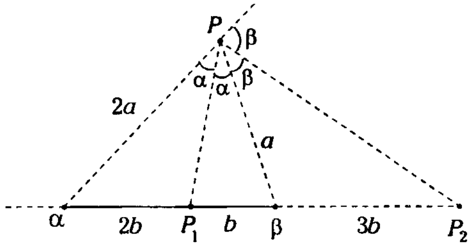
Resolución 1



En la figura, los puntos A, B y C representan a las varillas, mientras que a P y Q se les puede considerar puntos arbitrarios. Por estos puntos pasarán los bordes de la nueva carretera que tiene que ser paralela a la primera. Primero; marcamos los puntos P y Q; luego anudamos una cuerda en la varilla A y la extendemos hasta un punto D tal que la cuerda pase por P; en D clavamos una estaca y tensamos cuerdas que unan D con B y D con C. Si hacemos lo mismo para los puntos C y P; notaremos que las cuerdas que unen C con P y B con D se cruzan en un punto M, en el cual hacemos una marca. Finalmente, anudamos una cuerda en A y la tensamos hasta un punto E, en la cuerda CD (esta cuerda AE debe pasar por M). Por el caso particular del teorema de Ceva (cuando dos cevianas son concurrentes con una mediana), determinamos que $\overline{PE}$ y $\overline{AC}$ son paralelos; así, tensamos una cuerda de P hasta E y para poder ir delineando un borde de la nueva carretera paralela a la primera. Para el otro borde el proceso es análogo.

Resolución 2

Considere a los planetas como puntos y al satélite punto móvil P.

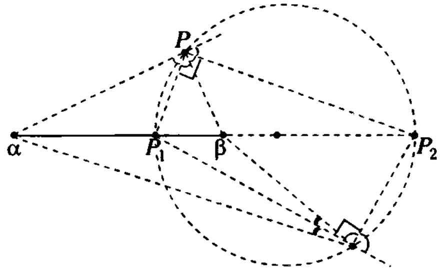


Inicialmente, el punto P está en la recta que contiene a α y β. Nos daremos cuenta de que existen dos puntos que cumplen con la condición, estos serían los puntos P_1 y P_2. De la figura, notamos que al ser $\frac{\alpha P}{\beta P}=\frac{\alpha P_1}{\beta P_1}=2$; PP_1 es una bisectriz interior. Similarmente, si $\frac{\alpha P}{P\beta}=\frac{\alpha P_2}{\beta P_2}=2$; definimos que PP_2 es una bisectriz exterior.

De la figura, $2\alpha+2\beta=180°$

$$\rightarrow \alpha+\beta=90°$$

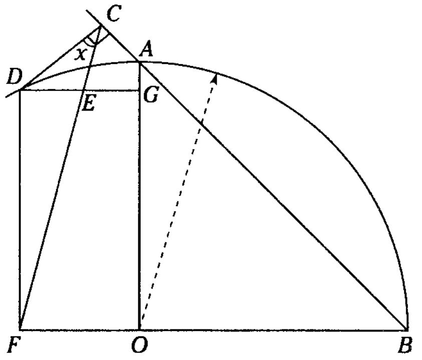
Por consiguiente, para cualquier posición de P, siempre $m\measuredangle P_1PP_2=90°$. Como la distancia entre α y β es constante, resulta que la ubicación de P_1 y P_2, respecto de los planetas α y β, es fija. Concluimos, así, que el lugar geométrico de P es una circunferencia de diámetro P_1P_2.



Como se puede observar, el recorrido del satélite es una circunferencia, y que solo orbita al planeta β.

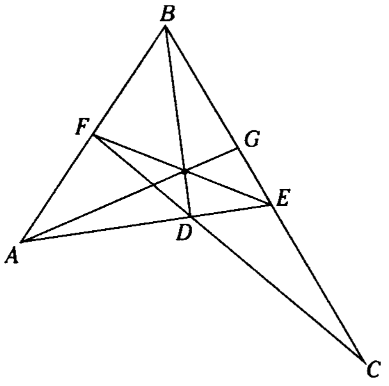
Problemas Propuestos

1. En la figura, $DGOF$ es un rectángulo. Si $EF=2\ (EC)$, calcule x.



A) 53°/2 B) 37°/2 C) 37°
D) 14° E) 30°

2. De la figura, $BE=5$ y $EC=3$. Calcule GE.

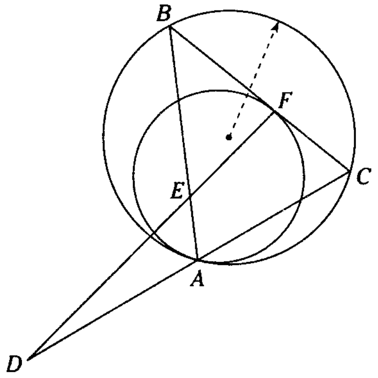


A) 3/2 B) 13/11 C) 15/11
D) 8/11 E) 13/9

3. En un cuadrilátero $ABCP$, se ubica el punto D en $\overline{BP}$; tal que, los ángulos BAP y DAP son suplementarios. Si $m\sphericalangle DCP = m\sphericalangle PCC'$ y $(AB)(DC)=8$, calcule $(AD)(BC)$. Considere que C' pertenece a la prolongación de $\overline{BC}$.

A) $2\sqrt{2}$ B) 8 C) 6
D) 4 E) $4\sqrt{2}$

4. De la figura, A y F son puntos de tangencia. Si $BF=3$ y $AC=2(FC)=2(AE)=4$, halle AD.

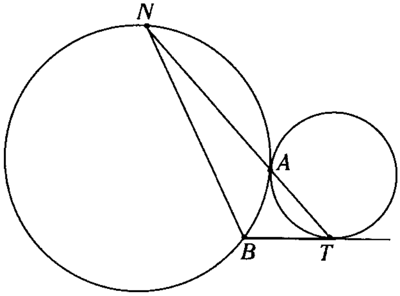


A) 9 B) 12 C) 10
D) 11 E) 9

5. En un triángulo ABC, se ubican los puntos D y E en AC y BC, respectivamente, tal que una circunferencia contiene a los puntos A, B, E y D. Si $AB=BD$ y $CD=5(AD)=5(ED)$, determine $m\widehat{ABE}$.

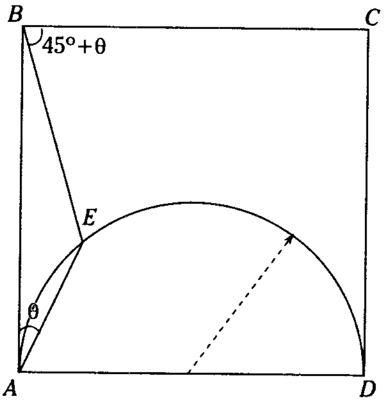
A) 106° B) 212° C) 148°
D) 184° E) 152°

6. En la figura, A y T son puntos de tangencia. Si $AT = BT = 4$ y $BN = 3(AB)$, señale NA.



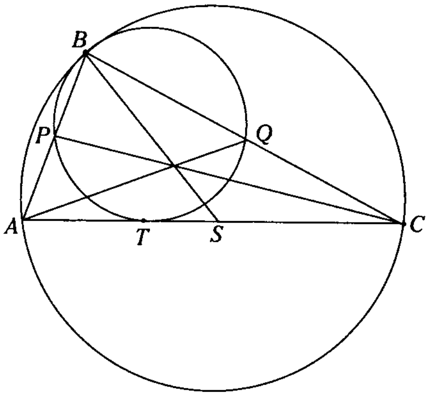
A) 6 B) 4 C) 10
D) 12 E) 8

7. De la figura, $ABCD$ es un cuadrado. Halle $m\widehat{AE}$.



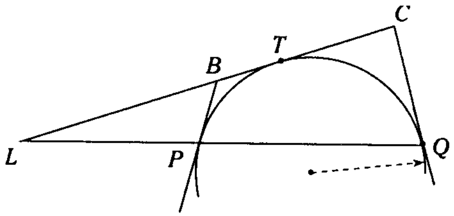
A) 45° B) 37° C) 53°
D) 18°30' E) 30°

8. Según la figura, B y T son puntos de tangencia. Si $\frac{AB}{3} = \frac{BC}{5}$, indique $\frac{TS}{AC}$.



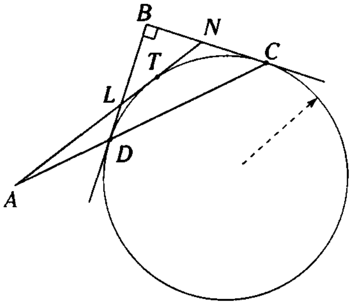
A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{4}{7}$

9. De la figura, P, T y Q son puntos de tangencia. Si $PB = 2$ y $CQ = 3$, calcule LB.



A) 8 B) 10 C) 12
D) 15 E) 16

10. De la figura, D, T y C son puntos de tangencia. Si $3(AL)=10(TN)$, calcule $m\overset{\frown}{DT}$.



A) 30° B) 16° C) 45°
D) 37° E) 53°

11. Se tiene un romboide $ABCD$, en $\overline{AD}$ se ubican los puntos E y F, tal que A, E, F y D forman un cuaterna armónica. Si $AE=3(EF)=6$; $AC=30$; $\overline{BF}\cap\overline{AC}=\{N\}$ y $\overline{BE}\cap\overline{AC}=\{L\}$, señale LN.

A) 2,4 B) 1,5 C) 2,8
D) 3,5 E) 2,5

12. En un triángulo ABC, de baricentro G, se traza la recta secante $\mathscr{L}$, que pasa por G e interseca a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y a la prolongación de $\overline{AC}$ en M, N y Q, respectivamente. Si $GN = NQ$ y $AC = 6$ cm, indique CQ.

A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 5 cm

13. Dado un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos M, N y P respectivamente; tal que $AP = PM$ y $NP = PC$. Si $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ se intersecan en Q y $\dfrac{AQ}{3}=\dfrac{QN}{7}=\dfrac{MQ}{2}$, halle $\dfrac{AP}{AC}$.

A) 2/5 B) 4/7 C) 1/3
D) 3/8 E) 1/2

14. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores AM y AN, las cuales intersecan a la mediana CD en P y Q, respectivamente. Si $BM=MN=NC$; la prolongación de $\overline{MQ}$ interseca a $\overline{AC}$ en L; $\overline{PL}\cap\overline{AQ}=\{T\}$; $\overleftrightarrow{MT}\cap\overline{AL}=\{R\}$ y $RL=2$, calcule AR.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

15. En un triángulo ABC, se traza la base media NL respecto del lado AB($N\in\overline{BC}$), para después trazar la ceviana interior BT, tal que $TC=2(LT)$ y $\overline{NL}\cap\overline{BT}=\{Q\}$. Si en el triángulo ANL se trazan las cevianas interiores LF y NG, las cuales se intersecan en un punto de AQ y $TC = GL$, calcule $\dfrac{AF}{FN}$.

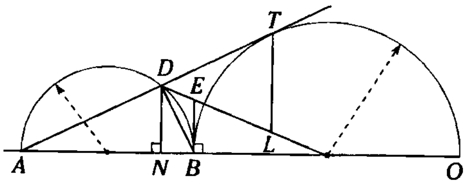
A) 1/3 B) 2/3 C) 1/2
D) 3/4 E) 2/5

16. En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior AE, en cuya prolongación se ubica el punto T; tal que $m\sphericalangle BTA = 90°$. Si $BE = a$ $EC = b$, $AE = AC$ y $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle EAC$ determine $\dfrac{AE}{ET}$.

A) $\dfrac{2(a+b)}{a}$ B) $\dfrac{(a+b)}{a-b}$ C) $\dfrac{2(a+b)}{b-a}$

D) $\dfrac{ab-b}{b+a}$ E) $\dfrac{2a-b}{b+a}$

17. De la figura, B y T son puntos de tangencia. Si los ángulos NDB y DTL son complementarios, además, $2(DB)=3(NB)$; calcule $\frac{DE}{EL}$.



A) 2/3 B) 1/4 C) 3/2
D) 1/2 E) 3/4

18. En un triángulo obtusángulo ABC (obtuso en B), se construyen exteriormente los cuadrados $ABMS$ y $BCEF$, y se ubican los puntos T y N en BF y CE, respectivamente.

Si $NE=TB$, M, T y C (colineales);

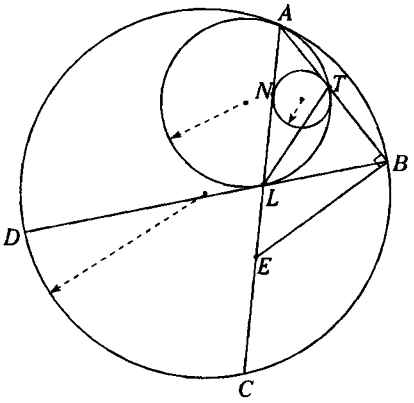
$\overline{MC}\cap\overline{AN}=\{Q\}$; $\frac{AQ}{QN}=\frac{3}{2}$;

$MC=15$ y $\{L\}=\overline{AF}\cap\overline{MC}$,

determine LF.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

19. De la figura, A, T, N y L son puntos de tangencia. Si $\frac{AT}{TL}=\frac{2}{3}$; $m\overset{\frown}{AD}-m\overset{\frown}{CD}=m\overset{\frown}{AB}$; $AL=10$ y $LE=AN$, señale EC.



A) 7/2 B) 7 C) 26/3
D) 28/3 E) 14/3

20. En un triángulo ABC, de incentro I, se traza BM y BN, bisectriz interior y ceviana exterior; respectivamente.

Si $C\in\overline{MN}$;

$NI\cap BC=\{L\}$, $\overleftrightarrow{ML}\cap\overline{BN}=\{S\}$ y

$\frac{AB}{6}=\frac{BC}{8}=\frac{AC}{7}=\frac{CN}{8}$,

halle $m\sphericalangle CIB$.

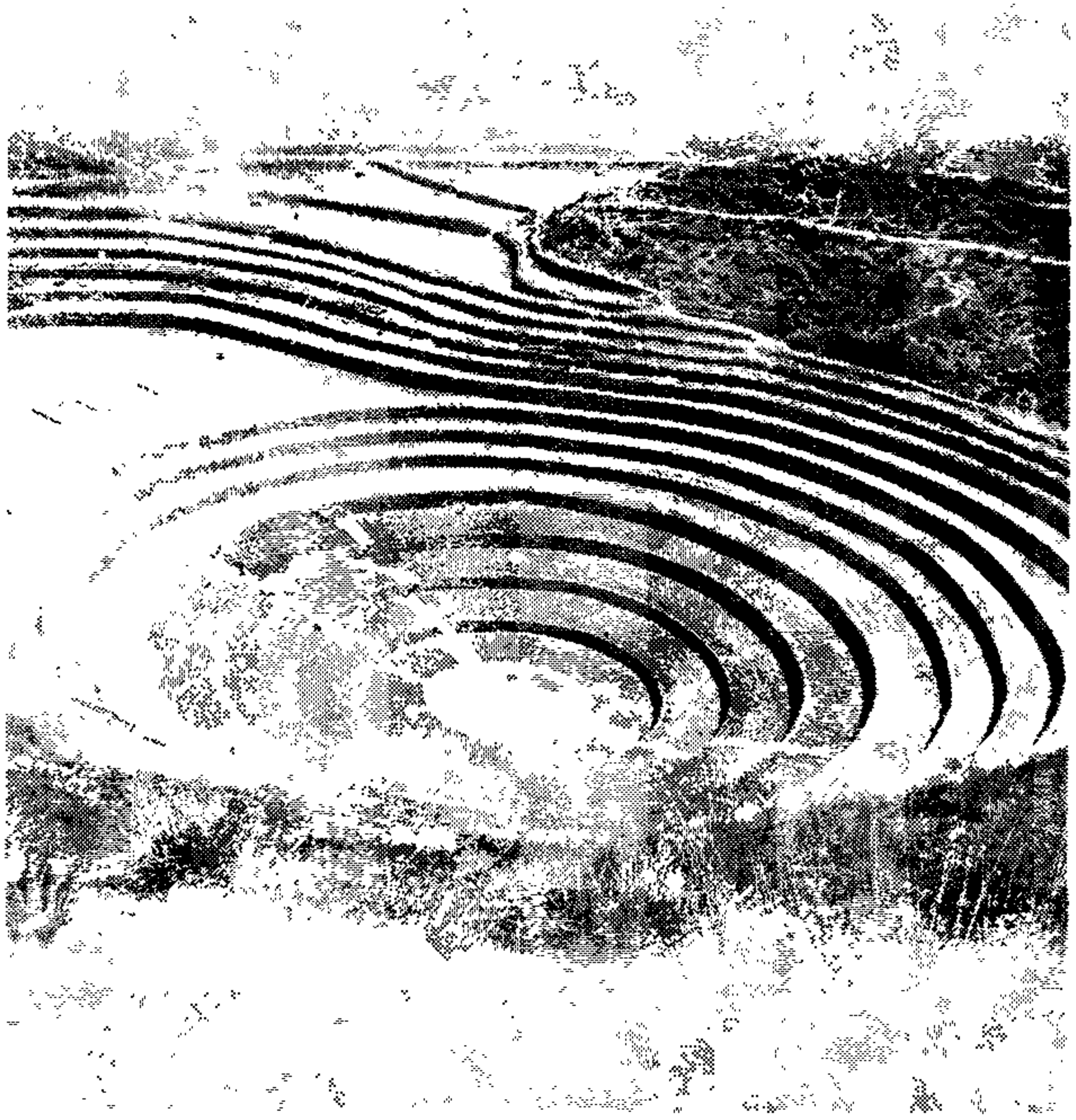
A) 76° B) 74° C) 53°
D) 80° E) 90°

1	A	11	E
2	C	12	B
3	B	13	D
4	B	14	C
5	C	15	C
6	E	16	A
7	C	17	D
8	D	18	C
9	B	19	D
10	D	20	E

Claves

XII

Teoremas de configuración



Los sembríos de los andenes incas en Moray (Cusco) fueron distribuidos concíclicamente para, de esta manera, aprovechar los microclimas en cada uno de sus pisos.

Teoremas de configuración

OBJETIVOS

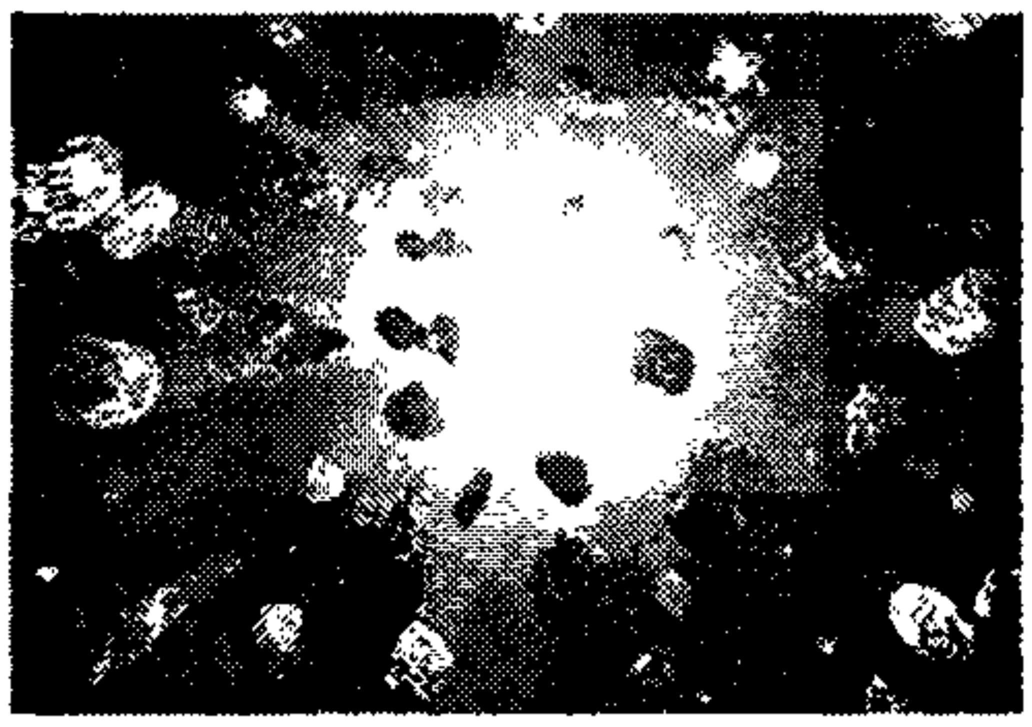
- Conocer qué teoremas tienen recíproco y cómo se aplican en la resolución de problemas.
- Encontrar puntos que sean colineales con otros o líneas que sean concurrentes.
- Ubicar puntos que van a pertenecer a una circunferencia sin necesidad de trazarla (puntos concíclicos).

INTRODUCCIÓN

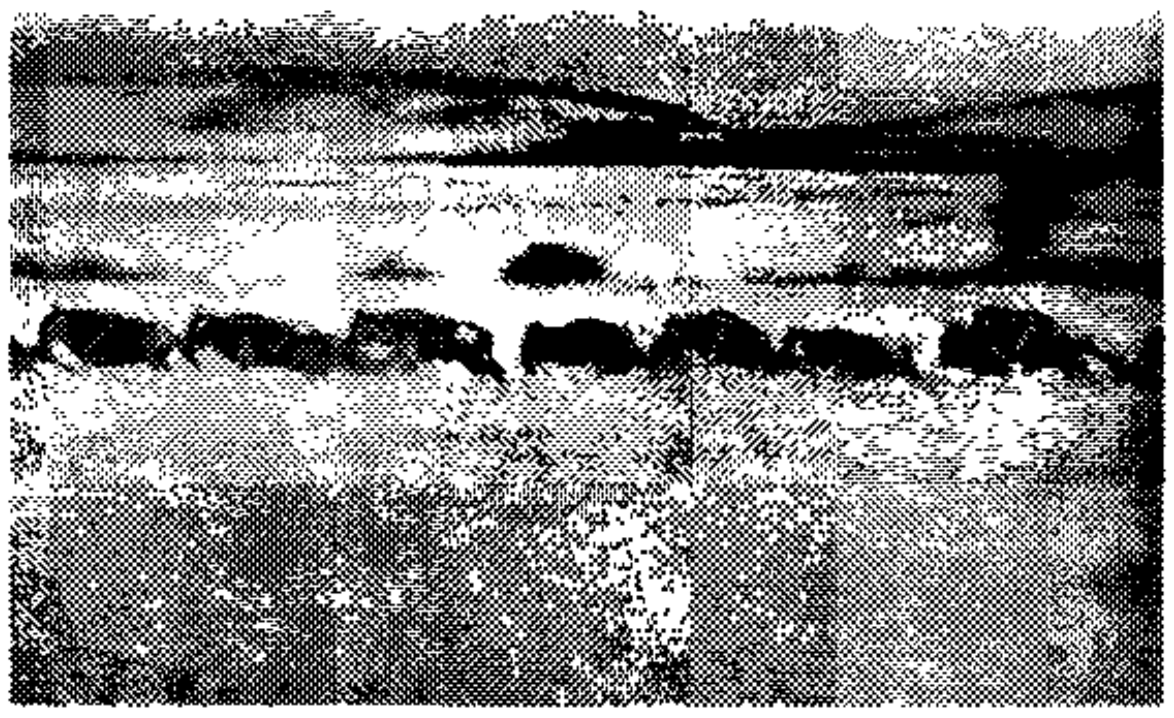
La palabra configuración proviene del latín *configuratio*, que significa *disposición recíproca de objetos*. Dichos objetos en la geometría son: puntos, rectas, circunferencias, etc.

Por lo tanto, puede tratarse, bajo ciertas condiciones, de puntos que van a pertenecer a una recta (colineales), rectas que van a concurrir en un punto, puntos que van a pertenecer a una circunferencia (concíclicos), etc.

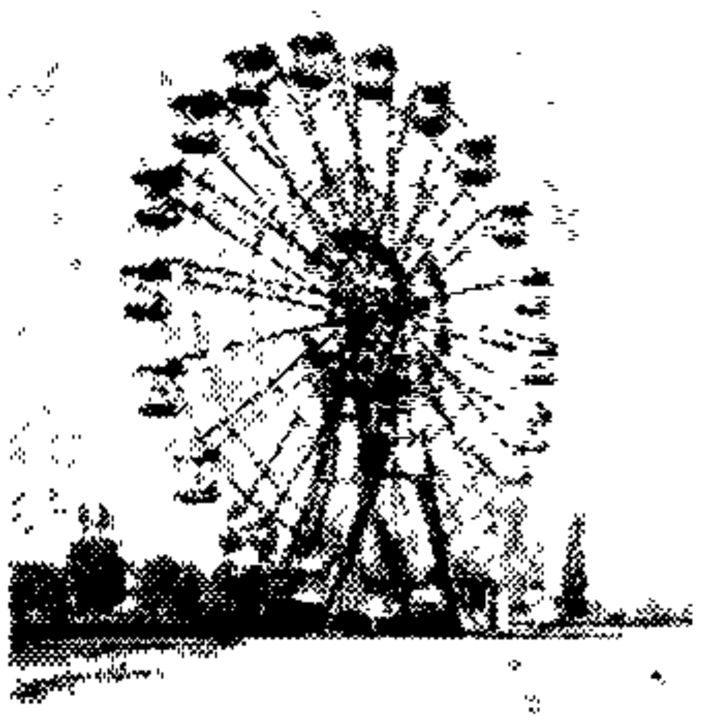
Esta disposición de puntos y rectas es importante en las construcciones, ya que muchas veces al medir grandes distancias o cruzar lugares inaccesibles no es posible su ubicación de una manera directa, es allí donde los conceptos de configuración cumplen un rol trascendente en la solución a estas dificultades.



Cuando una estrella nace o muere, esta se expande o contrae, respectivamente, y lo hace concéntricamente.



Un rebaño de búfalos se desplaza colinealmente en busca de alimentos, pero también para protegerse de ataques de felinos.



Es común observar en los juegos mecánicos a las sillas voladoras, que están distribuidas de forma concíclica.

TEOREMA 1

Sean los puntos A, B, C y D (diferentes), de modo que A, B y C se encuentran en una recta; y B, C y D también se encuentran en una recta; entonces A, B, C y D se encuentran en una misma recta.

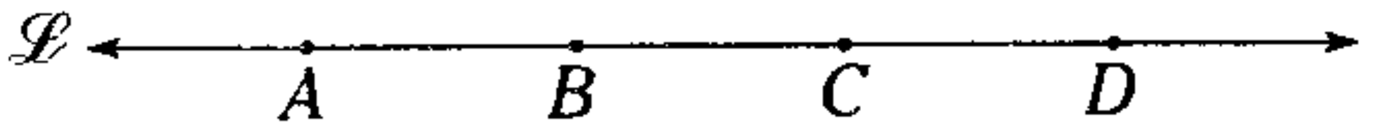


Figura 12.1

Si $\{A; B; C\} \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\{B; C; D\} \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

$\rightarrow \{A; B; C; D\} \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} = \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 = \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

Demostración

Sea $\mathscr{L}_1$ la recta que contiene a los puntos A, B y C, y $\mathscr{L}_2$ la recta que contiene a los puntos B, C y D del postulado de Euclides: *Por dos puntos distintos solo pasa una recta,* entonces $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 = \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ puesto que por B y C solo pasa una recta. Por lo tanto, A, B, C y D están contenidos en una recta $\mathscr{L}$, donde $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} = \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 = \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$.

Un equipo de remo se distribuye colinealmente y realizan una acción sincronizada para que las paletas de los remos ejerzan una fuerza de desplazamiento de mayor intensidad.

TEOREMA 2

Sean las rectas $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_3$ y $\mathscr{L}_4$ (diferentes), de modo que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$ tienen un punto en común; y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_4$ también tienen un punto en común, entonces $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_4$ tienen un mismo punto en común, es decir, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_4$ son concurrentes.

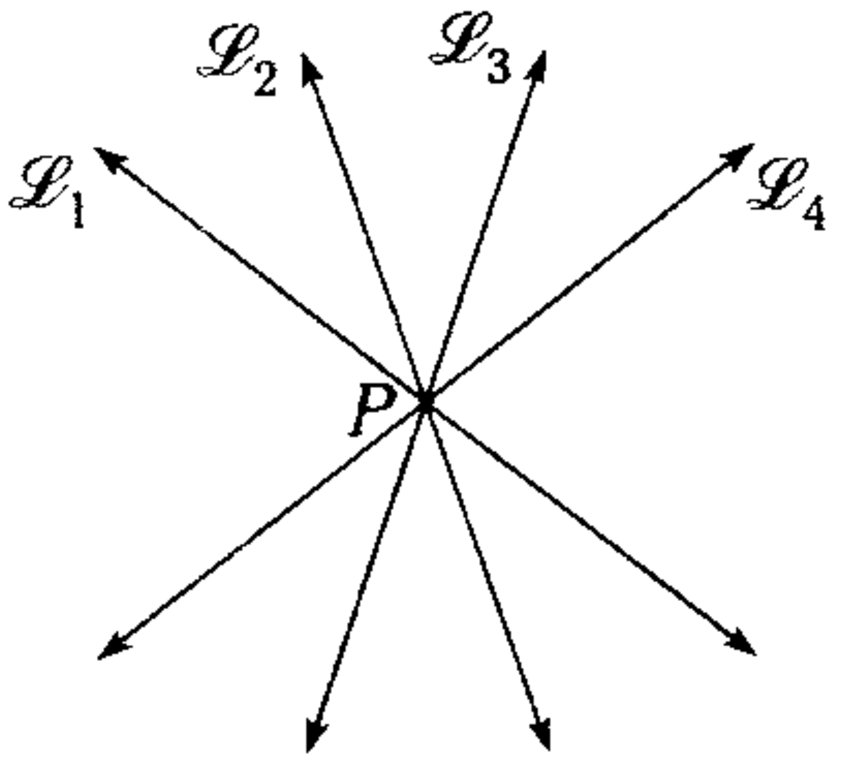


Figura 12.2

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3 = \{M\}$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3 \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_4 = \{N\}$

$\rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3 \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_4 = \{P\}$ y $M=N=P$

Demostración

Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$ concurrentes en el punto M y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_4$ concurrentes en el punto N. Del postulado: *dos rectas secantes solo tienen un punto común*, entonces $M=N$ puesto que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$ solo pueden tener un único punto en común. Por lo tanto, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_4$ tienen un único punto en común P, donde $P=M=N$.

Al observar los rayos del Sol que atraviesan las copas de un árbol, podemos notar que estos concurren en el Sol (punto), que por estar a millones de kilómetros se ve aparentemente pequeño

TEOREMA 3

Sean los puntos A, B, C, D y E (diferentes). Si A, B, C y D son concíclicos (van a pertenecer a una circunferencia) y B, C, D y E son concíclicos, entonces A, B, C, D y E son concíclicos.

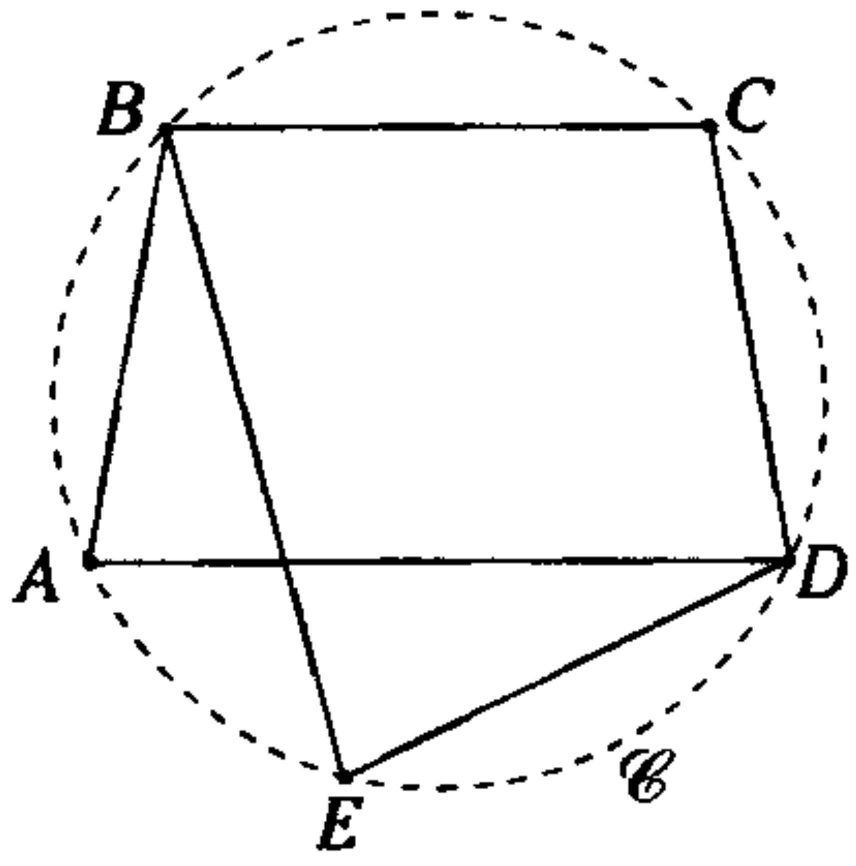


Figura 12.3

Si $\{A; B; C; D\}$ concíclicos en $\mathscr{C}_1$

$\{B; C; D \text{ y } E\}$ concíclicos en $\mathscr{C}_2$

$\rightarrow$ $\{A; B; C; D \text{ y } E\}$ concíclicos en $\mathscr{C}$

y $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2$

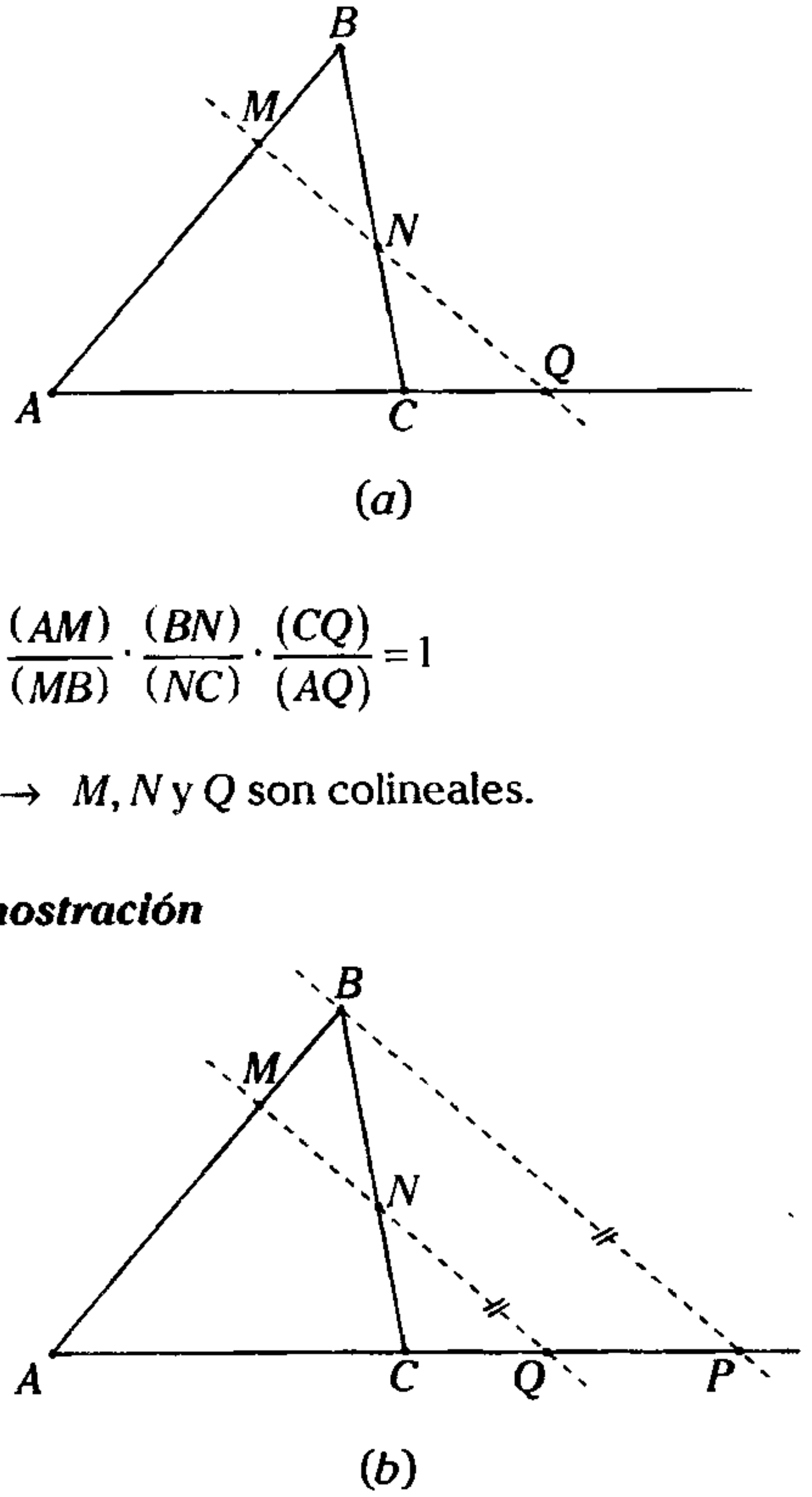
Un cardumen (asociación de peces) se agrupa de forma concíclica para defenderse de sus depredadores.

Demostración

Del teorema, dado que por tres puntos no colineales solo pasa una circunferencia; entonces, $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2$ puesto que ambas van a contener a los puntos B, C y D. Por lo tanto, los puntos A, B, C, D y E pertenecen a una circunferencia $\mathscr{C}$, donde $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2$.

TEOREMA RECÍPROCO DE MENELAO

En un triángulo ABC, se ubican los puntos M, N y Q en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y la prolongación de $\overline{AC}$ respectivamente. Si $\frac{(AM)}{(MB)} \cdot \frac{(BN)}{(NC)} \cdot \frac{(CQ)}{(AQ)}$, entonces los puntos M, N y Q son colineales.



Si $\frac{(AM)}{(MB)} \cdot \frac{(BN)}{(NC)} \cdot \frac{(CQ)}{(AQ)} = 1$

$\rightarrow$ M, N y Q son colineales.

Demostración

Figura 12.4

De la condición

$$\frac{(AM)}{(MB)}\cdot\frac{(BN)}{(NC)}\cdot\frac{(CQ)}{(AQ)}=1$$

En la prolongación de $\overline{AQ}$, al ubicar el punto P, tal que $\overline{BP}//\overline{NQ}$, comprendemos que en el $\triangle BCP$

$$\frac{BN}{NC}=\frac{PQ}{CQ} \qquad \text{(I)}$$

Luego, reemplazando (I) en el dato tenemos

$$\frac{AM}{BM}\cdot\left(\frac{PQ}{CQ}\right)\cdot\frac{CQ}{AQ}=1$$

$$\rightarrow \frac{AM}{BM}=\frac{AQ}{PQ}$$

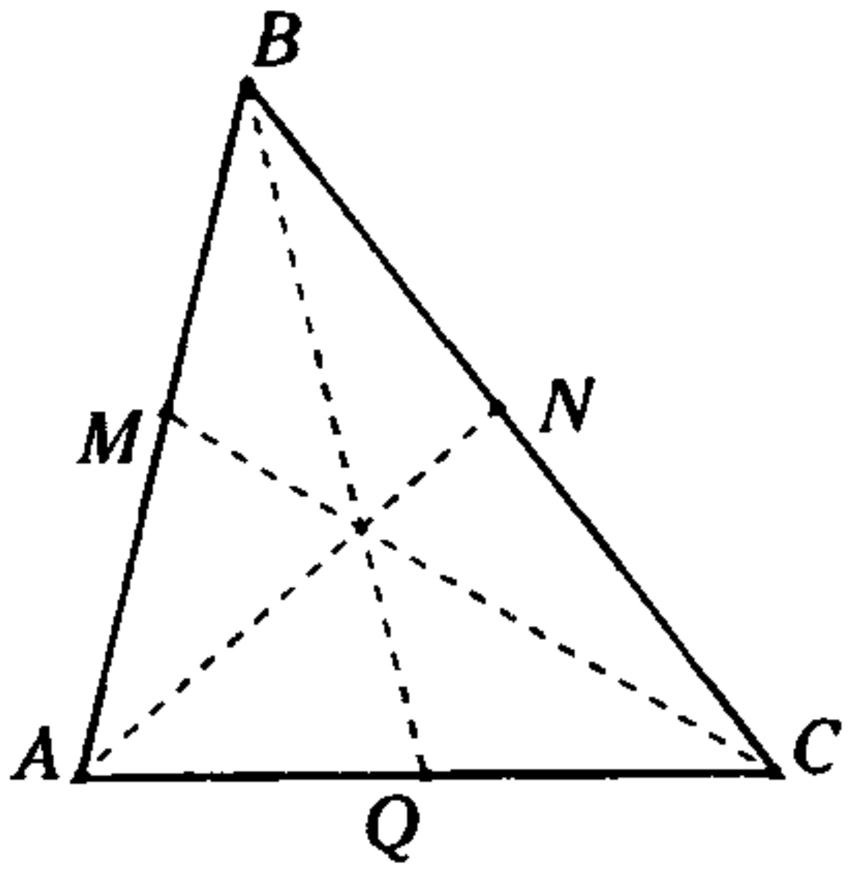
Por lo que en el $\triangle ABP$: $\overleftrightarrow{MQ}//\overleftrightarrow{BP}$.

Del quinto postulado de Euclides: *Por un punto exterior a una recta solo se puede trazar una única recta, paralela a la recta dada.*

Puesto que $\overleftrightarrow{QB}//\overleftrightarrow{BP}$, entonces $\overleftrightarrow{QN}//\overleftrightarrow{QM}$. Esto significa que los puntos N, M y Q están en una misma recta.

TEOREMA RECÍPROCO DE CEVA

Dado un triángulo ABC, se ubican los puntos M, N y Q en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Si $\frac{(AM)}{(BM)}\cdot\frac{(BN)}{(CN)}\cdot\frac{(CQ)}{(AQ)}=1$, entonces $\overline{AN}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CM}$ son concurrentes.



(*a*)

Si $\frac{(AM)}{(BM)}\cdot\frac{(BN)}{(CN)}\cdot\frac{(CQ)}{(AQ)}=1$

$\rightarrow$ $\overline{AN}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CM}$ son concurrentes.

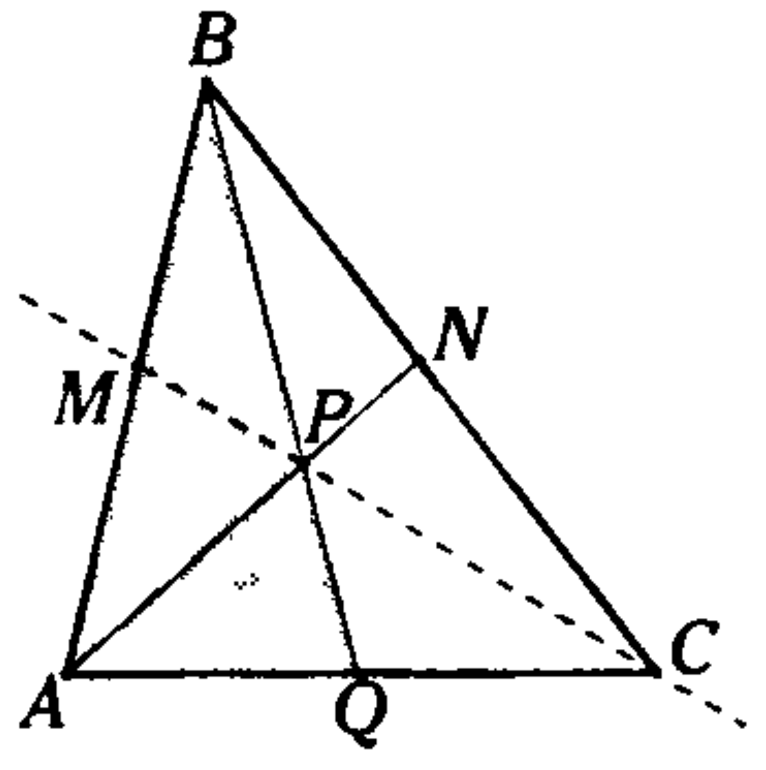
Demostración

De la condición

$$\frac{(AM)}{(BM)}\cdot\frac{(BN)}{(CN)}\cdot\frac{(CQ)}{(AQ)}=1 \qquad \text{(I)}$$

Trazamos $\overline{AN}$ y $\overline{BQ}$ que se intersecan en D, del teorema de Menelao en el $\triangle QBC$.

$$\frac{(QP)}{(BP)}\cdot\frac{(BN)}{(CN)}\cdot\frac{(AC)}{(AQ)}=1 \qquad \text{(II)}$$



(*b*)

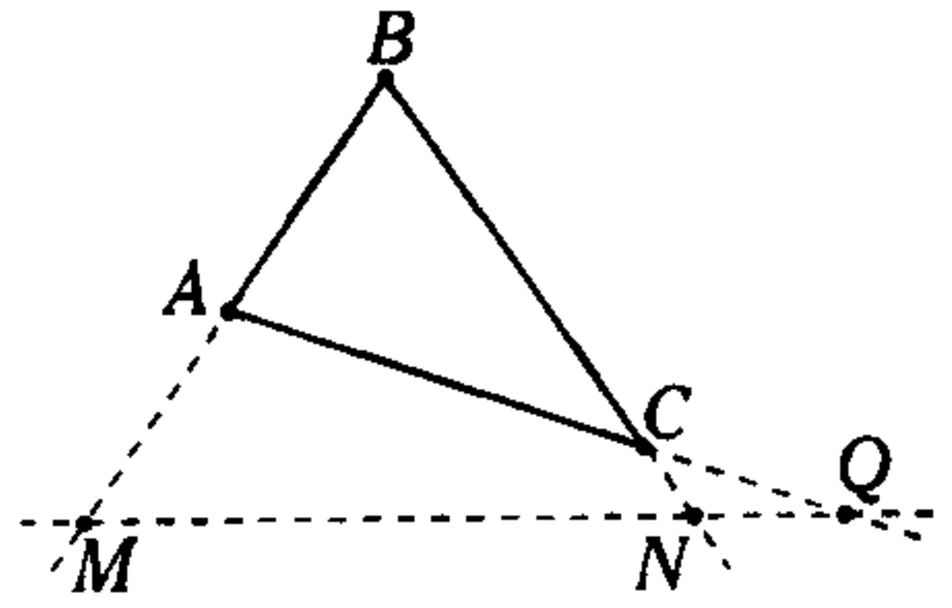
Figura 12.5

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BP}{PQ}\cdot\frac{CQ}{AC}=1$$

Según el teorema recíproco de Menelao, M, P y C son colineales. Por lo tanto, $\overline{AN}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CM}$ son concurrentes en el punto P.

SEGUNDO TEOREMA RECÍPROCO DE MENELAO

Dado un triángulo ABC, en las prolongaciones de $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, se ubican los puntos M, N y Q. Si $\frac{(BM)}{(AM)}\cdot\frac{(CN)}{(BN)}\cdot\frac{(AQ)}{(CQ)}=1$, los puntos M, N y Q son colineales.

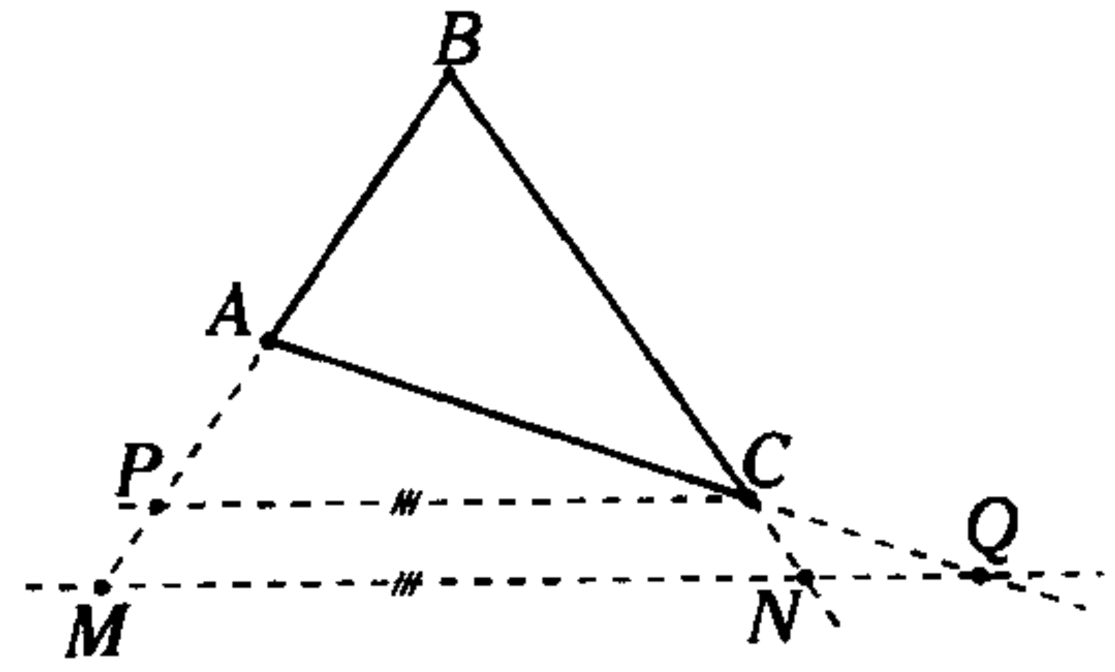


(a)

Si $\frac{(BM)}{(AM)} \cdot \frac{(CN)}{(BN)} \cdot \frac{(AQ)}{(CQ)} = 1$

$\rightarrow$ M, N y Q son colineales.

Demostración



(b)

Figura 12.6

De la condición

$$\frac{(BM)}{(AM)} \cdot \frac{(CN)}{(BN)} \cdot \frac{(AQ)}{(CQ)} = 1 \qquad \text{(I)}$$

Si por C trazamos $\overline{CP} // \overline{MN}$, en el $\triangle MBN$

$$\frac{BN}{CN} = \frac{BM}{PM} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

$$\frac{BM}{AM} \cdot \left(\frac{PM}{BM} \right) \cdot \frac{AQ}{CQ} = 1$$

$$\rightarrow \quad \frac{AQ}{CQ} = \frac{AM}{PM}$$

Por lo tanto, en el $\triangle MAQ$: $\overline{MQ} // \overline{PC}$ y como por M solo se puede trazar una recta paralela a $\overline{PC}$, entonces $N \in \overline{MQ}$. Esto implica que M, N y Q son colineales.

SEGUNDO TEOREMA RECÍPROCO DE CEVA

Sea el triángulo ABC, en $\overline{AC}$ y en las prolongaciones de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos N, M y Q, respectivamente .

Si $\frac{(BM)}{(AM)} \cdot \frac{(AN)}{(NC)} \cdot \frac{(CQ)}{(BQ)} = 1$, entonces las rectas AQ, BN y CM son concurrentes.

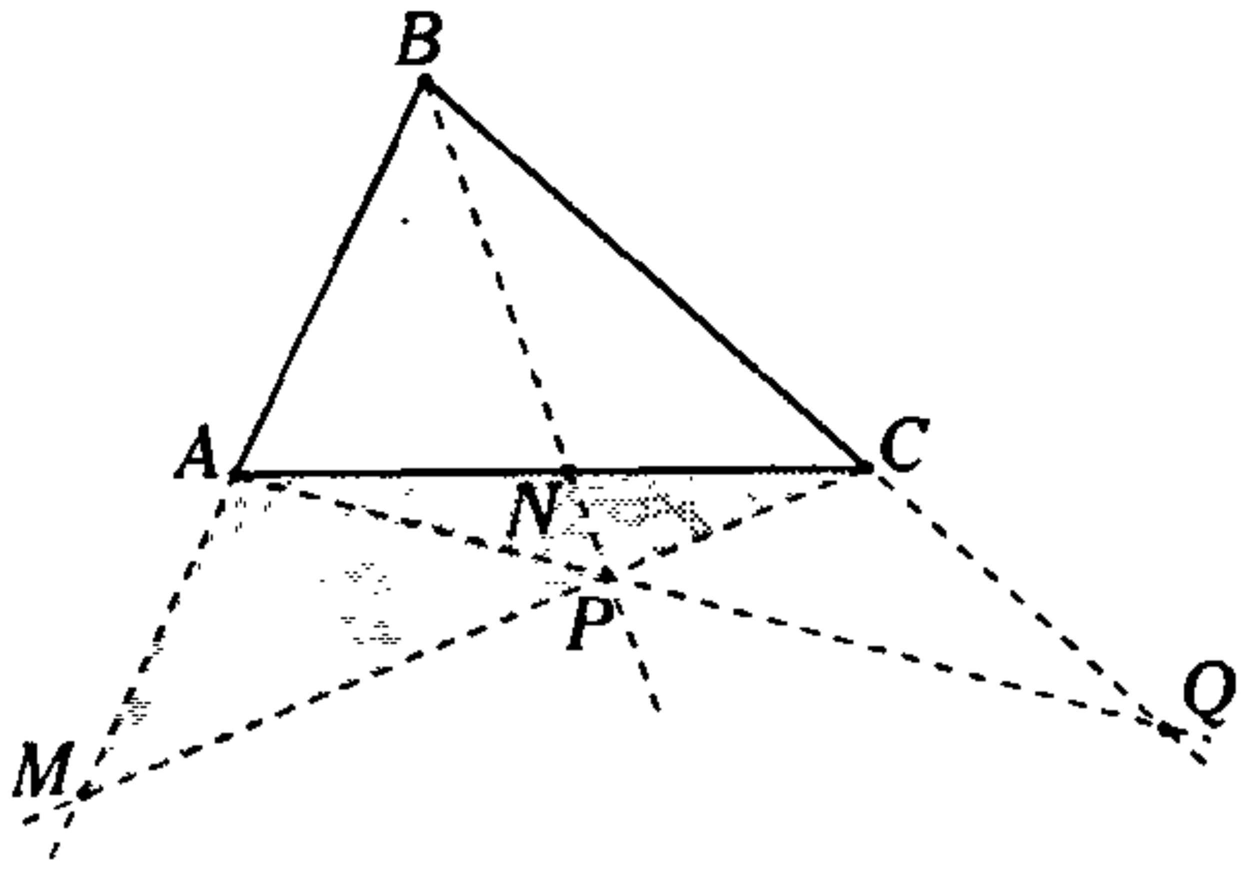


Figura 12.7

Si

$$\frac{(BM)}{(AM)} \cdot \frac{(AN)}{(NC)} \cdot \frac{(CQ)}{(BQ)} = 1$$

$\rightarrow$ $\overleftrightarrow{AQ}$, $\overleftrightarrow{BN}$ y $\overleftrightarrow{CM}$ son concurrentes.

Demostración

De la condición

$$\frac{(BM)}{(AM)} \cdot \frac{(AN)}{(NC)} \cdot \frac{(CQ)}{(BQ)} = 1 \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle MAC$, $\overleftrightarrow{BNP}$ es una recta secante y del teorema de Menelao

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CP}{PM} \cdot \frac{BM}{BA} = 1 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\frac{BM}{AM} \cdot \frac{AN}{NC} \cdot \frac{CQ}{BQ} = \frac{AN}{NC} \cdot \frac{CP}{PM} \cdot \frac{BM}{BA}$$

$$\rightarrow \quad \frac{BA}{AM} \cdot \frac{PM}{CP} \cdot \frac{CQ}{BQ} = 1$$

Del teorema recíproco de Menelao, para el $\triangle MBC$, A, P y Q son colineales. Por lo tanto $\overleftrightarrow{AQ}$, $\overleftrightarrow{BN}$ y $\overleftrightarrow{CM}$ son concurrentes en el punto P.

TEOREMA DEL CONJUGADO ARMÓNICO

En todo triángulo, al trazar tres cevianas concurrentes (una de cada vértice y que no sean medianas); el conjugado armónico de uno de los pies de dichas cevianas respecto a los extremos de un lado es colineal con los otros dos pies.

Primer caso

Sean $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ cevianas concurrentes en O, además P representa el conjugado armónico de N, respecto de A y C.

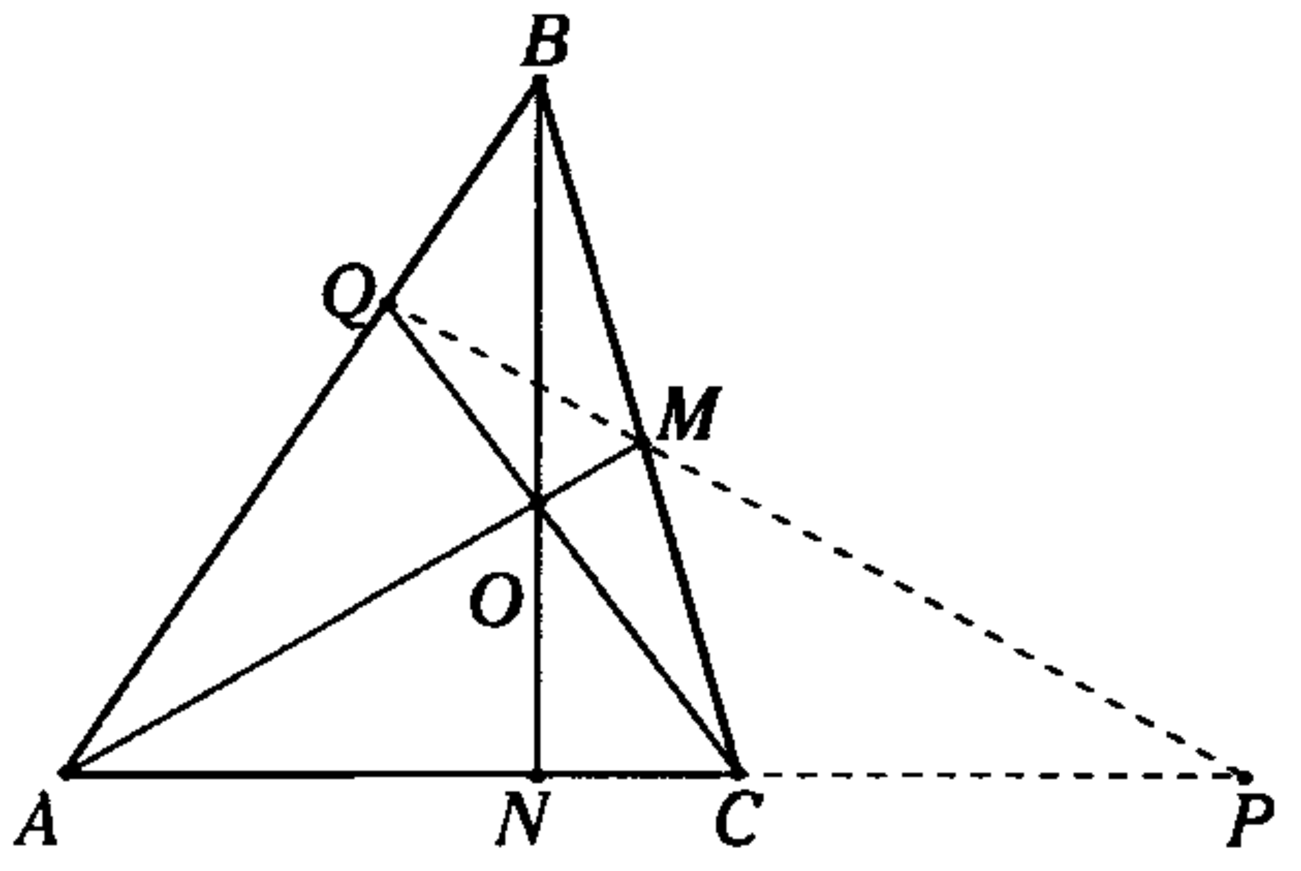


Figura 12.8

Entonces, Q, M y P son colineales.

Demostración

Si N y P son conjugados armónicos de A y C, entonces

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AP}{CP} \qquad \text{(I)}$$

Del teorema de Ceva para el $\triangle ABC$

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}=1 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II)

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CP}{AP}=1$$

y según el teorema recíproco de Menelao, los puntos P, M y Q son colineales.

Segundo caso

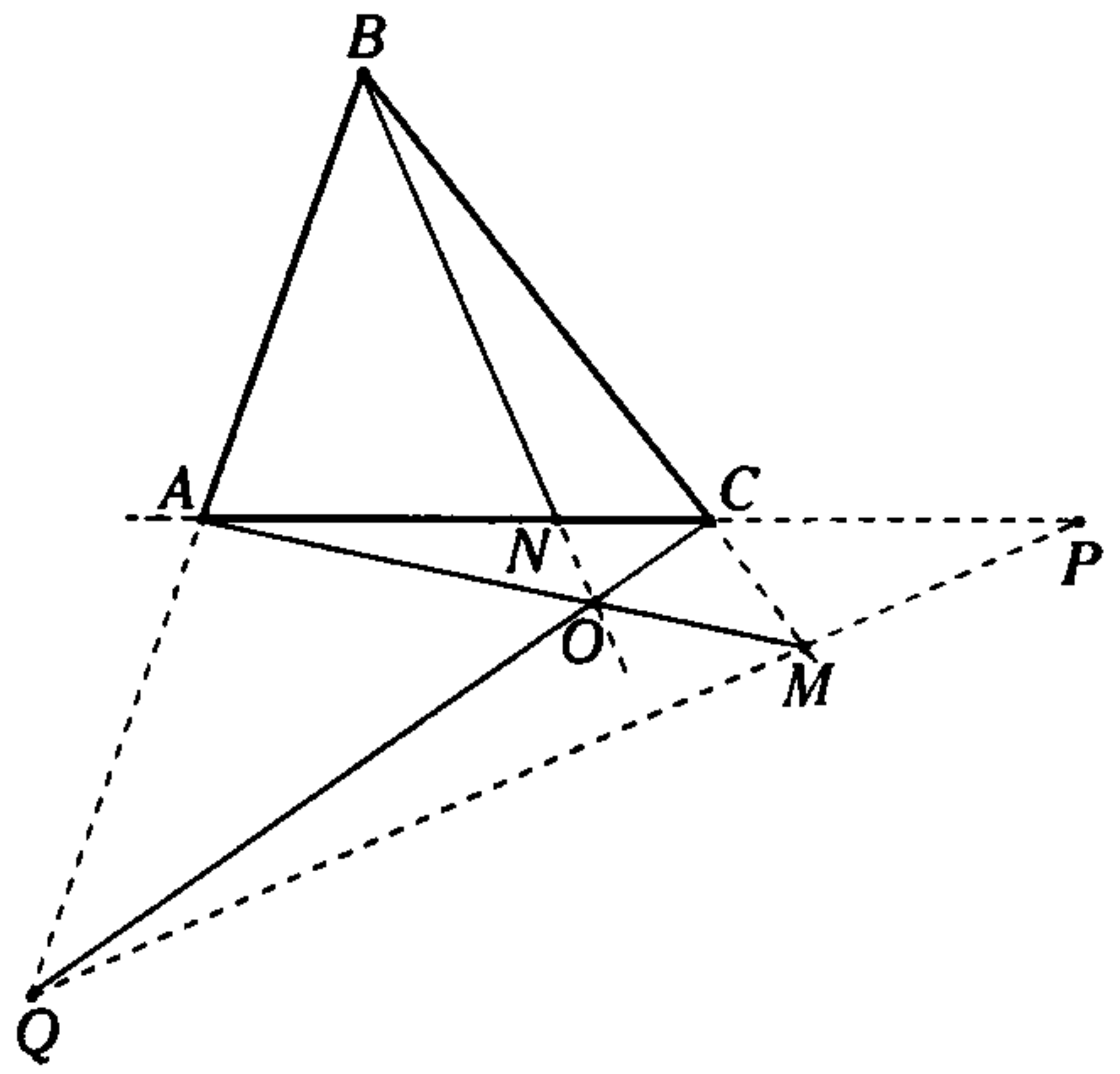


Figura 12.9

Sean $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ concurrentes en O.

Si P representa el conjugado armónico de N, respecto de $\overline{AC}$; entonces, Q, M y P son colineales.

Demostración

Si N y P son conjugados armónicos respecto de $\overline{AC}$, entonces

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AP}{CP} \qquad \text{(I)}$$

Del teorema de Ceva (segundo caso)

$$\frac{BQ}{AQ}\cdot\frac{CM}{BM}\cdot\frac{AN}{CN}=1 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II)

$$\frac{BQ}{AQ}\cdot\frac{CM}{BM}\cdot\frac{AP}{CP}=1$$

Basándonos en el teorema recíproco de Menelao (segundo caso), para el $\triangle ABC$, los puntos Q, M y P son colineales.

Observación

Si P es el conjugado armónico de Q respecto de $\overline{AB}$, entonces M, N y P son puntos colineales.

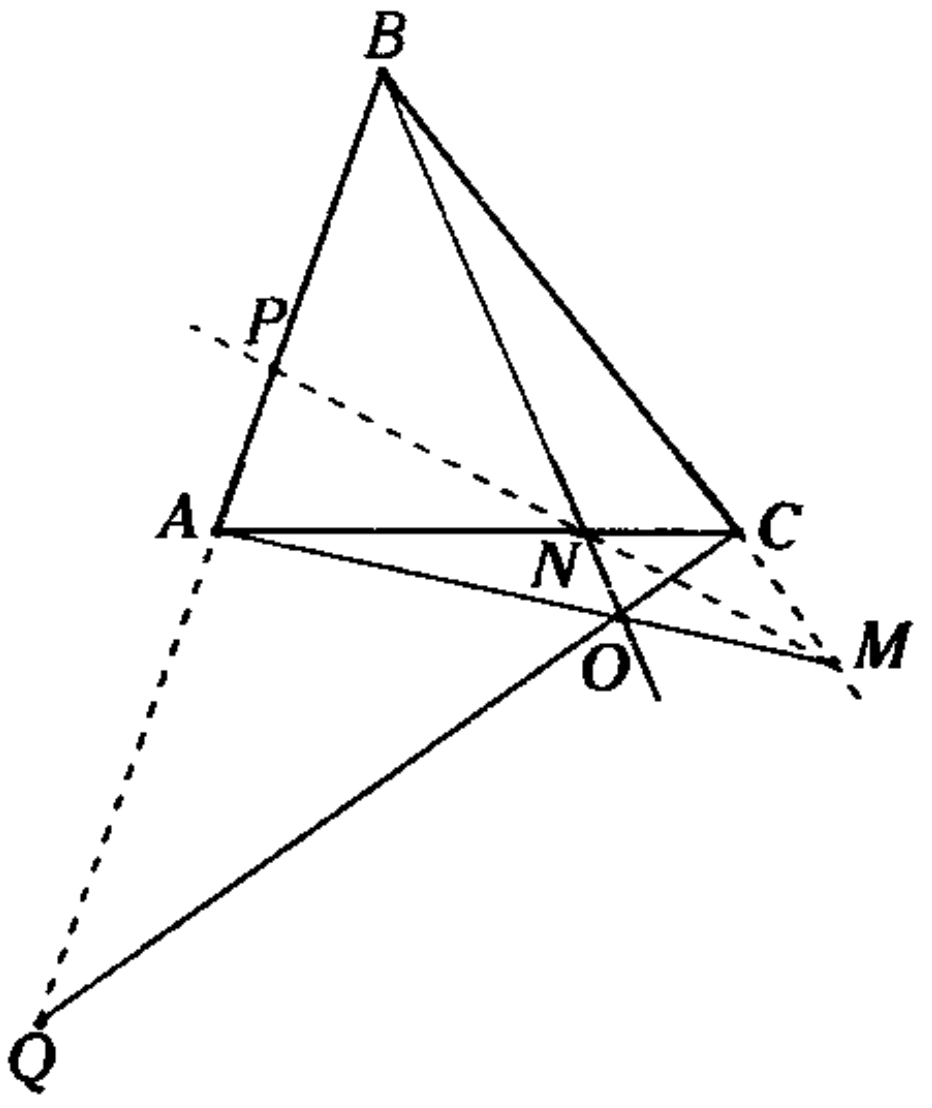


Figura 12.10

APLICACIÓN DE LA DIVISIÓN ARMÓNICA DE UN SEGMENTO

Si $\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{AQ}{CQ}$, esto significa que P y Q dividen armónicamente al $\overline{AC}$.

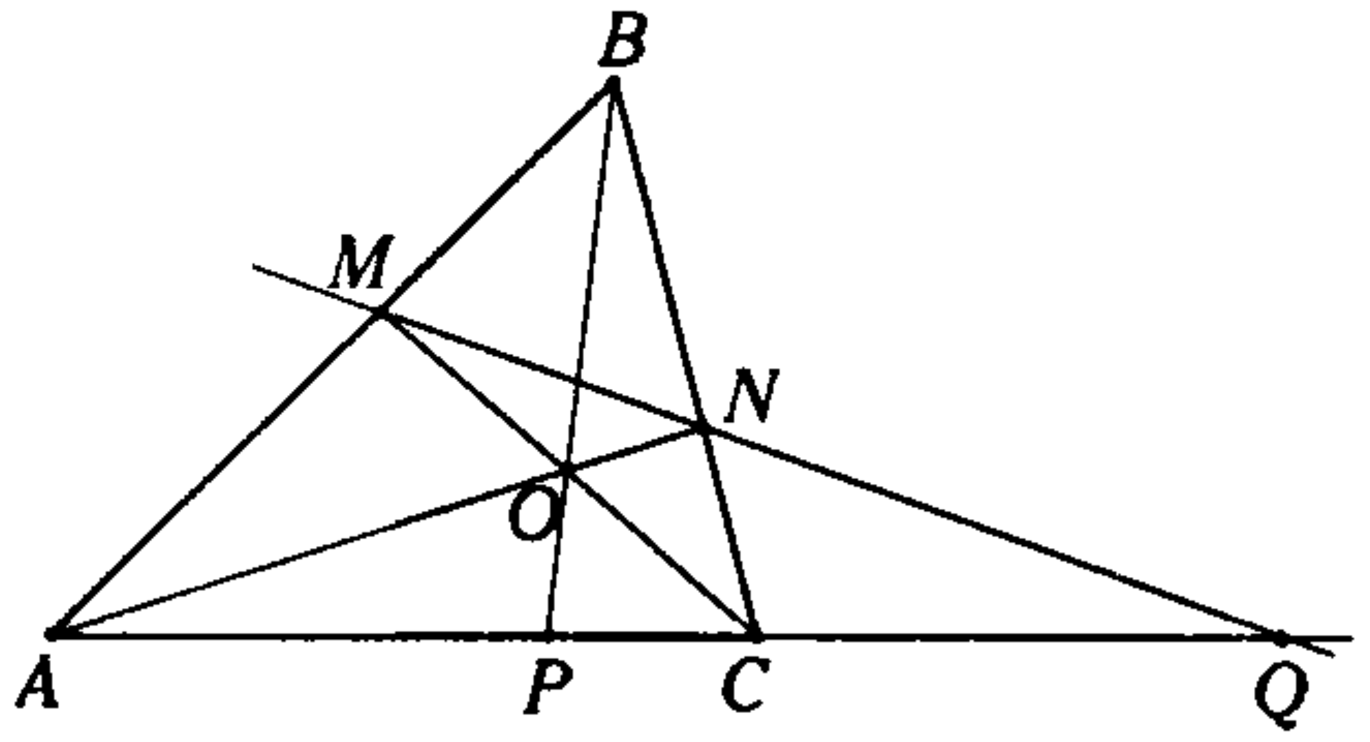


Figura 12.11

P y Q son conjugados armónicos respecto del $\overline{AC}$; por lo tanto, para P solo existe un único conjugado armónico que es Q y viceversa ($AP \neq PC$).

Observación

1. Para todo $O' \neq O$ de $\overline{BP}$, existen M' y N' de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente; tal que la intersección de $\overline{M'N'}$ y $\overline{AC}$ será el conjugado armónico de P respecto de A y C; pero como este punto es único, la intersección se da en el punto Q.

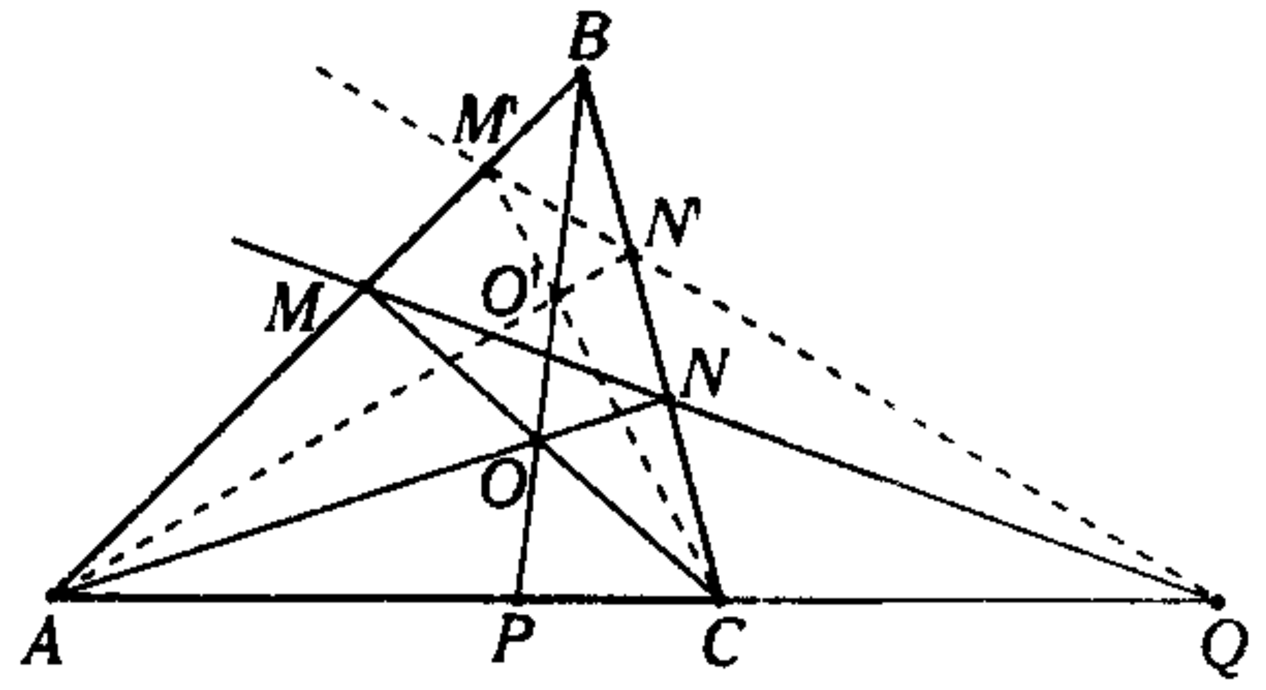
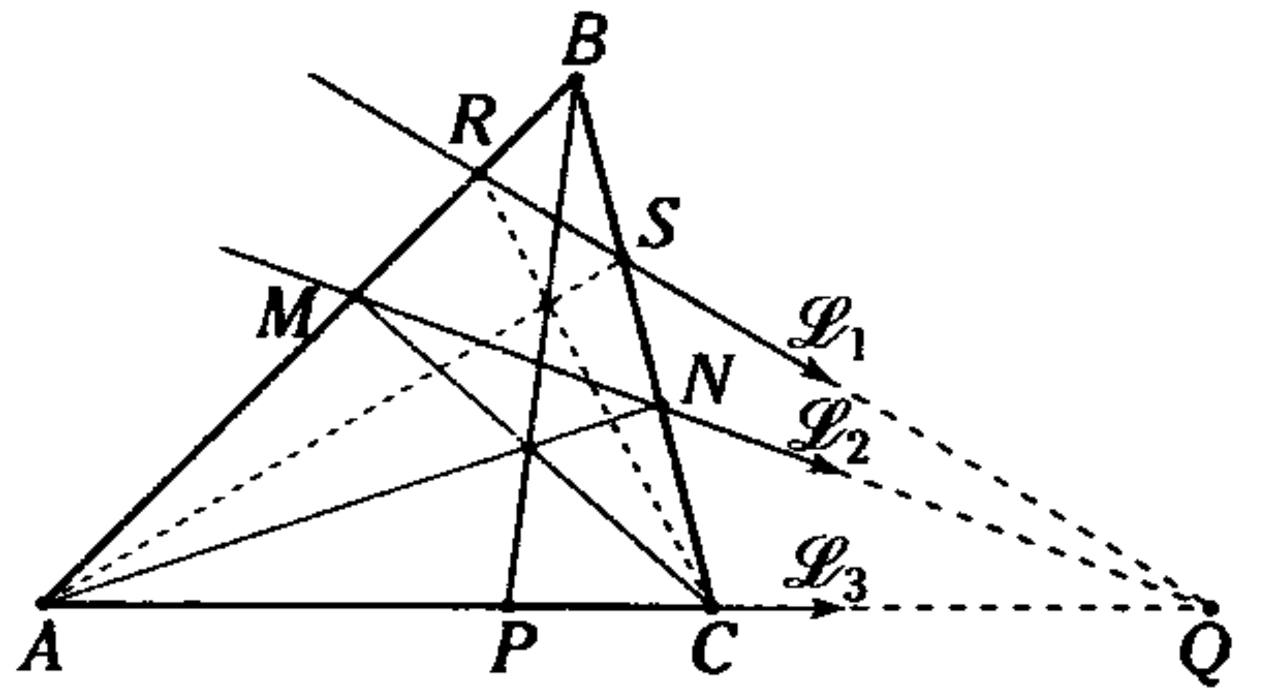


Figura 12.12

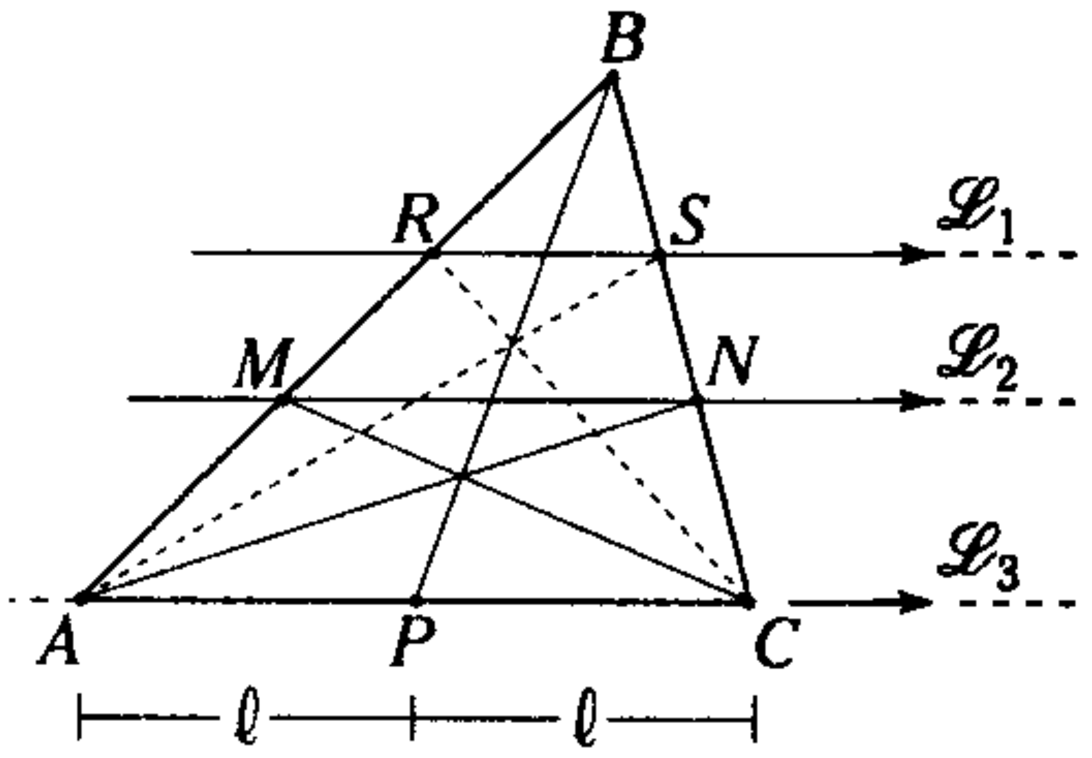
En un triángulo ABC, las cevianas AN, BP y CM son concurrentes; si $\overline{AS}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CR}$ también son concurrentes, entonces las rectas AC, MN y RS son concurrentes.



$\mathscr{L}_1$; $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ concurren en Q.

Figura 12.13

2. Si P es punto medio de $\overline{AC}$, entonces las rectas $\overleftrightarrow{RS}$, $\overleftrightarrow{BP}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ son paralelas.

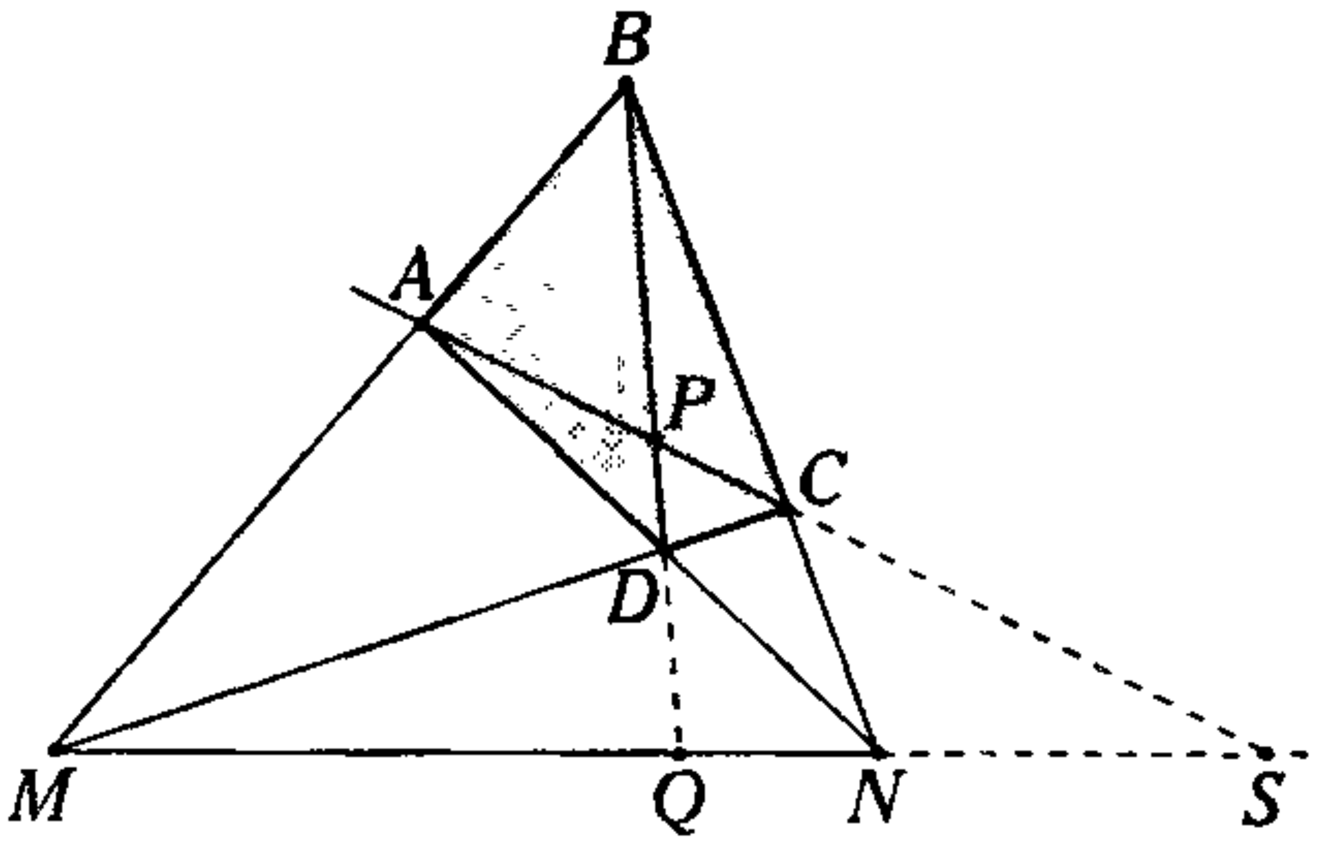


$\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2 // \mathscr{L}_3$

Figura 12.14

CUADRILÁTERO COMPLETO

En todo cuadrilátero completo, las rectas que contienen a sus diagonales se intersecan en puntos armónicos de dichas diagonales, respectivamente.



(*a*)

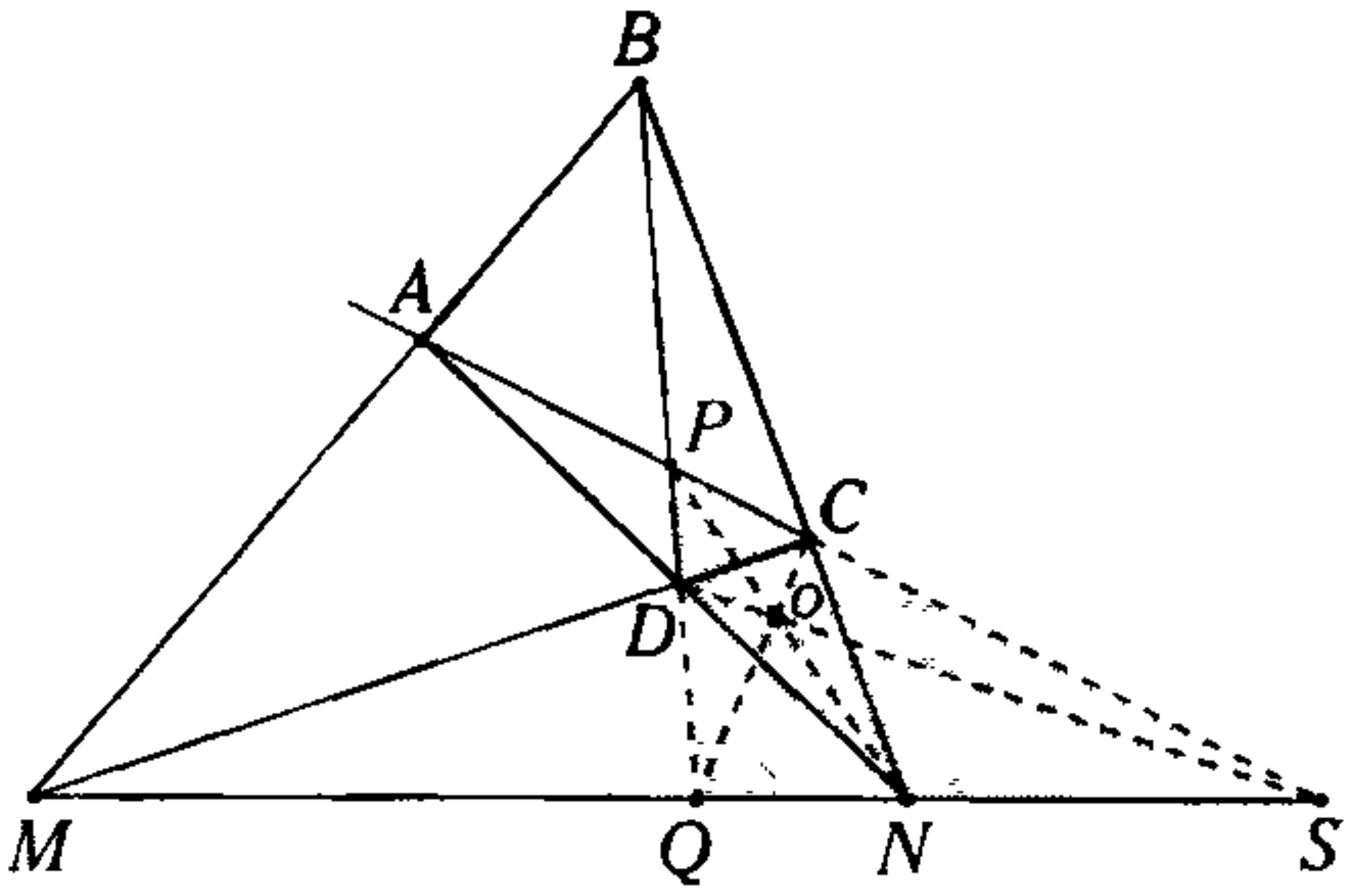
BMDN	: cuadrilátero completo respecto al $\triangle ABCD$.
$\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{MN}$	: diagonales del cuadrilátero completo *BMDN*.
P y *S*	: dividen armónicamente a $\overline{AC}$.
Q y *S*	: dividen armónicamente a $\overline{MN}$.
P y *Q*	: dividen armónicamente a $\overline{BD}$.

Demostración

De los teoremas de Menelao y Ceva.

- Para $\triangle MBN$: dado que *MC*, *BQ* y *NA* son cevianas concurrentes, $\overleftrightarrow{AS}$ y $\overleftrightarrow{BQ}$ dividen armónicamente a $\overline{MN}$.
- Para el $\triangle ABC$: al ser *MC*, *BD* y *AN* cevianas concurrentes (exteriormente), *P* y *S* dividen armónicamente a $\overline{AC}$.
- Ahora solo falta demostrar que *P* y *Q* dividen armónicamente a $\overline{BD}$.

Para el triángulo *PQS* (ver figura 12.15(b)), $\overleftrightarrow{AN}$ es una recta secante, mientras que *A* y *C* dividen armó-nicamente a $\overline{PS}$. Basándonos en el teorema de configuración $\overleftrightarrow{SD}$, $\overleftrightarrow{PN}$ y $\overleftrightarrow{QC}$ son concurrentes al ser *O* el punto de concurrencia.



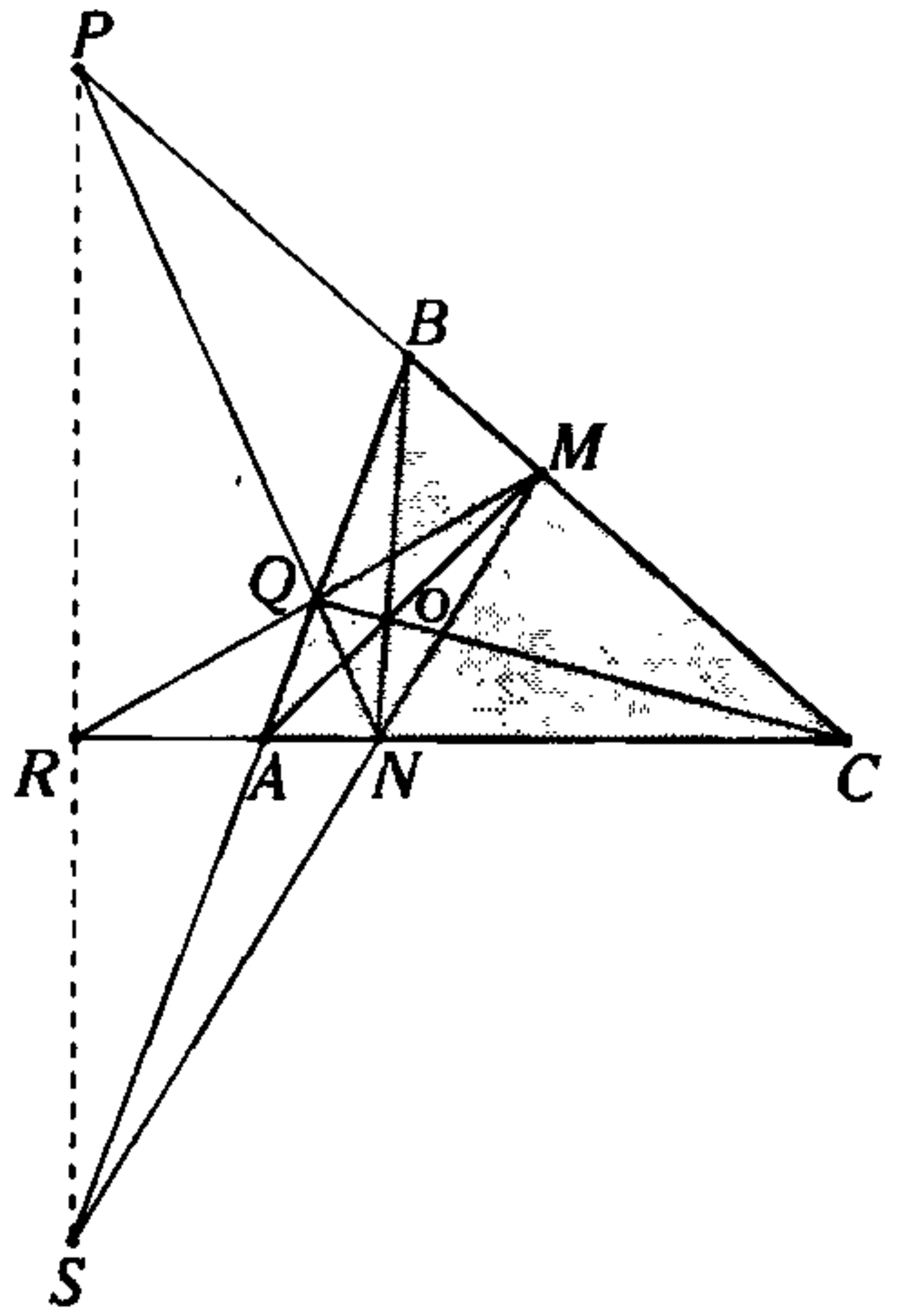
(*b*)

Figura 12.15

Según el teorema de Ceva y Menelao, para $\triangle PQS$, las rectas $\overleftrightarrow{NB}$ y $\overleftrightarrow{SD}$ dividen armónicamente a $\overleftrightarrow{PQ}$. Por lo tanto, *P* y *Q* también dividen armónicamente a $\overline{BD}$.

Teorema

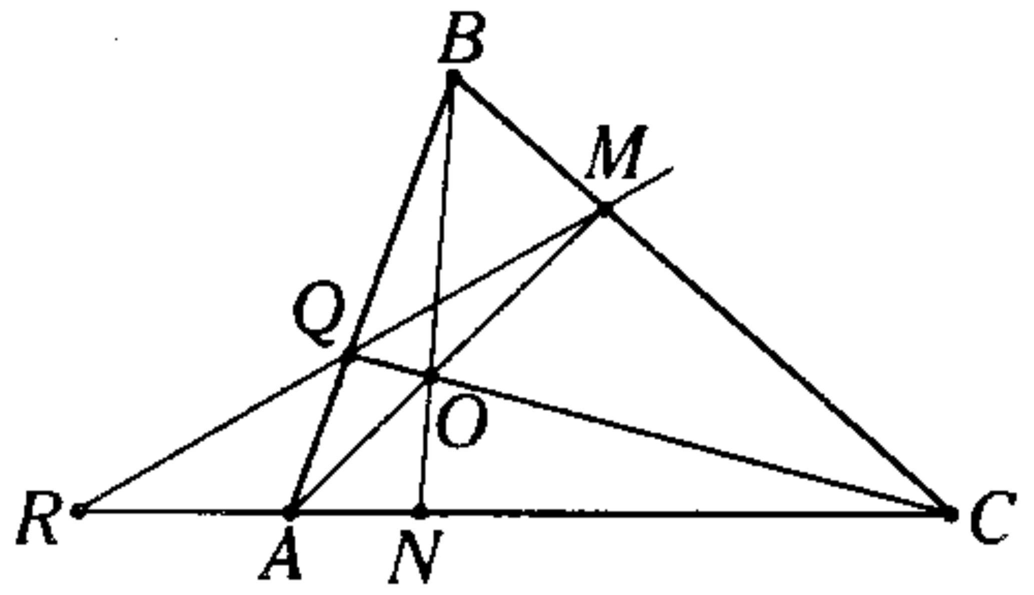
En todo triángulo, al trazar tres cevianas concurrentes, los puntos de intersección de las rectas que pasan por dos pies, de dichas cevianas, con la prolongación del lado que contiene al tercer pie, respectivamente, son colineales.



(*a*)

Sean *AM*, *BN* y *CQ* cevianas concurrentes en *O*, asumimos que *P*, *R* y *S* son colineales.

Demostración



(*b*)

Figura 12.16

Sabemos que

$$\frac{CN}{NA}=\frac{CR}{AR} \text{ (Div. armónica de } \overline{AC})$$

$$\rightarrow \quad \frac{NA}{CN}=\frac{AR}{CR}$$

Análogamente para $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$, tenemos

$$\frac{CM}{MB}=\frac{CP}{BP} \text{ y } \frac{BQ}{QA}=\frac{BS}{AS}\text{, respectivamente.}$$

Multiplicando convenientemente, tenemos

$$\frac{NA}{CN}\cdot\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BQ}{QA}=\frac{AR}{CR}\cdot\frac{CP}{BP}\cdot\frac{BS}{AS}$$

Del teorema de Ceva para el $\triangle ABC$

$$\frac{NA}{CN}\cdot\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BQ}{QA}=1$$

$$\therefore \quad \frac{AR}{CR}\cdot\frac{CP}{BP}\cdot\frac{BS}{AS}=1$$

Según el segundo teorema recíproco de Menelao, P, R y S son colineales.

Teorema

En todo triángulo escaleno, los pies de dos bisectrices interiores y el de la bisectriz exterior trazada desde el tercer vértice son colineales.

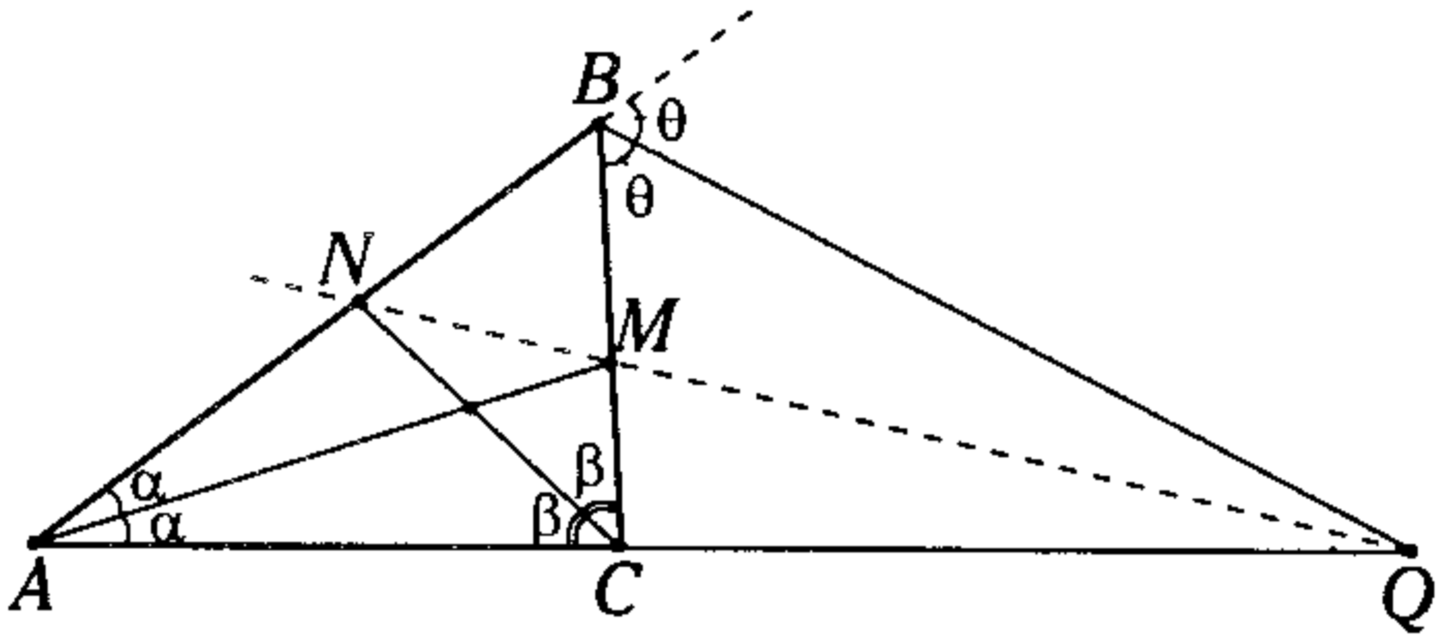


Figura 12.17

$\overline{AM}$, $\overline{CN}$: bisectrices interiores

$\overline{BQ}$: bisectriz exterior

$\rightarrow$ N, M y Q son colineales.

Demostración

En el $\triangle ABC$ del teorema de la bisectriz interior para $\overline{AM}$:

$$\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC} \qquad \text{(I)}$$

para $\overline{CN}$

$$\frac{AN}{NB}=\frac{AC}{BC} \qquad \text{(II)}$$

Del teorema de la bisectriz exterior, para $\overline{BQ}$

$$\frac{CQ}{AQ}=\frac{BC}{AB} \qquad \text{(III)}$$

De (I), (II) y (III)

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{AN}{NB}\cdot\frac{CQ}{AQ}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BC}{AB}=1$$

y del teorema recíproco de Menelao, para el $\triangle ABC$, N, M y Q son colineales.

Teorema

En todo triángulo escaleno, los pies de las bisectrices exteriores trazadas de los tres vértices son colineales.

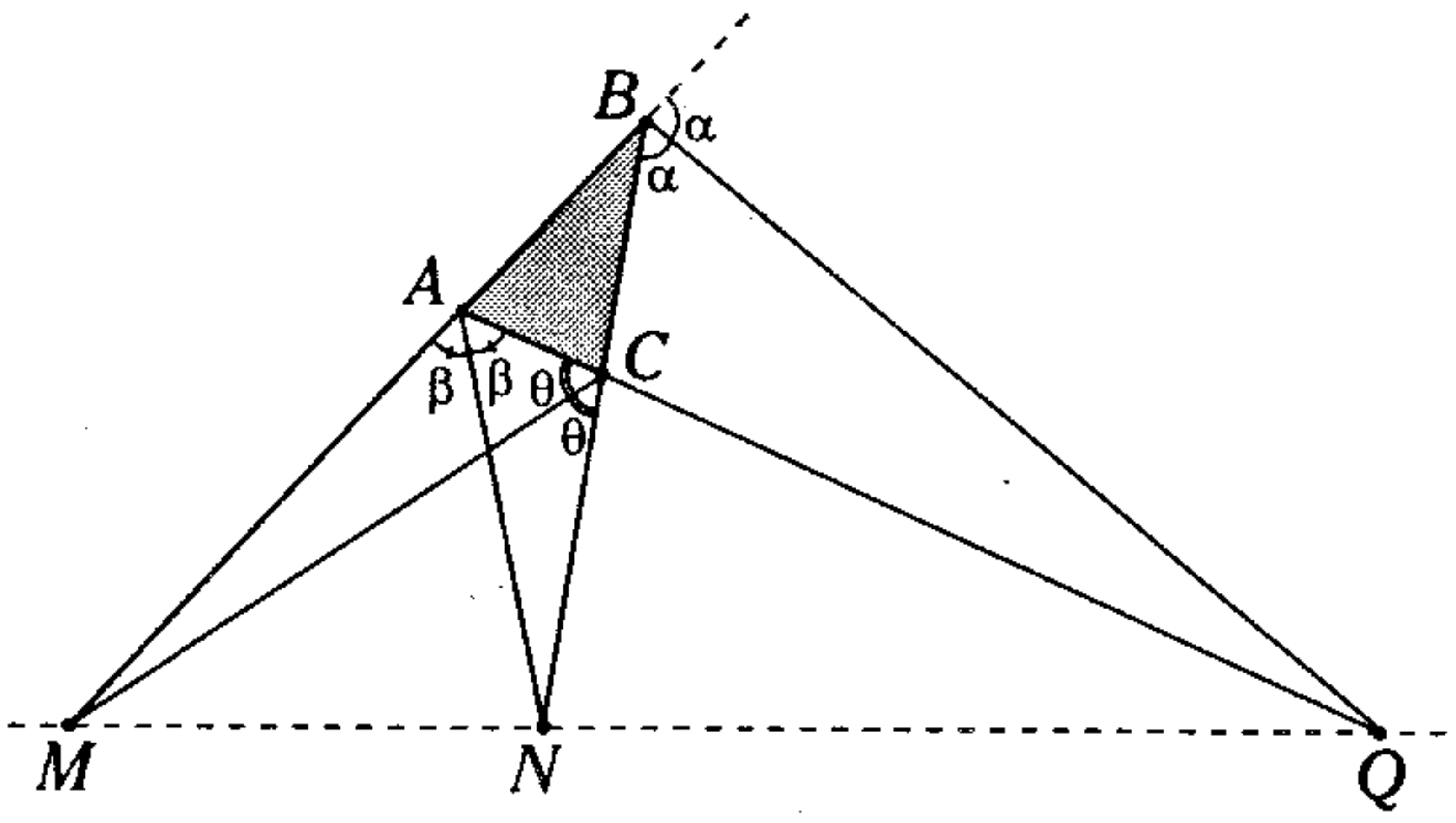


Figura 12.18

Si $AB>BC>AC$

$\overline{AN}$: bisectriz exterior ($\overline{BC}$)

$\overline{BQ}$: bisectriz exterior ($\overline{AC}$)

$\overline{CM}$: bisectriz exterior ($\overline{BA}$)

$\rightarrow$ M, N y Q son colineales.

Demostración

Del teorema de la bisectriz exterior

- Para $\overrightarrow{AN}$

$$\frac{BN}{CN}=\frac{AB}{AC} \qquad \text{(I)}$$

- Para $\overrightarrow{BQ}$

$$\frac{CQ}{AQ}=\frac{BC}{AB} \qquad \text{(II)}$$

- Para $\overrightarrow{CM}$

$$\frac{AM}{BM}=\frac{AC}{BC} \qquad \text{(III)}$$

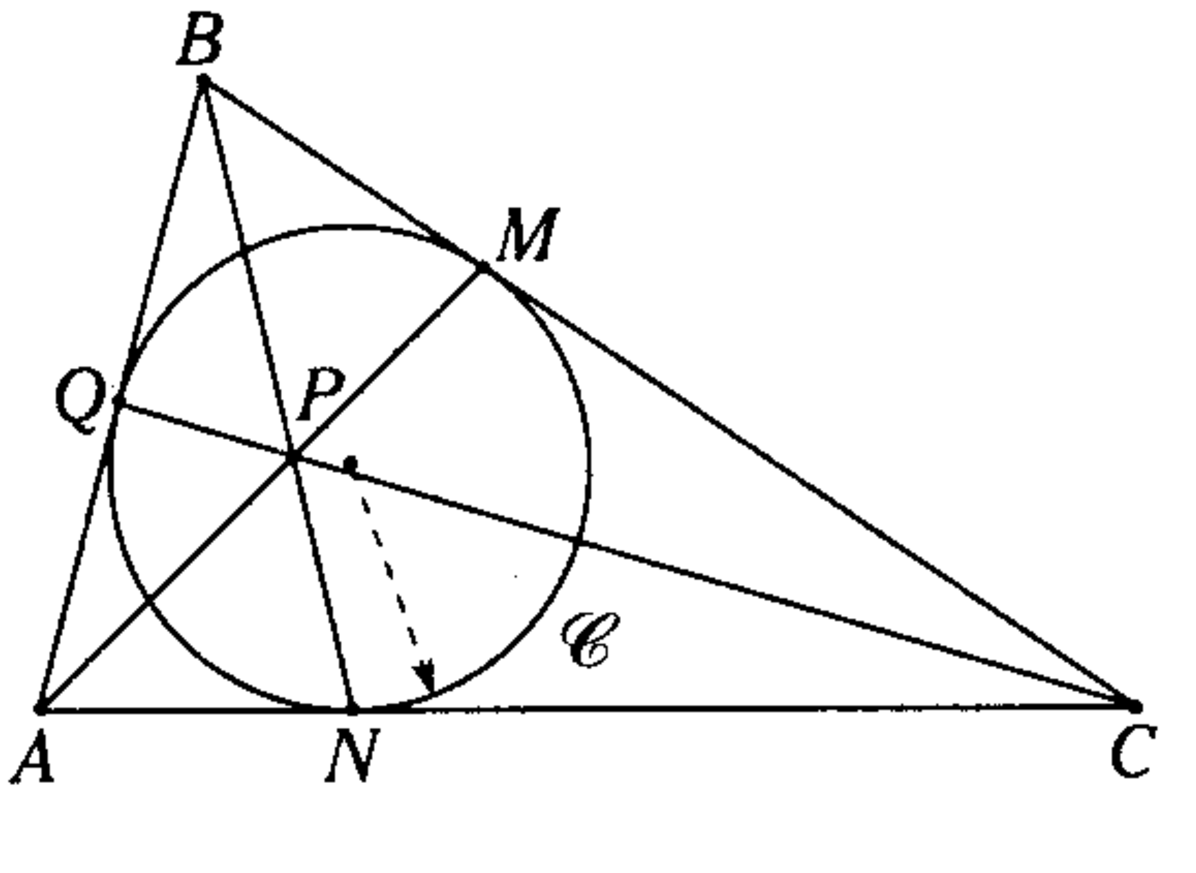
De (I), (II) y (III)

$$\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CQ}{BC}\cdot\frac{AM}{BM}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AC}{BC}=1$$

Del segundo teorema recíproco de Menelao, concluimos que M, N y Q son colineales.

PUNTO DE GERGONNE

Es el punto de concurrencia de las cevianas que unen los vértices de un triángulo con los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita.



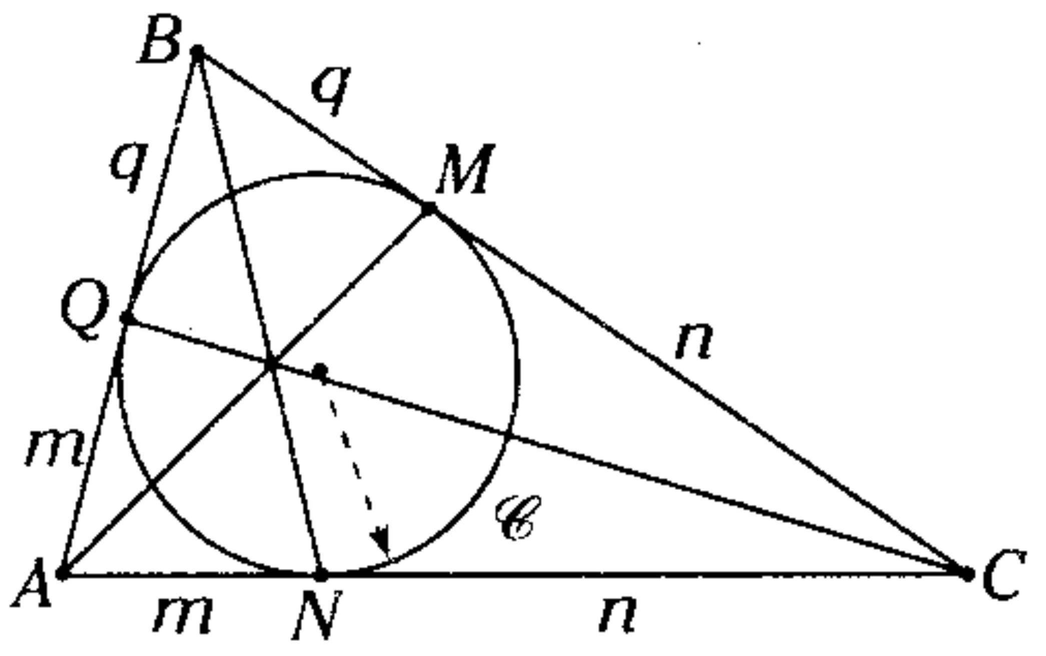
(*a*)

$\mathscr{C}$: circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$.

M, N y Q : puntos de tangencia.

P : punto de Gergonne.

Demostración



(*b*)

Figura 12.19

Sean M, N y Q los puntos de tangencia de $\mathscr{C}$ con los lados del $\triangle ABC$

$$\rightarrow\ AQ=AN=m;\ BQ=BM=q;\ CM=CN=n$$

$$\therefore\ \frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}=1$$

Del teorema recíproco de Ceva, obtenemos que $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son concurrentes.

PUNTO DE NAGEL

Es el punto de concurrencia de las cevianas que unen los vértices de un triángulo con los puntos de tangencia de las tres circunferencias exinscritas con los lados del triángulo respectivamente.

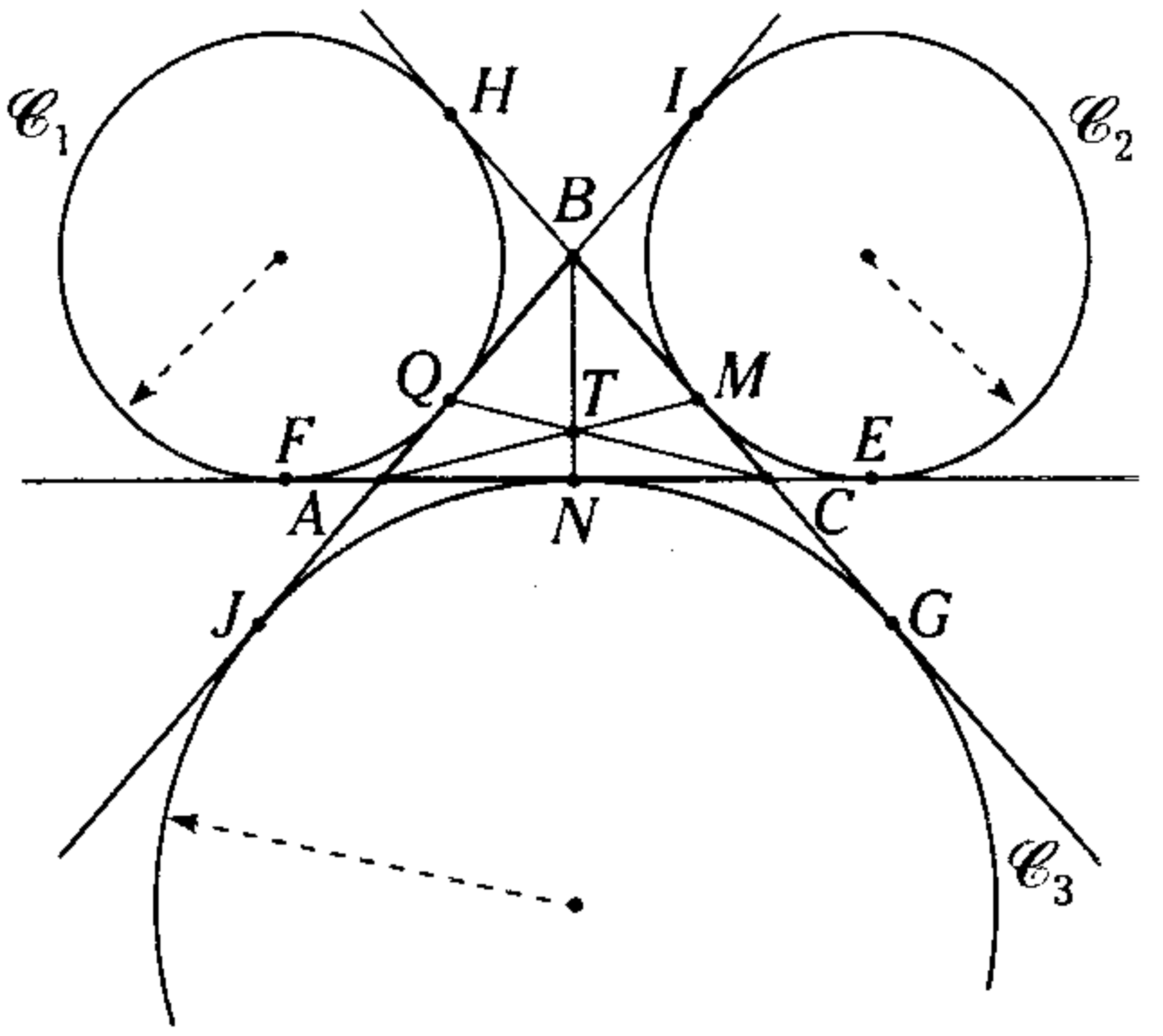


Figura 12.20

$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$: circunferencias exinscritas al $\triangle ABC$.

M, N y Q : puntos de tangencia.

$\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$: concurrentes en T.

T : punto de Nagel.

Demostración

De la figura anterior, E, F, G, H, I y J son puntos de tangencia.

$$\rightarrow AF = CE \quad \therefore \quad AQ = CM$$

$$AJ = BI \quad \therefore \quad AN = BM$$

$$BH = CG \quad \therefore \quad BQ = CN$$

$$\rightarrow \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{AN} = 1$$

Por lo tanto, del teorema recíproco de Ceva, $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son concurrentes.

Importante

El punto de Nagel (*T*)

Se encuentra en la región interna de un triángulo. Se llama también isoperimétrico, porque cada una de las cevianas que pasa por él, divide al perímetro de la región triangular en dos partes equivalentes. Por ejemplo (figura 12.20), si AM divide al triángulo ABC en dos partes tales que $AB+BM=AC+CM$, y la región ABM tiene igual perímetro que la región ACM.

Importante

Mediana y Simediana

- La mediana de un triángulo es el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a sus lados adyacentes son inversamente proporcionales a las longitudes de dichos lados.
- La simediana de un triángulo es el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a sus lados adyacentes son directamente proporcionales a las longitudes de estos, respectivamente.

Sea $AM = MC$

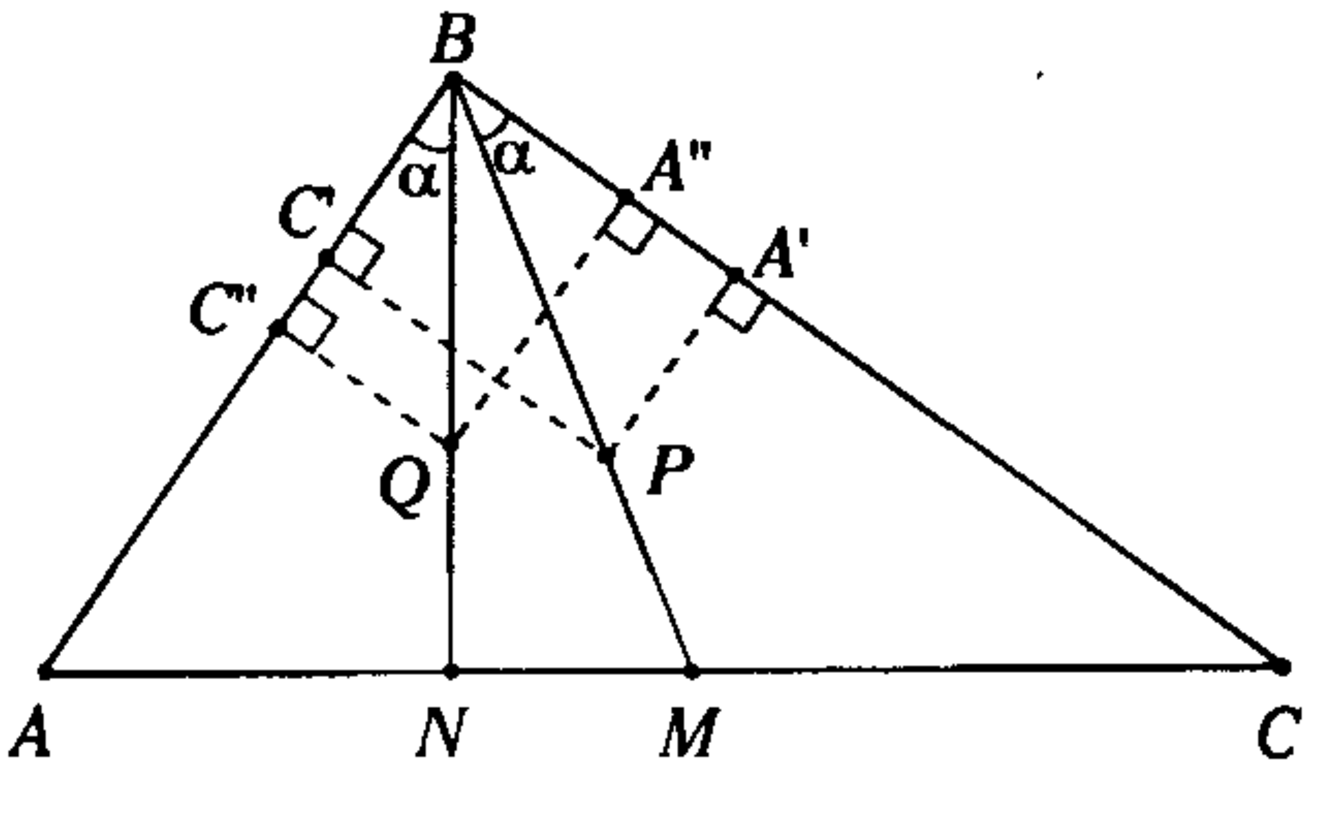


Figura 12.21

$\overline{BM}$: mediana; $\overline{BN}$: simediana

$$\rightarrow \frac{PA'}{PC'} = \frac{AB}{BC} \; ; \; \frac{QA"}{QC"} = \frac{BC}{AB}$$

Una demostración sencilla de estas relaciones se puede hacer aplicando relaciones de áreas.

Construcción geométrica de la simediana

Sea el triángulo ABC de la figura 12.22, se requiere dibujar la simediana BN. Con centro en B y radio BC, márquese C' sobre la prolongación de BA, con centro en A y radio AC, y A' sobre el lado BC. Al determinar M' punto medio de $\overline{A'C'}$ y unir B con M', la intersección con AC nos permite ubicar el punto N, donde BN es la simediana respecto a AC. Las otras dos simedianas se construyen en forma análoga.

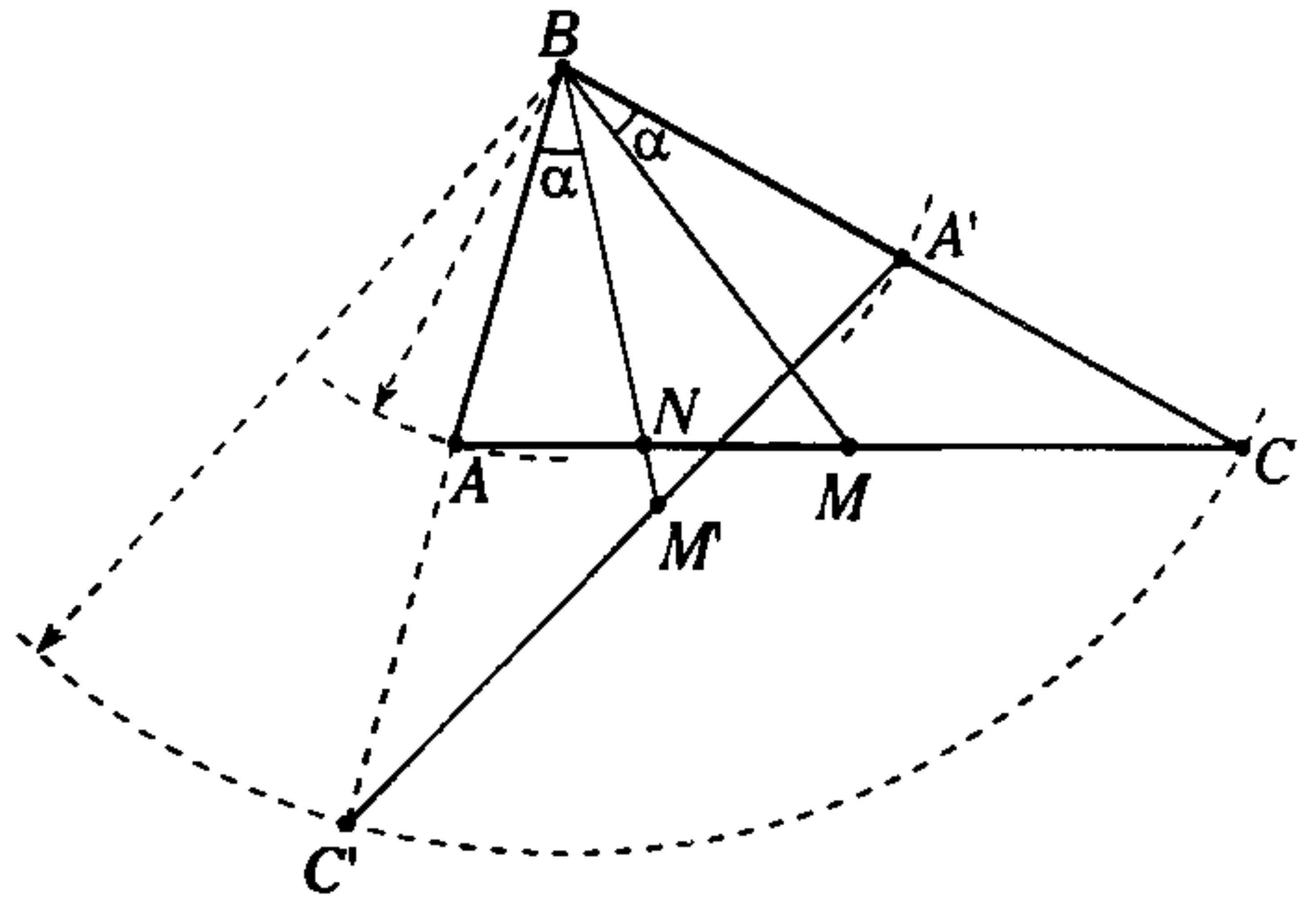


Figura 12.22

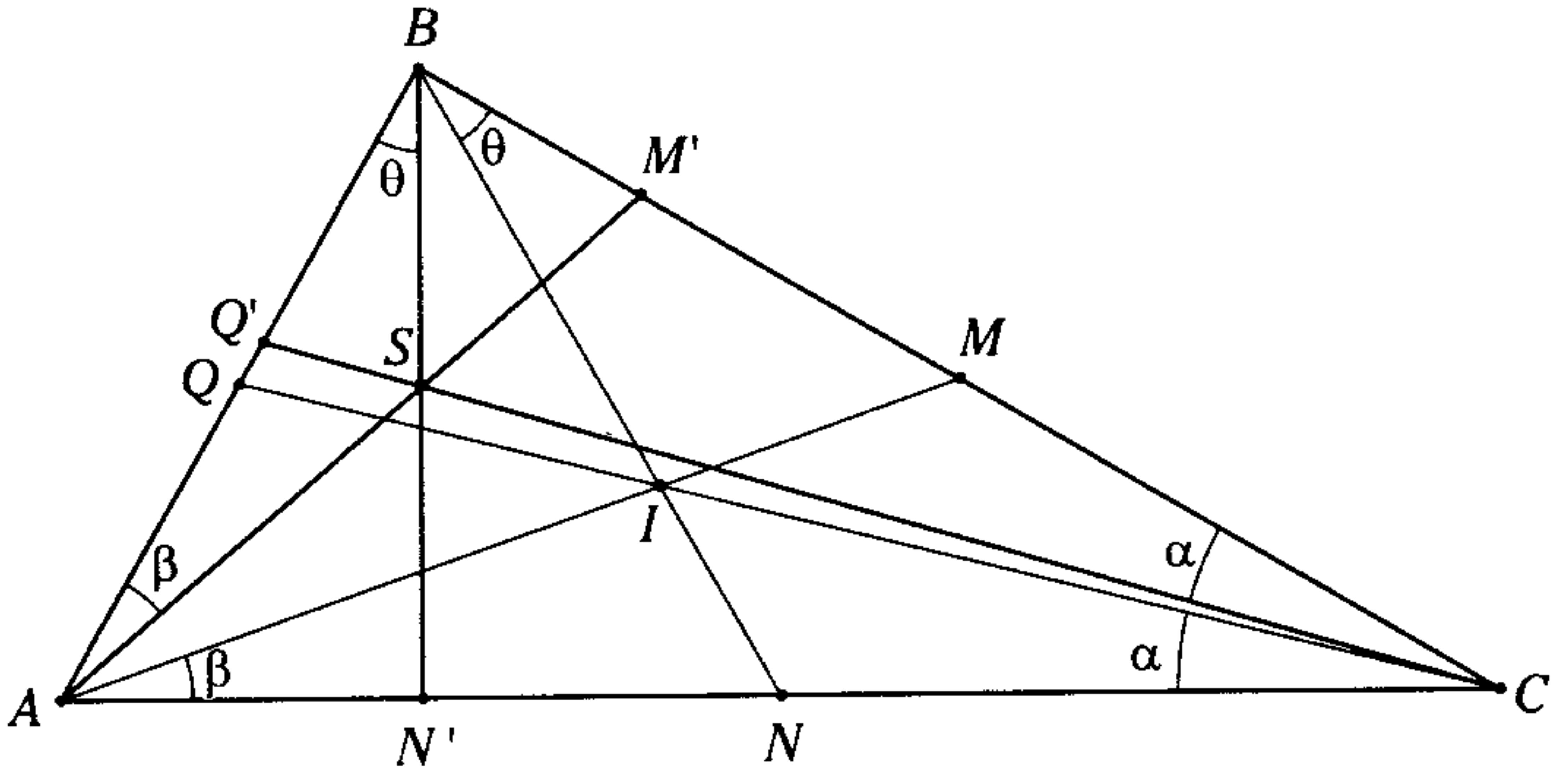
$\triangle A'BC' \cong \triangle ABC \rightarrow m\sphericalangle M'BC' = m\sphericalangle MBC = \alpha$

$\overline{BM}$: mediana relativa al lado AC.

$\overline{BN}$: simediana relativa al lado AC.

Teorema

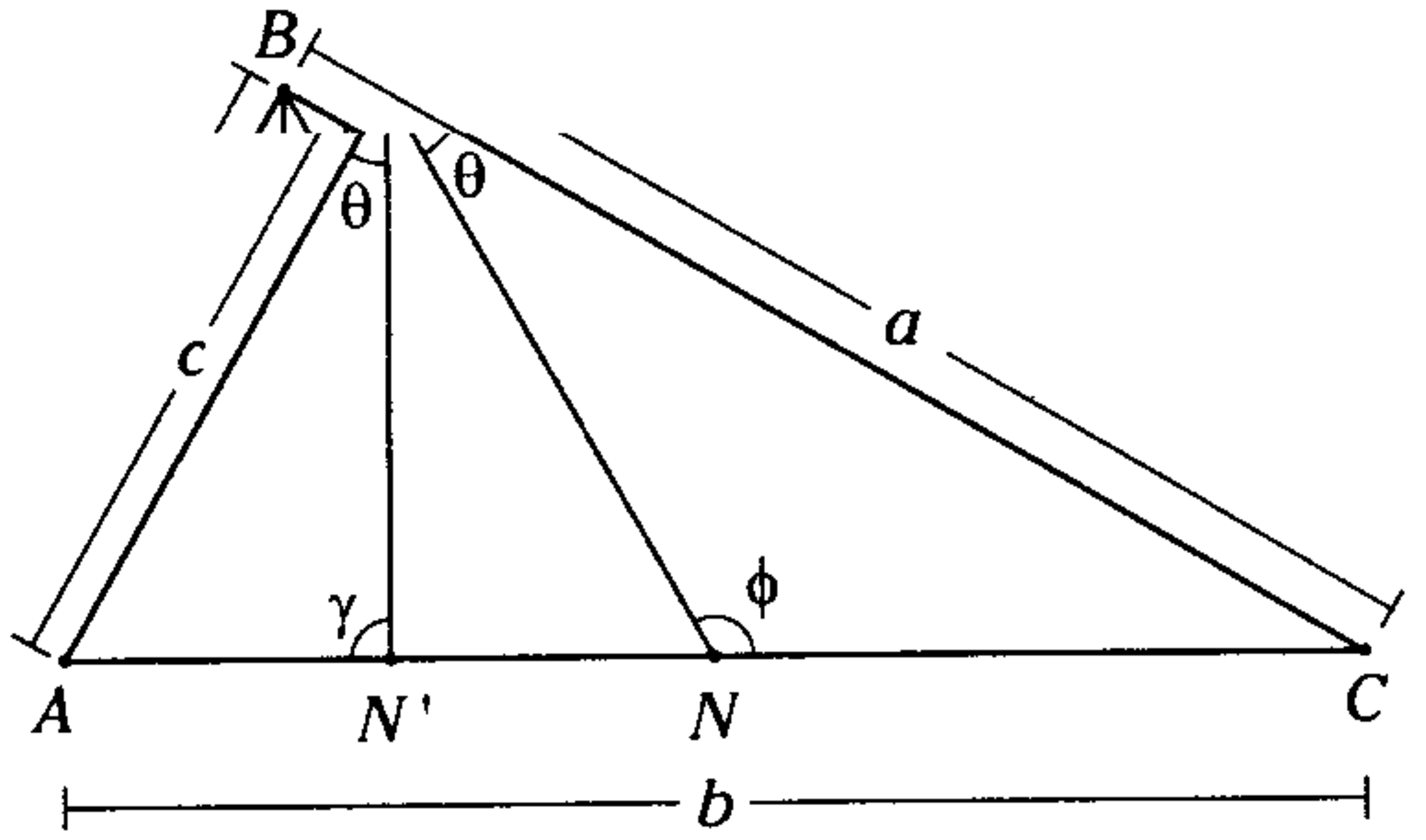
En un triángulo, las tres simedianas son concurrentes.



(a)

Si AM, BN y CQ son medianas del $\triangle ABC$ y AM', BN' y CQ' las respectivas simedianas entonces AM', BN' y CQ' son concurrentes en S.

Demostración



(b)

Figura 12.23

En el $\triangle ABC$, N', M' y Q' son los pies de las simedianas, mientras que N, M y Q lo son de las respectivas medianas.

Utilizando ley de senos en

$\triangle ABN'$:

$$\frac{AN'}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

$\triangle N'BC$:

$$\frac{N'C}{\operatorname{sen}(B-\theta)}=\frac{a}{\operatorname{sen}(180^\circ-\gamma)}=\frac{a}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Dividiendo estas dos ecuaciones, tenemos

$$\frac{AN'}{N'C}=\frac{c}{a}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(B-\theta)} \qquad \text{(I)}$$

Análogamente, al aplicar ley de senos en los $\triangle ABN$ y $\triangle NBC$

$$\frac{AN}{\operatorname{sen}(B-\theta)}=\frac{c}{\operatorname{sen}(180^\circ-\phi)}=\frac{c}{\operatorname{sen}\phi}$$

$$\text{y}\quad \frac{NC}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{a}{\operatorname{sen}\phi}$$

como $AN=NC$ y dividiendo ambas ecuaciones

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(B-\theta)}=\frac{c}{a} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II): $\dfrac{AN'}{N'C}=\dfrac{c^2}{a^2}$

Igualmente para las otras simedianas tenemos

$$\frac{CM'}{M'B}=\frac{b^2}{c^2} \quad \text{y} \quad \frac{BQ'}{Q'A}=\frac{a^2}{b^2}$$

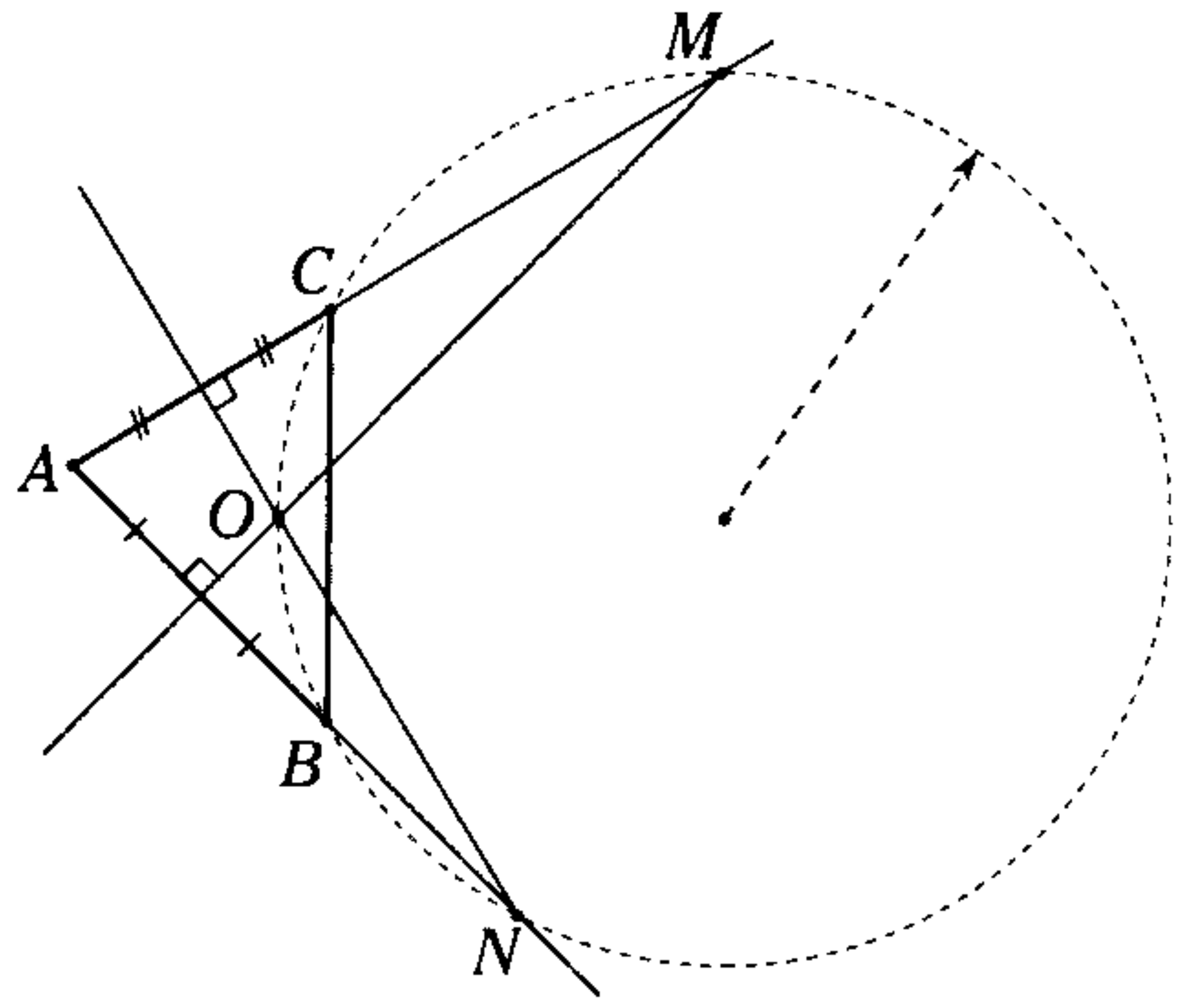
como

$$\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}=1 \;\rightarrow\; \frac{AN'}{N'C}\cdot\frac{CM'}{M'B}\cdot\frac{BQ'}{Q'A}=1$$

Del teorema recíproco de Ceva AM', BN' y CQ' son concurrentes.

CIRCUNFERENCIA DE MANNHEIM

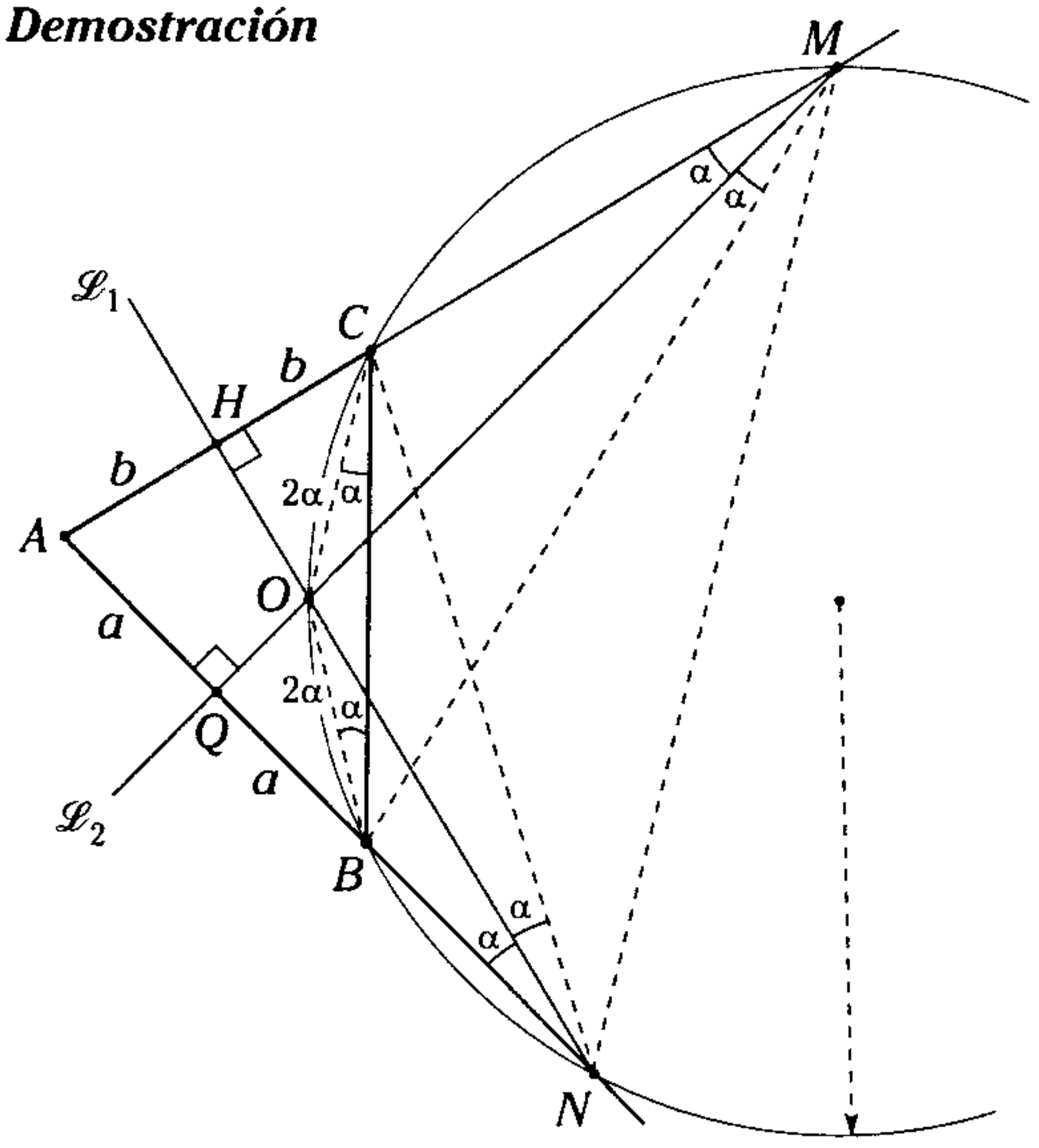
Dado que en un triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{AB}$ interseca la recta AC en M y la de $\overline{AC}$ interseca a la recta AB en N, los cuatro puntos B, C, M, N y el circuncentro del triángulo dado son concíclicos.



(a)

O : circuncentro del triángulo ABC.
Asumimos así que los puntos M, C, O, B y N son concíclicos.

Demostración



(b)

Figura 12.24

Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, entonces $O=\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}\cap\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ (O es circuncentro del $\triangle ABC$). Al prolongar $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, estos intersecan a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, en M y N, respectivamente.

En el $\triangle ABC$

$m\sphericalangle AMQ = m\sphericalangle BMQ = \alpha$

$m\sphericalangle MAQ = 90^\circ - \alpha$

$\triangle ANH = m\sphericalangle ANH = \alpha$

En el $\triangle ANC$

$m\sphericalangle CNH = m\sphericalangle ANH = \alpha$

$\therefore$ El cuadrilátero $NBCM$ es inscriptible (I)

($m\sphericalangle BNC = m\sphericalangle CMB = 2\alpha$)

$\triangle ABC$ O es circuncentro

$\rightarrow BO = OC$

Observación

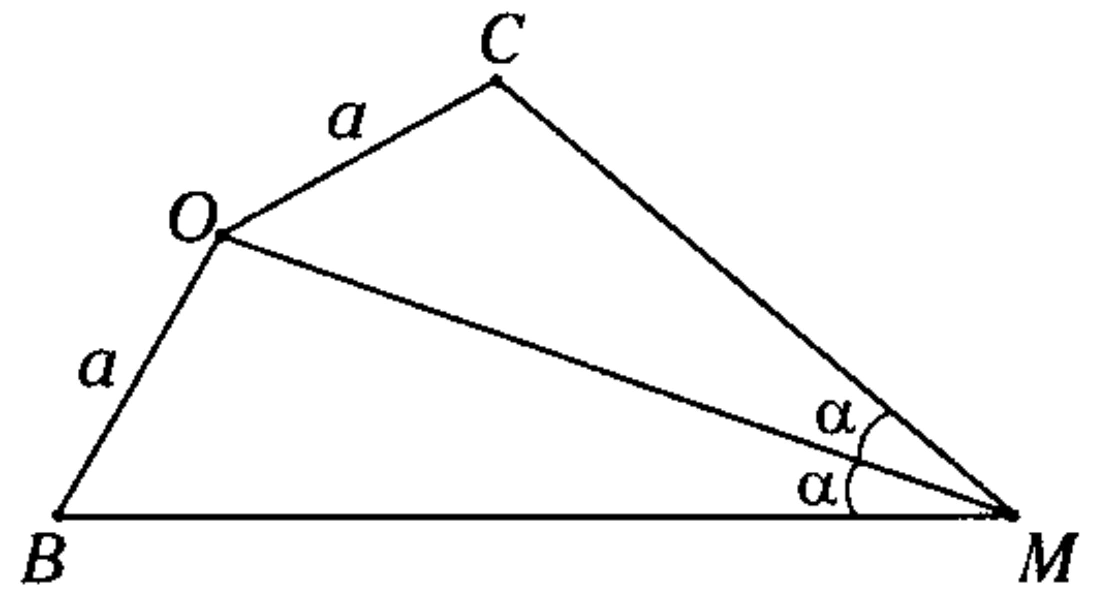


Figura 12.25

Si $BO=OC$ y $\overline{MO}$ es bisectriz de $m\sphericalangle OBM$; entonces el cuadrilátero *BOCM es inscriptible.*

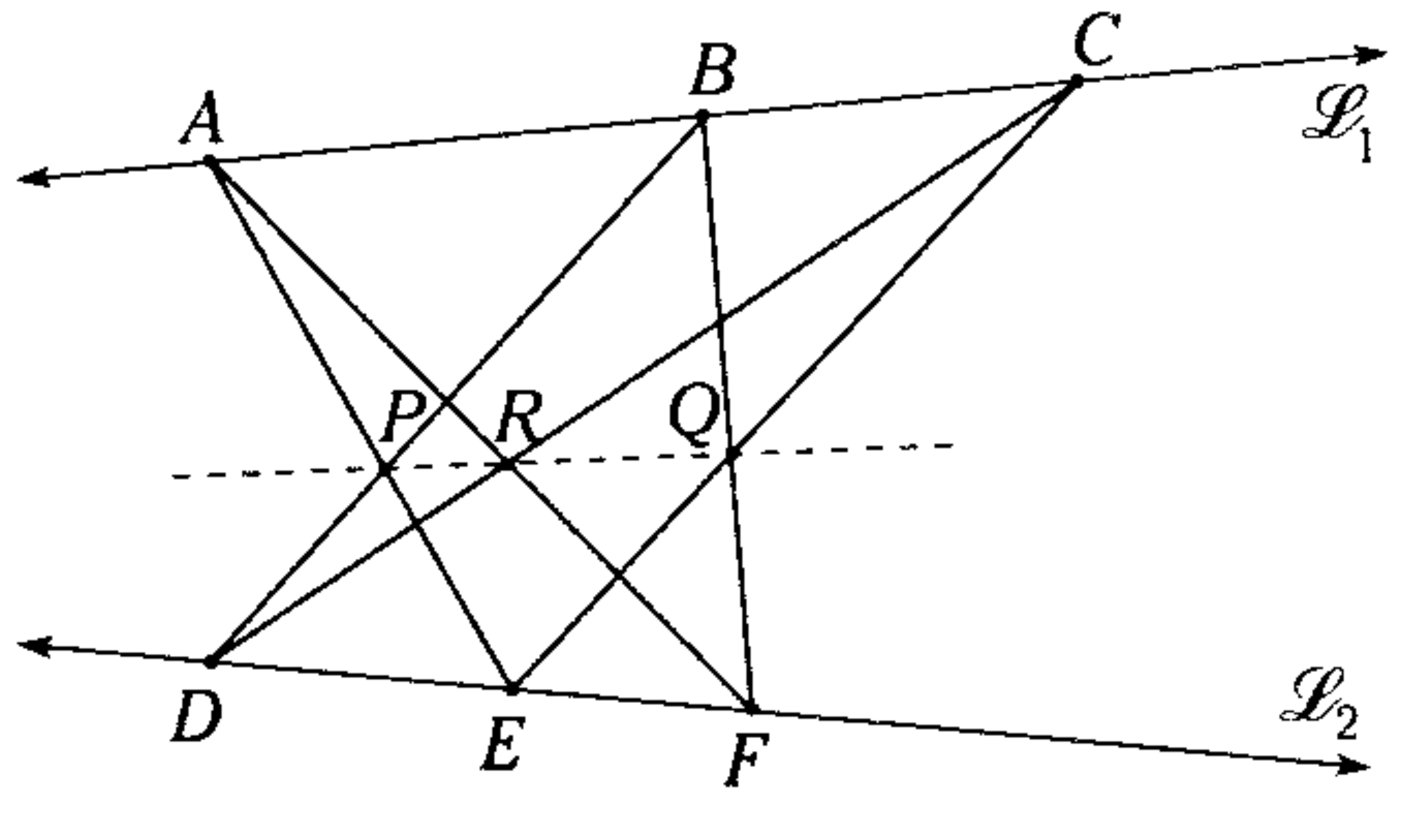
De la observación

- Cuadrilátero $BOCM$: inscriptible (II)
- Cuadrilátero $COBN$: inscriptible (III)

Por lo tanto, del teorema de configuración, para las conclusiones (I), (II) y (III), los puntos N, B, O, C y M son concíclicos, es decir, pertenecen a una circunferencia (circunferencia de Mannheim).

TEOREMA DE PAPPUS

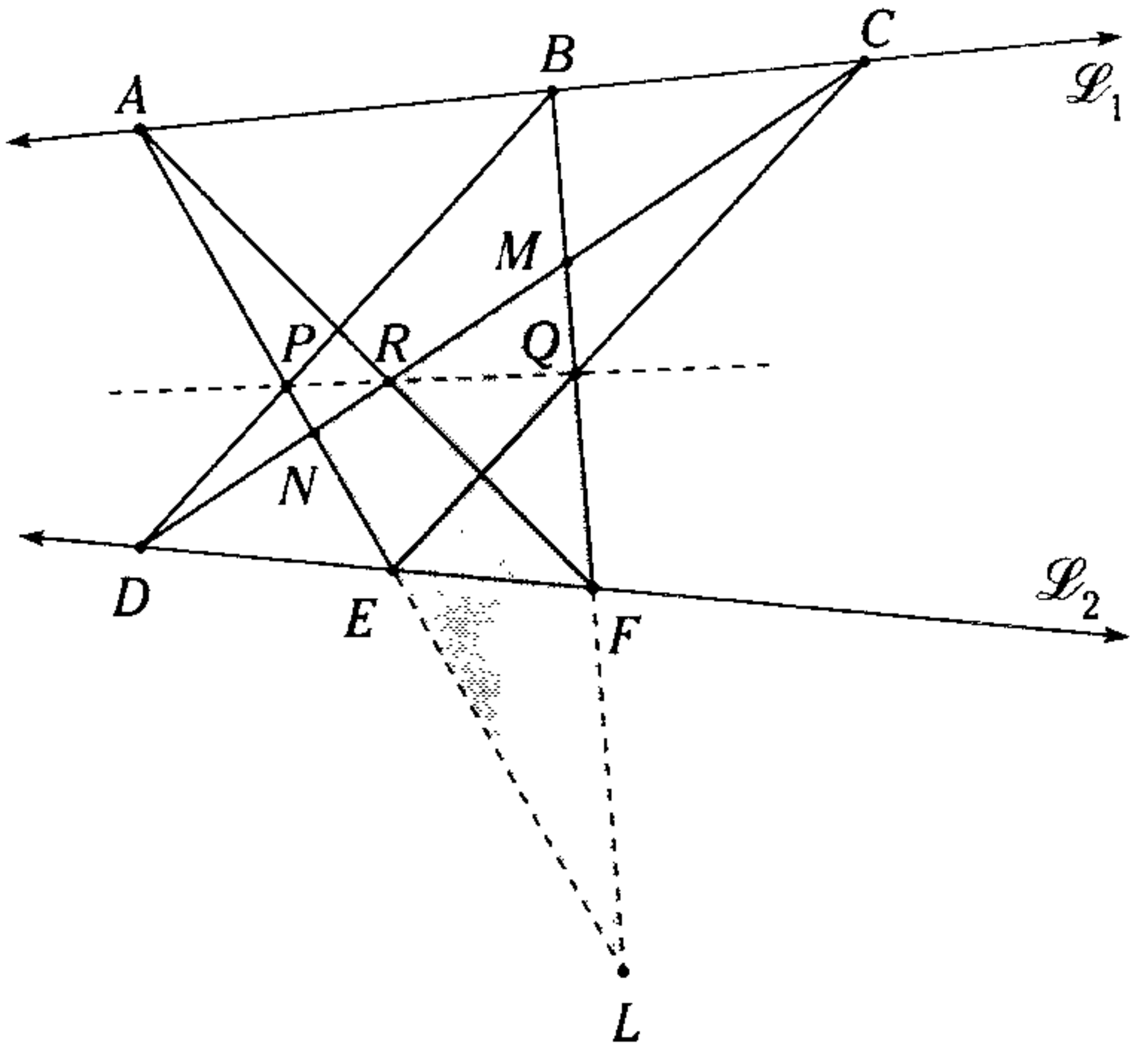
Sean A, B y C tres puntos que pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y D, E y F tres puntos que pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Si $P=\overline{AE}\cap\overline{BD}$; $Q=\overline{BF}\cap\overline{CE}$ y $R=\overline{AF}\cap\overline{CD}$, entonces los puntos P, Q y R son colineales.



(a)

P, Q y R : son puntos colineales.

Demostración



(b)

Figura 12.26

Prolongamos $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ hasta que se intersequen en L. Observamos, además, que M y N son los puntos de intersección de $\overline{CD}$ con $\overline{BF}$ y $\overline{AE}$, respectivamente.

Utilizando el teorema de Menelao en el $\triangle MLN$.

- Para la recta BD

$$\frac{LP}{NP}\cdot\frac{ND}{MD}\cdot\frac{MB}{LB}=1 \qquad \text{(I)}$$

Análogamente

- Para la recta CE

$$\frac{LE}{EN}\cdot\frac{NC}{MC}\cdot\frac{QM}{QL}=1 \qquad \text{(II)}$$

- Para la recta AF

$$\frac{LA}{AN}\cdot\frac{RN}{RM}\cdot\frac{MF}{FL}=1 \qquad \text{(III)}$$

- Para la recta AC

$$\frac{LA}{AN}\cdot\frac{NC}{MC}\cdot\frac{MB}{LB}=1 \qquad \text{(IV)}$$

- Para la recta DF

$$\frac{LE}{EN}\cdot\frac{MF}{FL}\cdot\frac{ND}{MD}=1 \qquad \text{(V)}$$

Entonces de (I).(II).(III)=(IV).(V)

$$\frac{LP}{NP}\cdot\frac{ND}{MD}\cdot\frac{MB}{LB}\cdot\frac{LE}{EN}\cdot\frac{NC}{MC}\cdot\frac{QM}{QL}\cdot\frac{LA}{AN}\cdot\frac{RN}{RM}\cdot\frac{MF}{FL}$$

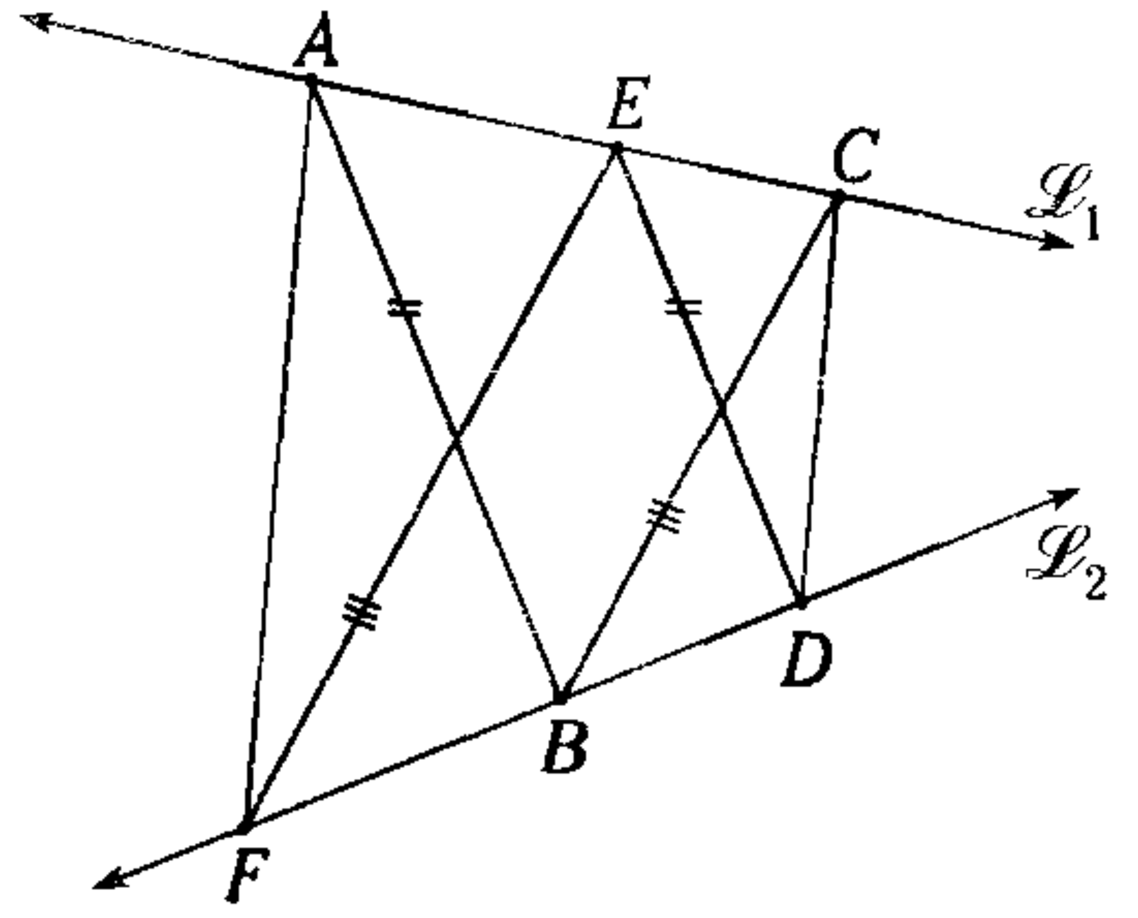
$$=\frac{LA}{AN}\cdot\frac{NC}{MC}\cdot\frac{MB}{LB}\cdot\frac{LE}{EN}\cdot\frac{MF}{FL}\cdot\frac{ND}{MD}$$

$$\therefore\quad \frac{LP}{NP}\cdot\frac{QM}{QL}\cdot\frac{RN}{RM}=1$$

Por el teorema recíproco de Menelao en el $\triangle LMN$, los puntos P, R y Q son colineales.

Teorema

Dado que los puntos A, E y C, pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y F, B y D, a la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$; si $\overline{AB}//\overline{ED}$ y $\overline{EF}//\overline{BC}$, entonces $\overline{AF}//\overline{CD}$.

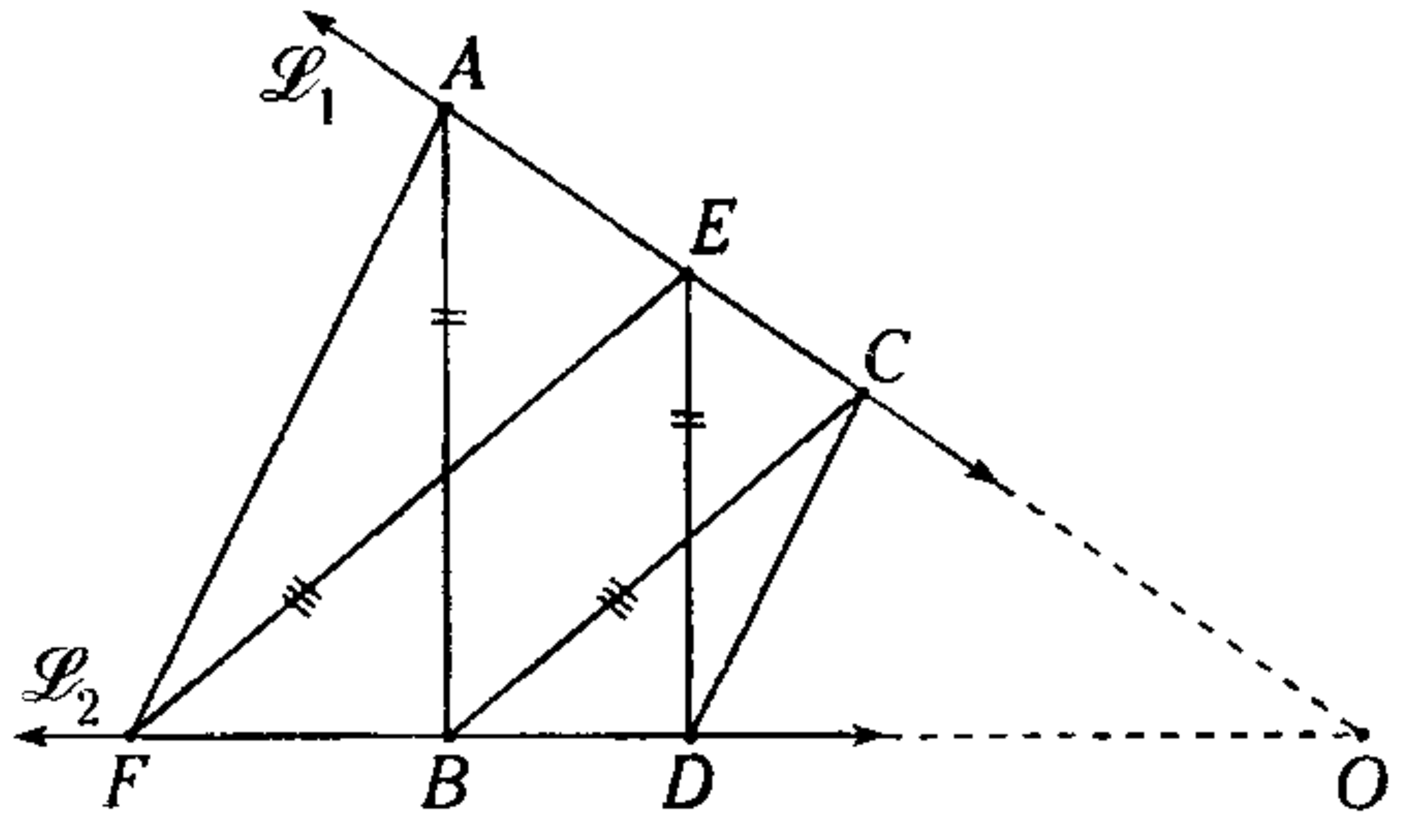


(a)

Si $\overline{AB}//\overline{ED}$ y $\overline{EF}//\overline{BC}$ $\rightarrow$ $\boxed{\overline{AF}//\overline{CD}}$

Demostración

Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} = 0$.



(b)

Figura 12.27

Del corolario del teorema de Tales

- Para $\overline{AB}//\overline{ED}$: $\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{OD}{OB}$ (I)
- Para $\overline{EF}//\overline{BC}$: $\dfrac{OE}{OC}=\dfrac{OF}{OB}$ (II)

(I) entre (II)

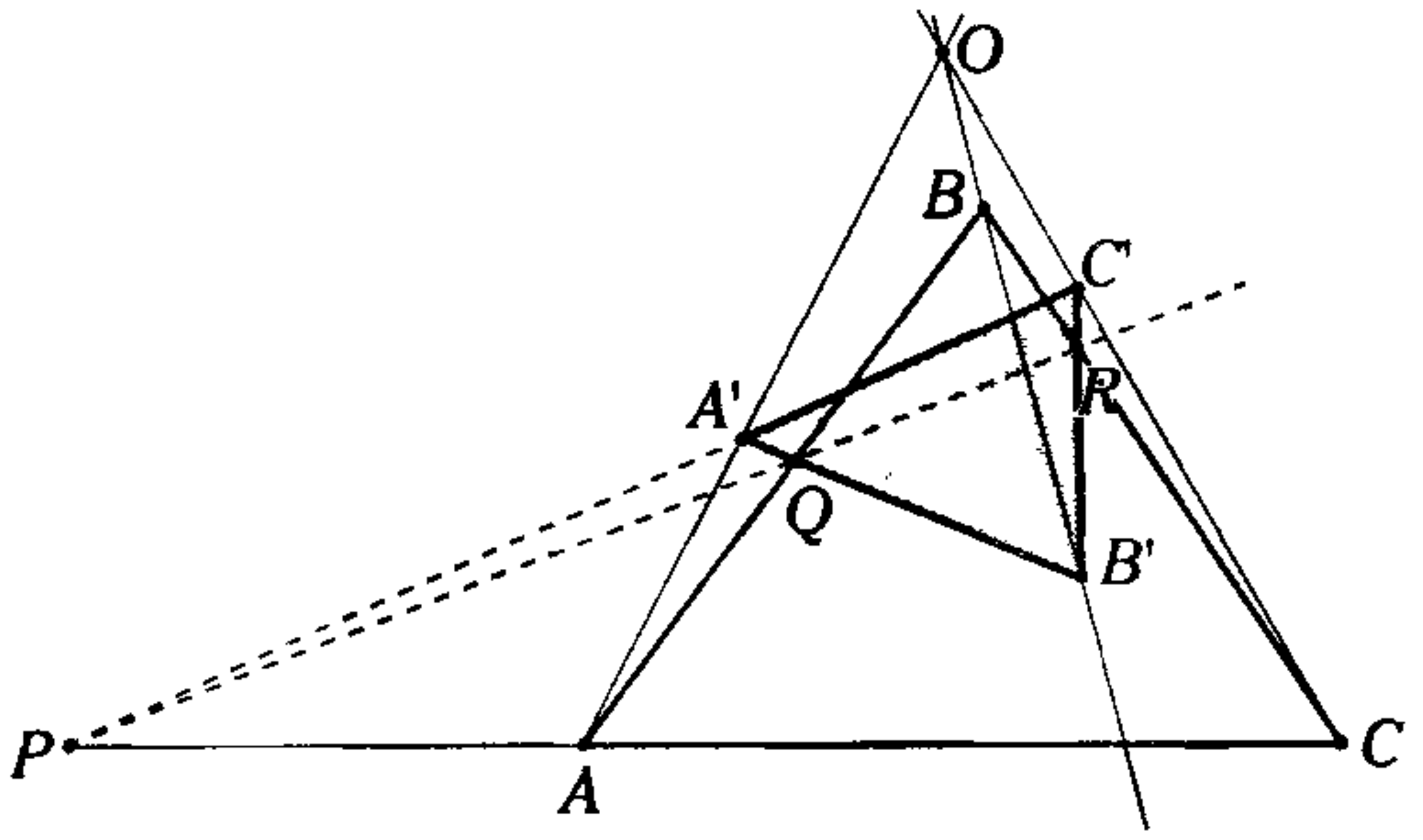
$$\frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OF}$$

Del teorema recíproco del corolario del teorema de Tales para el $\triangle AOF$: $\overline{AF}//\overline{CD}$.

> **Nota**
>
> **Pappus.** Nació alrededor del año 290 en Alejandría-Egipto. Escribió el *Canon de Ptolomeo* y destacó también como filósofo. El principal trabajo de Pappus en geometría es *Synagoge* o *Antología matemática*, que es una colección de 8 libros y que se cree fueron escritos por el año 340. Murió sobre el año 350.

TEOREMA DE DESARGUES

Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ se encuentran en un plano de modo que las rectas AA', BB' y CC' sean concurrentes, entonces los puntos de intersección de los lados correspondientes[1] o de sus respectivas prolongaciones son colineales.



(b)

Figura 12.28

Si $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ son concurrentes en O, entonces P, Q y R son colineales.

---

1 Los vértices **A** y **A'**, **B** y **B'**, **C** y **C'** se consideran correspondientes según definición. Los lados se llaman correspondientes, si unen vértices correspondientes.

Demostración

Del teorema de Menelao, para los triángulos

$\triangle AOB$: secante $\overleftrightarrow{A'B'}$

$$\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{BQ}{AQ}\cdot\frac{OB'}{BB'}=1 \qquad \text{(I)}$$

$\triangle COB$: secante $\overleftrightarrow{B'C'}$

$$\frac{CC'}{OC'}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{OB'}{BB'}=1 \qquad \text{(II)}$$

$\triangle AOC$: secante $\overleftrightarrow{A'C'}$

$$\frac{AP}{PC}\cdot\frac{A'O}{AA'}\cdot\frac{CC'}{OC'}=1 \qquad \text{(III)}$$

De (I) × (III) = (II)

$$\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{BQ}{AQ}\cdot\frac{OB'}{BB'}\cdot\frac{AP}{PC}\cdot\frac{A'O}{AA'}\cdot\frac{CC'}{CC'}=\frac{CC'}{OC'}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{OB'}{BB'}$$

$$\therefore \quad \frac{BQ}{AQ}\cdot\frac{AP}{PC}\cdot\frac{RC}{BR}=1$$

Del teorema recíproco de Menelao para el $\triangle ABC$, P, Q y R son puntos colineales.

Aplicación del teorema de Desargues

Dados tres rayos coplanares, que tienen el mismo origen y secantes a dos rectas. ($\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$).

1. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son secantes (en P).

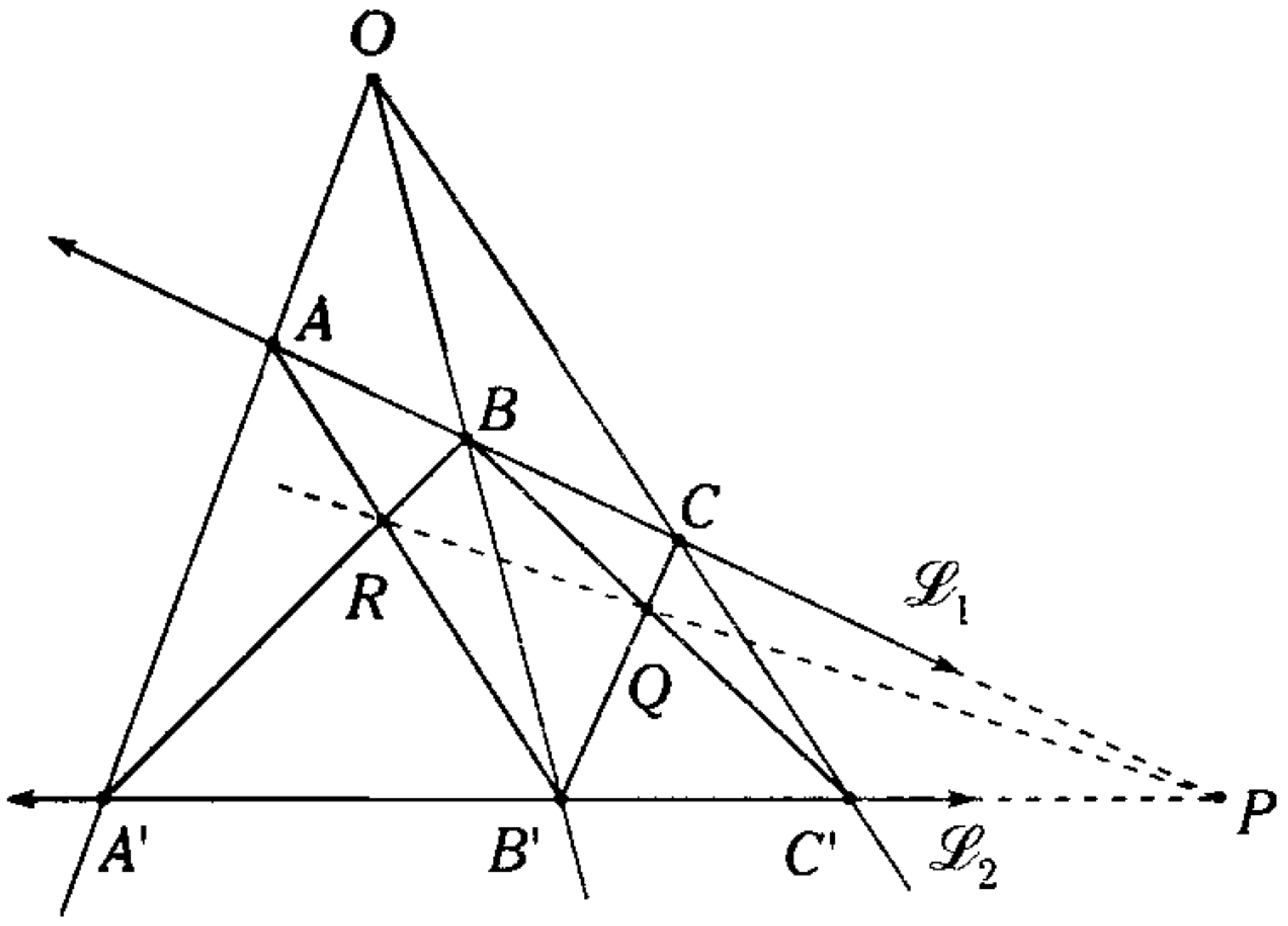


Figura 12.29

→ Los puntos P, Q y R son colineales.

2. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son paralelos.

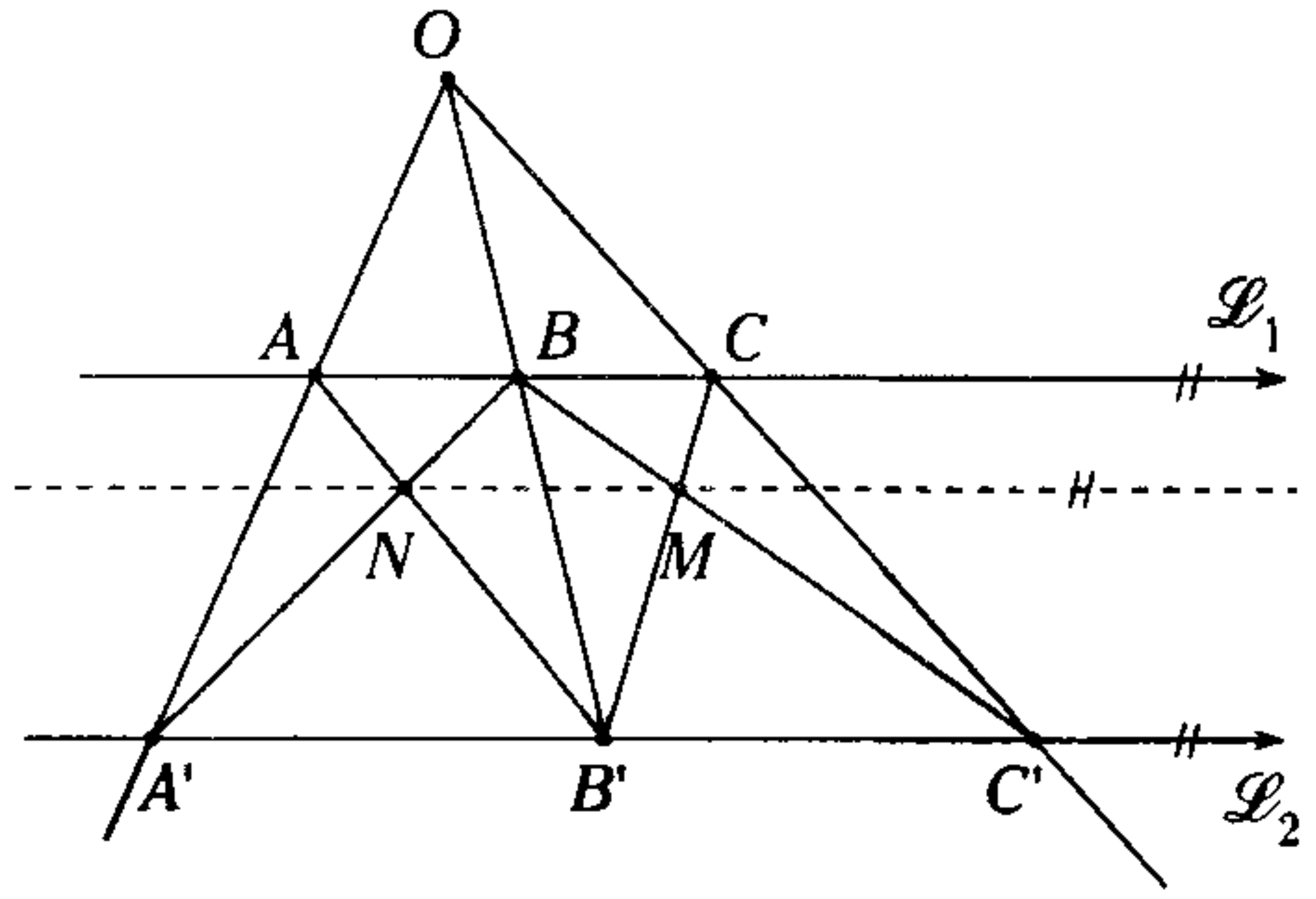


Figura 12.30

→ La recta MN es paralela a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

Nota

Dados $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

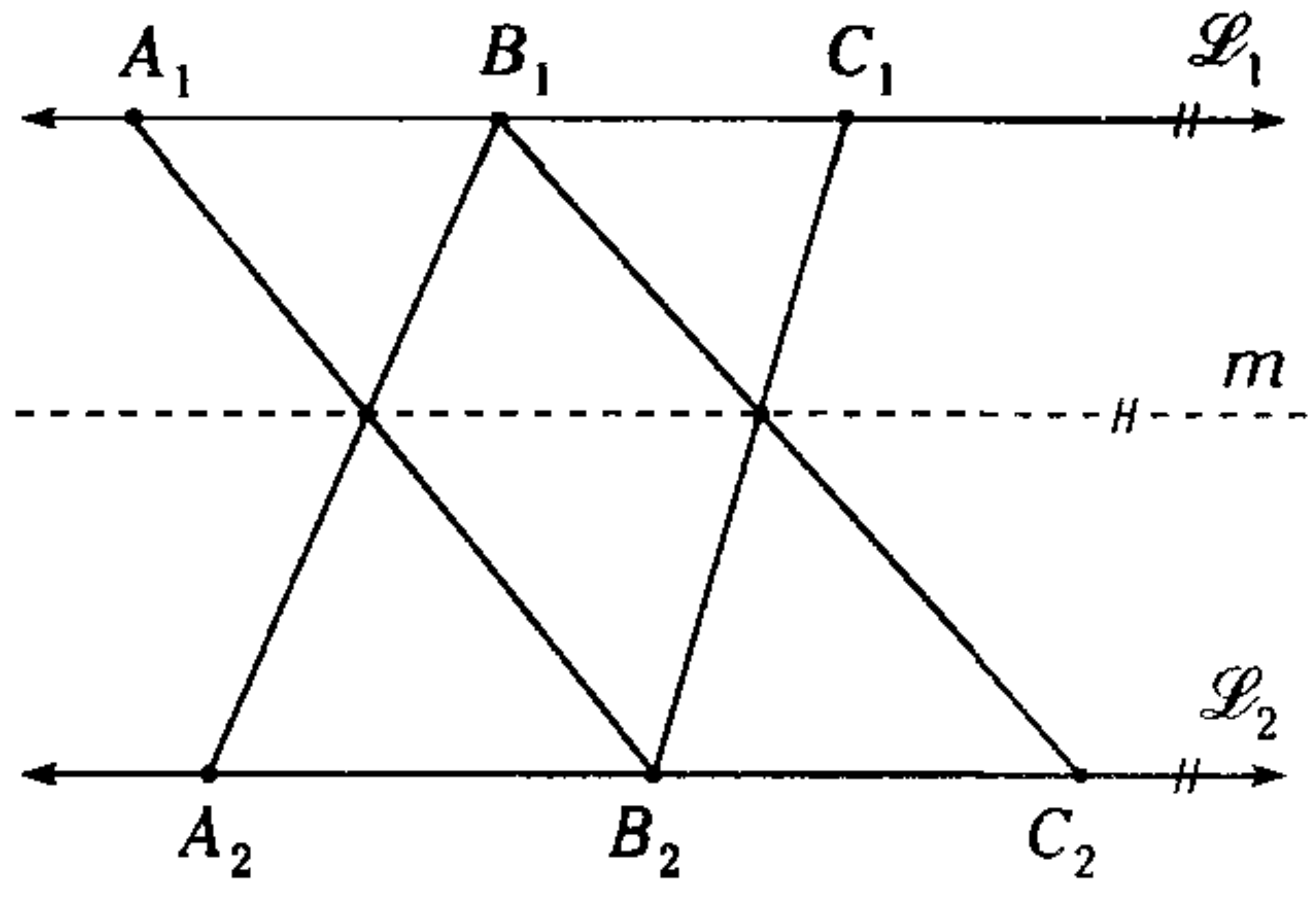


Figura 12.31

entonces las rectas A_2A_1, B_2B_1 y C_2C_1 son concurrentes.

Observación

Se dice que dos triángulos están en perspectiva desde un punto, si la rectas que unen sus vértices son concurrentes. También se dice que dos triángulos están en perspectiva desde una recta, si los pares formados por rectas que contienen sus lados correspondientes se intersecan en puntos colineales.

LECTURA

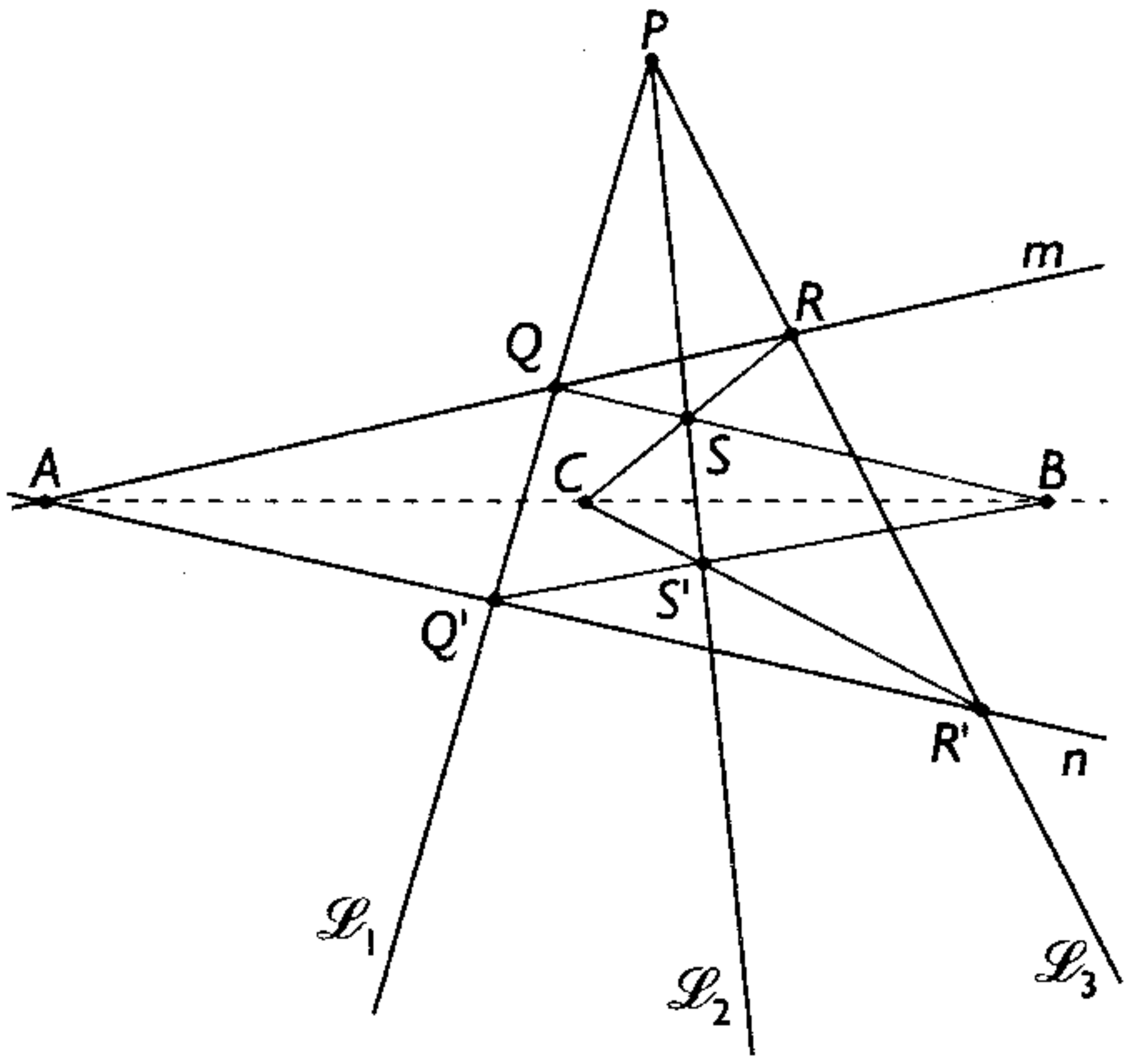
EL NOBLE ARTE DE DIBUJAR POLÍGONOS

El triángulo es el único polígono que se puede construir a partir de los lados, para todos los demás polígonos necesitará conocer las medidas angulares.

Imagine la siguiente situación:

Tiene una circunferencia grande donde están *n* vértices marcados y desea trazar los lados del polígono convexo correspondiente. Desafortunadamente, todas las distancias de un vértice a su siguiente superan en mucho la longitud de la regla de la cual dispone, ¿se podrá trazar dicho polígono? Si dos puntos *determinan* una recta, ¿se podría dibujarla independientemente de la longitud máxima de una regla correcta? Se sabe que por un punto puede trazar evidentemente segmentos tan largos como desee, pero, ¿entre los dos puntos dados?

Tome ahora un lápiz y una regla de longitud L para trazar la famosa *recta* entre A y B (tienen en A y B una distancia AB muy superior a L). Puede empezar a criticar a Euclides ("claro como axioma se sacó el problema de encima") ¡Calma! Sí se puede trazar una recta con la corta regla. El algoritmo es el siguiente:



Por A, trace las rectas arbitrarias m y n, procurando que las distancias de ambas a B sean menores que la longitud de la regla. Marque P exterior a m y n, para luego trazar $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ segmentos desde P. Sean Q y Q' las intersecciones de $\mathscr{L}_1$ con m y n respectivamente. Trace con la regla $\overline{QB}$ y $\overline{Q'B}$ entonces en $\mathscr{L}_2$ ubicamos S y S'. Trace $\overline{RS}$ y $\overline{RS'}$ determinando C. Con la regla trazará $\overline{CB}$ pero C está alineado con A y B y ahora ya puede prolongar $\overline{CB}$ (usando tantas veces la regla como sea necesario) hasta tener el segmento AB trazado. Las rectas no dependen de la longitud de la regla. El problema planteado de polígono inscrito se puede resolver con cualquier regla.

FUENTE: ALSINA, Claudi, *Sorpresas geométricas*. Buenos Aires-Argentina. Red Olímpica. 2000.

BIOGRAFÍA

GERARD DESARGUES (Lyon 1591-1661)

Matemático e ingeniero francés que fue profesor en París así como oficial del cuerpo de ingenieros. Tuvo la fortuna de convivir y trabajar con matemáticos de la talla de René Descartes, Etienne Pascal y su hijo Blaise Pascal.

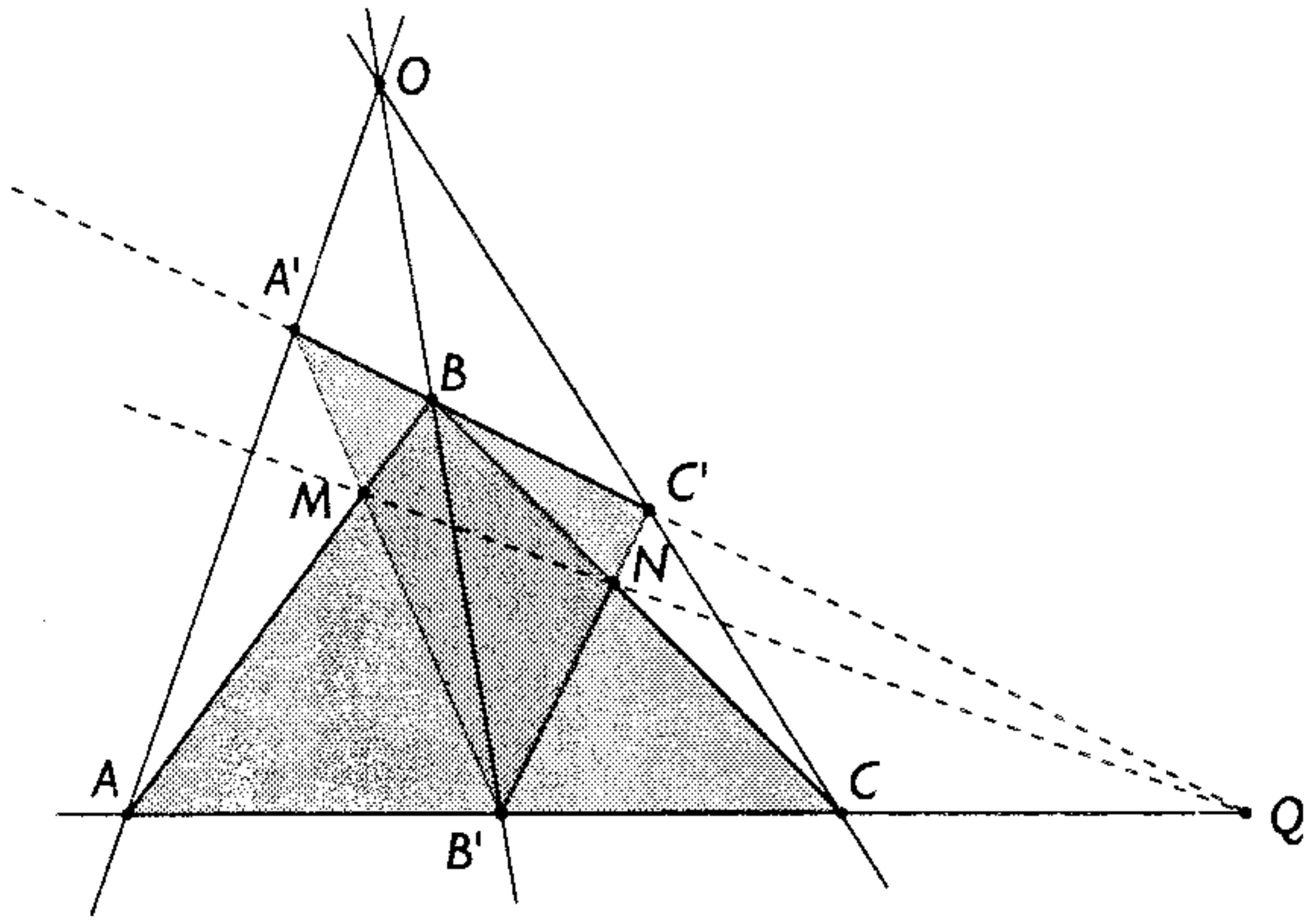
Fue hijo de una familia muy rica, excesivamente rica; por ello, recibió una excelente educación. Al tener los más dedicados maestros de la época y los mejores libros, pudo dedicarse al estudio sin preocuparse por trabajar. Desde muy joven se decidió por las matemáticas, en particular por la geometría, dio los primeros pasos para lo que más adelante se denominaría geometría proyectiva.

Al no tener que privarse de viajar, pasó largos periodos de su vida en París, en donde asistía a las reuniones de los mejores matemáticos de la época; allí trabajaba y discutía sus investigaciones con ellos.

Si bien, la mayor parte de su trabajo fue teórico, Desargues se complacía con las posibles aplicaciones de la geometría. Le gustaba calcular las formas y los tamaños en los que debían cortarse los bloques de piedra para construir un edificio; así también inventar relojes de sol.

Obtuvo resultados muy importantes en el estudio de la *perspectiva*, de hecho uno de los teoremas principales en esa área fue descubierta por él y actualmente, lleva su nombre.

Después de haber llevado una vida llena de comodidades, muere a los 70 años.



Teorema de Desargues. *Si los triángulos ABC y A'B'C' están en perspectiva respecto de O, entonces los puntos M, N y Q son colineales.*

BIOGRAFÍA

JOSEPH DÍAZ GERGONNE (Nancy, 1771 - Montpollier, 1859)

Nació el 19 de junio de 1771 y murió el 4 de mayo de 1859. El padre de Joseph Gergonne fue arquitecto y pintor, muriendo cuando Joseph tenía 12 años de edad. Joseph fue educado en el College de Nancy, que era un lugar religioso.

Después de culminar en el colegio realizó un curso particular, pero como hubo problemas en Francia en ese tiempo, es decir, hubo un acontecimiento trascendental que fue la Revolución francesa, Joseph decidió apoyar.

En 1791, la Asamblea francesa entró en una etapa difícil por lo cual intentaba estabilizar el país debido a la revolución. El rey Luis XVI no contaba con el apoyo de la asamblea, por lo que intentó huir del país en junio de ese año sin éxito. Después que el rey volvió a París, la Asamblea tuvo que reforzar las fronteras de Francia con 100 000 voluntarios para la protección nacional. Gergonne apoyó y se desempeñó como capitán en la protección nacional.

En abril de 1792, Francia entró contra Austria y Prusia. El ataque francés fue replegado rápidamente y se produjo la invasión pruseana a Francia. La Asamblea convocó, otra vez, 100 000 voluntarios militares y Gergonne armó al ejército francés para defender París contra el ejército prusiano. El 20 de setiembre de 1792, Kellerman condujo a las fuerzas francesas en Valmycon y contó con Gergonne en su ejército. El ejército francés derrotó a las fuerzas austriacas y prusianas, que posteriormente se retiraron de Francia.

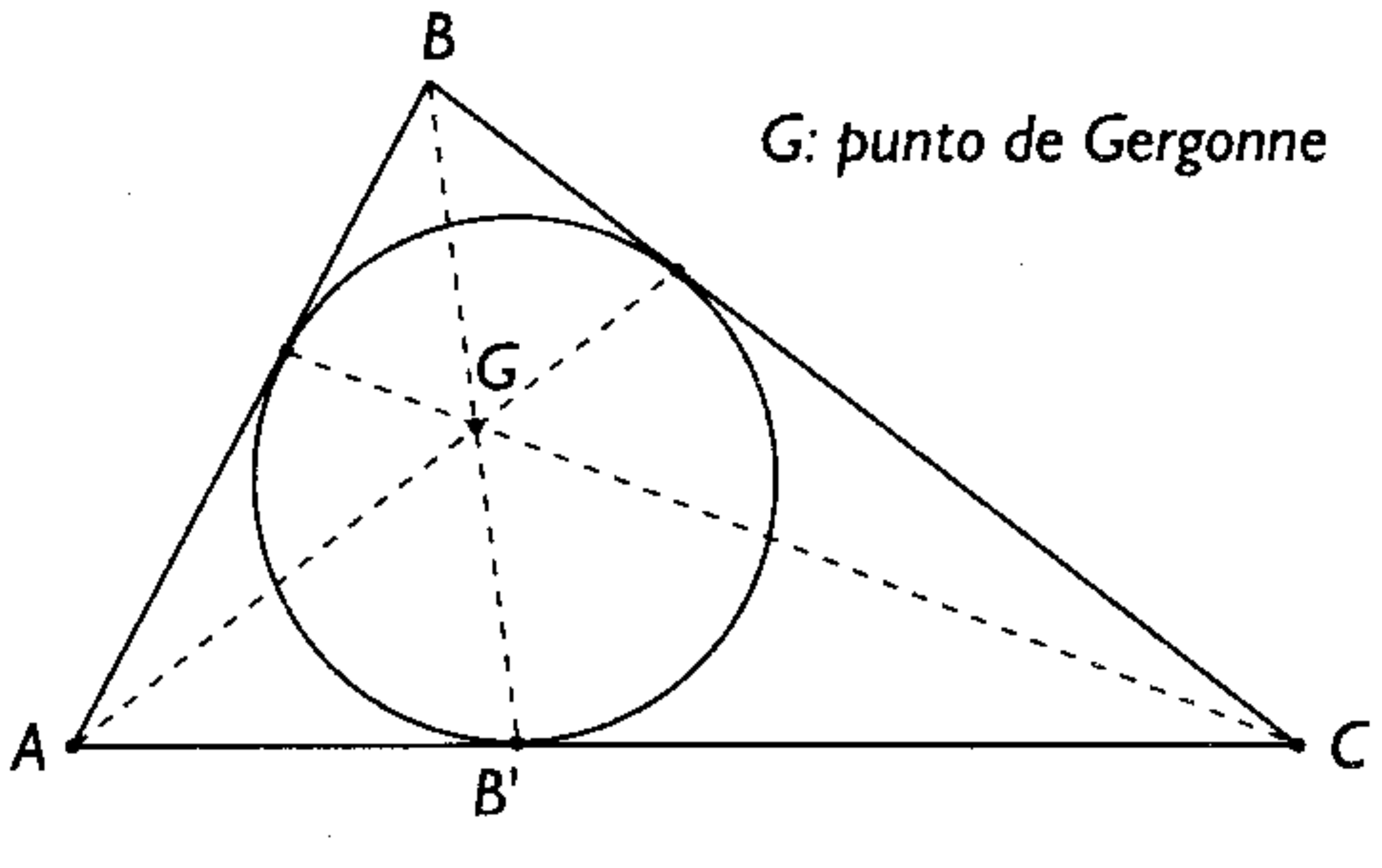
Al año siguiente, Austria y Prusia buscaron apoyo de España, Fredmont y Gran Bretaña, por lo que las fuerzas francesas estuvieron en problemas. Gergonne volvió al ejército francés, esta vez como asesor personal del general del ejército de Mosela.

Gergonne pasó un mes en la escuela de artillería de Chalons en 1794 y luego le comisionaron como teniente.

Después de varias guerras, tuvo grandes campañas militares con Napoleón Bonaparte en los años siguientes; pero Gergonne, resultó excluido. El matrimonio lo impulsó a concentrarse en matemáticas, Monge, como director del Écotlee Polytechnique en París, influenció su carrera.

Encontrando y resolviendo problemas matemáticos, resultó innegable su interés por la geometría, consiguió publicar su propio diario matemático, que apareció en 1810. El diario fue llamado *Les pures et los appliqueés de Annales de Mathématiques* pero oficialmente se le conocía como *Análisis de Gergonne*. Muchos matemáticos famosos publicaron los ventiún volúmenes del *Análisis de Gergonne* que apareció durante un periodo de veintidós años, donde Gergonne había publicado alrededor de 200 artículos.

En 1830, Gergonne fue rector de la Universidad de Montpellier, pero él decidió publicar en su diario sus aportes matemáticos mensualmente hasta 1832. Posteriormente, se retiró en 1844 a los 73 años.



Gergonne proporcionó una solución elegante al problema de Apolonio en 1816. Este problema es encontrar un círculo que toque tres círculos dados. Gergonne introdujo la palabra polar y el principio de la dualidad en geometría proyectiva.

Problemas Resueltos

Problema 1

Dado un cuadrado $ABCD$, en $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos N y M, respectivamente, tal que $AN=MD$ y m∢MBN=40°. Si $\overline{BN} \cap \overline{AM} = \{P\}$ y $\overline{CN} \cap \overline{BM} = \{Q\}$, calcule m∢$PDQ$.

A) 40° B) 60° C) 45°
D) 80° E) 50°

Resolución

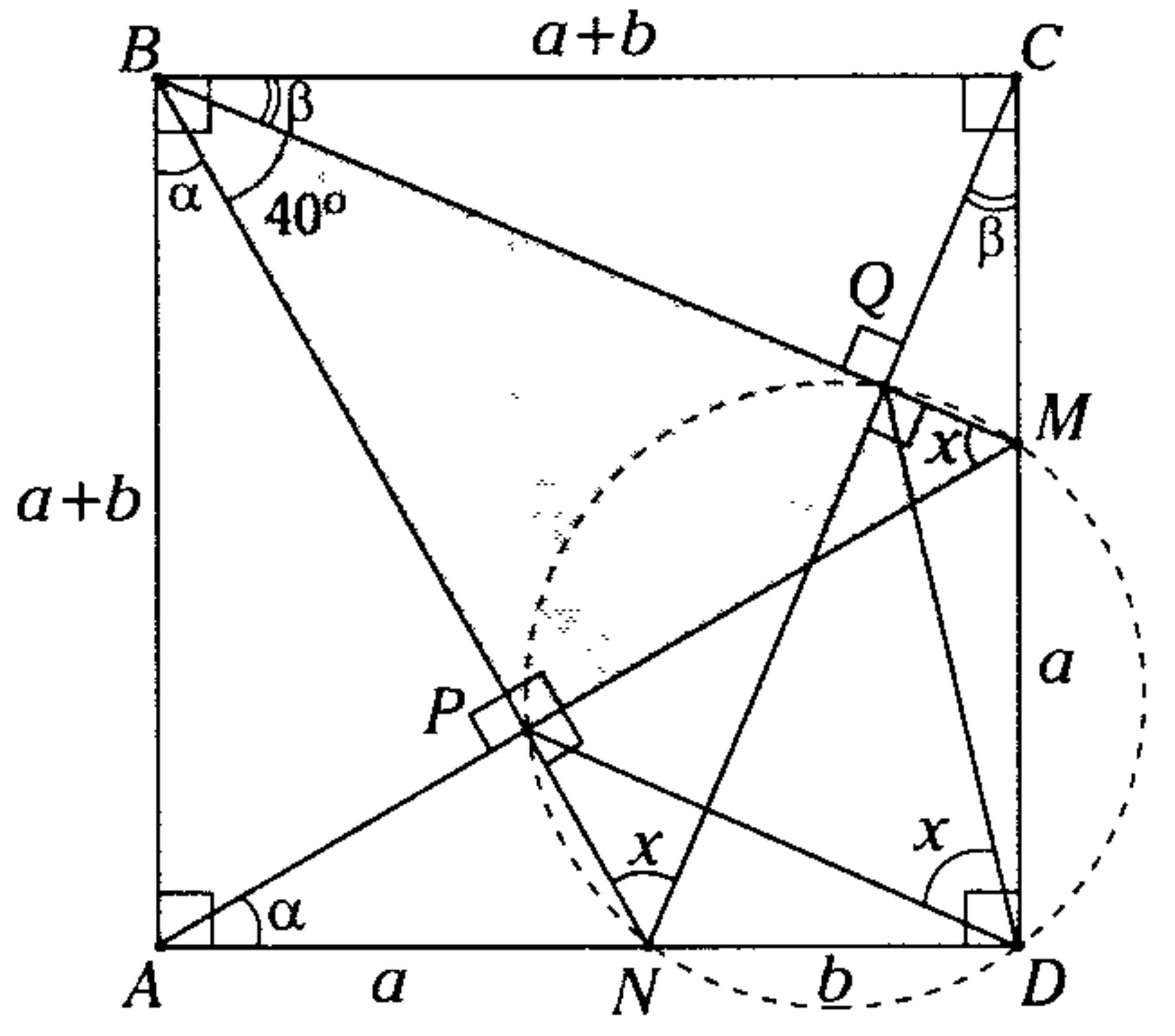


Figura 12.32

Piden m∢$PDQ=x$

En el cuadrado $ABCD$ según el dato

$AN=MD=a \rightarrow$ ⊿ABN ≅ ⊿DAM (caso L.A.L.)

$\rightarrow$ m∢ABN = m∢DAM=α

$\therefore$ m∢NPM = 90° (I)

En $ABCD$, si $ND=b \rightarrow CM=b$

⊿NCD ≅ ⊿MBC (caso L.A.L.)

$\rightarrow$ m∢NCD = m∢MBC=β

$\therefore$ m∢NQM = 90° (II)

De (I) y (II)

$NPMD$: cuadrilátero inscriptible
$NQMD$: cuadrilátero inscriptible

Por lo tanto N, P, Q, M y D son puntos concíclicos (teorema de configuración)

$\rightarrow$ m∢PNQ = m∢PDQ = m∢PMQ = x

Luego en el ⊿BMP

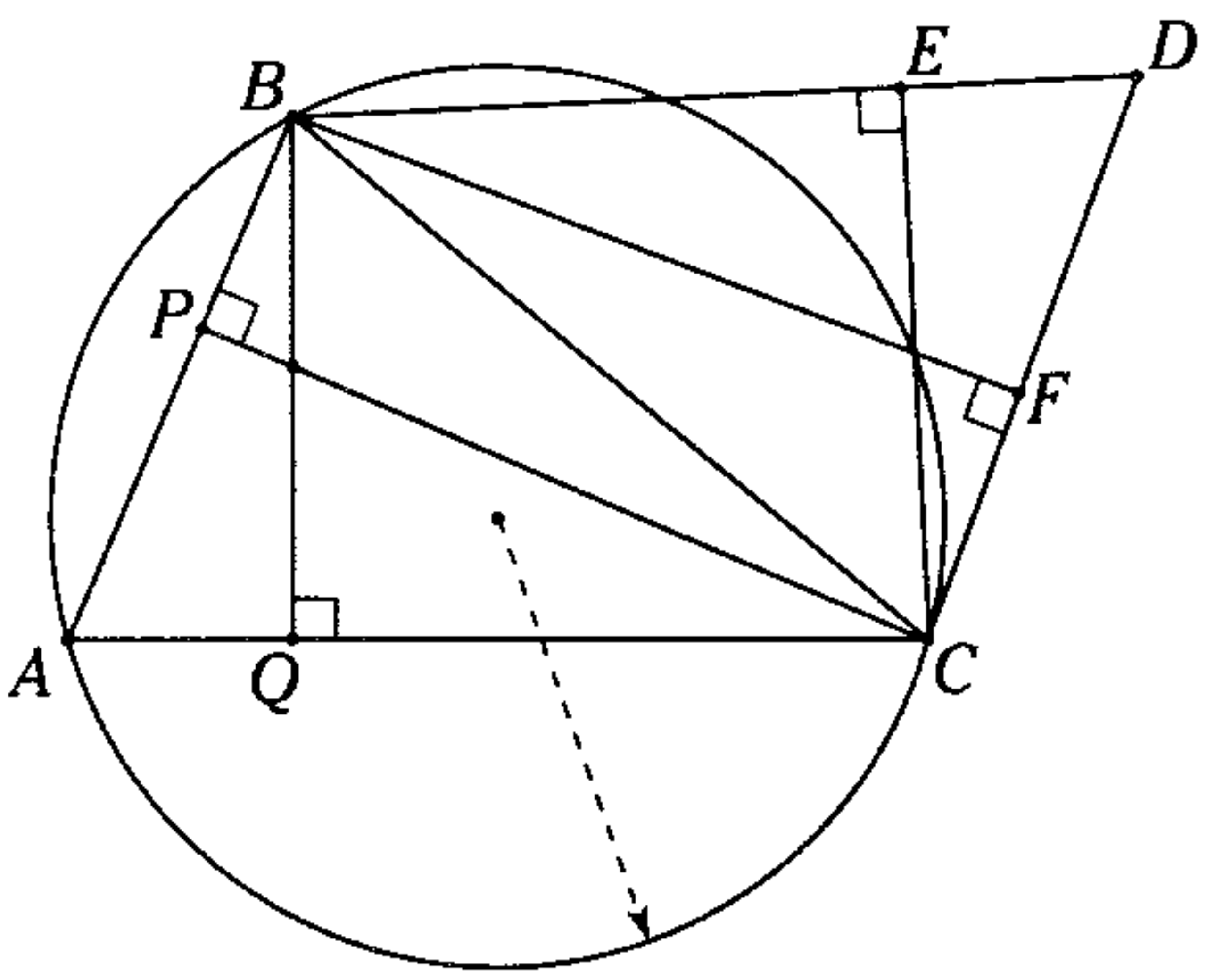
$40° + x = 90°$

$\therefore\ x = 50°$

CLAVE E

Problema 2

Según la figura, calcule $\dfrac{PQ}{EF}$.



A) 1 B) 1/2 C) 1/4
D) 2/3 E) 1/3

Resolución

Piden $\dfrac{PQ}{EF}$, según la figura los cuadriláteros $BPQC$, $BEFC$ y $BPCE$ son inscriptibles.

$\rightarrow$ El hexágono $BPQCFE$ es inscriptible (teorema de configuración)

- $\square ABNC$: cuadrilátero inscrito
  $\rightarrow$ m$\sphericalangle FNC$=m$\sphericalangle BAC=\alpha$
- $\triangle APC$: sea m$\sphericalangle PCA=\theta$
  $\rightarrow$ en el $\triangle NFC$: m$\sphericalangle NCF=\theta$

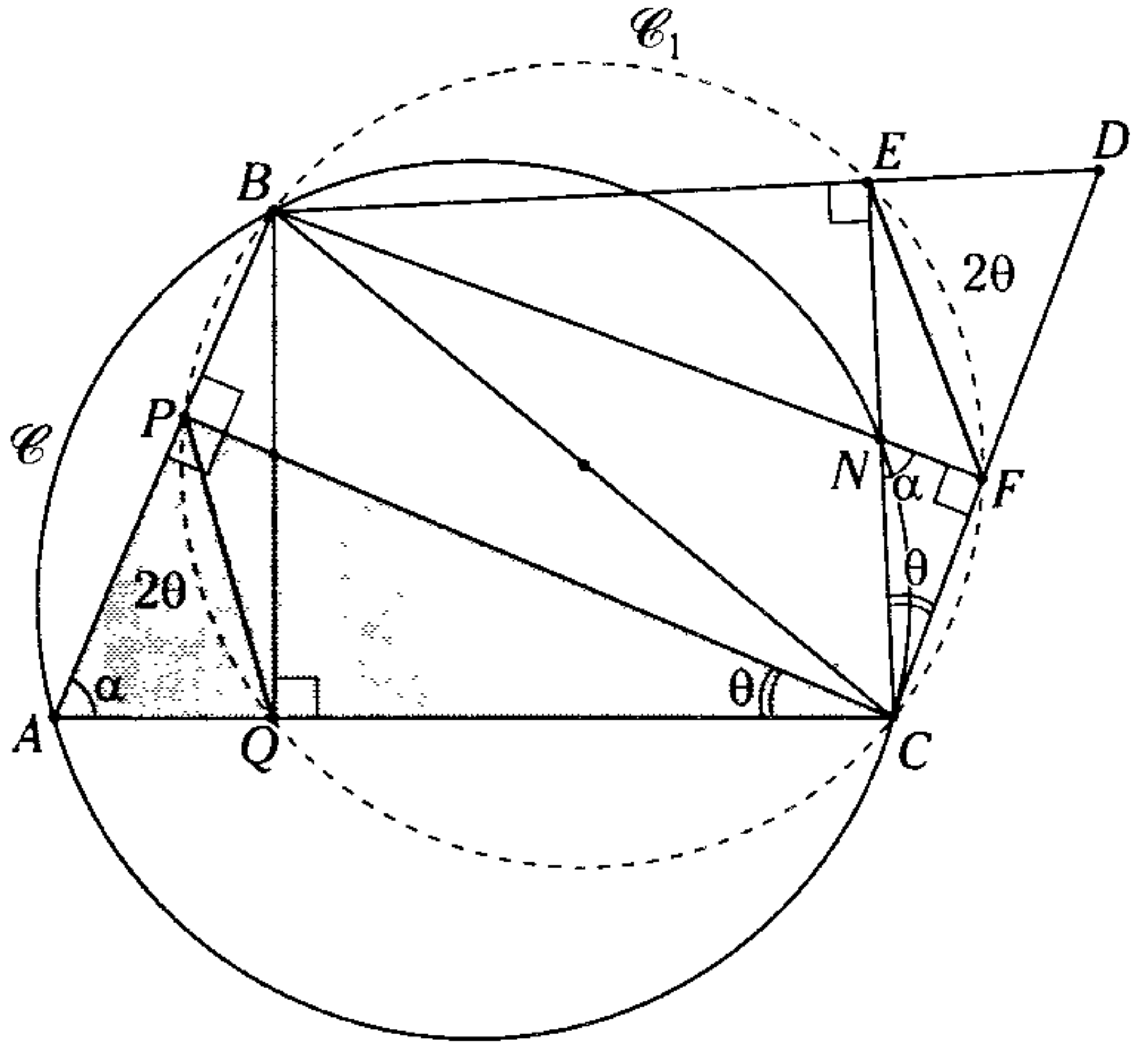


Figura 12.33

Luego

$m\widehat{PQ}=m\widehat{EF}=2\theta$

$\rightarrow PQ=EF$

$\therefore \dfrac{PQ}{EF}=1$

CLAVE A

Problema 3

En un rectángulo *ABCD* de centro *O*, en la región exterior y relativa al lado *AB* se ubica el punto *Q* y en $\overline{AD}$ el punto *P*; tal que $\overline{QO}$ es bisectriz del ángulo *BQA* y $\overline{PO}$ es bisectriz del ángulo *BPD*. Si $AQ>BQ$, calcule la m$\sphericalangle BQP$.

A) 72° B) 60° C) 75°
D) 90° E) 74°

Resolución

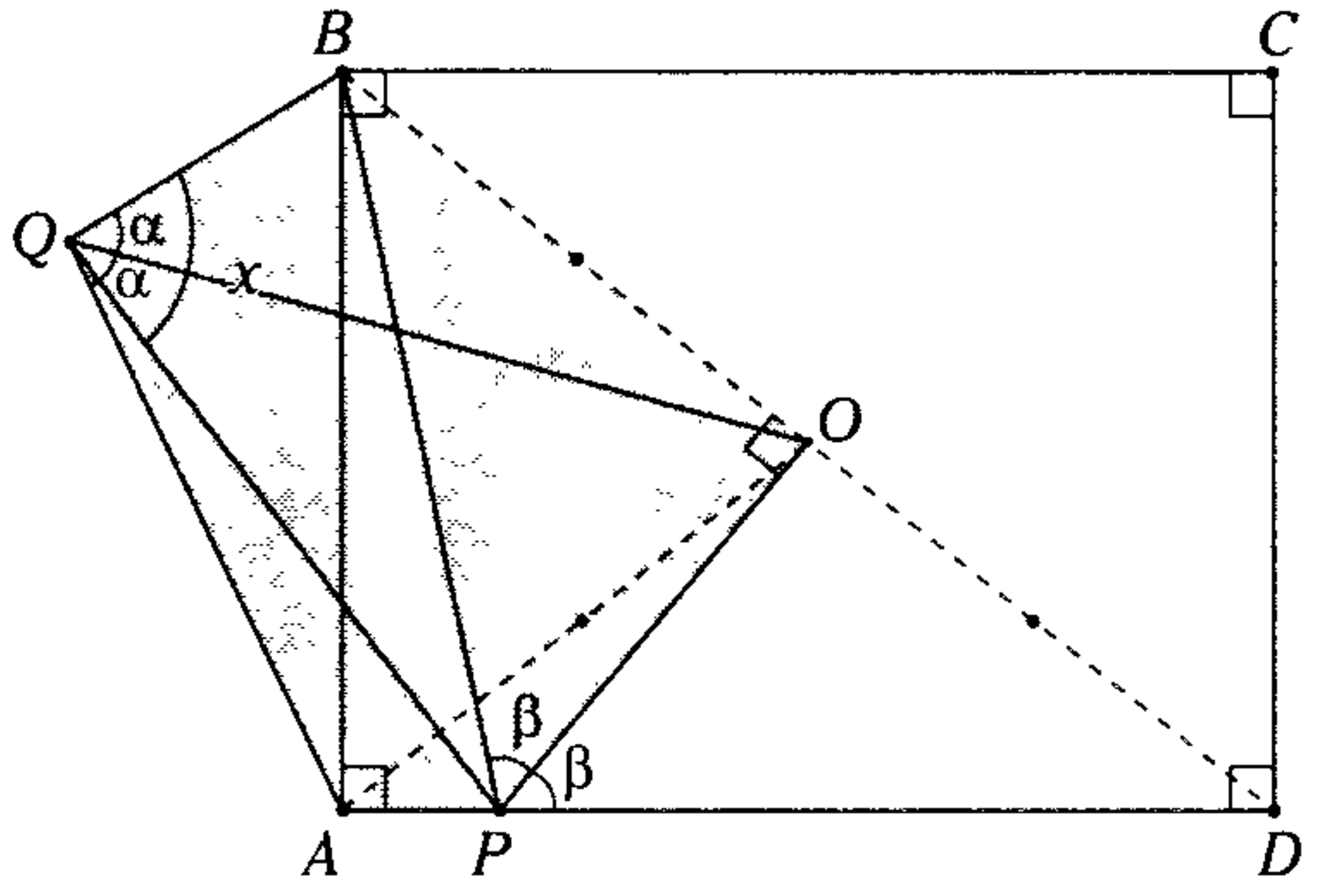


Figura 12.34

Piden m$\sphericalangle BQP=x$

Según la figura, en el rectángulo *ABCD* se cumple que

$BO=OA=OD$

En el $\diamond QBOA$, si

$AQ>BQ, AO=BO$ y m$\sphericalangle BQO$=m$\sphericalangle OQA=\alpha$

se deduce que el cuadrilátero *QBOA* es inscriptible.

En el $\triangle BPD$:

$BO=OD$ y m$\sphericalangle BPO$ = m$\sphericalangle OPD=\beta$

se deduce que m$\sphericalangle POB=90°$

$\rightarrow$ El cuadrilátero *ABOP* es inscriptible.

Por teorema de configuración, *Q*, *B*, *O*, *P* y *A* son puntos concíclicos.

Luego, en la figura, el cuadrilátero *QBOP* es inscriptible.

$\rightarrow$ m$\sphericalangle BQP$ + m$\sphericalangle BOP$ = 180°

$x+90°=180°$

$\therefore x=90°$

CLAVE D

Problema 4

Se tienen los cuadrados $ABCD$ y $DEFG$ (E en $\overline{CD}$ y G en la prolongación de $\overline{AD}$). Calcule la medida del ángulo determinado por $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{CG}$.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

Resolución

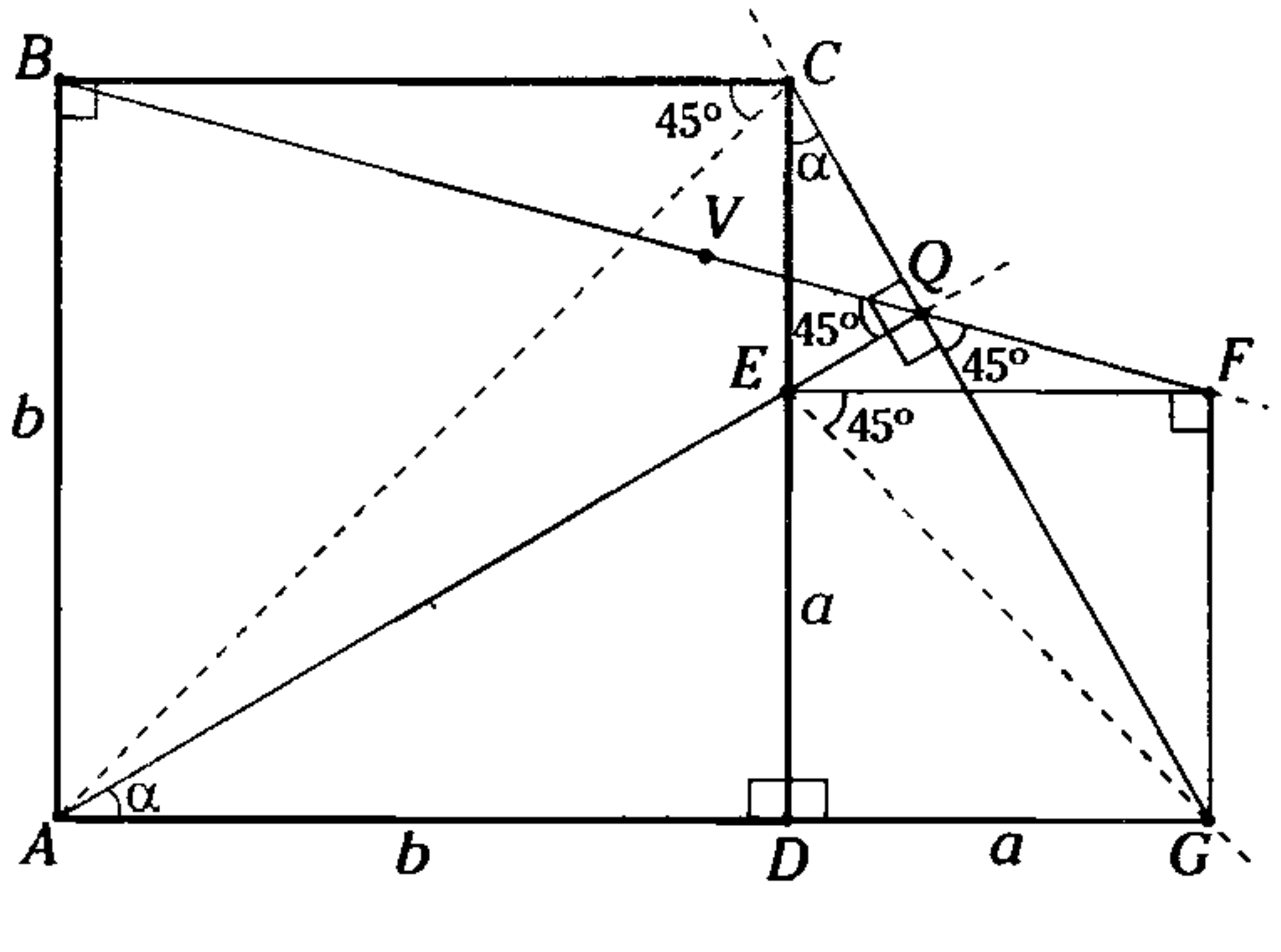


Figura 12.35

Según la figura, el triángulo ADE es congruente al triángulo CDG (L.A.L.)

$\rightarrow$ $m\sphericalangle DAE = m\sphericalangle DCG = \alpha$

del $\bowtie CQAD$: $90° + \alpha = \alpha + m\sphericalangle CQE$

$\therefore$ $m\sphericalangle CQE = 90°$

Luego el cuadrilátero $EQFG$ es inscriptible

$\rightarrow$ $m\sphericalangle EGF = m\sphericalangle AQV = 45°$

Del cuadrilátero inscriptible $ABCQ$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle AQV = m\sphericalangle BCA = 45°$

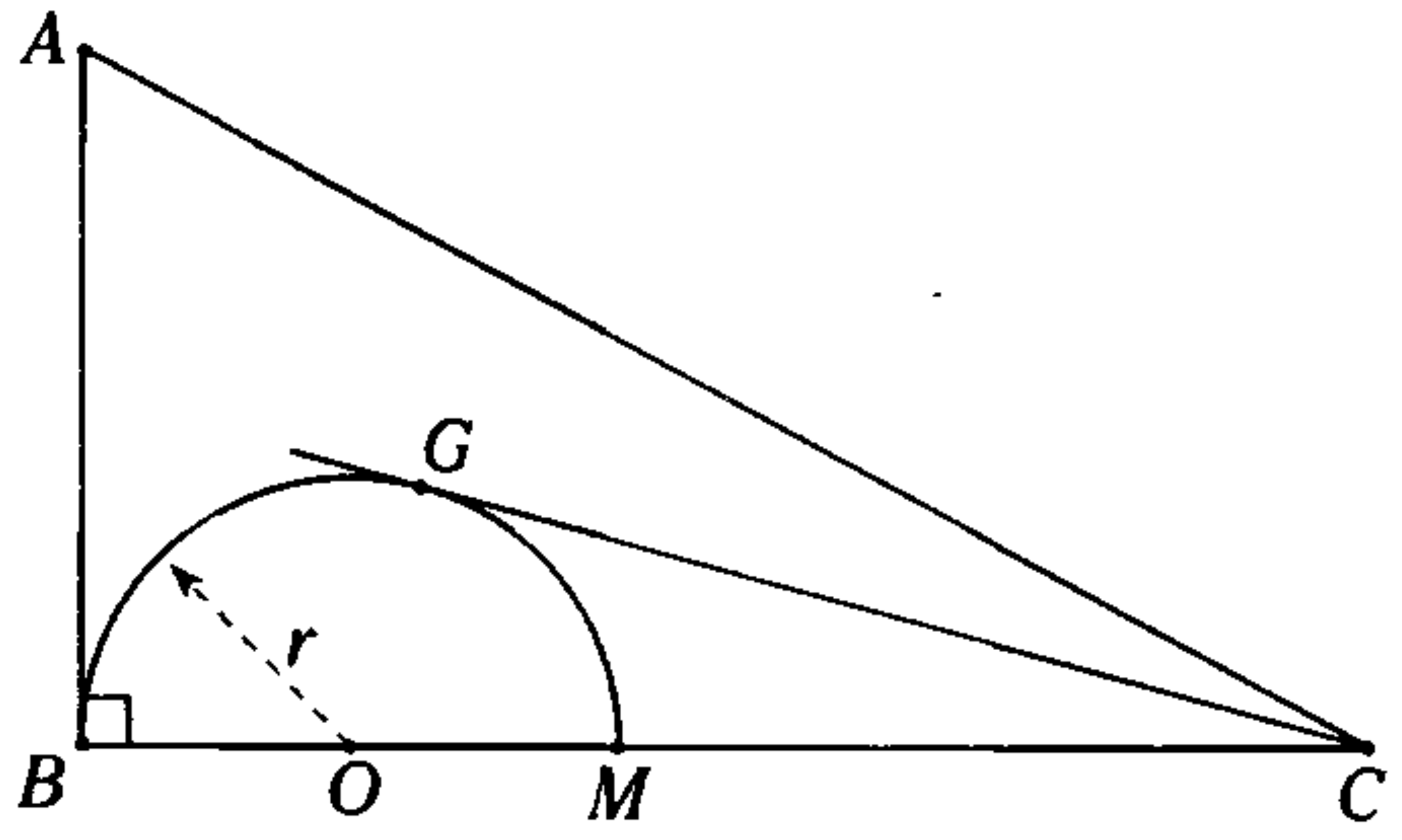
se deduce que B, Q y F son colineales.

Entonces, la medida del ángulo determinado por $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{CG}$ es 45°.

CLAVE C

Problema 5

En la figura, G es punto de tangencia y baricentro para la región triangular ABC. Si r=2 cm, calcule MC.



A) 2 cm B) 3 cm C) 4 cm
D) 5 cm E) 6 cm

Resolución

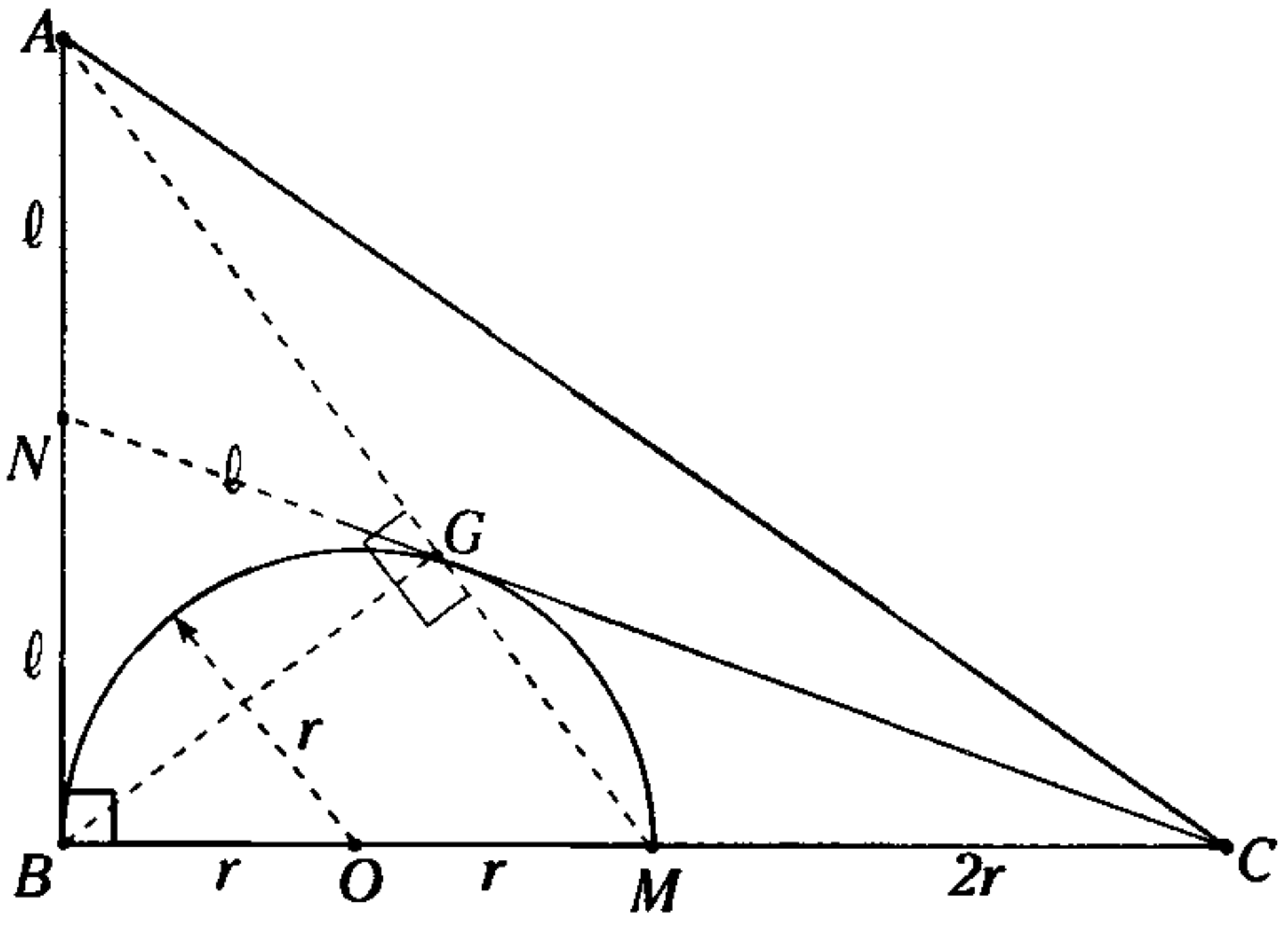


Figura 12.36

Piden MC.

Se prolonga $\overline{CG}$ hasta N ($N \in \overline{AB}$)

$\rightarrow$ $\overline{CN}$: mediana, sea $AN = NB = \ell$

Por propiedad $BN = NG = \ell$

Se deduce en $\triangle ABG$ que $m\sphericalangle AGB = 90°$, por la semicircunferencia $m\sphericalangle BGM = 90°$.

$\rightarrow$ A, G y M son colineales.

Luego, $\overline{AM}$ es mediana relativa a $\overline{BC}$

$\rightarrow$ $MC = 2r$

$\therefore$ $MC = 4$ cm

CLAVE C

Problema 6

En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{BM}$ y la altura $\overline{BH}$, tal que $AC=6$, $MH=1$ y m$\sphericalangle ACB=50°$. Si en el triángulo MBC, se traza la altura CN, calcule m$\sphericalangle ANM$.

A) 40° B) 25° C) 50°
D) 60° E) 65°

Resolución

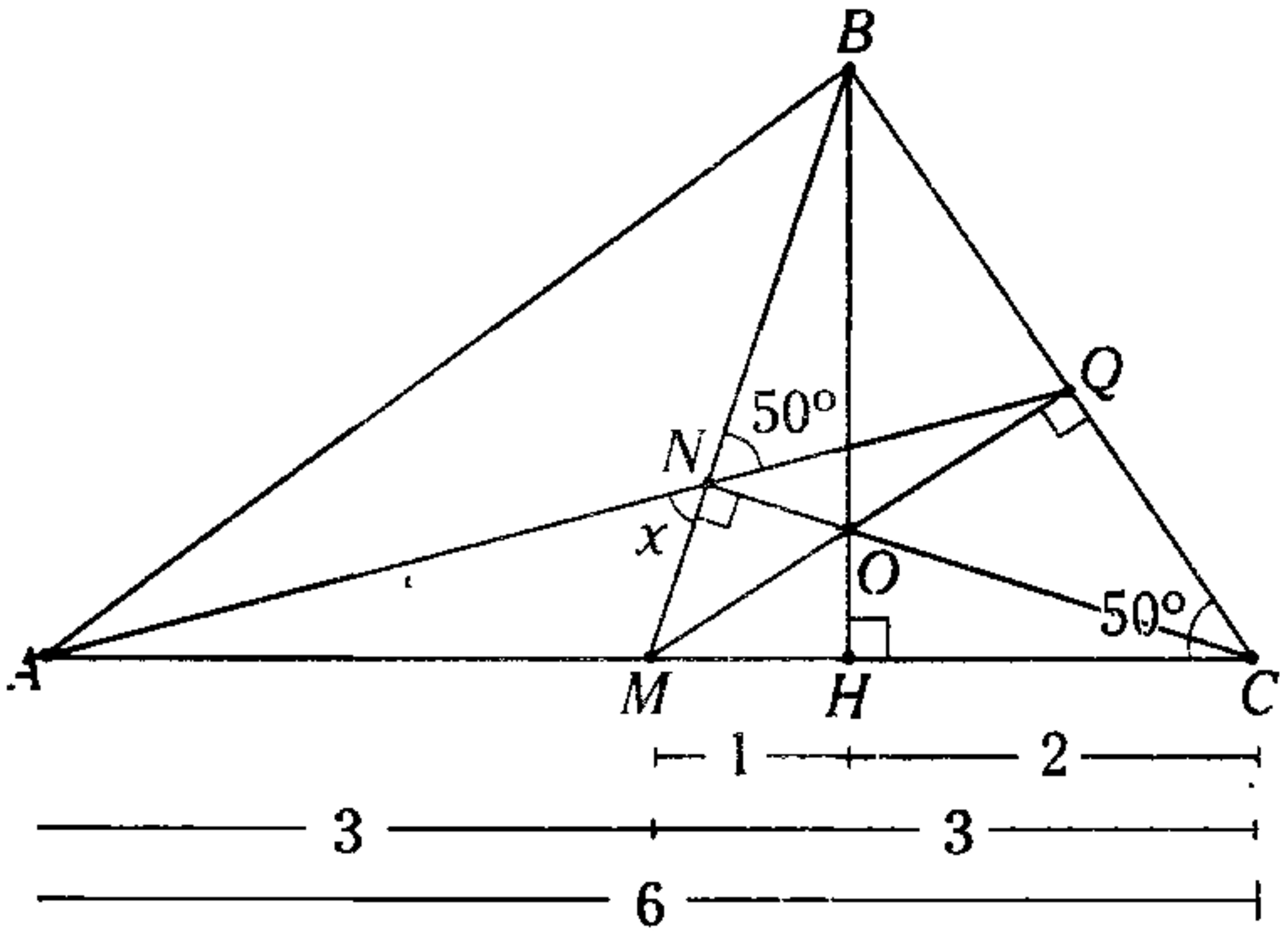


Figura 12.37

Piden m$\sphericalangle ANM = x$

En el $\triangle MBC$: O es ortocentro

→ $\overline{MQ}$ es altura

Como $\overline{BM}$: mediana

$AM=MC=3$

Luego: $\dfrac{CH}{HM}=\dfrac{AC}{AM}=2$

Entonces, H y A son puntos conjugados armónicos de M y C.

→ los puntos A, N y Q son colineales.

$\therefore$ $MNQC$ es cuadrilátero inscriptible.

$\therefore$ $x=50°$

CLAVE C

Problema 7

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BE, mientras que en el triángulo ABE se traza la bisectriz interior AM. Si la recta CM interseca a $\overline{AB}$ en N, calcule m$\sphericalangle NEA$. Considere que m$\sphericalangle ABE=80°$, m$\sphericalangle EBC=50°$ y m$\sphericalangle BAC=40°$.

A) 40° B) 30° C) 50°
D) 60° E) 45°

Resolución

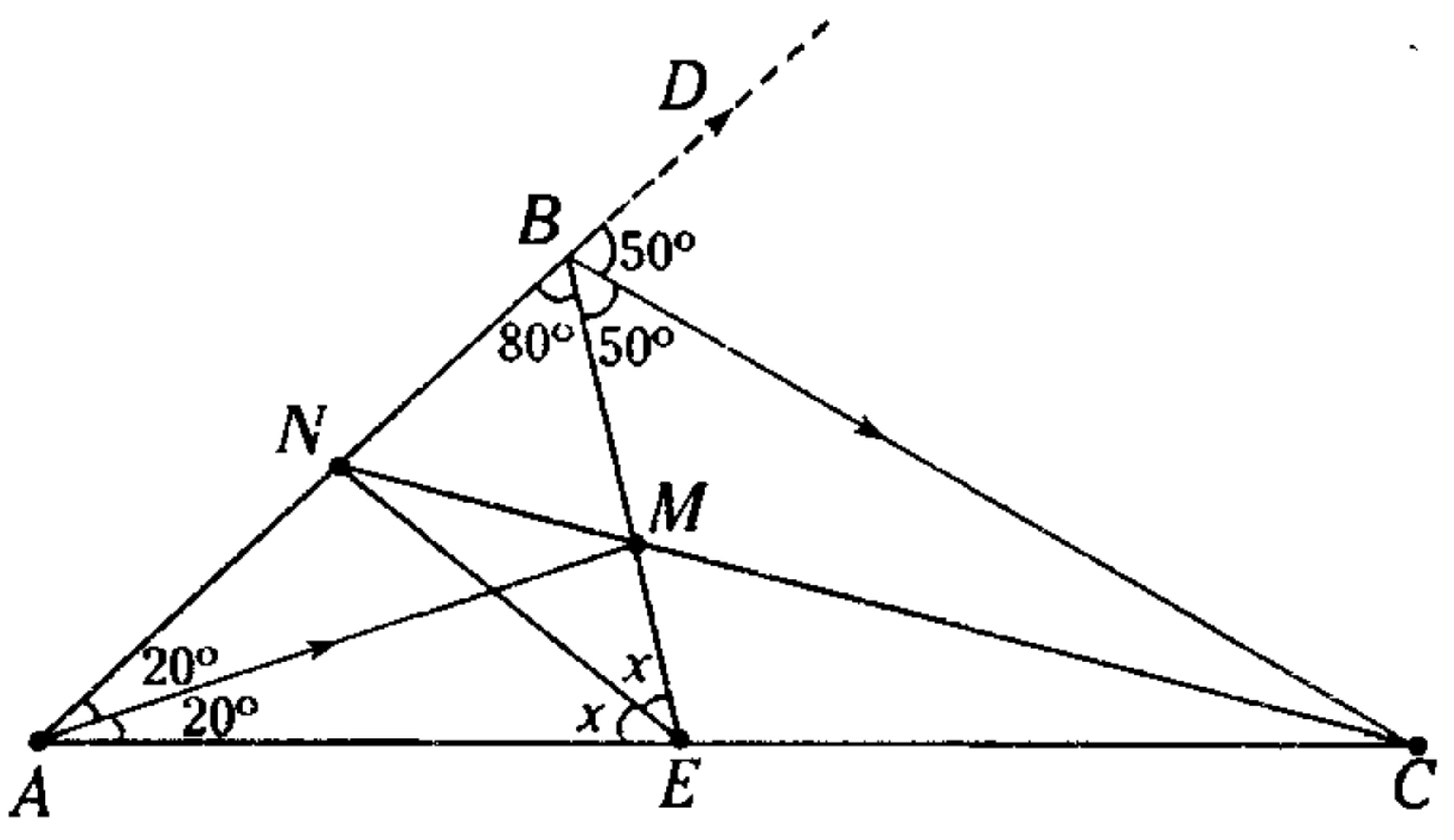


Figura 12.38

Piden m$\sphericalangle AEN = x$.

Si prolongamos $\overline{AB}$ hasta D m$\sphericalangle DBC=50°$

$\overline{BC}$: bisectriz exterior del $\triangle ABE$.

$\overline{AM}$: bisectriz interior del $\triangle ABE$.

Si trazamos la bisectriz interior desde E, en el $\triangle ABE$, los pies de dicha bisectriz, M y C serían colineales (teorema de configuración).

Así, el recíproco de este teorema: $\overline{EN}$ es bisectriz interior de $\triangle ABE$.

$\therefore$ m$\sphericalangle BEN$ = m$\sphericalangle NEA = x$

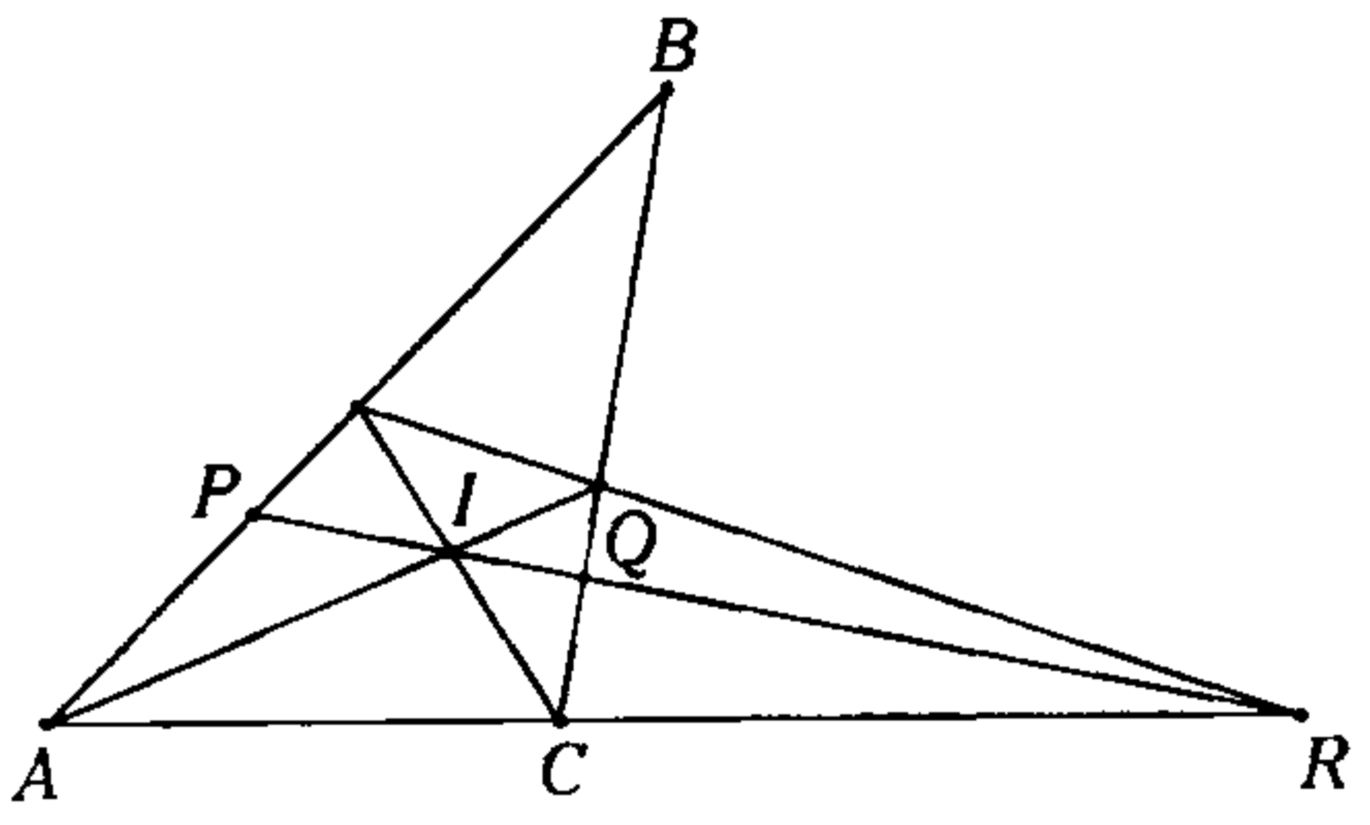
Luego en el $\triangle ABE$: $40° + 80° + 2x = 180°$

$\therefore$ $x = 30°$

CLAVE B

Problema 8

En la figura mostrada, I es incentro del triángulo ABC. Si $PI=a$ y $IQ=b$, calcule la distancia de B al punto medio de $\overline{IR}$.



A) $\dfrac{a+b}{2}$ B) $\dfrac{ab}{a+b}$ C) $a-b$

D) $\dfrac{ab}{a-b}$ E) $2\sqrt{ab}$

Resolución

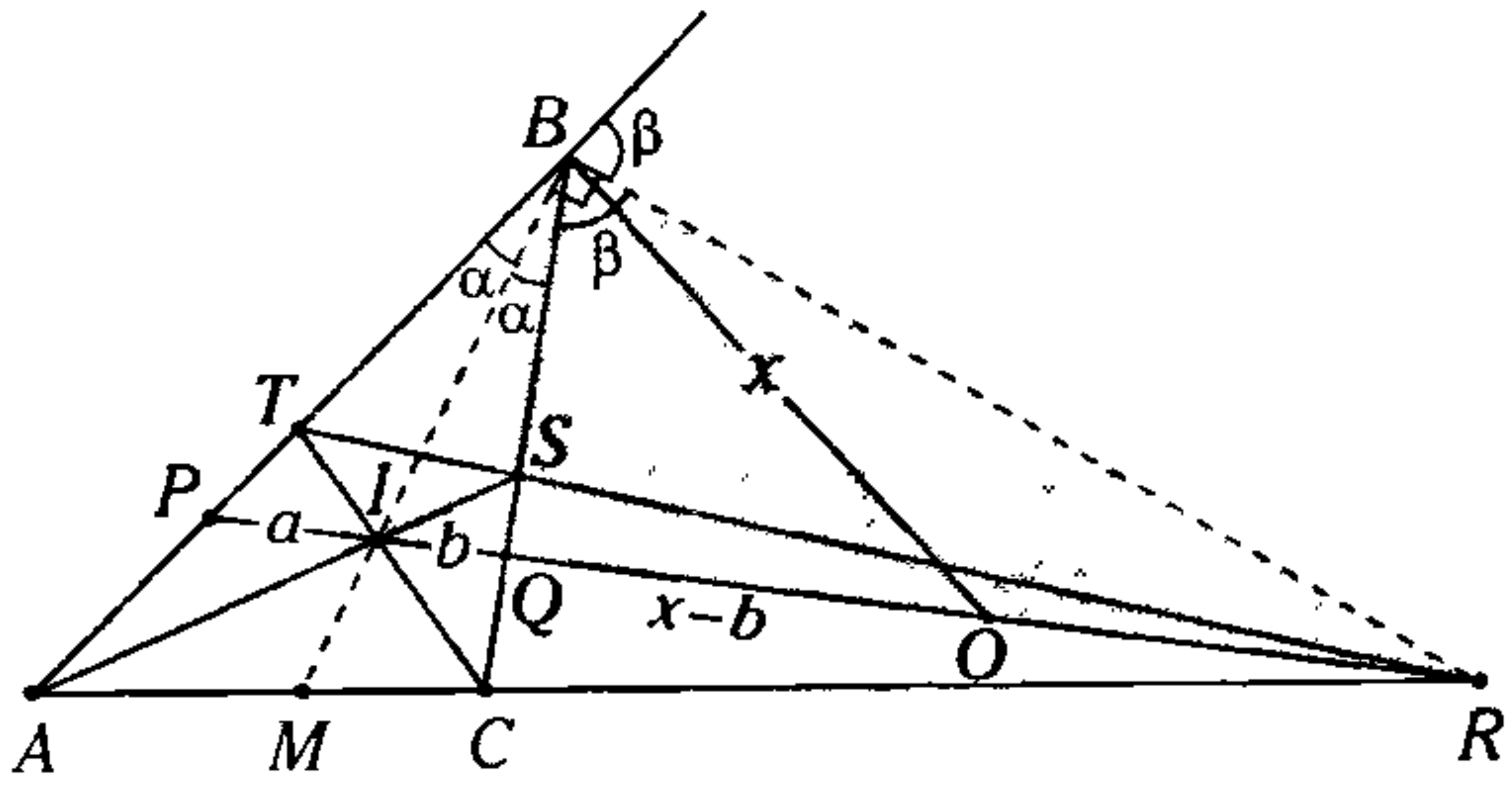


Figura 12.39

Dato: $IO=OR$

Piden $BO=x$

En el $\triangle ABC$, al ser $\overline{AS}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CT}$ concurrentes, M y R dividen armónicamente a $\overline{AC}$. No obstante, como $\overline{BM}$ es bisectriz interior, el conjugado armónico de su pie, es el pie de la bisectriz exterior.

$\therefore$ $\overrightarrow{BR}$ es bisectriz exterior y $m\sphericalangle IBR=90°$

De lo cual $IO=OR=BO=x$

$\rightarrow$ para el $\triangle PBQ$:

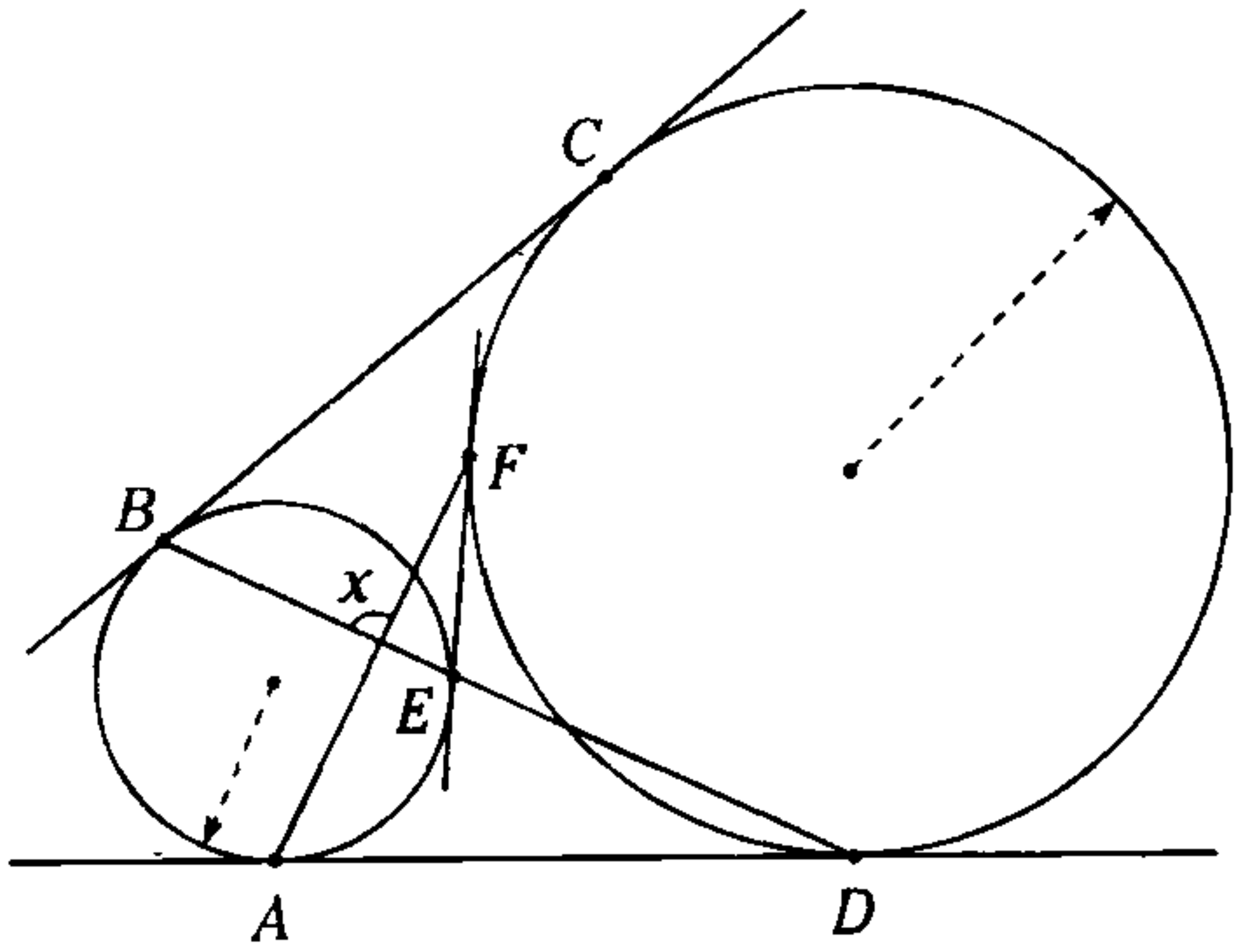
$$\frac{a}{b}=\frac{2x+a}{2x-b}$$

$$x=\frac{ab}{a-b}$$

CLAVE D

Problema 9

En la figura mostrada, A, B, C, D, E y F son puntos de tangencia. Calcule x.



A) 70° B) 45° C) 60°

D) 90° E) 80°

Resolución

Piden x.

En el $\triangle PQR$

$\mathscr{C}_1$: circunferencia inscrita.

$\mathscr{C}_2$: circunferencia exinscrita relativa a $\overline{QR}$.

Como $AR = RE$

$\rightarrow$ $RD = EQ = QB$

también $PA = PB$

En el $\triangle PQR$: Del teorema de Menelao

$(PD).(RE).(QB) = (PB).(RD).(EQ)$

$\rightarrow$ $PD.AR = PA.RD$

$\therefore$ $\dfrac{PA}{AR} = \dfrac{RD}{RD}$

Dado que A y D dividen armónicamente a $\overline{PR}$, también $\overleftrightarrow{CF}$ y $\overleftrightarrow{BE}$ dividen armónicamente a $\overline{PR}$. Consideramos colineales a C, A y F.

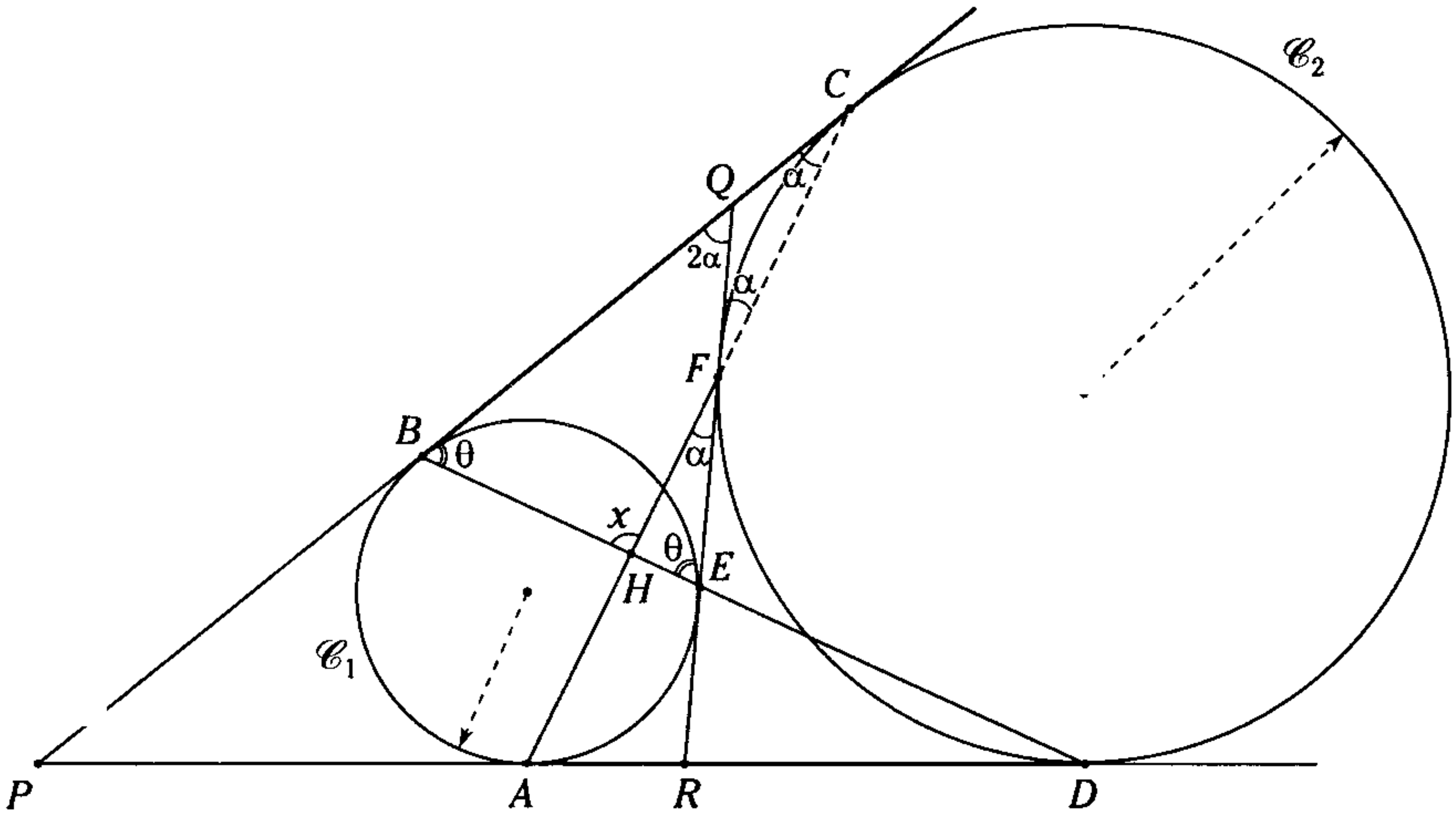


Figura 12.40

$m\sphericalangle HFE = m\sphericalangle QFC = m\sphericalangle QCF = \alpha$

$m\sphericalangle QBE = m\sphericalangle QEB = \theta$

En el $\triangle BQE$: $\alpha + \theta = 90°$

En el $\triangle HFE$: $x = \alpha + \theta$

$\therefore$ $x = 90°$

CLAVE D

Problema 10

En un triángulo acutángulo ABC, m$\sphericalangle ABC$=60° en la región interna se ubica el punto Q, tal que m$\sphericalangle AQB$=m$\sphericalangle BQC$=120° (Q es punto de Torricelli); mientras que en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos medios M y N, respectivamente. Calcule m$\sphericalangle MQN$.

A) 120° B) 90° C) 135° D) 150° E) 105°

Resolución

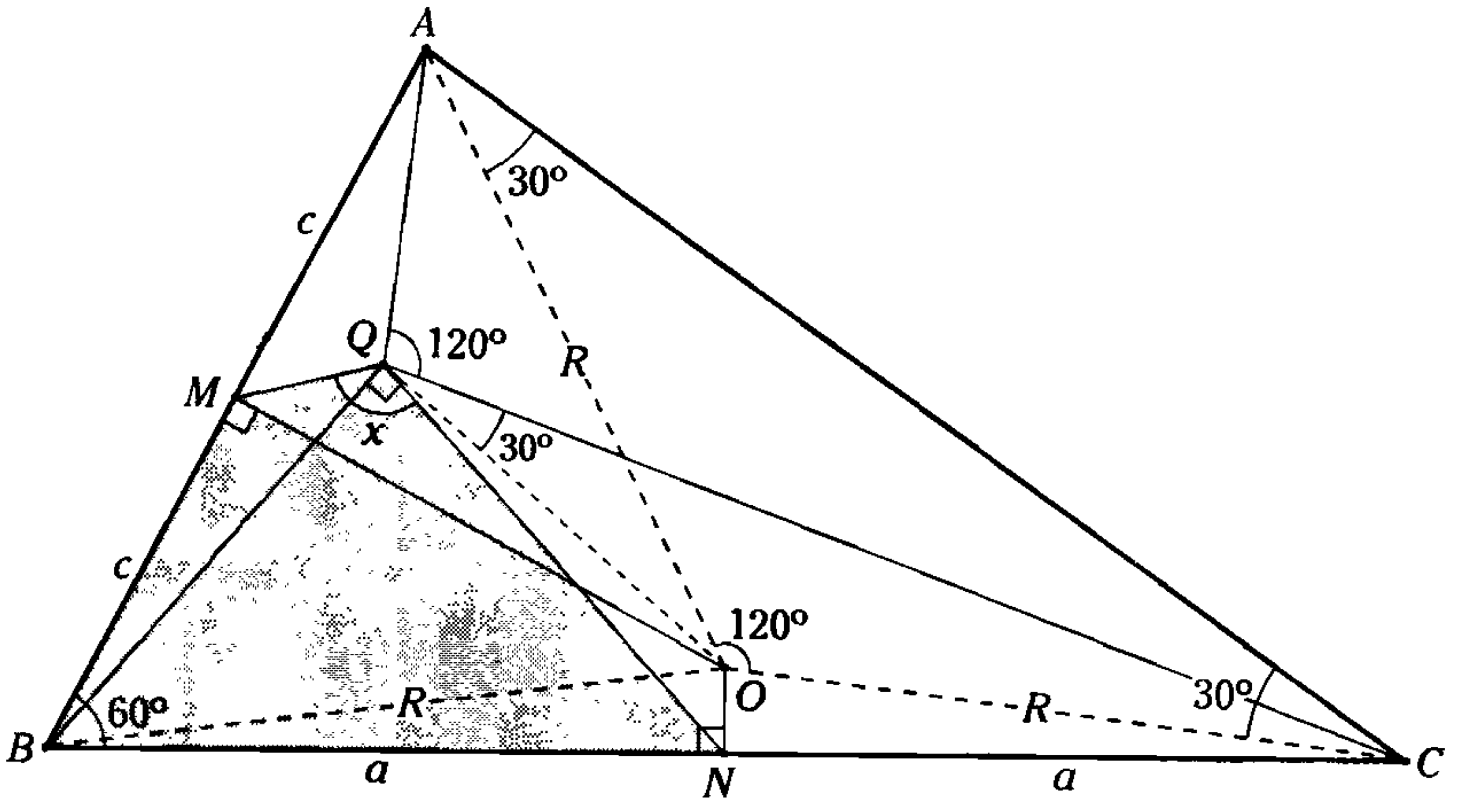


Figura 12.41

Piden m$\sphericalangle MQN = x$

Dato: m$\sphericalangle AQB$ = m$\sphericalangle BQC$ = 120°

En Q, m$\sphericalangle AQC$ = 120°

Sea O el circuncentro del $\triangle ABC$, entonces por propiedad m$\sphericalangle AOC$ = 120°

Por lo tanto, $AQOC$ es cuadrilátero inscriptible, de lo cual m$\sphericalangle OQC$ = m$\sphericalangle OAC$ = 30°

→ m$\sphericalangle BQO$ = 90°

$\overline{ON} \perp \overline{BC}$ y $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ → m$\sphericalangle ONB$ = m$\sphericalangle OMB$ = m$\sphericalangle BQO$ = 90°

Del teorema de configuración los puntos B, M, Q, O y N son concíclicos.

Entonces, el cuadrilátero $BMQN$ es inscriptible.

$\therefore$ x = 120°

CLAVE A

Problema 11

En un triángulo ABC de circuncentro O, en $\overline{AC}$ se ubica el punto M. Si las mediatrices de $\overline{AM}$ y $\overline{MC}$ intersecan a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente, además $m\sphericalangle ABC=70°$, calcule $m\sphericalangle POQ$.

A) 70° B) 140° C) 110° D) 90° E) 100°

Resolución

En la figura mostrada nos piden $m\sphericalangle POQ$ y para ello es necesario saber qué tipo de cuadrilátero es $POQB$.
(O: circuncentro del $\triangle ABC$)

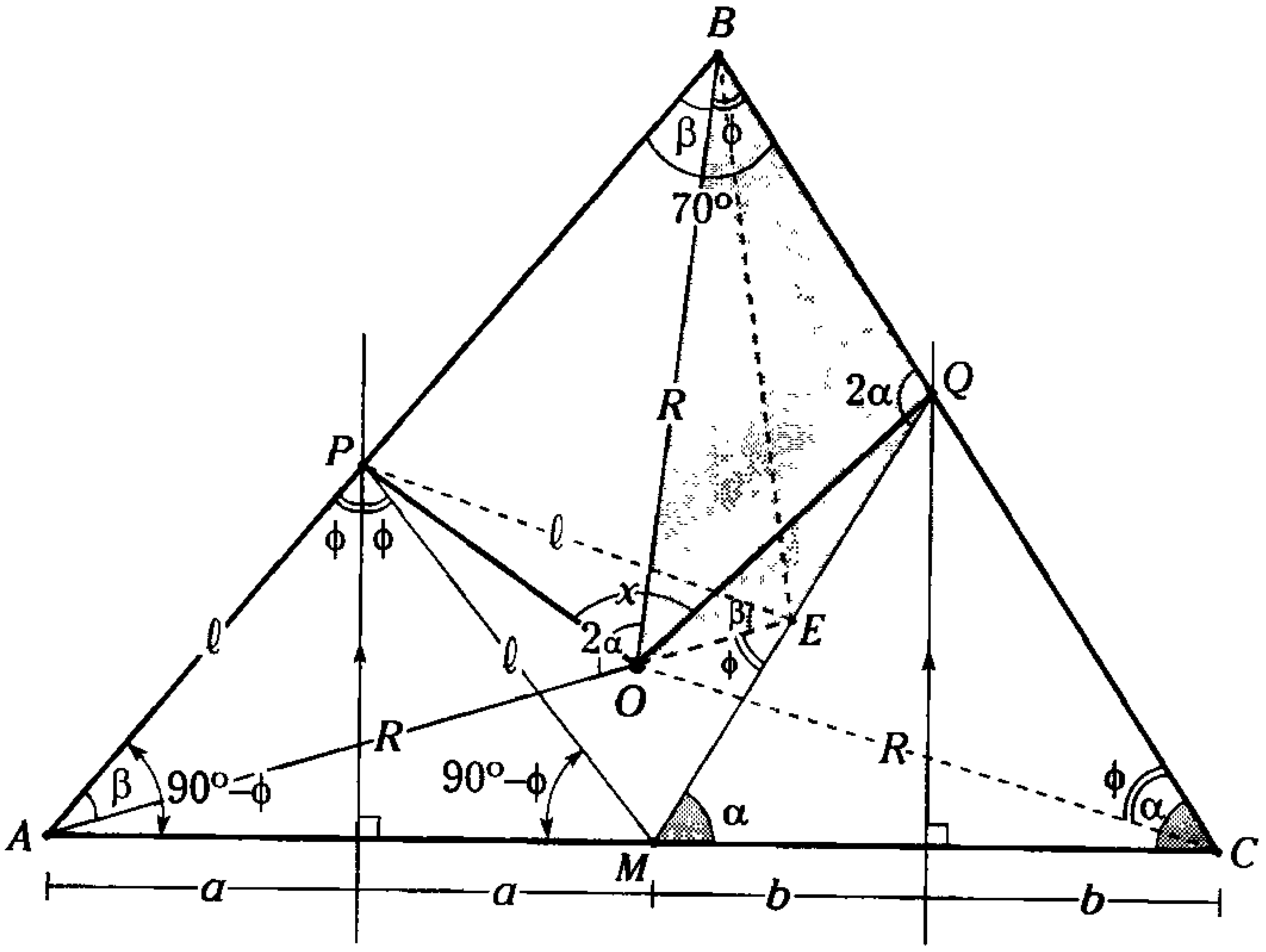


Figura 12.42

En el $\triangle MQC$: $m\sphericalangle MQB = 2(m\sphericalangle QMC) = 2(m\sphericalangle QCM) = 2\alpha$

En el $\triangle ABC$: $m\sphericalangle AOB = 2(m\sphericalangle ACB) = 2\alpha$

Prolongamos $\overline{AO}$ hasta E, $\rightarrow$ $\square OEQB$ es inscriptible (I)

$\therefore$ $m\sphericalangle OEM = m\sphericalangle OBQ = \phi$

En el $\triangle OBC$: $m\sphericalangle OCB = m\sphericalangle OBC = \phi \rightarrow m\sphericalangle BOC = 180° - 2\phi$

$\therefore$ $m\sphericalangle BAC = 90° - \phi$

En el $\triangle APM$: $m\sphericalangle APM = 2\phi$, $AP = PM = \ell$ y como la $m\sphericalangle AEM = \phi \rightarrow P$ es circuncentro del $\triangle AEM$

$\therefore$ $PE=PM=PA=\ell$

Luego en el $\triangle APE$: $m\sphericalangle PEA = m\sphericalangle PAE = \beta$ pero como $m\sphericalangle OAB = m\sphericalangle OBA = \beta$

$\rightarrow$ $\square POEB$ es inscriptible (II)

De (I) y (II), aplicando el teorema de configuración, el pentágono $POEQB$ es inscriptible. Por lo tanto, el cuadrilátero $POQB$, también, es inscriptible, entonces $x + 70° = 180°$

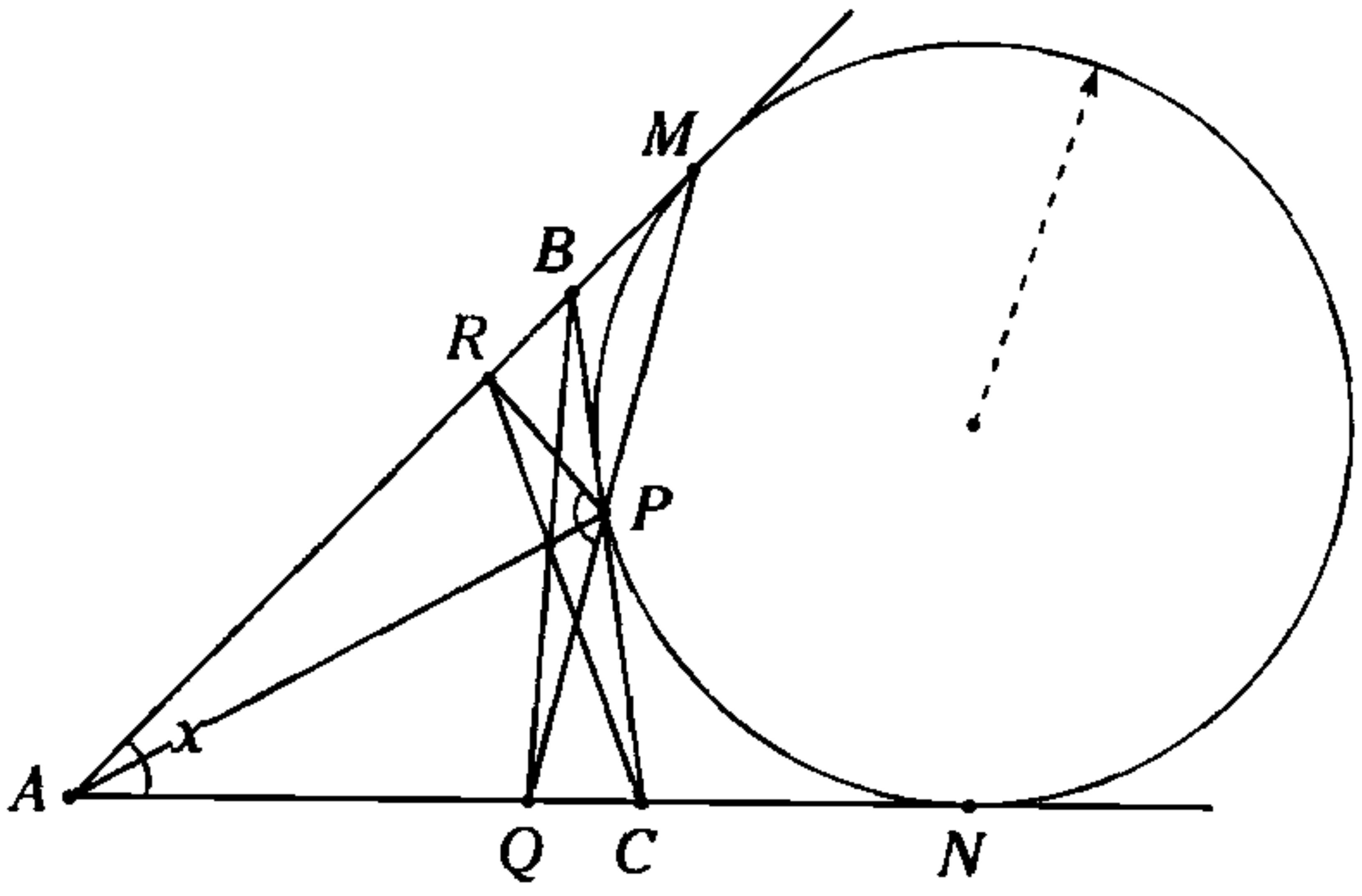
$\therefore$ $x = 110°$

CLAVE C

Problema 12

En la figura mostrada, N, P y M son puntos de tangencia. Si m$\measuredangle RPQ$ = 110°, calcule m$\measuredangle BAC$.

A) 20°
B) 40°
C) 60°
D) 70°
E) 35°



Resolución

Piden m$\measuredangle BAC = x$

En el $\triangle ABC$: AP, BQ y CR son cevianas concurrentes en O, del teorema de Ceva

$$a \cdot c \cdot e = b \cdot d \cdot f$$

$$\frac{b}{c} = \frac{a.e}{d.f} \qquad \text{(I)}$$

También para la recta QM

$$\frac{b}{c} = \frac{p}{d} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II): $\frac{p}{d} = \frac{a.e}{d.f} \rightarrow \frac{a}{f} = \frac{p}{e}$

$\therefore$ R, P y N son colineales.

En P: $\alpha + \beta = 70°$

Luego en el ⩓$AMPN$

$$x + \alpha + \beta = 110°$$

$$\therefore \; x = 40°$$

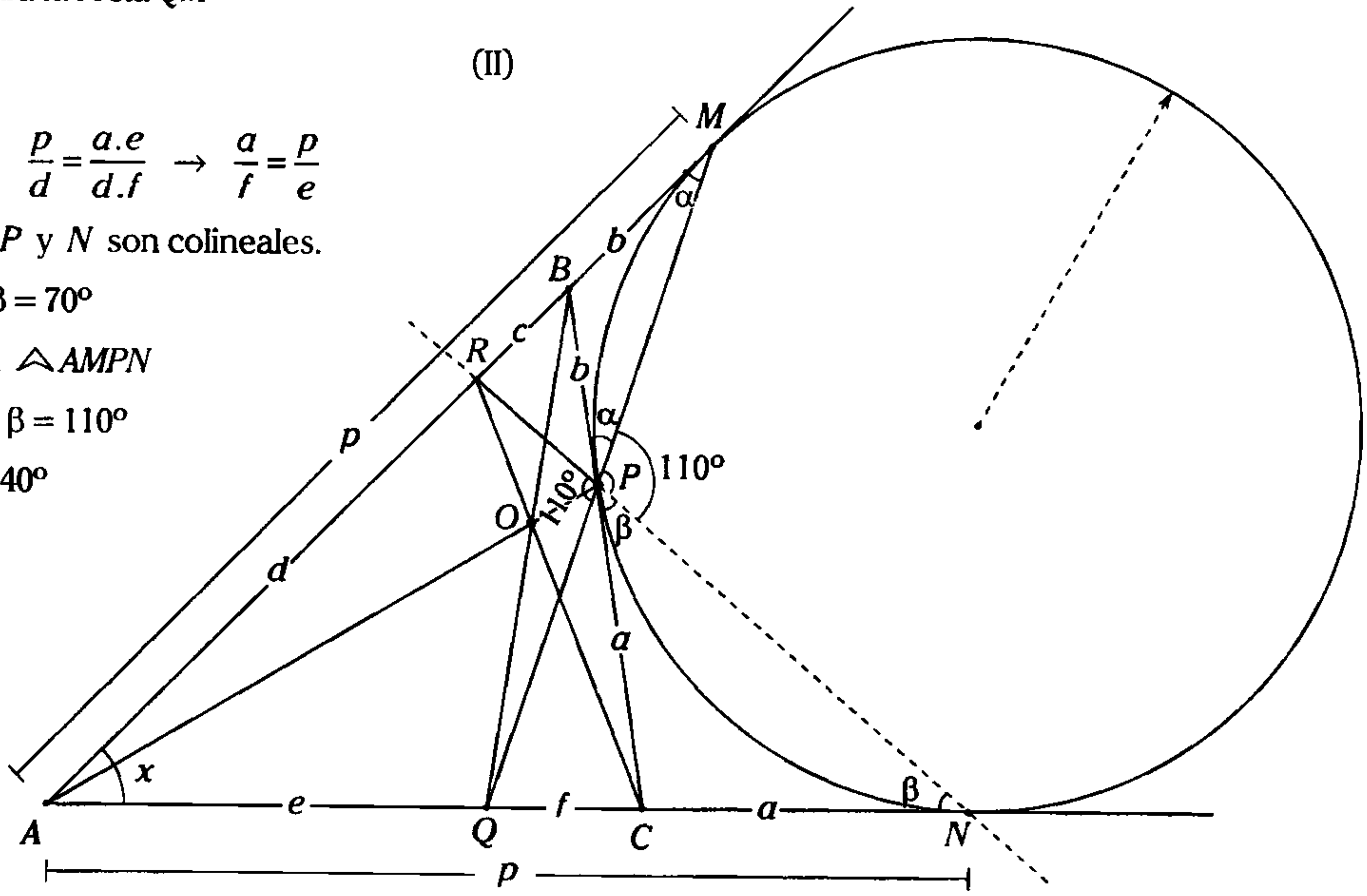


Figura 12.43

CLAVE B

Problema 13

En un cuadrado $ABCD$ de centro O en $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos M, P y N respectivamente, tal que $m\sphericalangle NPM=90°$ y $O \in \overline{MN}$. Si $\overline{AO} \cap \overline{MP}=\{S\}$ $\overline{AN} \cap \overline{MD}=R$. Calcule $m\sphericalangle RSP$, si $m\sphericalangle MNC=70°$.

A) 35° B) 70° C) 25°
D) 50° E) 65°

Resolución

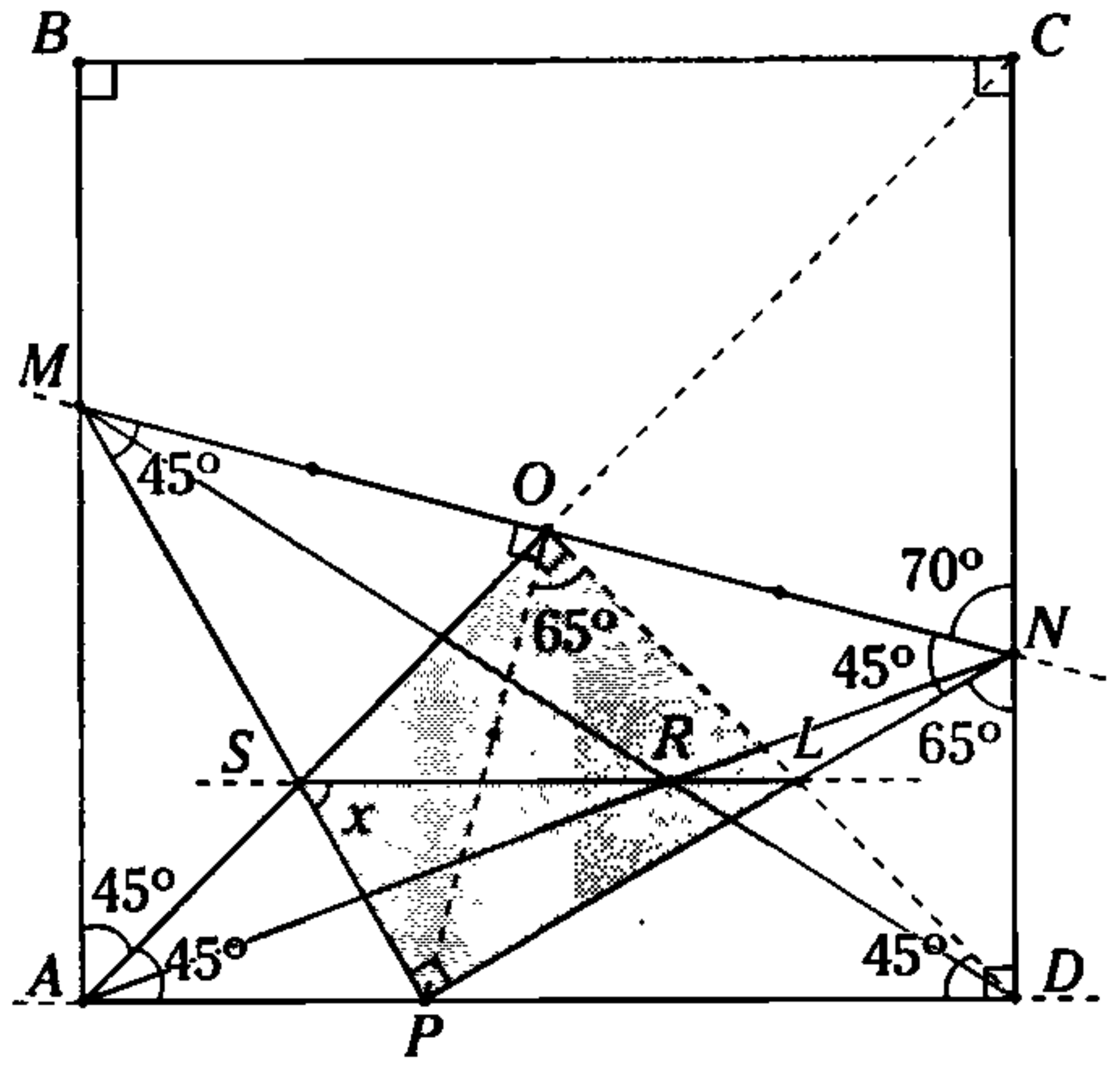


Figura 12.44

Piden $m\sphericalangle RSP=x$

En el cuadrado $ABCD$: $MO=ON$

→ en el ⊿NPM: $OP=OM=ON$

como $m\sphericalangle MAO=m\sphericalangle OAP=45°$

→ el cuadrilátero $AMOP$ es inscriptible

∴ $m\sphericalangle OMP=m\sphericalangle OAP=45°$

En el ⊿NPM: $m\sphericalangle MNP=45°$

→ $m\sphericalangle PND=65°$

Trazamos $\overline{DO}$ y para $\overline{MN}$ y $\overline{AD}$ del teorema de Pappus. Los puntos S, R y L son colineales y el cuadrilátero $SOLP$ es inscriptible.

→ $m\sphericalangle PSL=m\sphericalangle POL$

Pero del cuadrilátero inscriptible $POND$:

$m\sphericalangle POD = m\sphericalangle PND=65°$

∴ $x=65°$

CLAVE E

Problema 14

Dado un paralelogramo $ABCD$ por A y C se trazan las rectas $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ que no intersecan al paralelogramo. Si las prolongaciones del $\overline{CB}$ y $\overline{CD}$ intersecan a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ en N y Q respectivamente, así también las prolongaciones del $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ intersecan a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ en M y P respectivamente, si la $m\sphericalangle ABC=140°$, calcule la $m\sphericalangle AMN+m\sphericalangle APQ$.

A) 70° B) 35° C) 140°
D) 40° E) 80°

Resolución

En el paralelogramo $ABCD$, se sabe que

$\overline{AB}//\overline{CD}$ y $\overline{BC}//\overline{AD}$

→ $\overline{AM}//\overline{CQ}$ y $\overline{CN}//\overline{AP}$

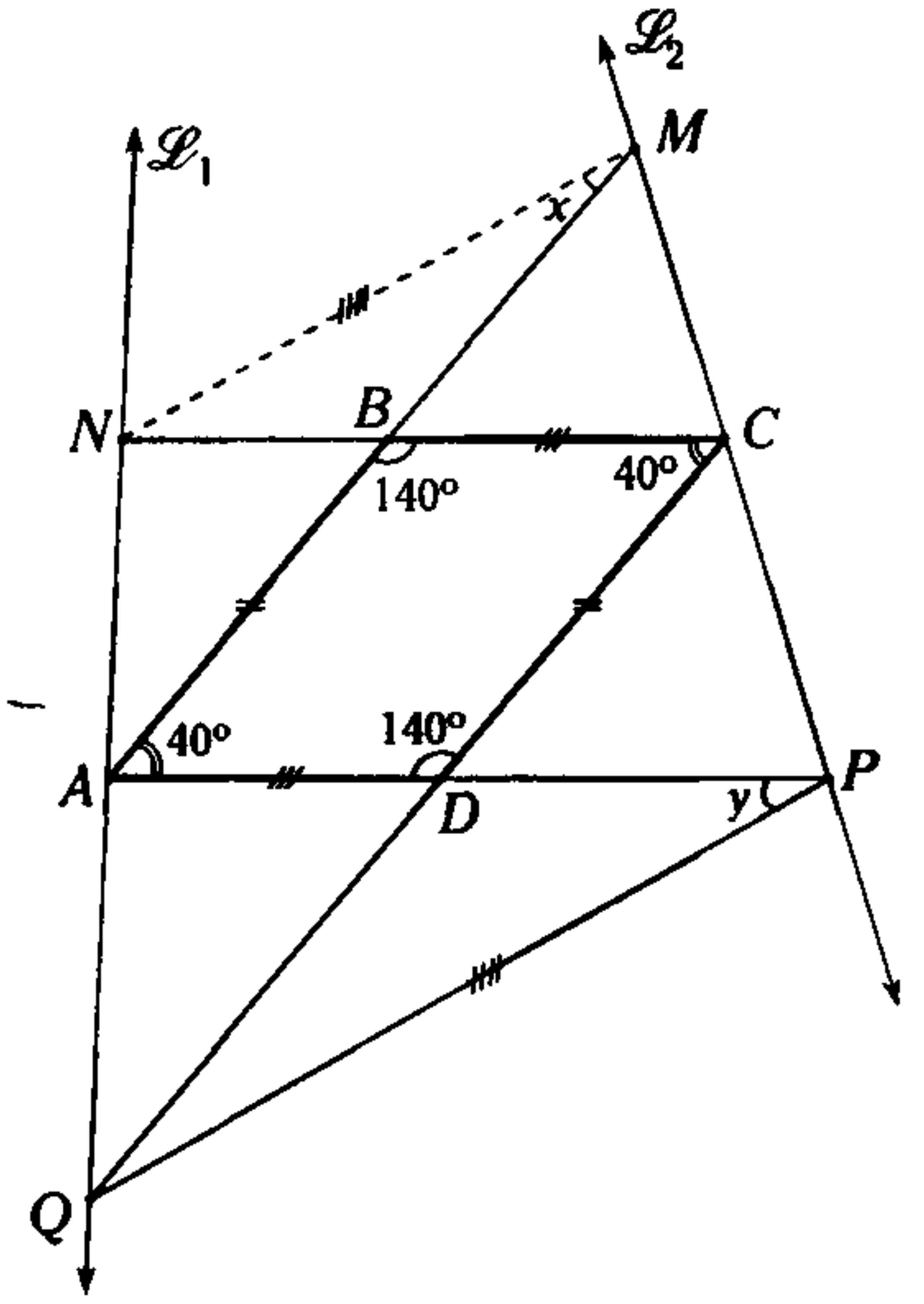


Figura 12.45

Del teorema particular de Pappus: $\overline{MN}//\overline{PQ}$

$\therefore\quad m\sphericalangle MAP = m\sphericalangle AMN + m\sphericalangle APQ = x+y$

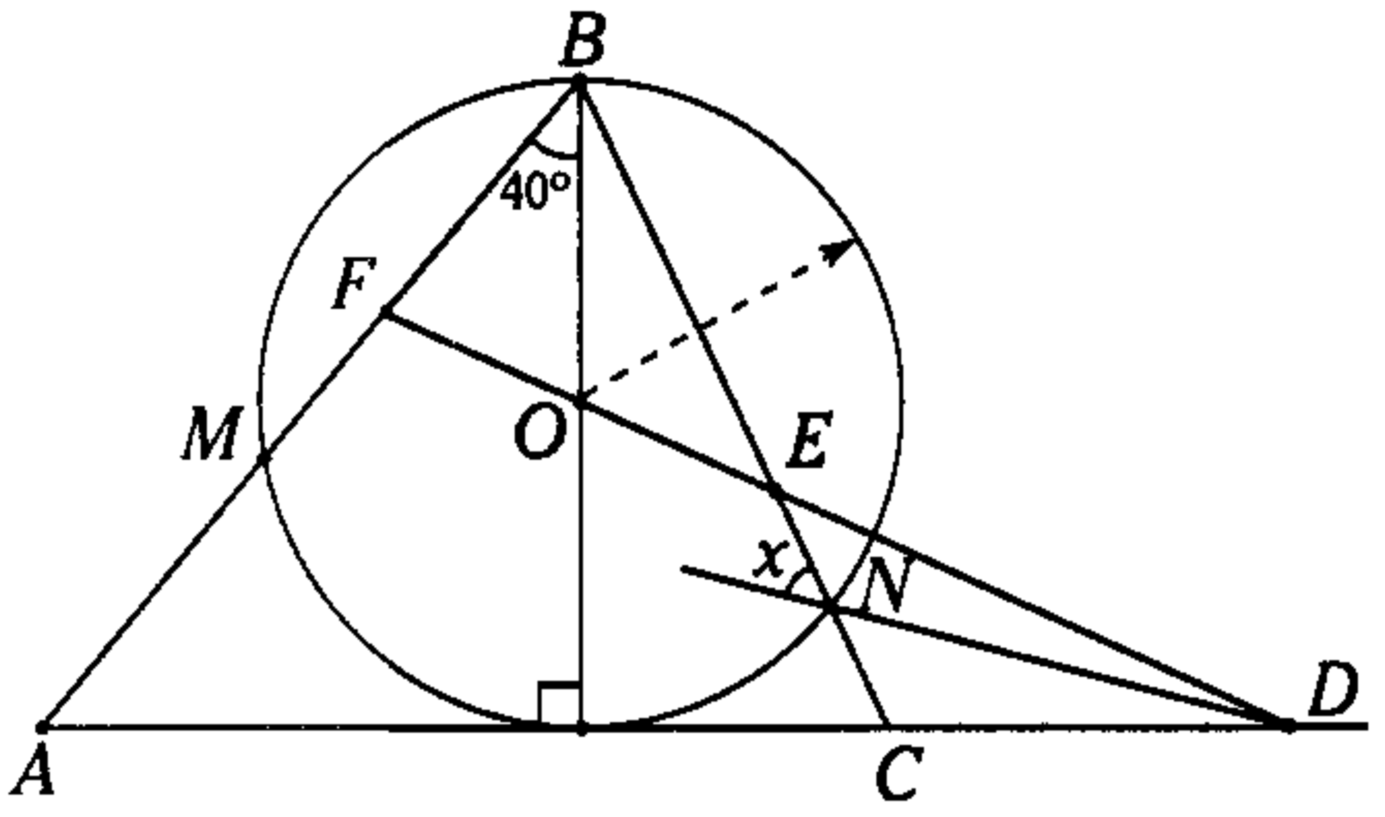
Pero, en el paralelogramo $ABCD$: $m\sphericalangle MAP=40°$

$\rightarrow\quad x+y=40°$

CLAVE D

Problema 15

En la figura mostrada se cumple que $\dfrac{BM.EN}{BN.FM}=\dfrac{ED}{FD}$. Calcule x.



A) 40° B) 50° C) 60°
D) 45° E) 53°

Resolución

Del dato, tenemos $\dfrac{BM}{FM}\cdot\dfrac{EN}{BN}\cdot\dfrac{FD}{ED}=1$

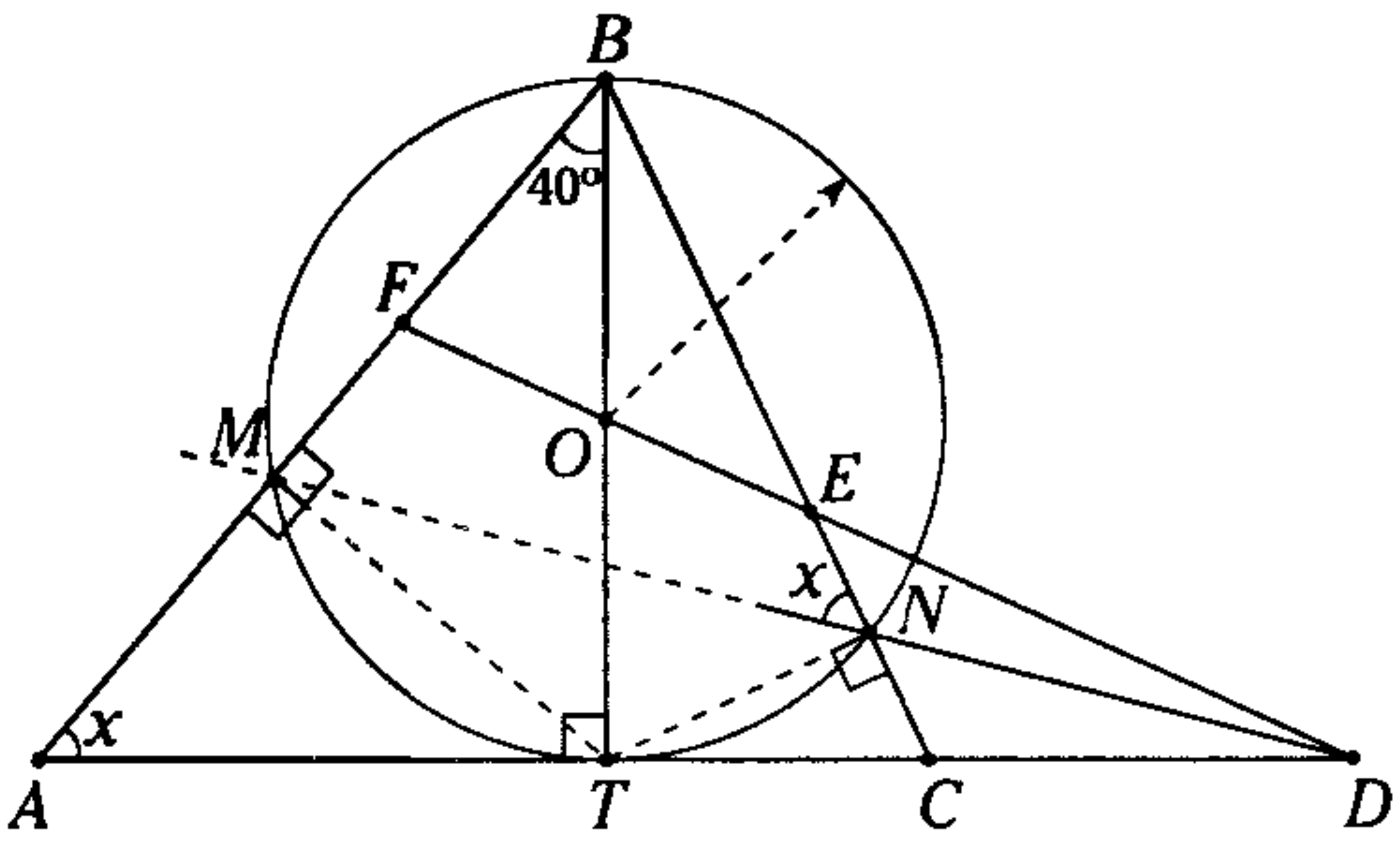


Figura 12.46

Del teorema recíproco de Menelao, para el $\triangle FBE$ (segundo caso) M, N y D son colineales.

Como $\overline{BT}$ es diámetro $m\sphericalangle BMT=m\sphericalangle BNT=90°$

$\rightarrow$ el cuadrilátero $AMNC$ es inscriptible.

$\therefore\quad m\sphericalangle MAC = m\sphericalangle MNB=x$

En el $\triangle ATB$

$x+40°=90°$

$\therefore\quad x=50°$

CLAVE B

Problema 16

En un triángulo ABC de baricentro G por B se traza la recta exterior $\mathscr{L}$, las prolongaciones de AG y CG intersecan a $\mathscr{L}$ en F y E respectivamente, en $\overline{AC}$ se ubica el punto M, donde $\overline{EM}$ y $\overline{FM}$ intersecan a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente, calcule $\dfrac{AP}{PB}+\dfrac{CQ}{QB}$.

A) 1 B) 0,5 C) 2
D) 0,33 E) 0,66

Resolución

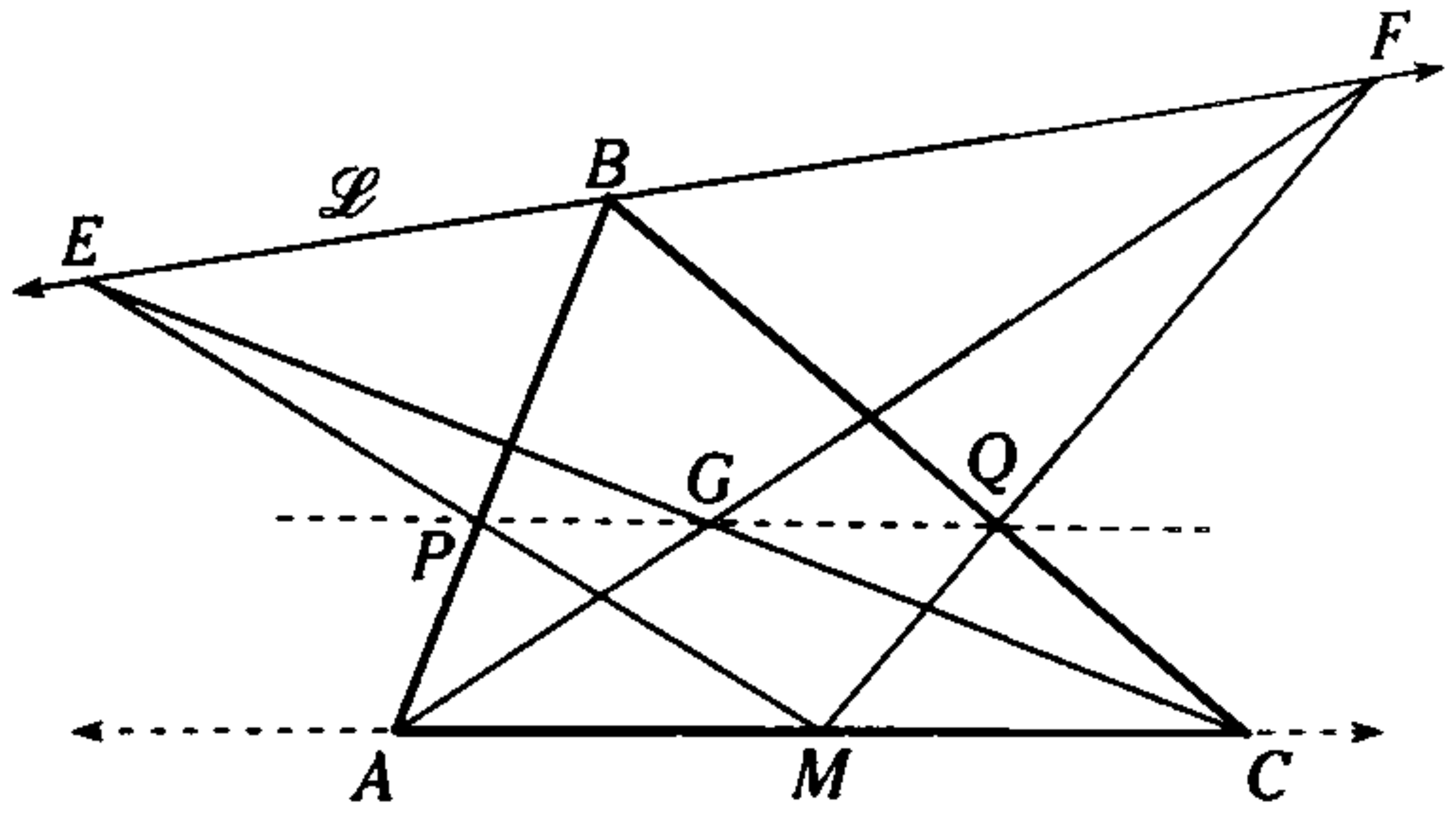


Figura 12.47

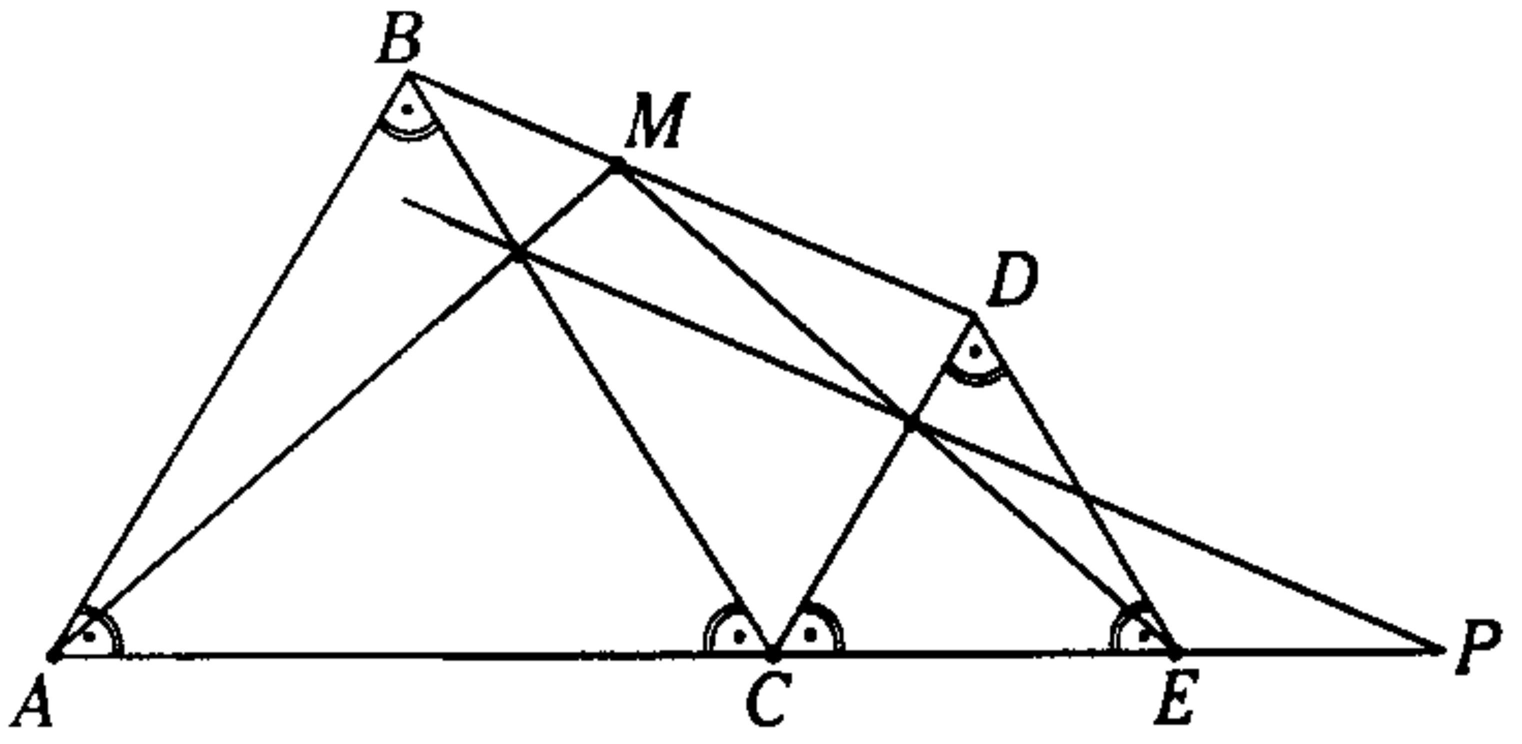
Para los puntos E, B y F de la recta $\mathscr{L}$ y los puntos A, M y C de la recta AC del teorema de Pappus los puntos P, G y Q son colineales.

En el $\triangle ABC$ de baricentro G, si P, G y Q son colineales se cumple: $\frac{AP}{PB}+\frac{QC}{BQ}=1$ (teorema del capítulo de proporcionalidad)

CLAVE A

Problema 17

En la figura mostrada, ABC y CDE son triángulos equiláteros. Si $BM=MD$, $AC=3$ y $CE=2$, calcule EP.



A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$
D) 4 E) $2\sqrt{6}$

Resolución

Piden $EP=x$

Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ hasta O.

$\rightarrow$ $OBCD$: romboide

De lo cual se sabe que sus diagonales se bisecan en M. Pero, para los triángulos AME y BCD las rectas AB, MC y ED son concurrentes.

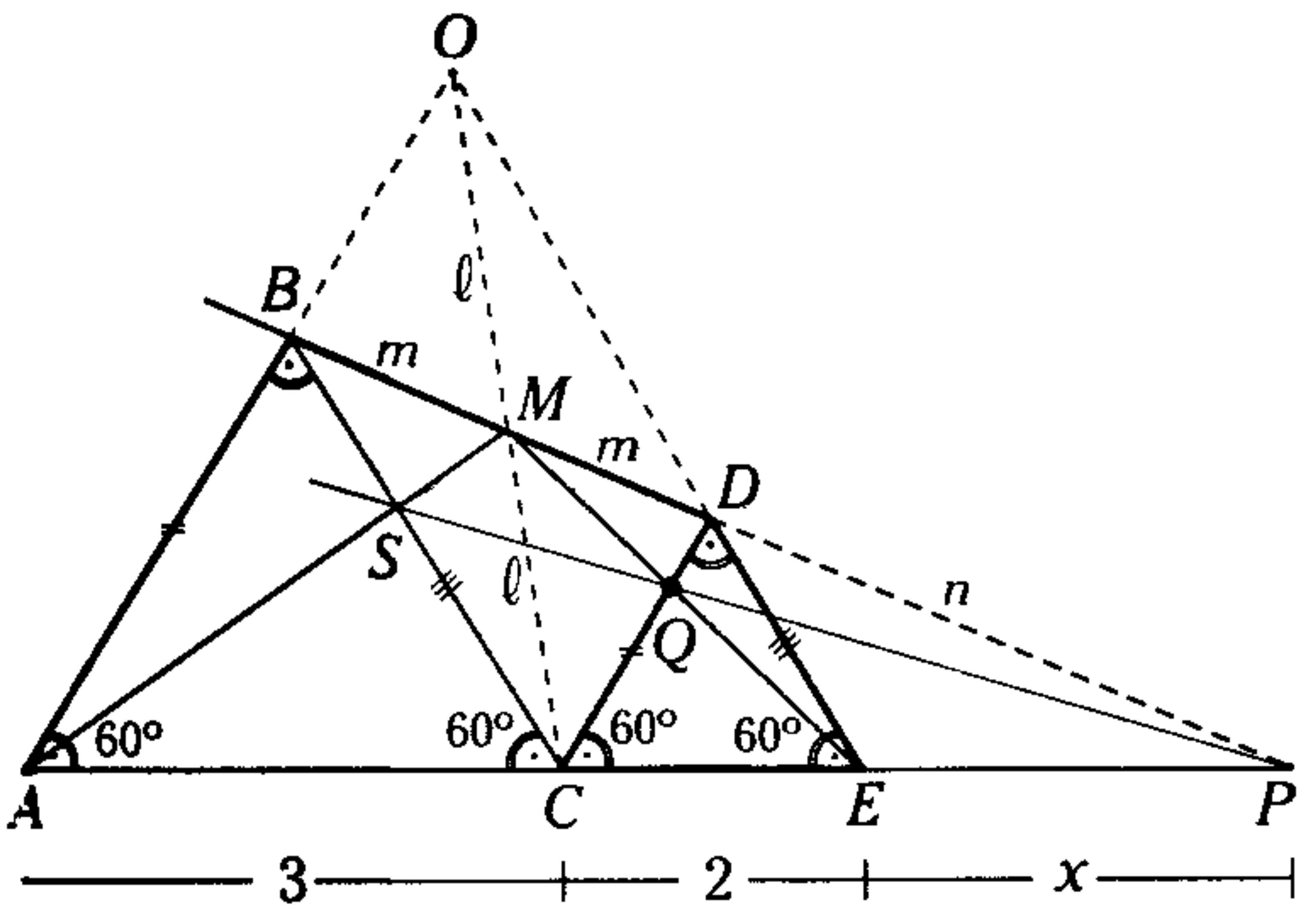


Figura 12.48

Por lo tanto del teorema de Desargues las rectas $\overline{BD}$, $\overline{SQ}$ y $\overline{AE}$ también son concurrentes, donde, P es el punto de concurrencia.

Luego

$$\overline{AB}\,//\,\overline{CD} \rightarrow \frac{2m}{n}=\frac{3}{2+x} \qquad \text{(I)}$$

$$\overline{BC}\,//\,\overline{DE} \rightarrow \frac{2m}{n}=\frac{2}{x} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\frac{3}{2+x}=\frac{2}{x}$$

$$\therefore\ x=4$$

CLAVE D

Problema 18

En un triángulo acutángulo ABC, las alturas $\overline{AF}$ y $\overline{CE}$ se intersecan en H, $\overleftrightarrow{EF}\cap\overleftrightarrow{AC}=\{M\}(A\in\overline{MC})$, en $\overline{BF}$ se ubica el punto P, tal que $\overline{MP}\cap\overline{AB}=\{N\}$ y $\overline{NC}\cap\overline{AP}=\{T\}$. Si m∢$FAC=40°$, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{TH}$ y $\overline{BC}$.

A) 40° B) 50° C) 36°
D) 70° E) 20°

Resolución

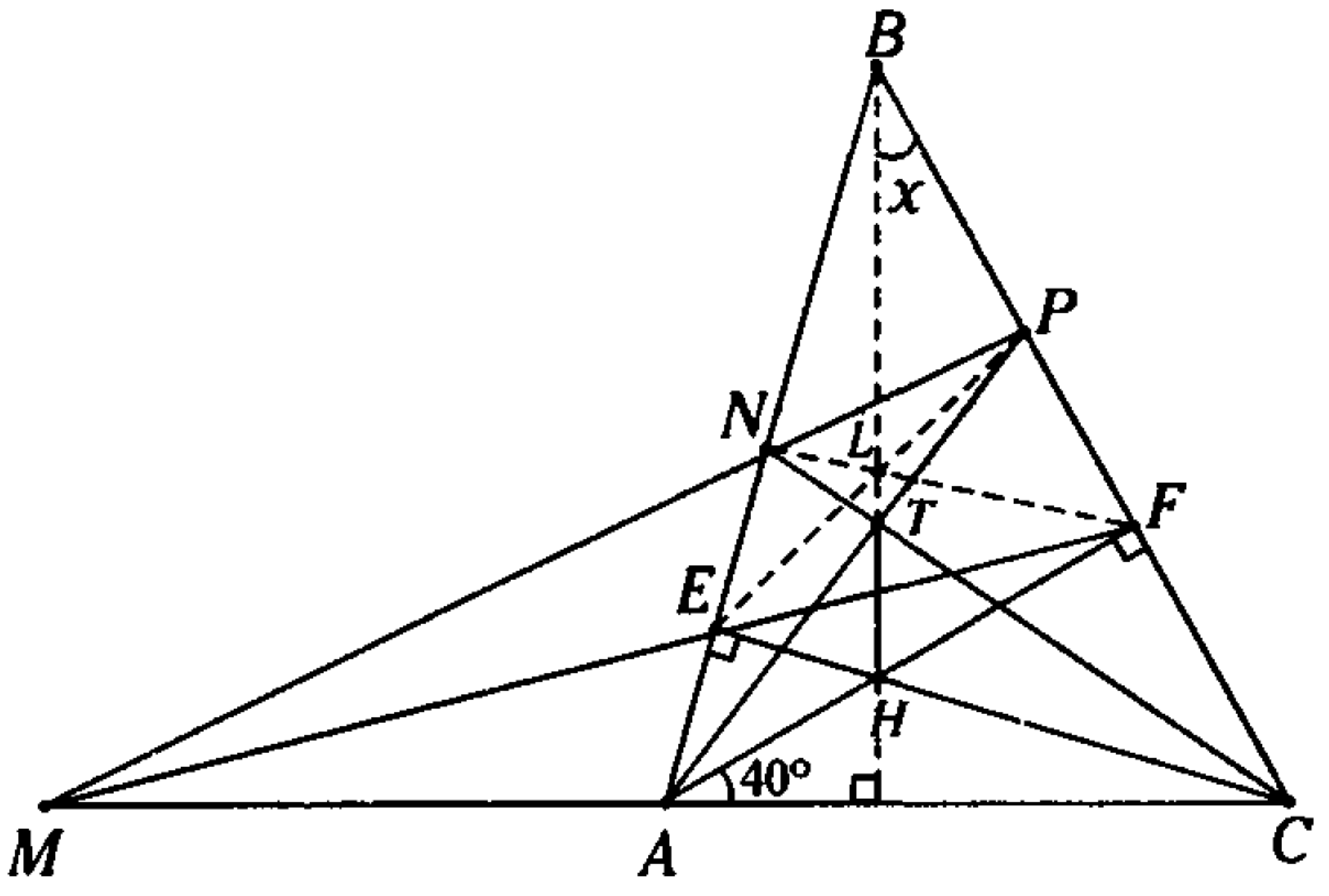


Figura 12.49

Se trazan $\overline{NF}$ y $\overline{EP}$ tal que $\overline{NF}\cap\overline{EP}=\{L\}$

Por el teorema de Pappus L, T y H son colineales.

Por el teorema de Desargues B, L y H son colineales.

Por teorema de configuración B, L, T y H son colineales.

$$m\measuredangle(\overleftrightarrow{TH}:\overleftrightarrow{BC})=m\measuredangle HBC$$

Como H es ortocentro

$$\therefore\ x=40°$$

CLAVE A

Problema 19

En un triángulo ABC en los lados BC, CA y AB se ubican los puntos D, E y F respectivamente. Si las circunferencias circunscritas de los triángulos AEF, BFD y CDE concurren en el punto P donde $\frac{PD}{PE}=\frac{BD}{AE}$; $\frac{PE}{PF}=\frac{CE}{BF}$; $\frac{PF}{PD}=\frac{AF}{CD}$; ¿qué punto notable es P del $\triangle ABC$?

A) incentro
B) baricentro
C) circuncentro
D) ortocentro
E) punto de Gergonne

Resolución

Del dato multiplicado convenientemente y simplificando:

$$\frac{PD}{PE}\cdot\frac{PE}{PF}\cdot\frac{PF}{PD}=\frac{BD}{AE}\cdot\frac{CE}{BF}\cdot\frac{AF}{CD}$$

Ordenando

$$\rightarrow\ \frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1$$

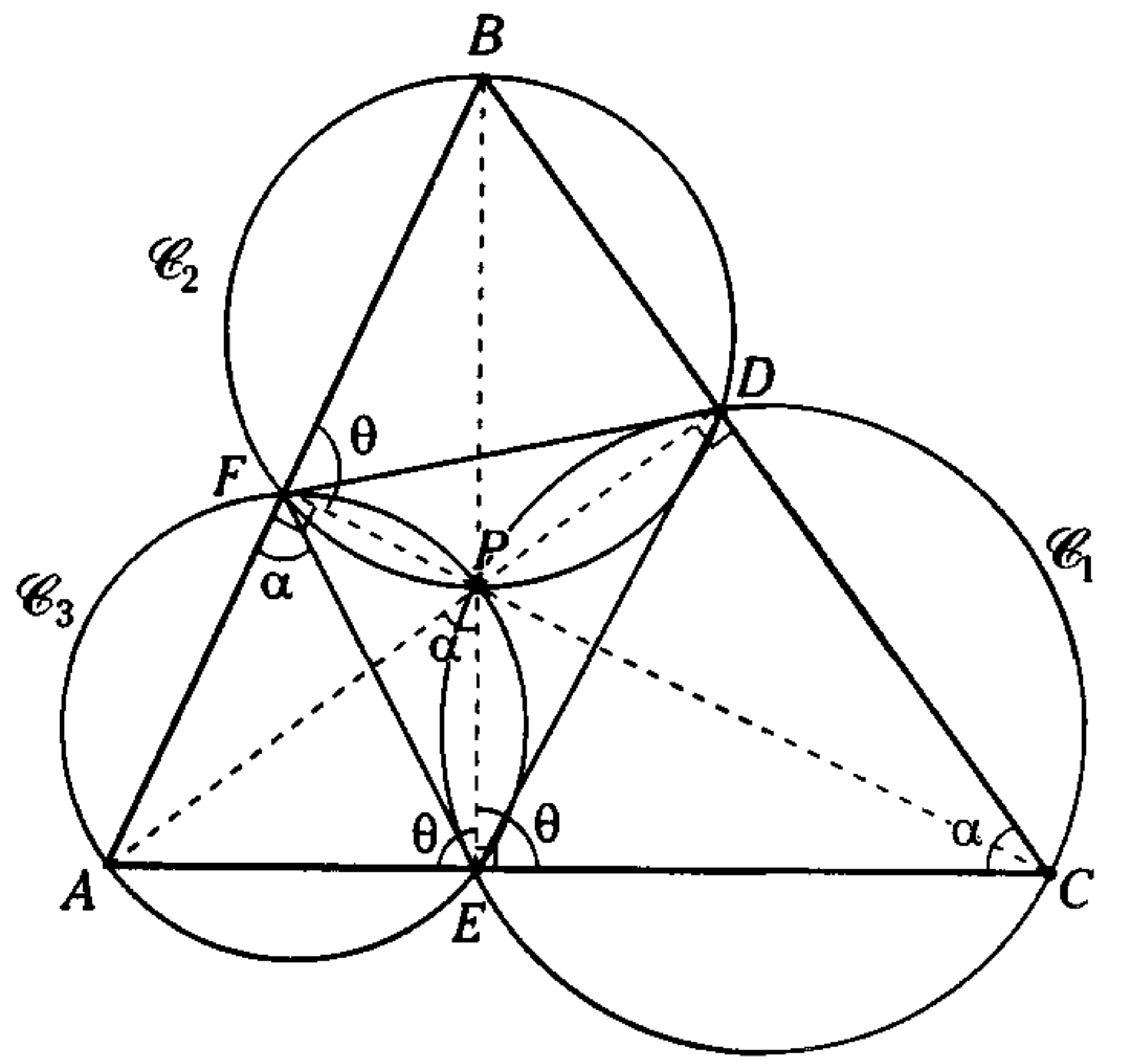


Figura 12.50

Del teorema recíproco de Ceva, las cevianas AD, BE y CF son concurrentes en P.

Como las circunferencias circunscritas $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ concurren en P.

En $\mathscr{C}_3$, $m\measuredangle AFE = m\measuredangle APE = \alpha$

En $\mathscr{C}_1$, $m\measuredangle APE = m\measuredangle ECD = \alpha$

Por lo tanto, el cuadrilátero $EFBC$ es inscriptible entonces

$$m\measuredangle BFC = m\measuredangle BEC = \theta$$

En $\mathscr{C}_3$, $m\measuredangle AEP = m\measuredangle PFB = \theta$

En E:

$$2\theta = 180° \rightarrow \theta = 90°,$$

es decir $\overline{BE}$ es altura en el $\triangle ABC$.

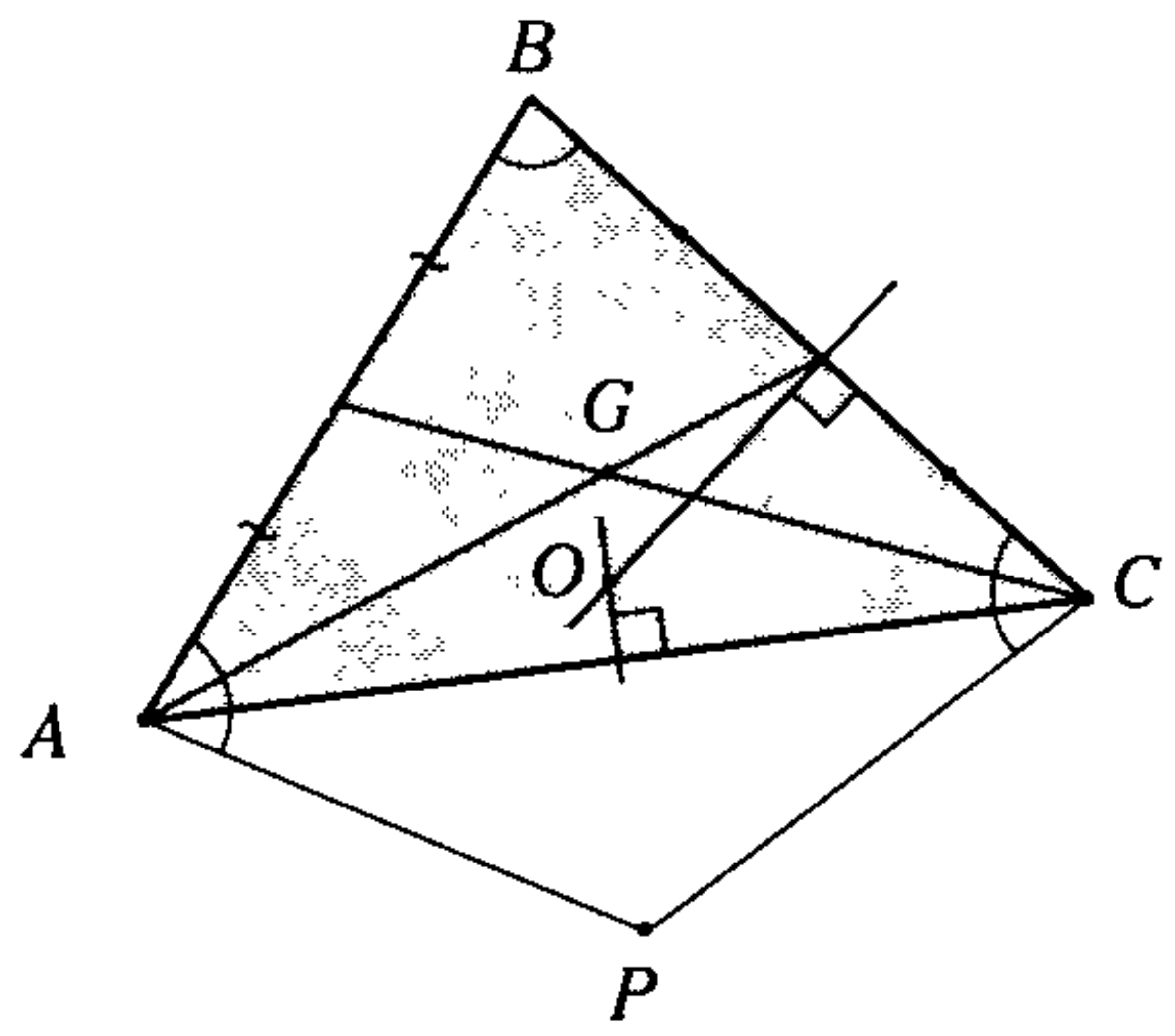
Análogamente $\overline{AD}$ y $\overline{CF}$ son alturas.

Por lo tanto, P es ortocentro del $\triangle ABC$.

CLAVE D

Problema 20

En un triángulo ABC de baricentro G y circuncentro O, se ubica el punto P en la región exterior relativa al lado $\overline{AC}$, tal que $m\sphericalangle PAB = m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle PCB$. Demuestre que G, O y P son colineales.



Resolución

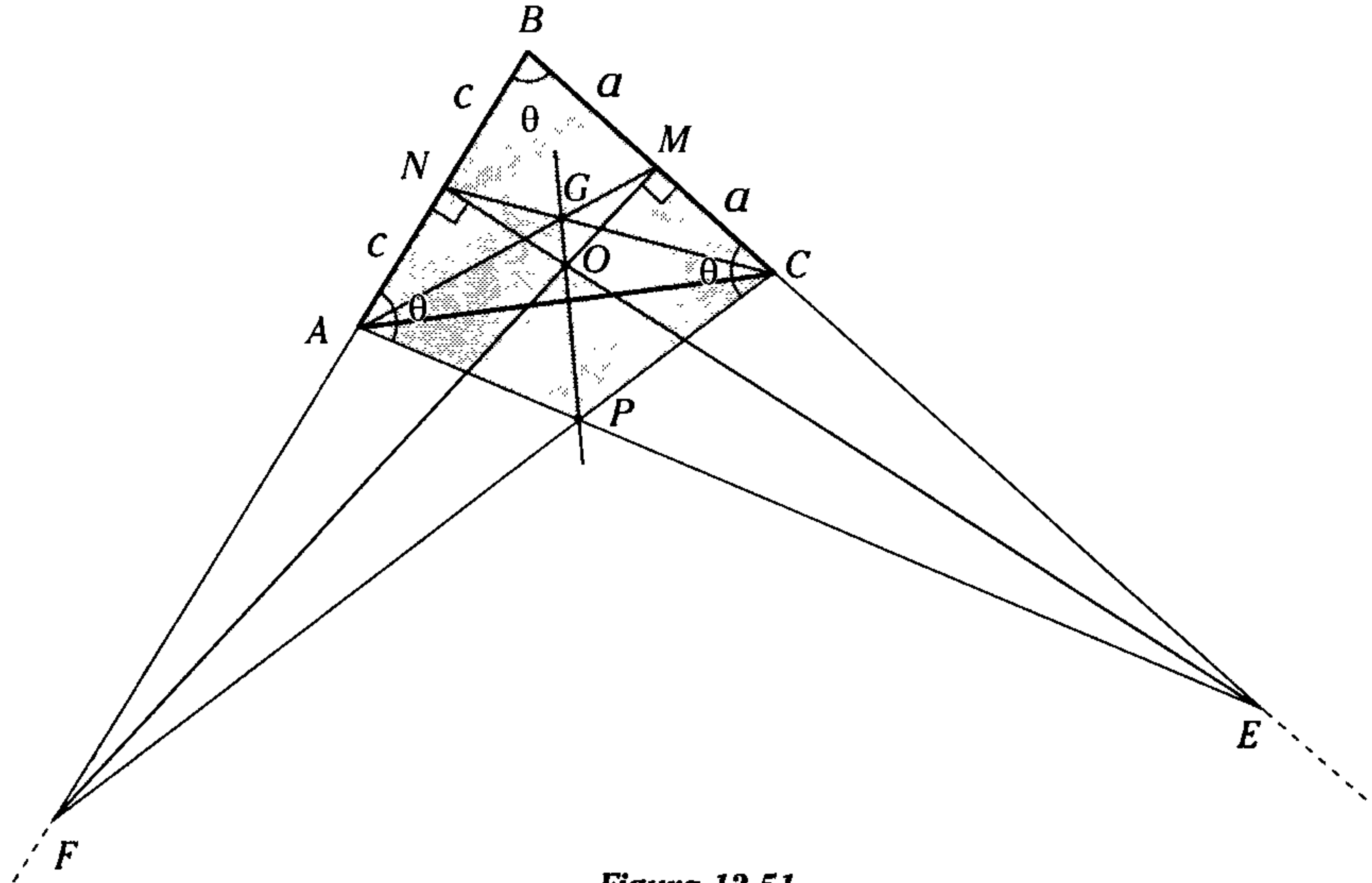


Figura 12.51

O : circuncentro del $\triangle ABC$.

G : baricentro del $\triangle ABC$.

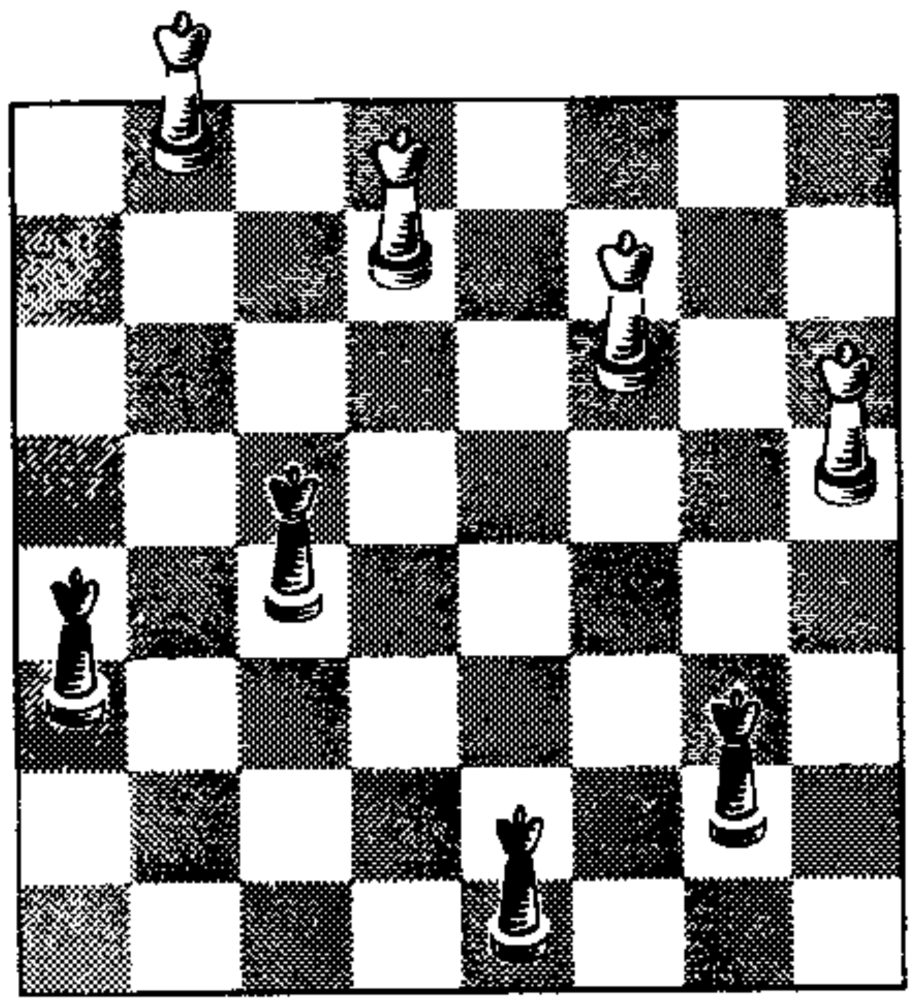
Prolongamos $\overline{CP}$ y $\overline{BA}$ hasta que intersecten en F, así como $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ hasta que intersecten en E.

Los triángulos de MO y NO pasan por F y E respectivamente.

Para los puntos M, C y E de la recta BE y los puntos N, A y F de la recta BF y del teorema de Pappus, los puntos G, O y P son colineales.

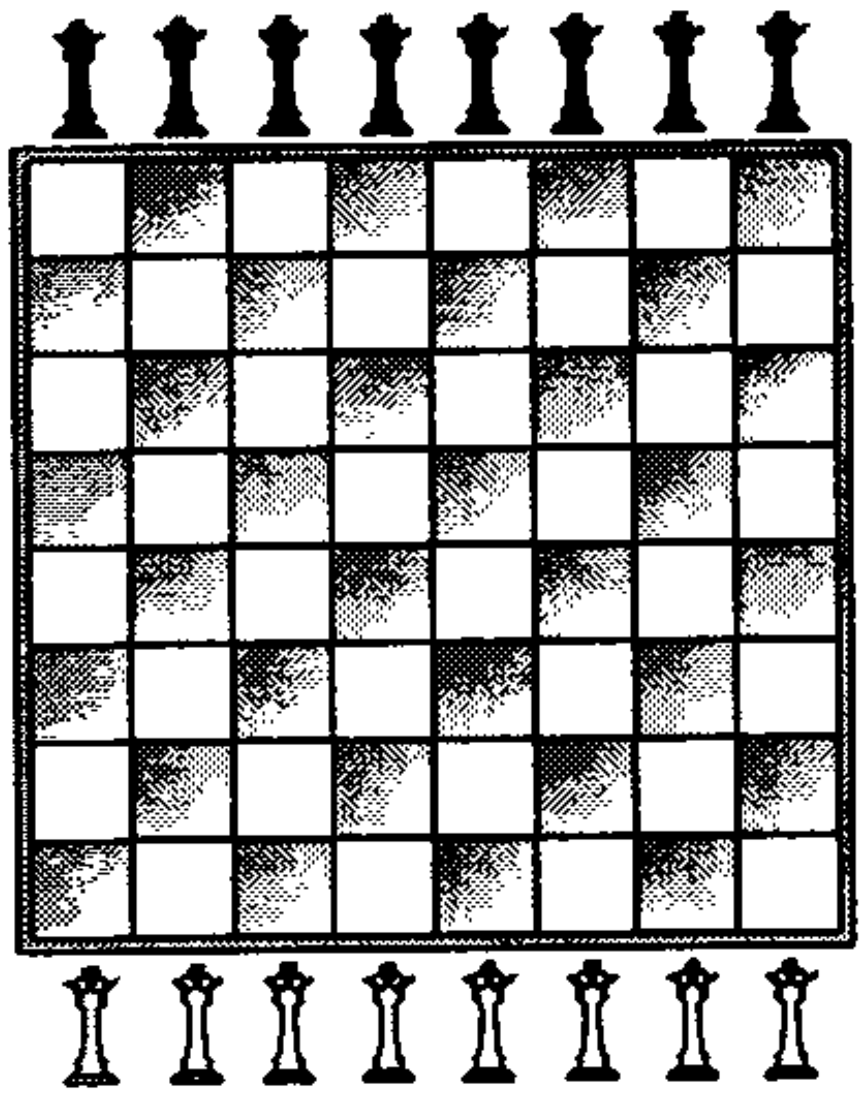
1. Damas en paz

a. En este tablero, cuatro damas blancas y cuatro negras están situadas de modo que ninguna de las damas de color opuesto amenaza a las otras. ¿Podría colocar ocho damas blancas y ocho negras de modo que ninguna del color opuesto amenace a las otras? (dos damas se amenazan, si están en la misma fila, columna o diagonal).



b. ¿Puede hacer lo mismo con ocho damas blancas y 10 negras? La solución tiene que ser simétrica.

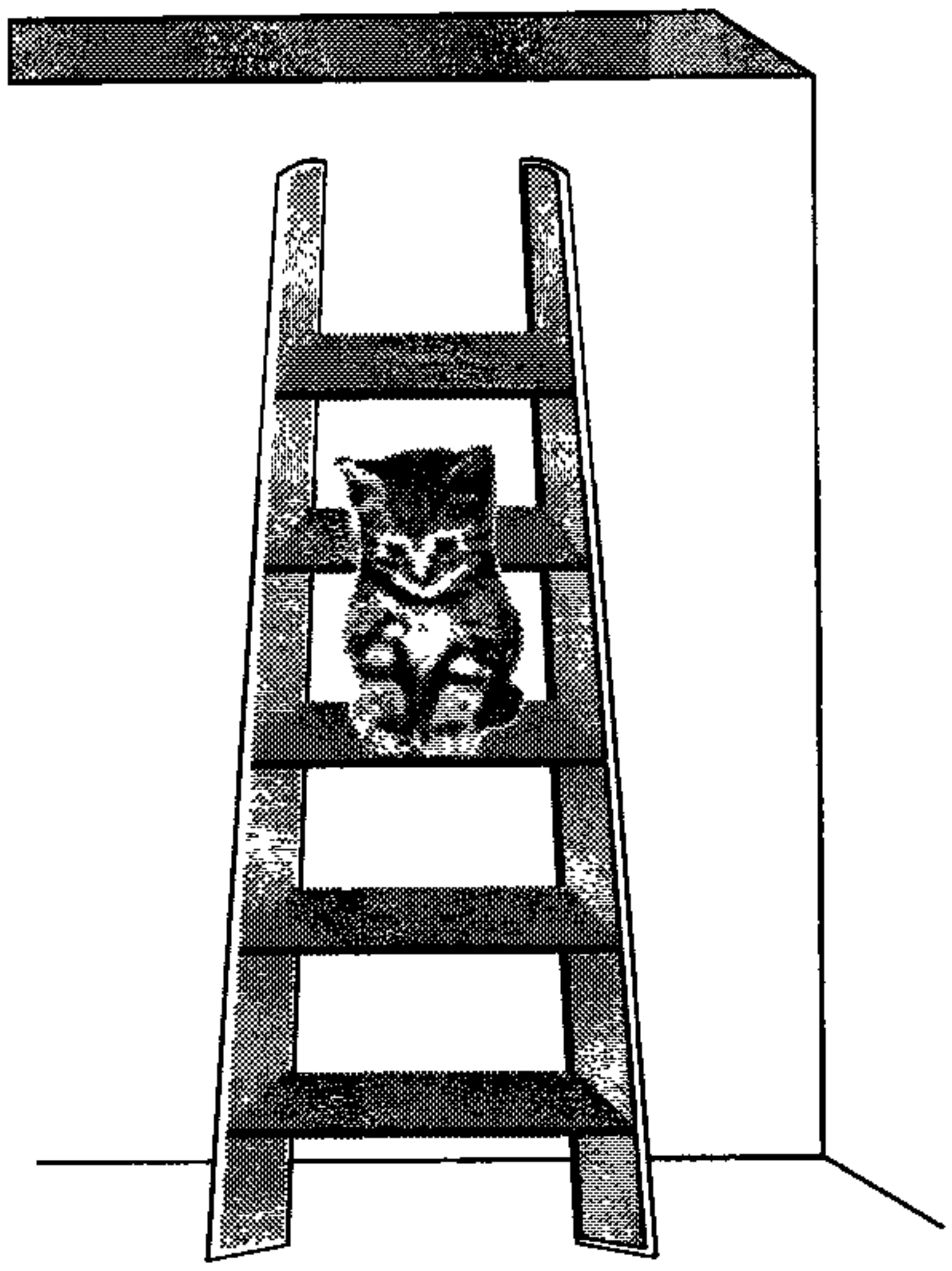
c. Ahora intente hacer la misma cosa con nueve damas blancas y nueve negras. Esta solución no tiene que ser simétrica.



2. El gatito flemático

I. Una escalera situada sobre el suelo liso, y apoyada con un extremo en la pared, se desliza hacia abajo:

a. ¿Por cuál línea se mueve un gatito que está sentado en el centro de la escalera? Supongamos, que el gatito es flemático y se encuentra sentado tranquilamente sin moverse.

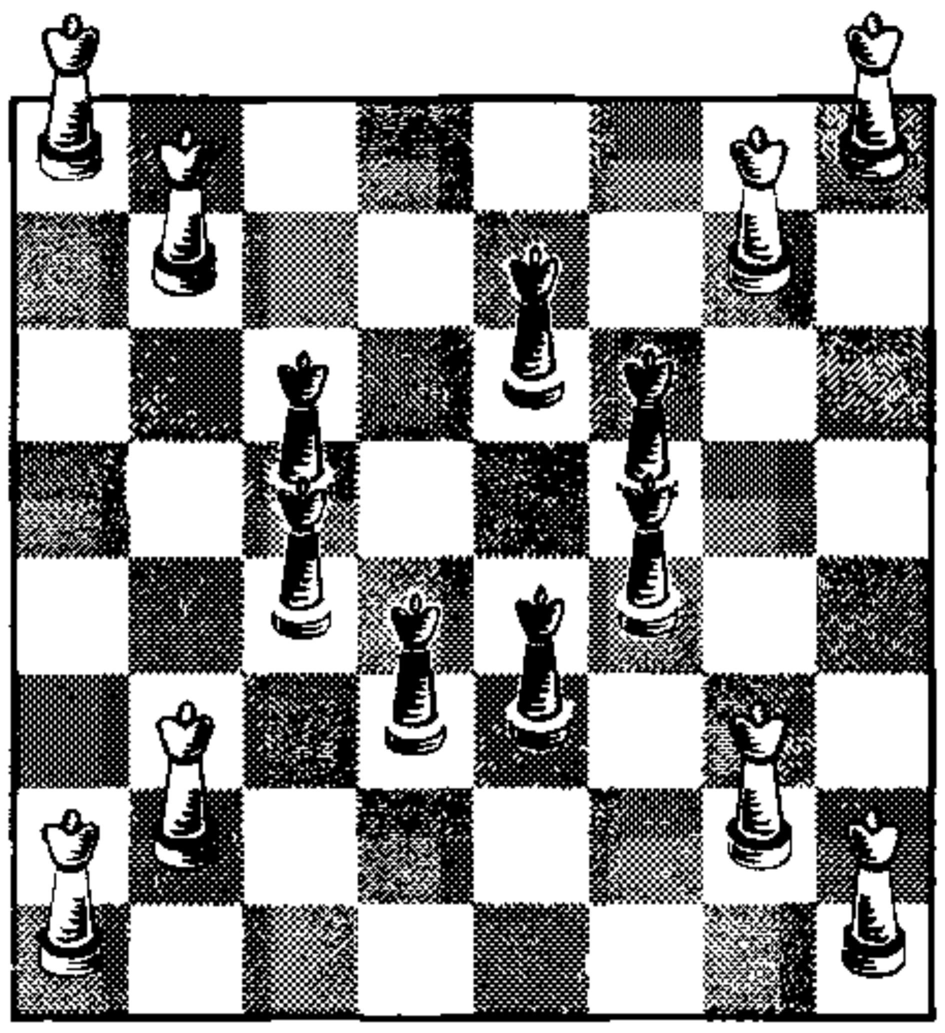


b. ¿Cómo ve el gatito aquella esquina entre la pared y el piso al deslizarse la escalera?

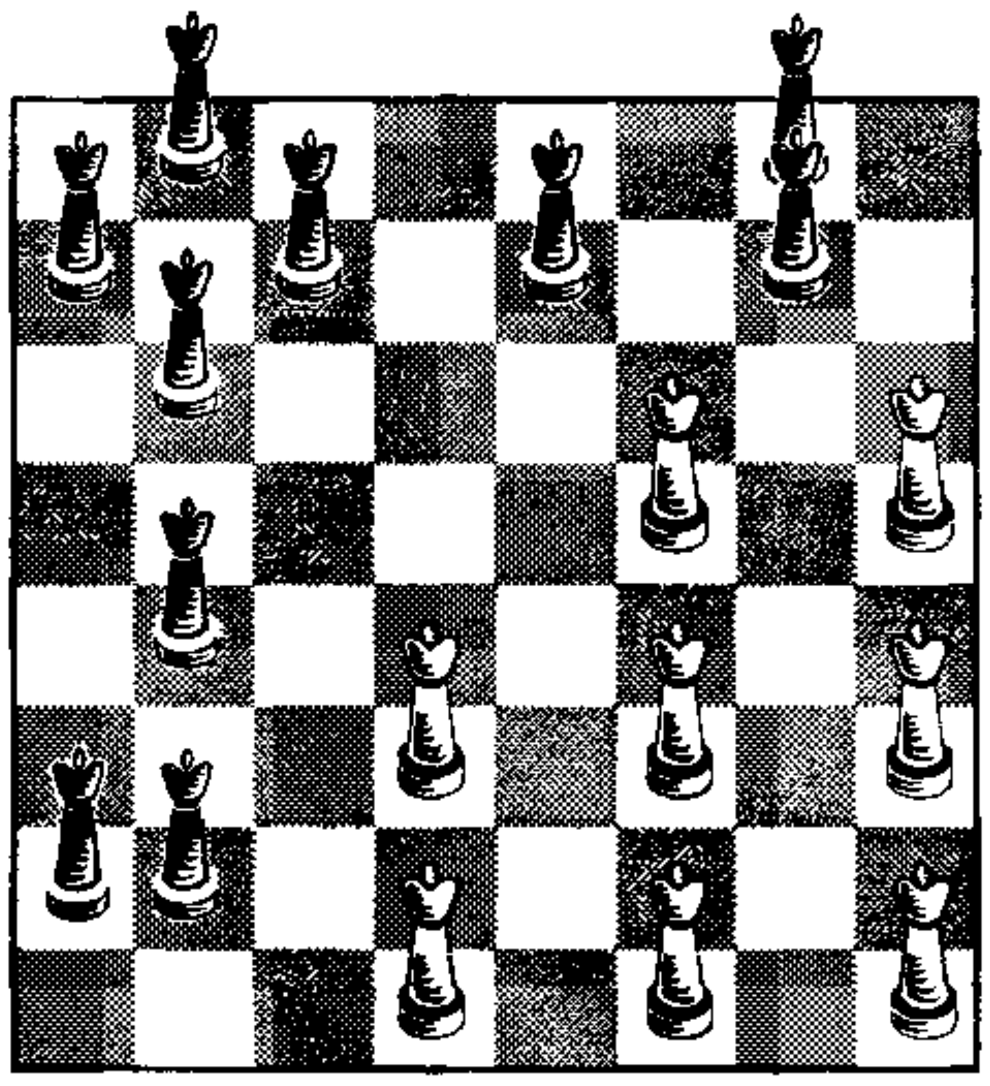
Suponer primero una posición vertical de la escalera y finalmente una posición horizontal de ella y que desde la óptica del gatito este no se mueva sino que gira el entorno.

Resolución 1

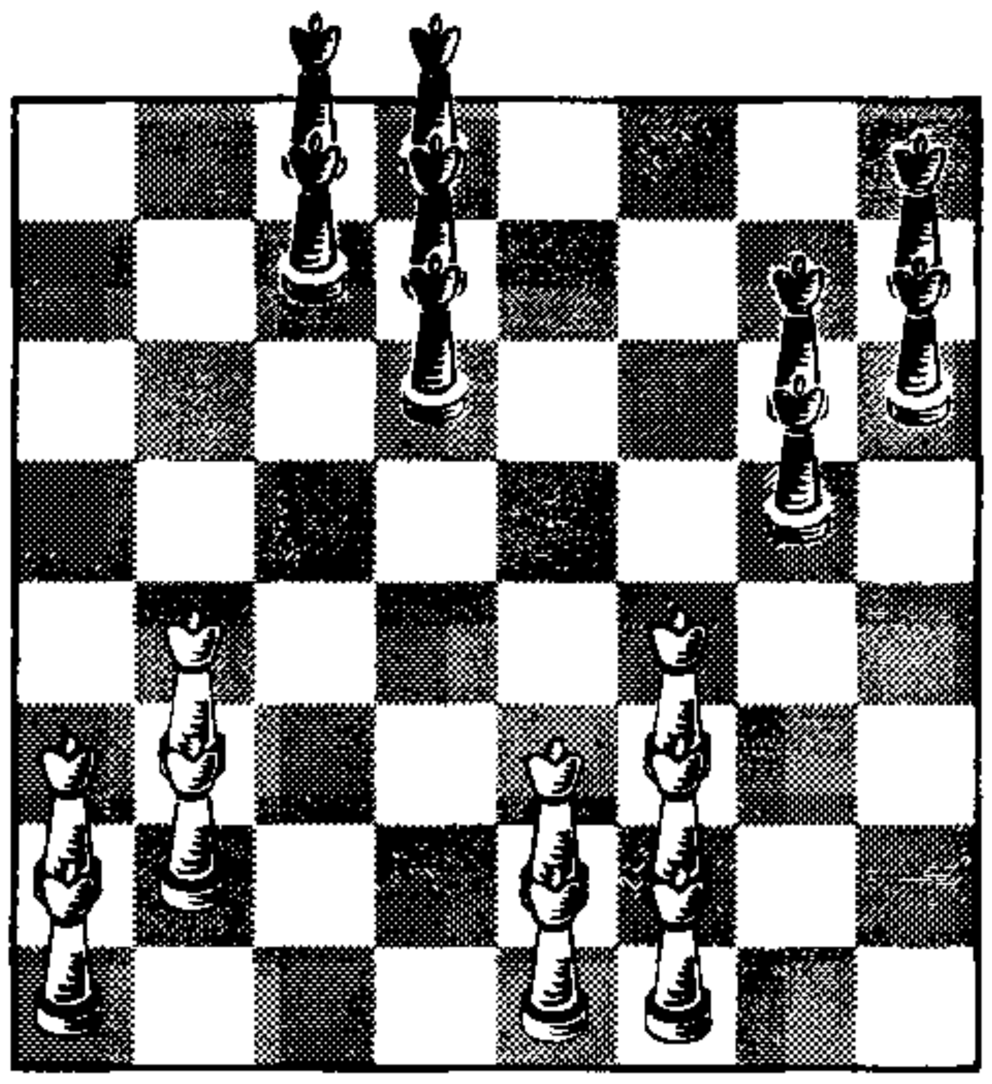
A continuación se muestra la posición que deben ocupar las damas blancas y negras en donde se cumple los casos 1, 2 y 3.



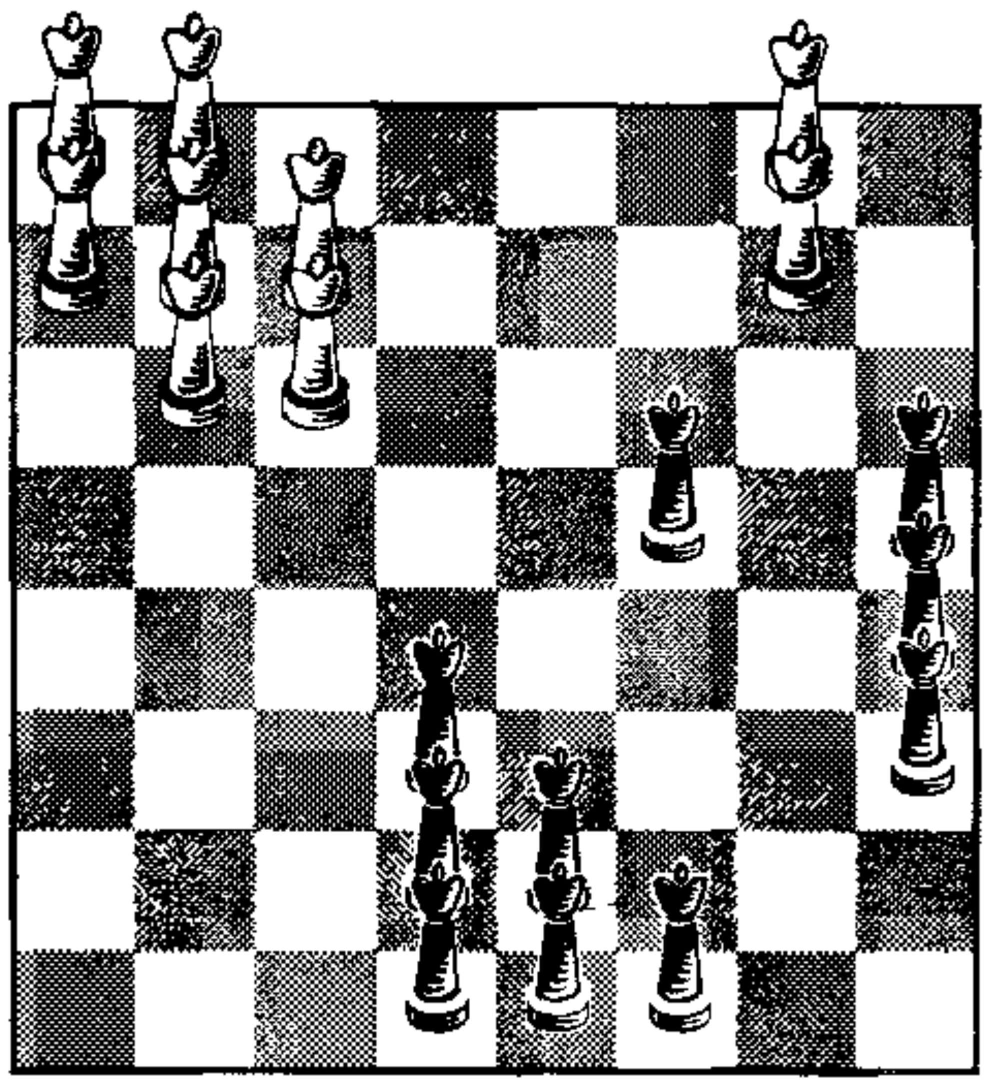
1)



2)



3)



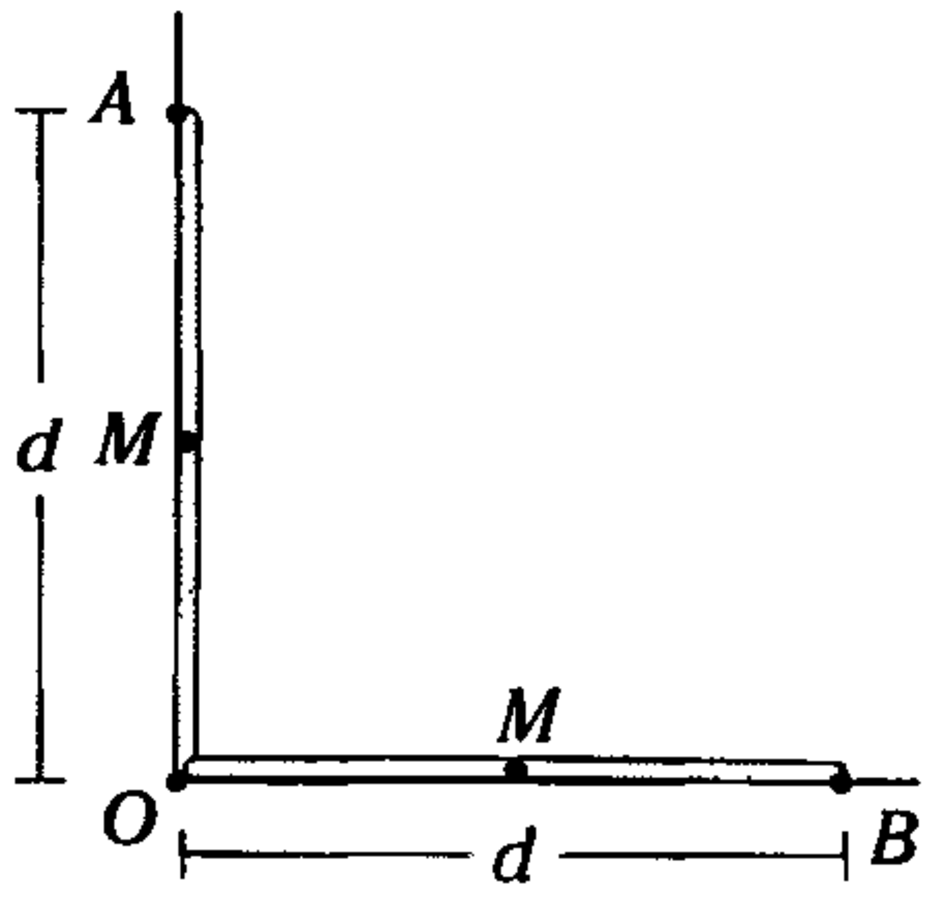
4)

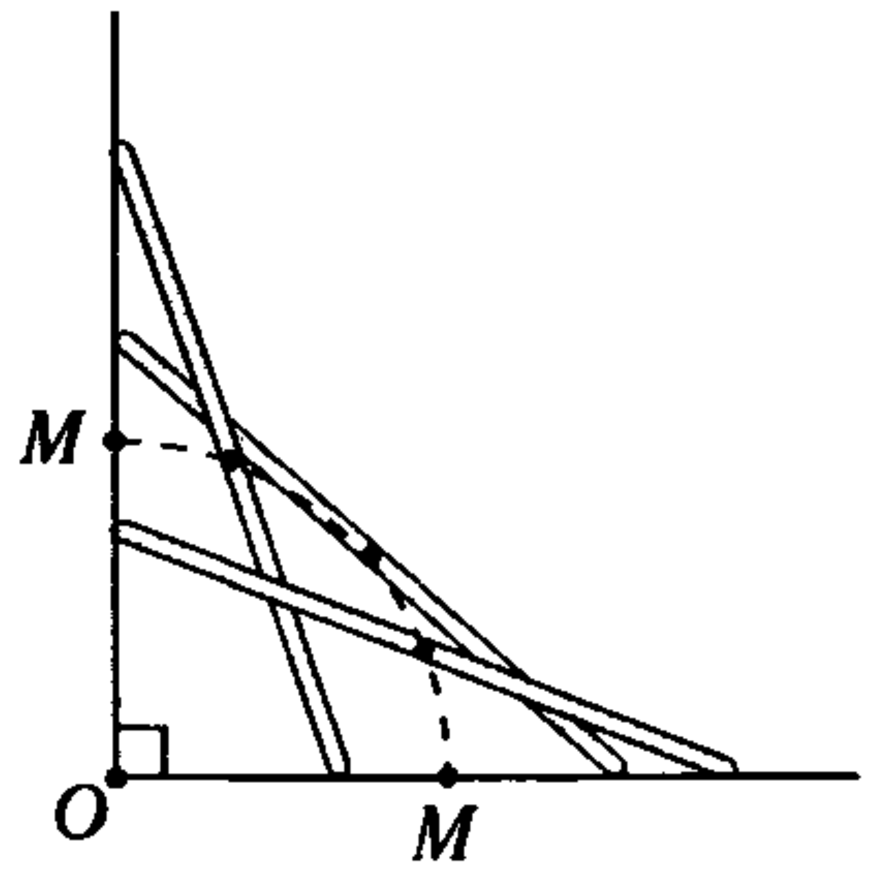
Resolución 2

a. Este problema puede ser planteado de la siguiente manera: Sea un ángulo recto, halle el conjunto de los puntos medios de toda clase de segmentos de una longitud dada d, cuyos extremos se hallan sobre los lados del ángulo recto dado.

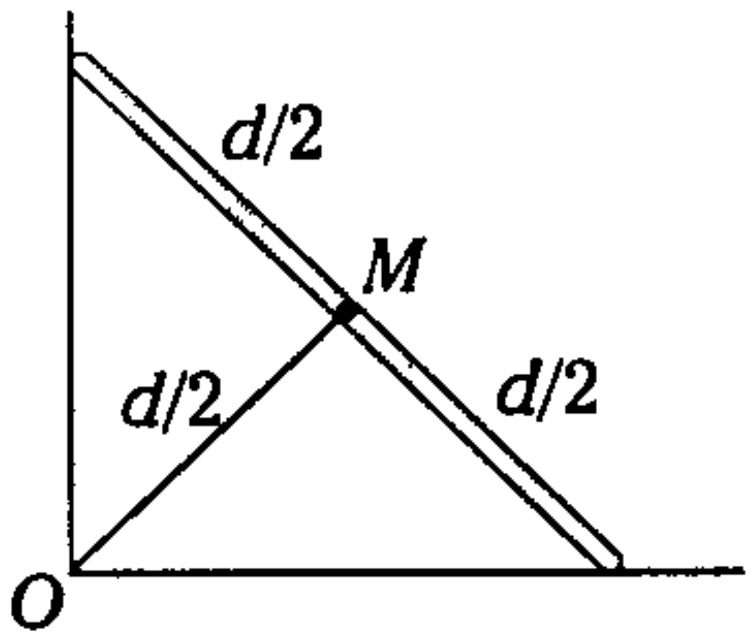
Trataremos de suponer cuál es el conjunto de puntos que describe M cuando el segmento se desliza apoyado en la pared y resbalando en el piso (lados del ángulo recto). Ante todo, vamos a aclarar dónde están los extremos de esta línea. Corresponde a las posiciones extremas del segmento, es decir ubicar la posición de M cuando se halla o vertical u horizontalmente. De la figura anterior, se puede ver que $\overline{OM}$ en la posición vertical y horizontal tiene longitud $d/2$.

Trace unas cuantas posiciones intermedias del segmento.



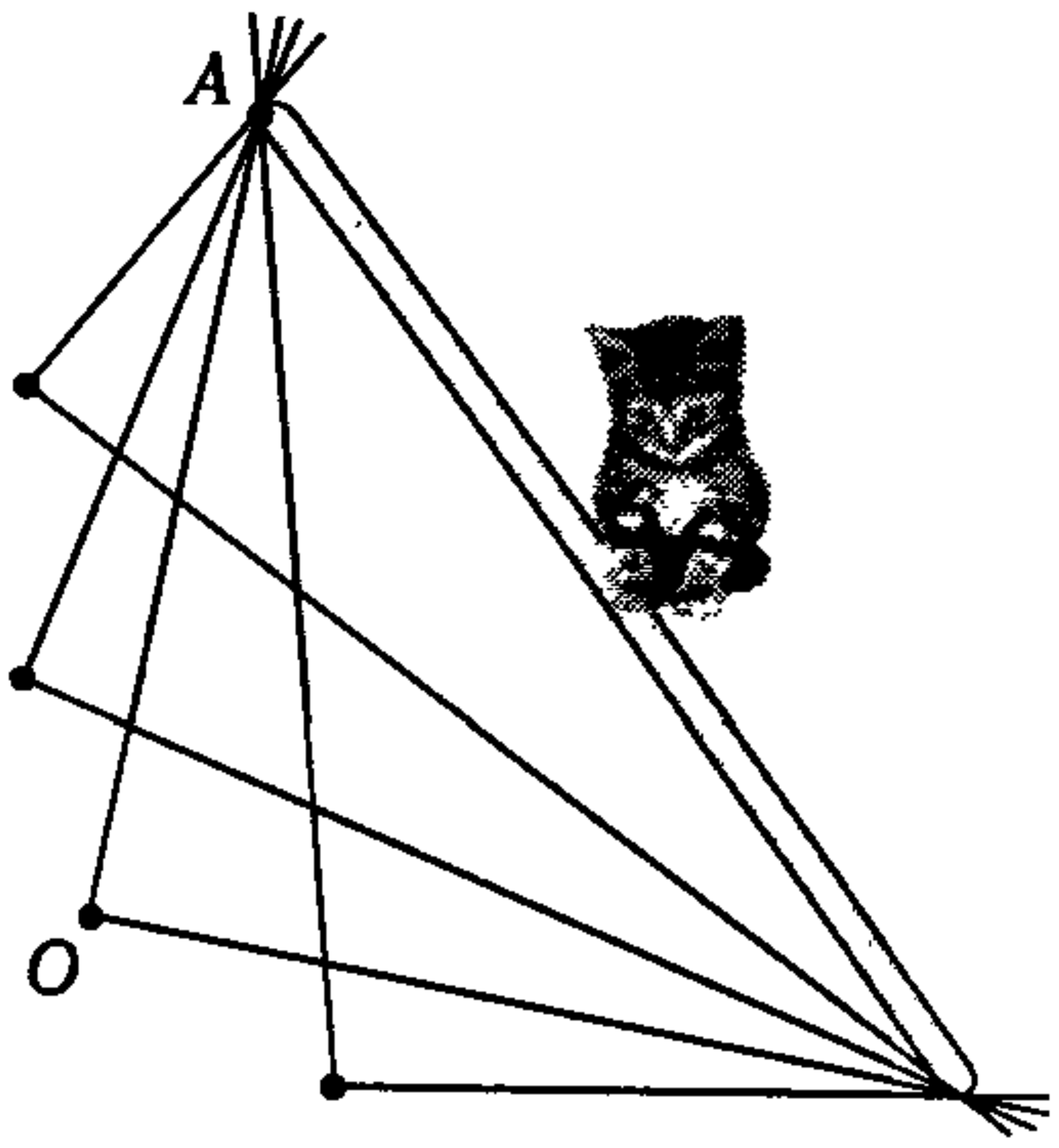


Para cualquier posición de la escalera, la distancia del punto medio (*M*) respecto de la esquina *O* es la mitad de la longitud (*d*) de la escalera.



Es decir, *M* siempre dista *d*/2 unidades del punto *O*, así el conjunto de puntos *M* describe un cuadrante de centro *O* y radio *d*/2.

b. Ahora podemos ver el problema desde otro punto de vista: supongamos que la escalera está lisa y el ángulo recto *AOB* se desplaza, entonces el vértice *O* describe una trayectoria que será la misma que observa el gato desde su posición fija. Concluimos que el conjunto de puntos *O* describe una semicircunferencia, cuyo centro es el punto medio de la escalera y cuyo radio es la mitad de ella (*d*/2).



Problemas Propuestos

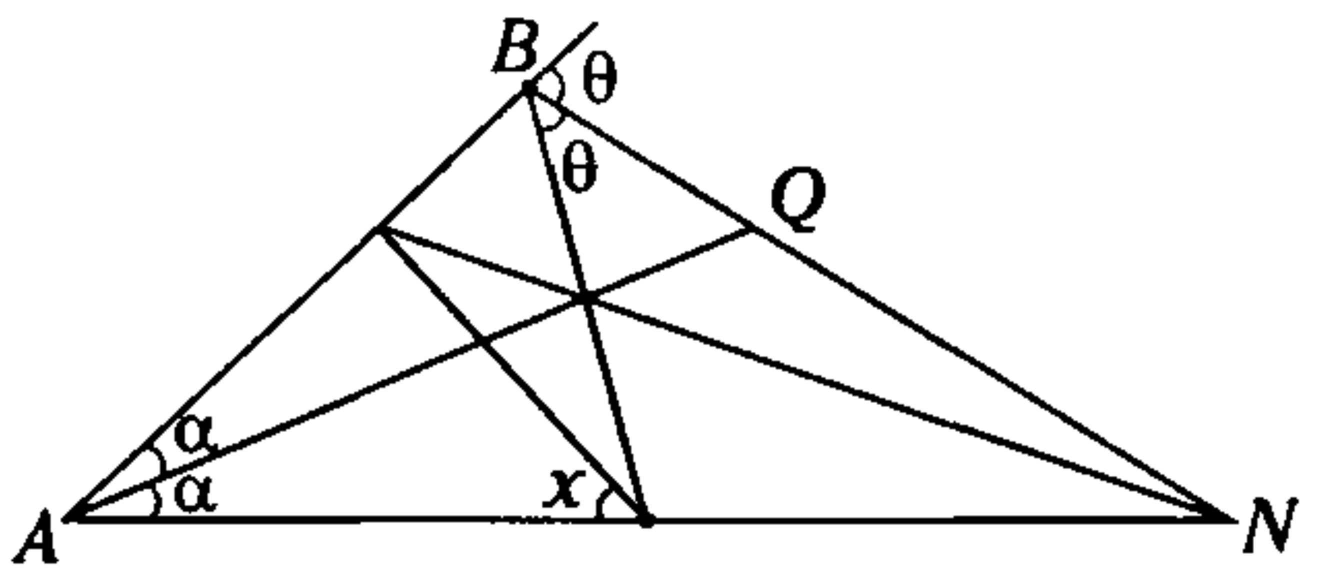
1. Dado un trapecio isósceles $ABCD$ ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$), en la región exterior relativa al lado $\overline{BC}$ se ubica el punto P, tal que m∢ APD=90°. Si BD=3(PC) y m∢ABD=90°, además la medida del ángulo determinado por $\overline{AP}$ y $\overline{BD}$ es el triple de m∢CPD, calcule m∢PAD.

A) 18°30' B) 26°30' C) 37°
D) 53° E) 45°

2. En un pentágono convexo $ABCDE$, BE=2(CD) y m∢BCE = m∢BDE = m∢BAE = 90°. Señale m∢CAD.

A) 30° B) 45° C) 37°/2
D) 53°/2 E) 36°

3. En la figura mostrada, m∢AQN=140°. Indique x.



A) 70° B) 35° C) 20°
D) 40° E) 50°

4. Sean los cuadrados $ABCD$ y $DEFG$ (E en $\overline{CD}$ y G en la prolongación de AD). Si la recta AE interseca a $\overline{BF}$ en P, calcule m∢FPG.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 53° E) 37°

5. En un cuadrado $ABCD$, M es punto medio de $\overline{AD}$. Si en $\overline{CD}$ se ubica el punto P, desde el cual se trazan las perpendiculares PQ y PH a $\overline{BM}$ y $\overline{CM}$; respectivamente (Q en $\overline{BM}$, H en $\overline{MC}$), señale m∢QDH.

A) 60° B) 30° C) 37°
D) 53° E) 74°

6. La circunferencia exinscrita al triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$ es tangente a $\overline{AC}$ en N y a las rectas AB y BC en M y Q, respectivamente. Si $\overline{MC} \cap \overline{AQ}=S$ y la recta NS interseca a $\overline{MQ}$ en P, calcule MP/PQ. Considere que AB=5; BC=8 y AC=7.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

7. En un triángulo ABC, se trazan la ceviana interior AN y la bisectriz CM.

Si $\dfrac{AM\,.\,BN}{BM\,.\,CN}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{4}$, resuelva $\dfrac{m∢BAN}{m∢NAC}$.

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{37}{53}$
D) 2 E) 1

8. En un cuadrilátero inscriptible $ABCD$, donde BC=CD y las proyecciones ortogonales de C sobre AB y AD, respectivamente, son P y H. Si $\overline{PH} \cap \overline{BD}=M$, halle $\dfrac{BD}{BM}$.

A) 1 B) 2 C) 0,5
D) 3 E) $\sqrt{2}$

9. Sean D, E y F tres puntos cualesquiera en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC. Las circunferencias circunscritas a los triángulos AEF y BFD se intersecan en M ($M \neq F$). Si, posteriormente, en la región interior se ubica el punto P, tal que $EP=PM$ y $m\measuredangle EDP=m\measuredangle PDM$, además $m\measuredangle ACB=70°$, calcule $m\measuredangle EMD$.

A) 70° B) 140° C) 110°
D) 125° E) 145°

10. Sea $AFCE$ el cuadrilátero completo respecto del cuadrilátero convexo $ABCD$ (B en $\overline{AF}$ y D en $\overline{AE}$). Si las circunferencias circunscritas de los triángulos AFD y AEB se intersectan en O ($O \neq A$), halle $m\measuredangle BOD$. Asuma que $m\measuredangle BCD - m\measuredangle BAD=60°$.

A) 120° B) 60° C) 45°
D) 90° E) 75°

11. En un triángulo $ABC(AB>BC)$, se traza la bisectriz exterior BE. Si la prolongación de la bisectriz interior AM interseca a $\overline{BE}$ en P y, además, la recta EM interseca a $\overline{AB}$ en Q; señale $m\measuredangle PCQ$.

A) 60° B) 135° C) 45°
D) 36° E) 90°

12. En un triángulo ABC, el pie de la altura AH se proyecta sobre los lados AB, AC y, sobre las alturas BE y CF, en los puntos M, N, P y Q, respectivamente. Si $m\measuredangle MQH+m\measuredangle NPH=130°$, indique $m\measuredangle BAC$.

A) 50° B) 65° C) 40°
D) 70° E) 60°

13. Sean los triángulos isósceles AMC y ANB de bases $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, tal que ($B \in \overline{AM}$ y $C \in \overline{AN}$). Si O es circuncentro del triángulo ABC, halle $m\measuredangle MON$. Considere que $m\measuredangle BOC=140°$.

A) 70° B) 140° C) 80°
D) 110° E) 100°

14. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas AN y CM, tal que $\overline{AN} \cap \overline{CM}=P$. Si $PMBN$ es inscriptible, $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{CN}{NB}$ y $m\measuredangle ACB=42°$, calcule $m\measuredangle QPC$. Identifique a Q como punto medio de $\overline{AC}$.

A) 48° B) 84° C) 42°
D) 21° E) 63°

15. En un triángulo ABC, de excentro E relativo al lado BC, se ubica el punto D en la prolongación de $\overline{AC}$; tal que $AC=CD$ y $AB=2(BC)$. Si $m\measuredangle BAC=40°$, señale $m\measuredangle CED$.

A) 100° B) 120° C) 110°
D) 140° E) 150°

16. En un triángulo ABC, se trazan las alturas AM, BN y CQ. Si en la prolongación de $\overline{AC}$, se ubica el punto E, tal que $NC=\dfrac{AN}{2}=\dfrac{CE}{3}$, además, $m\measuredangle BAC=54°$, calcule $m\measuredangle CME$.

A) 36° B) 72° C) 27°
D) 81° E) 54

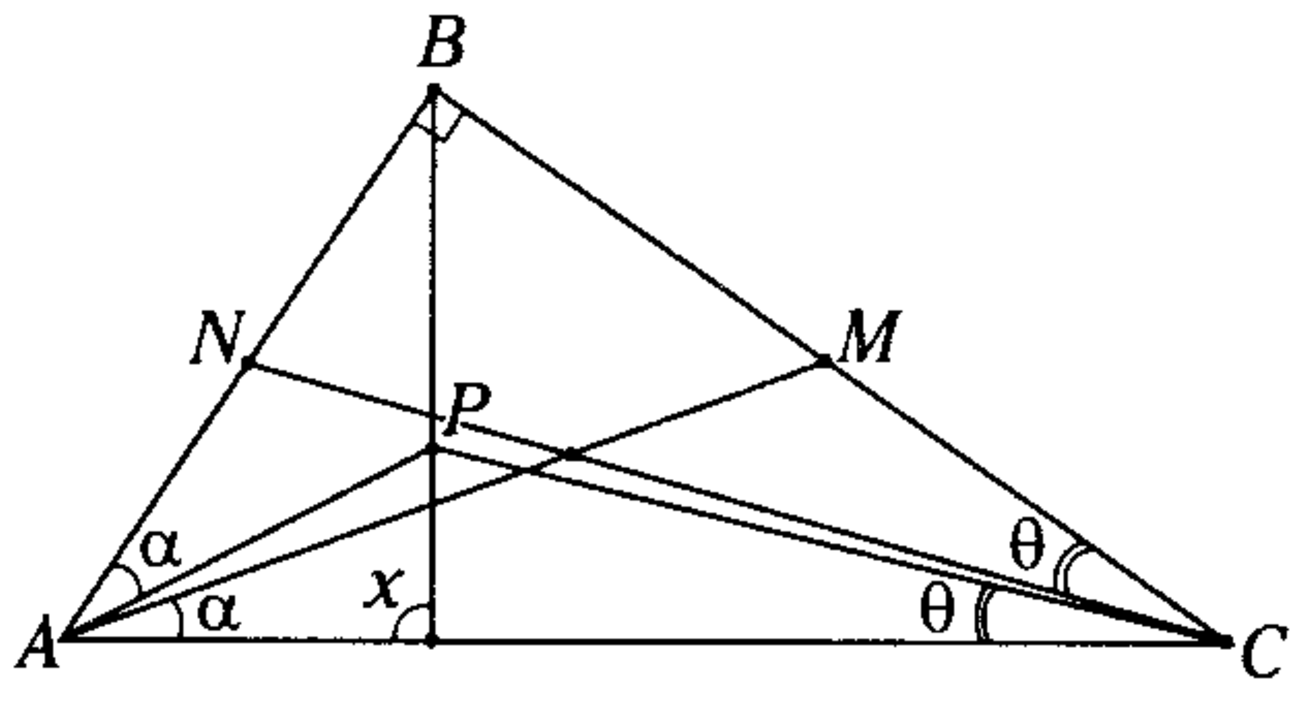
17. Sean los triángulos ABC y MNQ, donde $N \in \overline{AB}$ y $C \in \overline{MQ}$. Si $\overline{NQ}//\overline{AC}$ y $\overline{MN}//\overline{BC}$, halle $m\measuredangle BQN+m\measuredangle AMN$. Se sabe que $m\measuredangle ACB=40°$.

A) 50° B) 40° C) 80°
D) 110° E) 70°

18. Dado un triángulo ABC, de circuncentro O; en $\overline{AC}$, se ubica el punto M. Si las mediatrices de $\overline{AM}$ y $\overline{MC}$ intersecan a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q, respectivamente, y m$\sphericalangle OPB=70°$, calcule m$\sphericalangle OQB$.

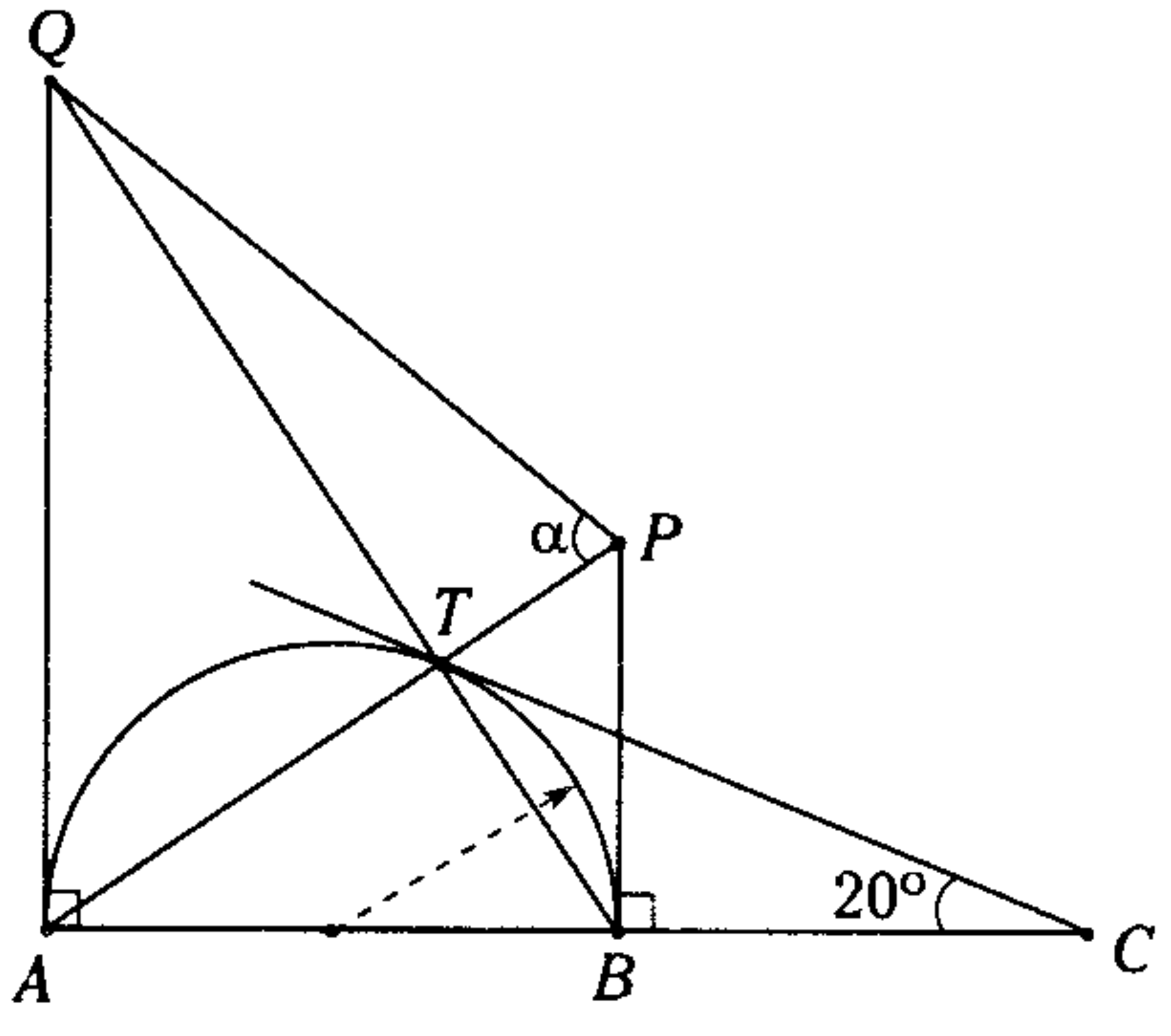
A) 70° B) 140° C) 50°
D) 125° E) 110°

19. En la figura, m$\sphericalangle ABC=90°$, $AN=NB$, $BM=MC$, m$\sphericalangle PAB$=m$\sphericalangle MAC$ y m$\sphericalangle PCA$=m$\sphericalangle NCB$. Determine x.



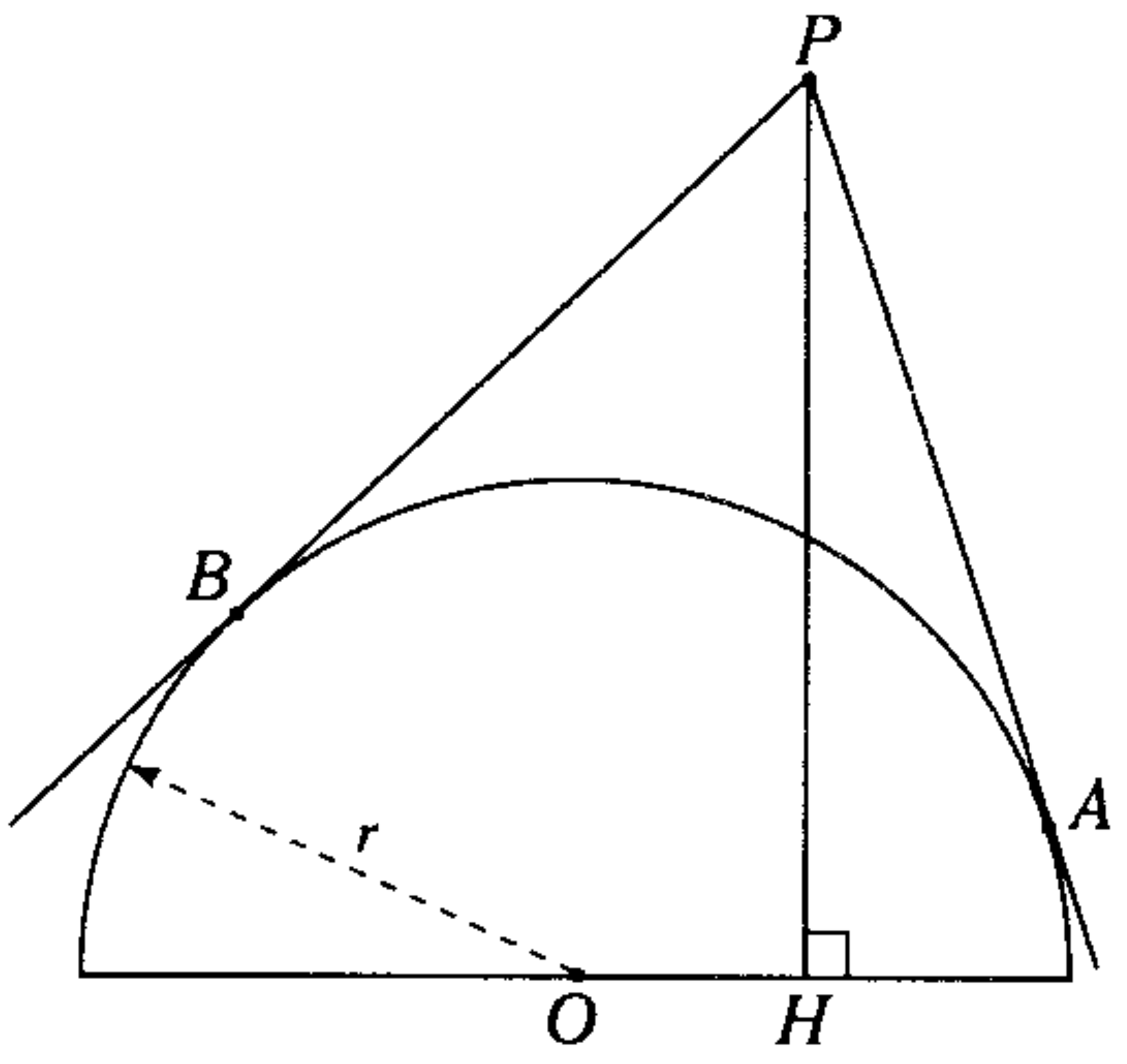
A) 60° B) 90° C) 45°
D) 75° E) 80°

20. Si $AB=BC$ y T es punto de tangencia, indique α.



A) 70° B) 40° C) 80°
D) 55° E) 110°

21. En la figura mostrada, $AB=r\sqrt{3}$ y $PH=h$. Calcule $AH+BH$ (A y B son puntos de tangencia).



A) $h\sqrt{2}$ B) 3h/2 C) $h\sqrt{3}$
D) $h\sqrt{6}/2$ E) h

22. Dado un rectángulo $ABCD$, en la región exterior y relativo al lado BC se ubica el punto P, tal que al trazar $\overline{AM}$ y $\overline{DN}$, perpendiculares a $\overline{PC}$ y $\overline{PB}$ ($M\in\overline{PC}$; $N\in\overline{PB}$), estos se intersecan en Q. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{PQ}$ y $\overline{AD}$.

A) 60° B) 120° C) 90°
D) 100° E) 80°

23. En un triángulo ABC, se ubican los puntos QMN en $\overline{AC}$ y en las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$, respectivamente. Si las prolongaciones de $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ se intersecan en P y $\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CQ}{AQ}=1$, calcule m$\sphericalangle QBC$. Se sabe que m$\sphericalangle PBN=38°$.

A) 38° B) 52° C) 19°
D) 16° E) 45°

1	C
2	A
3	D
4	B
5	D
6	D
7	E
8	B
9	C
10	B
11	E
12	A
13	D
14	C
15	C
16	E
17	B
18	E
19	B
20	A
21	E
22	C
23	A

Claves

Capítulo XIII

Transformaciones geométricas

El templo de Racchi fue construido por los incas entre Cusco y Puno. Podemos apreciar que al reflejarse en las aguas, muestra una simetría axial.

Transformaciones geométricas

OBJETIVOS

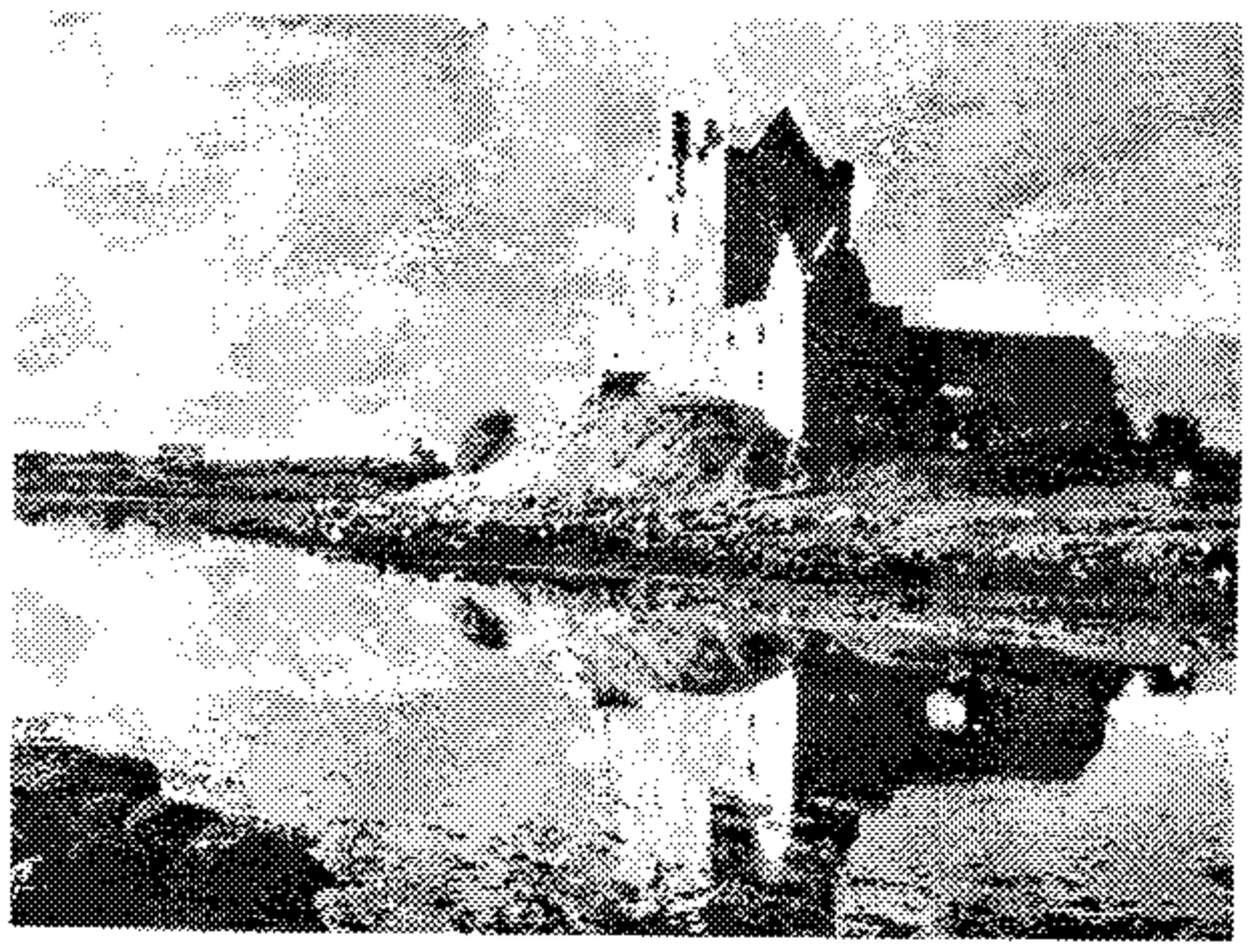
- Transformar una figura en otra, para así proporcionar una solución más sencilla, de un determinado problema.
- Conocer las aplicaciones de las transformaciones geométricas.
- Inscribir o circunscribir polígonos usando transformaciones.
- Aplicar el concepto de producto de transformaciones.

INTRODUCCIÓN

Si nos pidieran multiplicar los números romanos XI por XV, seguramente procederíamos a transformarlos a números arábigos (11×15), es decir, efectuaríamos la operación, donde el producto es 165, para luego transformarla a número romano CLXV. Este proceso de transformar, con el fin de resolver un problema también se presenta en la geometría.

Cuando un problema geométrico es operativo, extenso o engorroso, al ser resuelto por cierto capítulo muchas veces es más ventajoso someter la figura, o parte de ella, a una o más transformaciones, que facilite la resolución o que se transforme en uno más sencillo o en todo caso que sea conocido.

Dentro de las transformaciones más conocidas, tenemos la simetría, la traslación, la rotación y la homotecia, las cuales, incluso, están presentes en las actividades cotidianas: al vernos en un espejo, en el funcionamiento de un ventilador o cuando ampliamos o reducimos una imagen en la fotocopiadora.



Simetría o reflexión respecto de una línea es lo que se aprecia en la imagen natural producida en la superficie quieta del lago.

Cuando un camión se desplaza, todos sus elementos se trasladan simultáneamente.

CONCEPTOS PREVIOS

TRANSFORMACIONES PUNTUALES

Transformación unívoca

Se denomina transformación puntual a aquella correspondencia que a todo punto dado P asocia un punto P'. El punto P' es homólogo o transformado de P.

La correspondencia que asociará a P' en punto P se llama transformación inversa, los puntos en los cuales P y P' coinciden se distinguen como puntos dobles de la transformación.

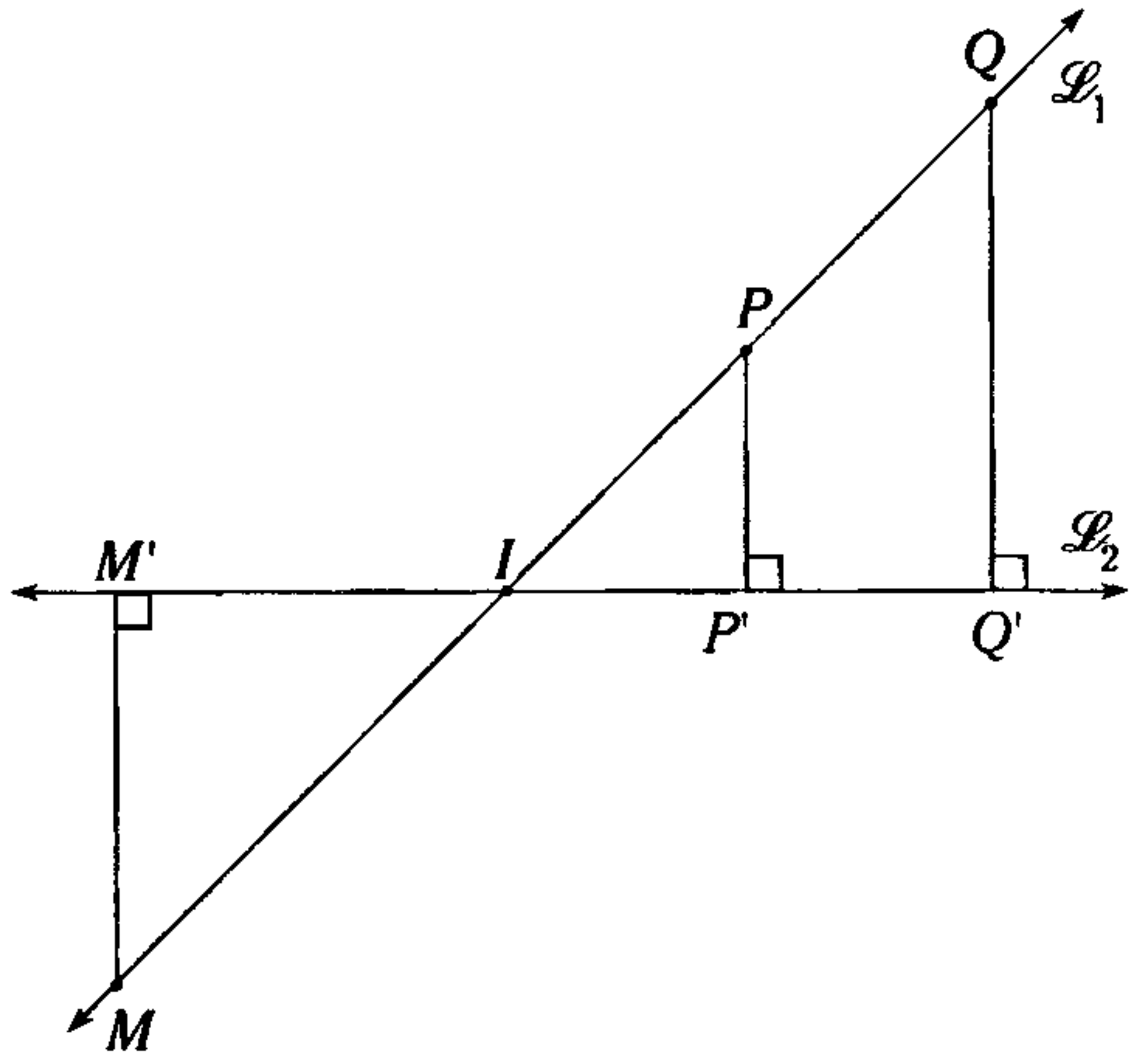


Figura 13.1

Consideremos dos rectas secantes, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. Si por cada punto P de $\mathscr{L}_1$, se traza la perpendicular a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, asociamos el pie P' de esta perpendicular al punto P, entonces se ha realizado una transformación puntual unívoca.

El punto de intersección I de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ es un punto doble.

Transformación Biunívoca

Es cuando a todo punto dado P le corresponden dos homólogos P' y P''.

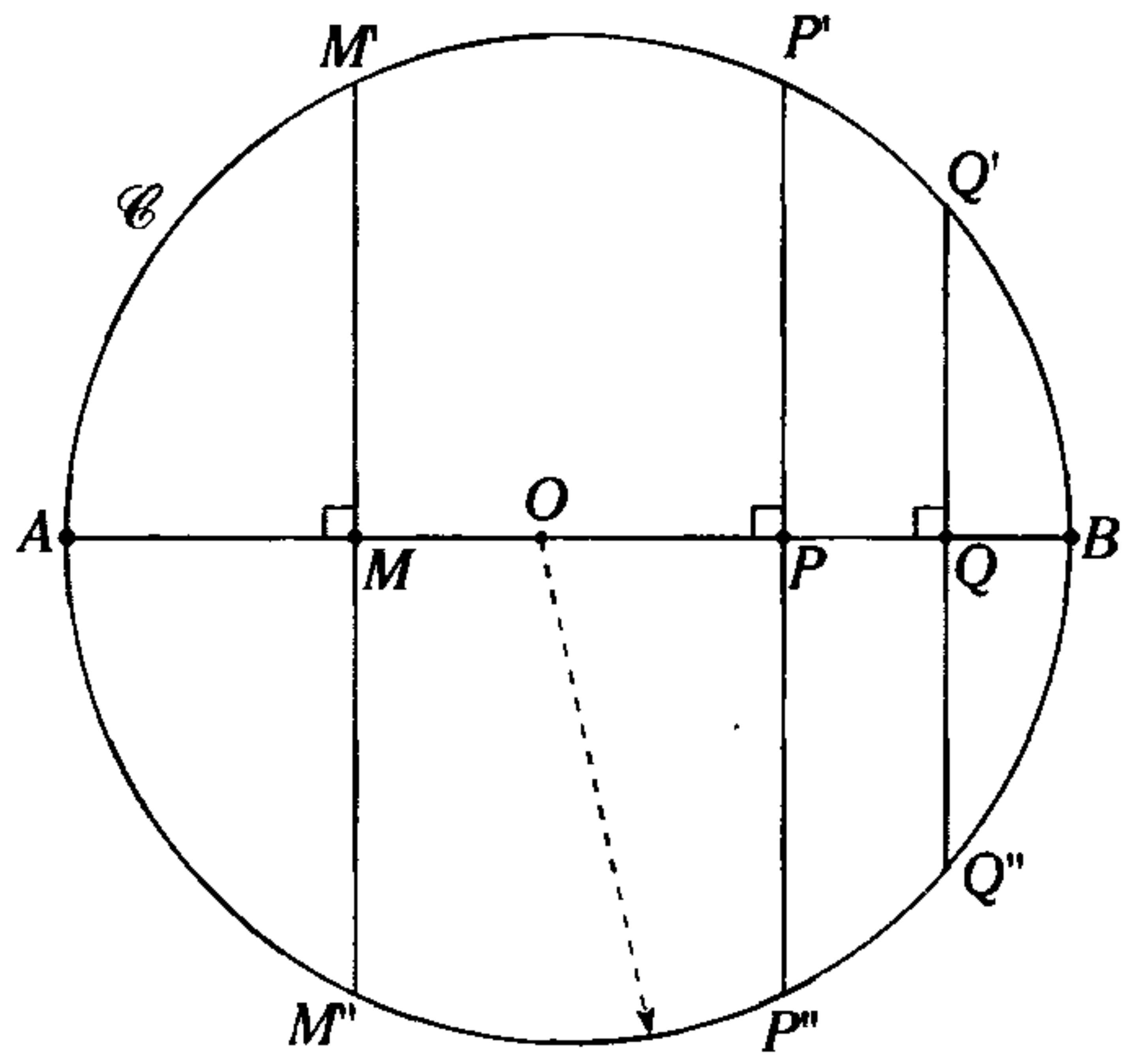


Figura 13.2

Consideremos una circunferencia $\mathscr{C}$ de diámetro AB y cuerdas perpendiculares a este diámetro.

Si a cada punto P del diámetro le asociamos los puntos P' y P'' (puntos de intersección de una cuerda con la circunferencia), entonces se ha realizado una transformación puntual biunívoca. Los puntos A y B son puntos dobles.

Observación

Cuando todos los homólogos P' coinciden con los puntos dados P, la transformación se llama identidad, idéntica o coincidente.

Cuando una figura F se transforma en una figura F'_n debido a n transformaciones sucesivas $T_1, T_2, T_3, ..., T_n$, se obtienen así, las figuras F_1, F_2, F_3, ...F_n . La transformación que permite pasar directamente de F a la última figura F'_n se llama producto de n transformaciones.

En general, el producto depende del orden de las transformaciones.

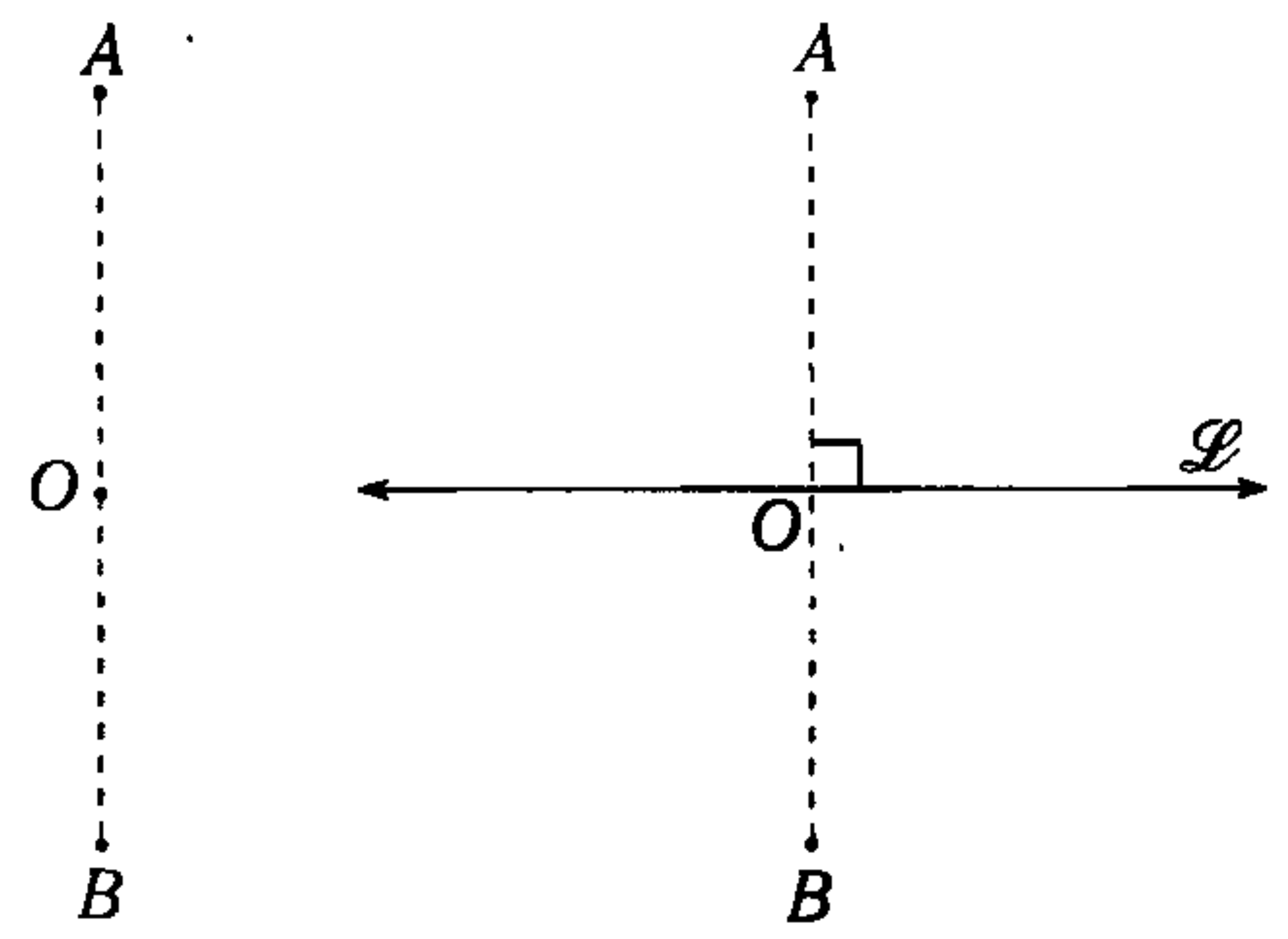
Transformaciones puntuales notables

Entre las diversas transformaciones puntuales consideraremos notables a las de mayor importancia por su aplicación en la resolución de problemas geométricos. Entre estos podemos mencionar

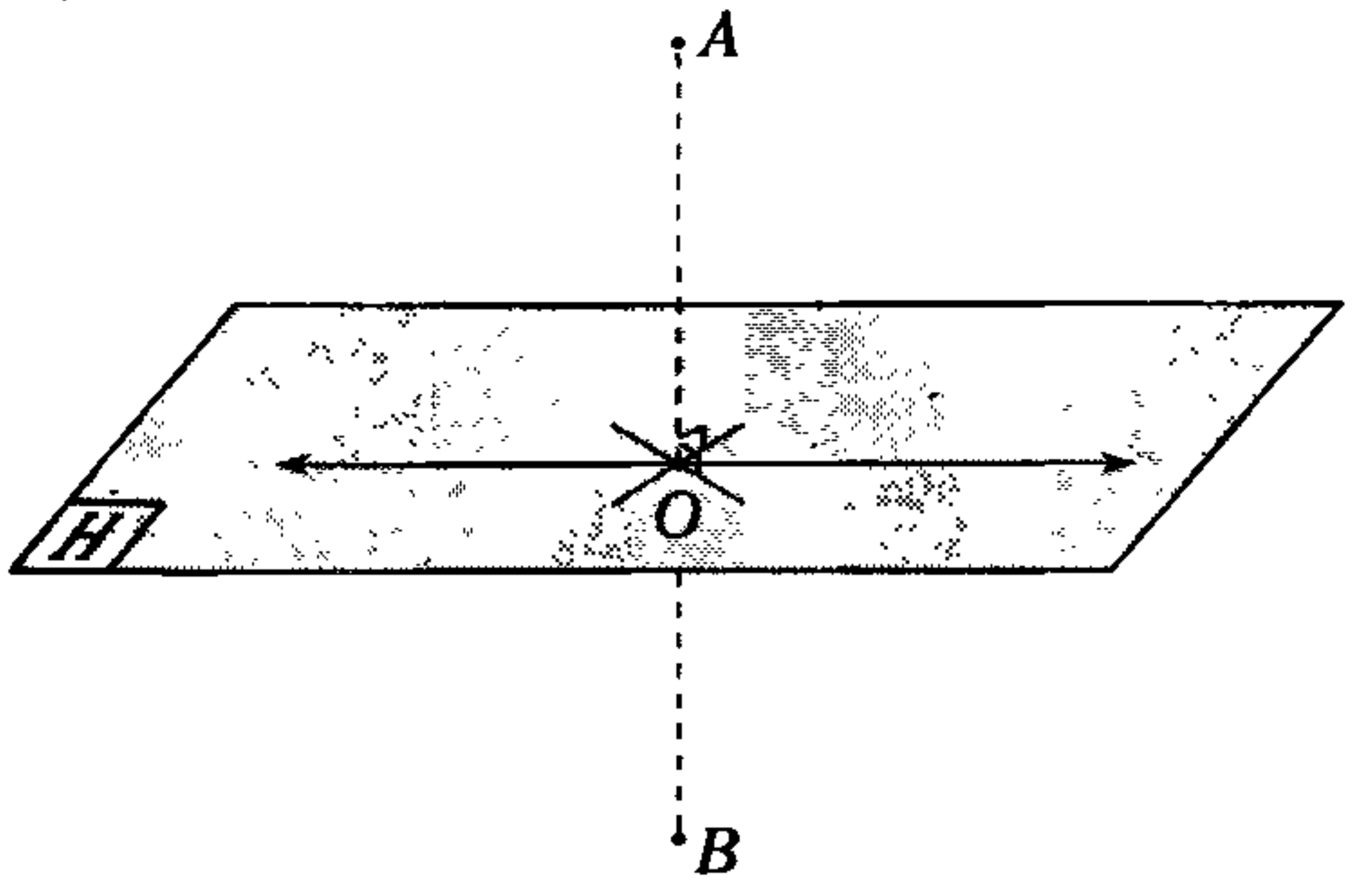
- Simetría
- Rotación
- Traslación
- Homotecia

SIMETRÍA

Dos puntos son simétricos si existe un elemento geométrico (punto, recta o plano) mediatriz, respecto al segmento de recta que los une.



$AO = OB$ y $O \in \overline{AB}$ $\qquad$ $AO = OB$ y $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

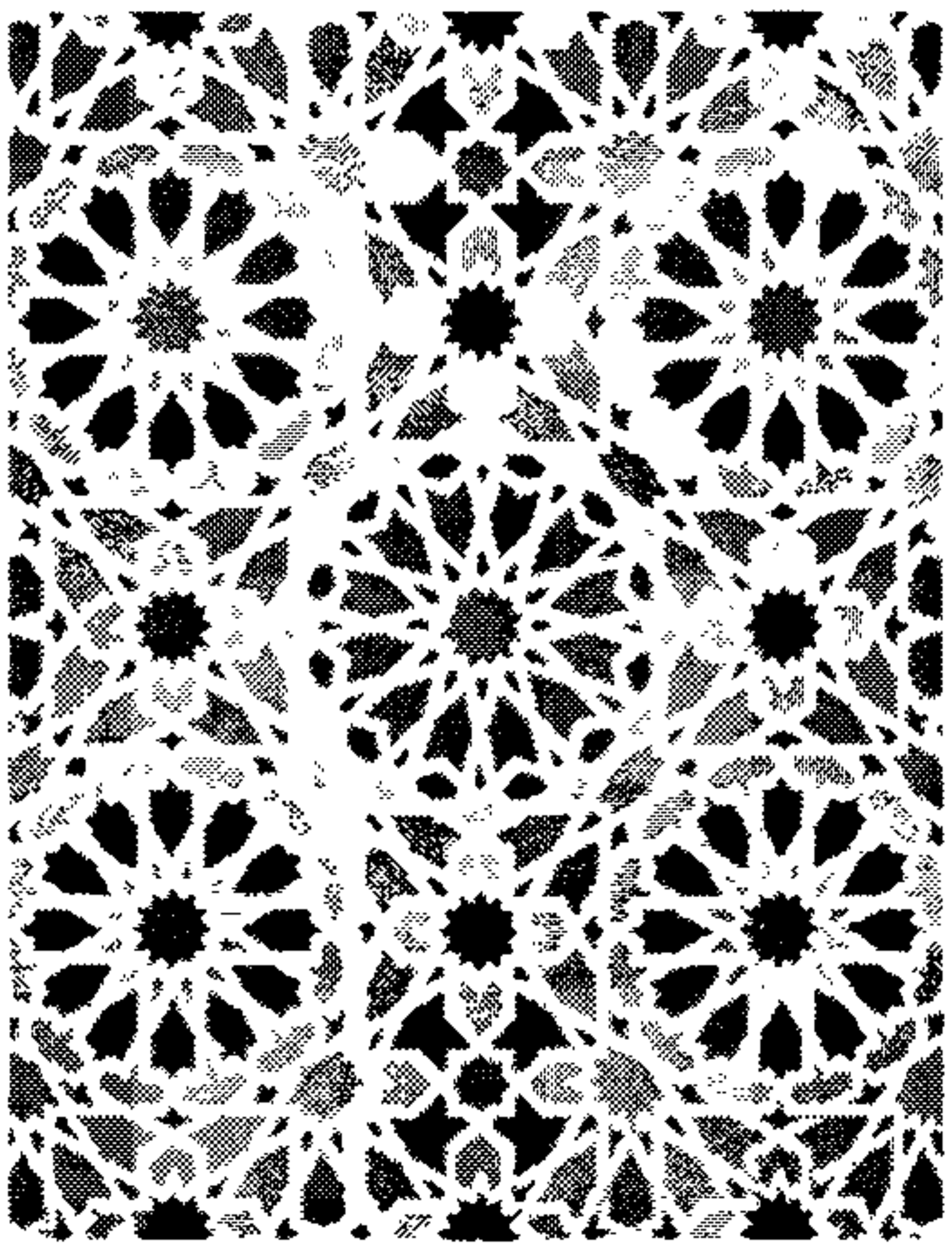


$AO = OB$ y $\overline{AB} \perp \square H$

Figura 13.3

En las figuras mostradas, se presentan puntos simétricos (A y B) respecto de O; $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\square H$, respectivamente.

Podemos observar, así, que existe simetría respecto a un punto, una recta y a un plano; de este último nos ocuparemos en la geometría del espacio.



La simetría es utilizada como elemento decorativo de armonía y belleza.

Nota

La simetría también es conocida como reflexión.

SIMETRÍA PUNTUAL O CENTRAL

Dos puntos son simétricos, respecto de un punto fijo llamado centro, si este último es punto medio del segmento que los une.

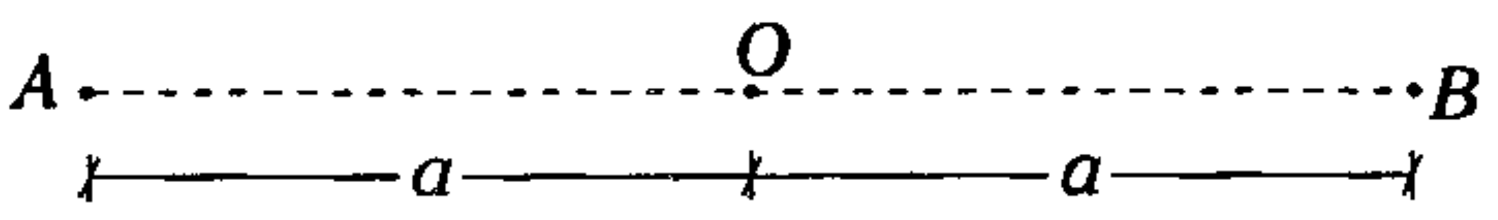


Figura 13.4

Si $AO=OB$, entonces A y B son simétricos respecto de O.

O: Centro de simetría.

De la definición

- B es el simétrico de A respecto a O.
- A es el simétrico de B respecto a O.

Notación

$$B = \text{Sim}.\,A(O)$$
$$A = \text{Sim}.\,B(O)$$

FIGURAS SIMÉTRICAS RESPECTO DE UN PUNTO

Una figura es simétrica de otra respecto del punto fijo O, si para todo punto de la primera le corresponde un punto en la segunda; de tal manera que O es centro de simetría de estos puntos.

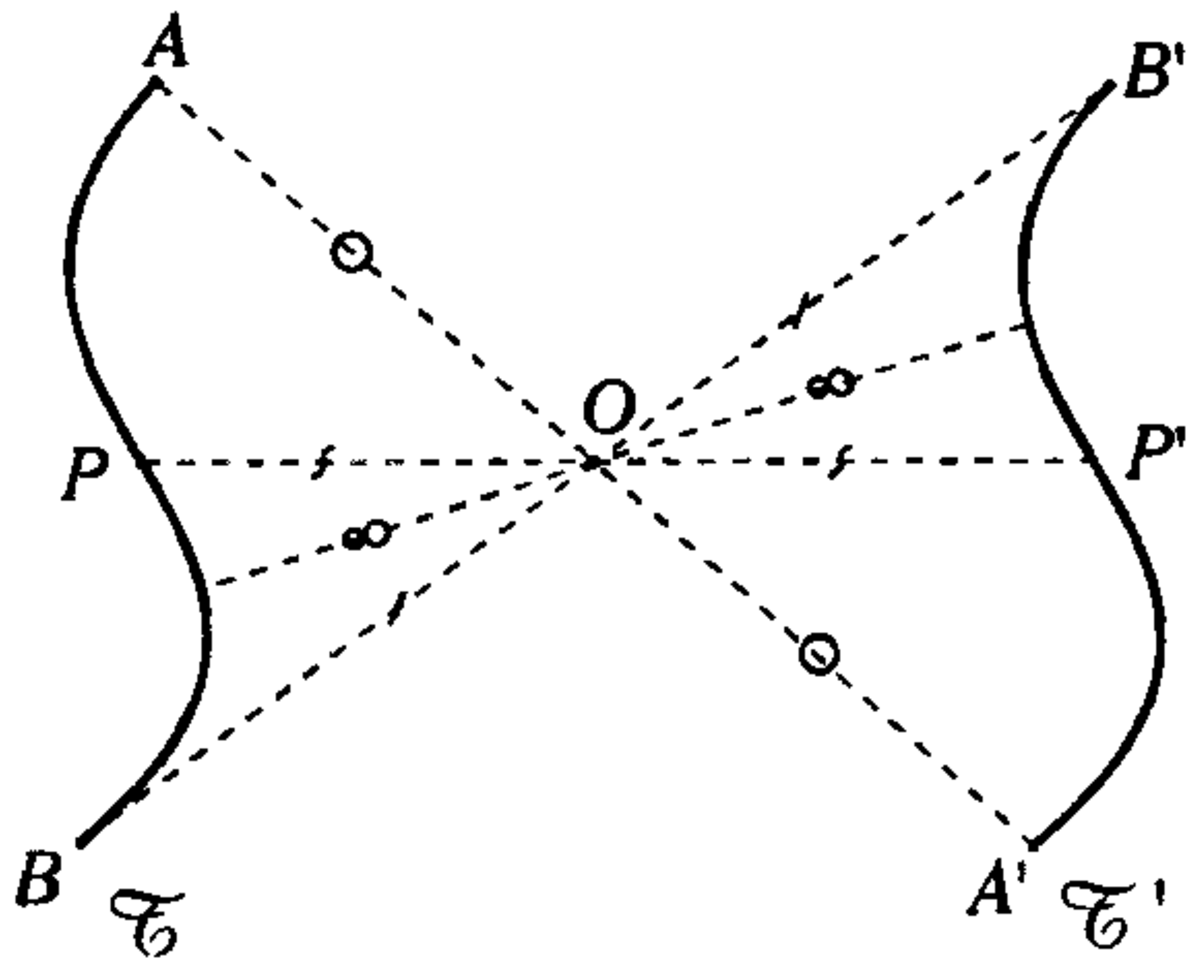
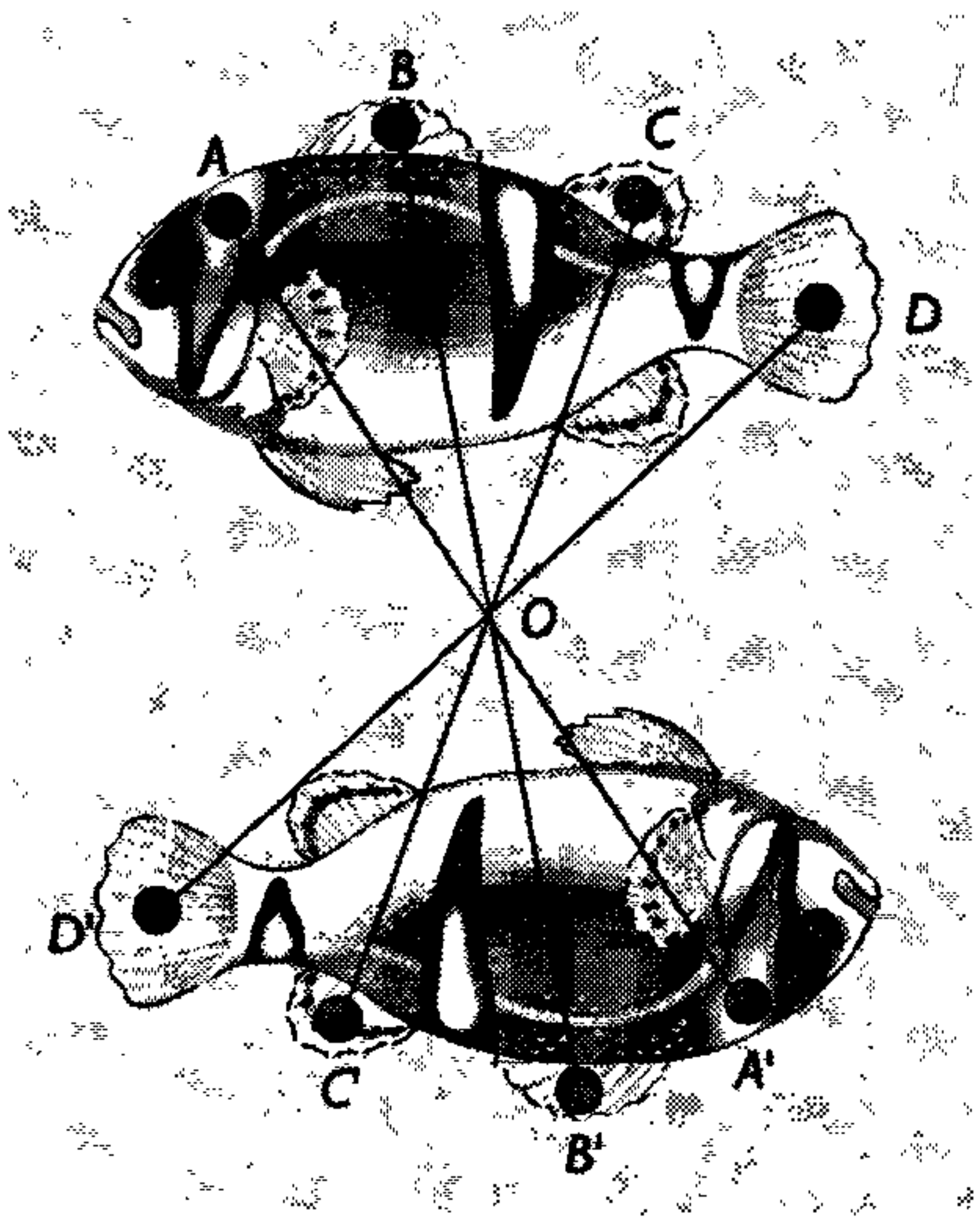


Figura 13.5



Podemos notar en la imagen, la correspondencia de punto a punto, en la simetría respecto de un punto.

De la figura 13.5

Si $\forall\ P' \in \mathcal{T}'\ \exists$ un $P \in \mathcal{T} / P' = \text{Sim}.P(O)$

$\mathcal{T}'$ es el simétrico de $\mathcal{T}$ respecto de O.

Notación

$\rightarrow$ $\mathcal{T}' = \text{Sim}.\ \mathcal{T}(O)$

Nota

Si $\mathcal{T}' = \text{Sim}.\mathcal{T}(O) \rightarrow \mathcal{T} = \text{Sim}\ \mathcal{T}'(O)$.

Imagen reflejada en aguas tranquilas, mostrando de forma natural la simetría.

SIMETRÍA AXIAL

Dos puntos son simétricos respecto de una recta fija llamada eje, si dicha recta es mediatriz del segmento de recta que une estos dos puntos.

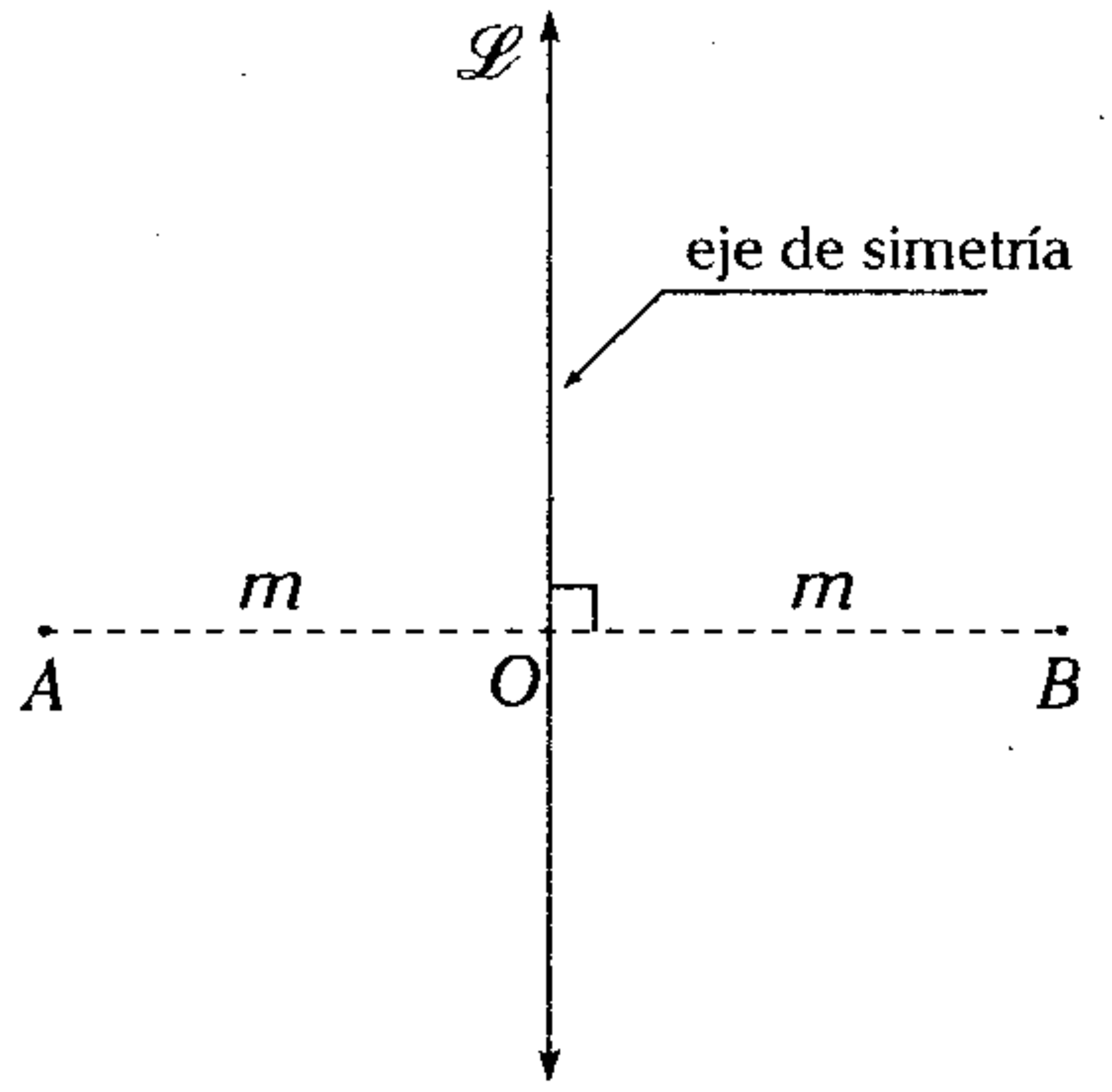


Figura 13.6

Si $AO = OB$ y $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, es decir, si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz del $\overline{AB}$; entonces A y B son simétricos respecto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$. Así también

> A es el simétrico de B respecto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$
> B es el simétrico de A respecto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

Notación

$$A = \text{Sim. } B(\overleftrightarrow{\mathscr{L}})$$
$$B = \text{Sim. } A(\overleftrightarrow{\mathscr{L}})$$

FIGURAS SIMÉTRICAS RESPECTO DE UNA RECTA

Una figura es simétrica de otra respecto a una recta fija $\mathscr{L}$, si para todo punto de la primera le corresponde un punto en la segunda; de tal manera que $\mathscr{L}$ es eje de simetría de estos dos puntos.

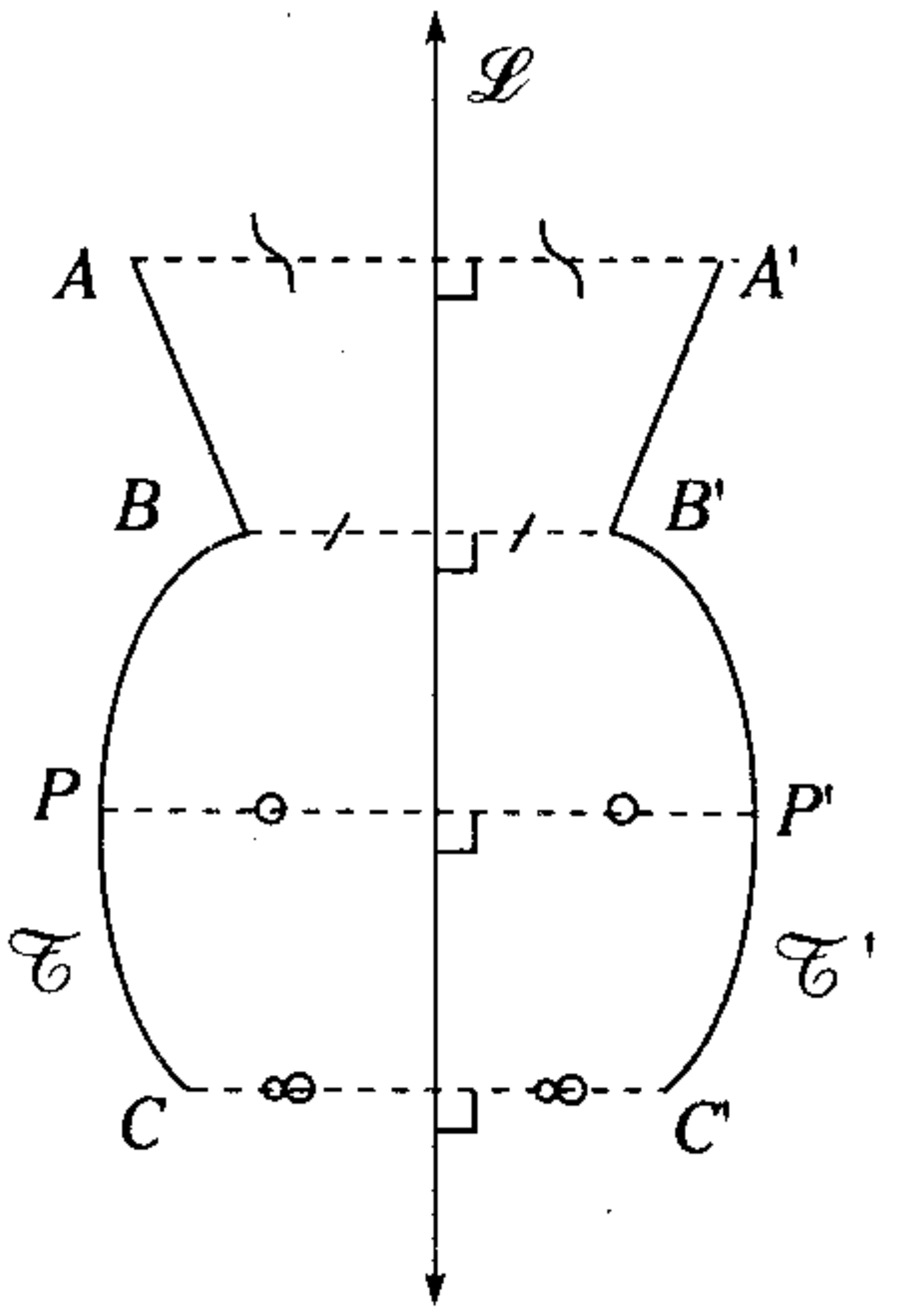


Figura 13.7

Si $\forall\ P' \in \mathscr{C}'\ \exists$ un $P \in \mathscr{C} / P' = \text{Sim. } P(\overleftrightarrow{\mathscr{L}})$

$\mathscr{C}'$ es el simétrico de $\mathscr{C}$ respecto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

Notación

$$\rightarrow \quad \mathscr{C}' = \text{Sim. } \mathscr{C}(\overleftrightarrow{\mathscr{L}})$$

Nota

Si $\mathscr{C}' = \text{Sim. } \mathscr{C}(\overleftrightarrow{\mathscr{L}}) \rightarrow \mathscr{C} = \text{Sim. } \mathscr{C}'(\overleftrightarrow{\mathscr{L}})$

Cisnes que reflejan elefantes (S. Dalí - 1937) Ginebra, colección privada. Los esquemas destacan el perfil de los cisnes que, reflejados (simetría axial), resultan torpes elefantes.

PRODUCTOS DE SIMETRÍA

De un punto

Es el producto de dos o más simetrías aplicadas a un punto.

Central

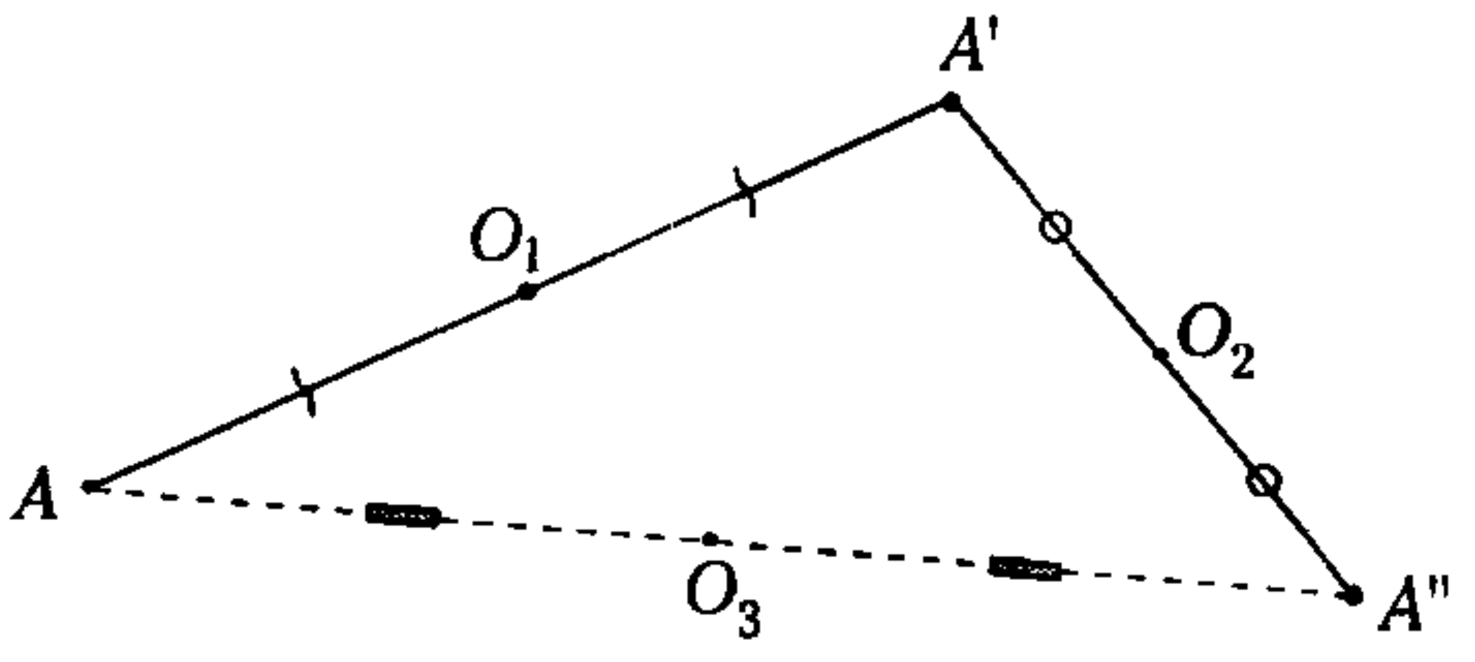


Figura 13.8

$A' = \text{Sim. } A(O_1)$; $A'' = \text{Sim. } A'(O_2)$

$$A'' = \text{Sim. } A(O_1) * \text{Sim. } A'(O_2) = \text{Sim. } A(O_3)$$

Axial

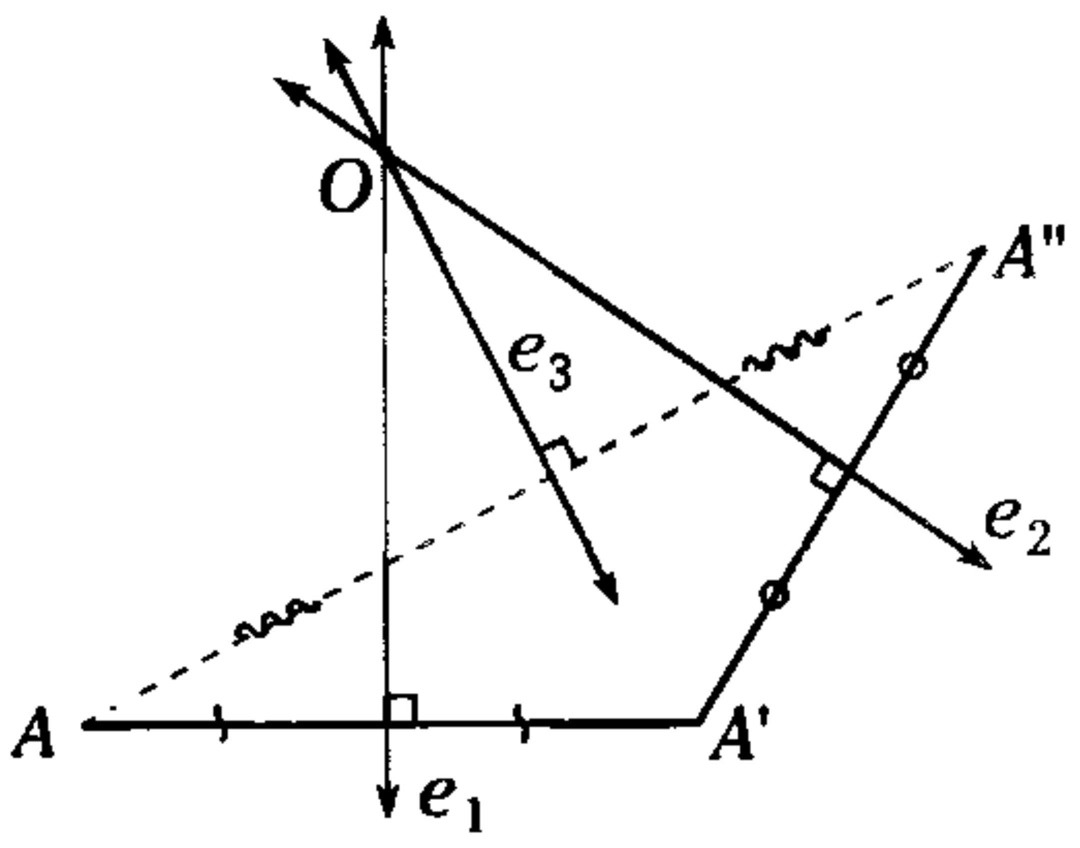


Figura 13.9

$A' = (\overleftrightarrow{e_1})$; $A'' = (\overleftrightarrow{e_2})$

$$A'' = \text{Sim.} A\ (\overleftrightarrow{e_1}) * \text{Sim.} A'\ (\overleftrightarrow{e_2}) = \text{Sim.} A\ (\overleftrightarrow{e_3})$$

Donde

O es el centro de simetría axial respecto de $\overleftrightarrow{e_1}$, $\overleftrightarrow{e_2}$ y $\overleftrightarrow{e_3}$.

Nota

Si los ejes de simetría axial son paralelos, no existe centro de simetría axial y los puntos simétricos serán colineales.

De una figura

Es el producto de dos o más simetrías aplicadas a una figura.

Central

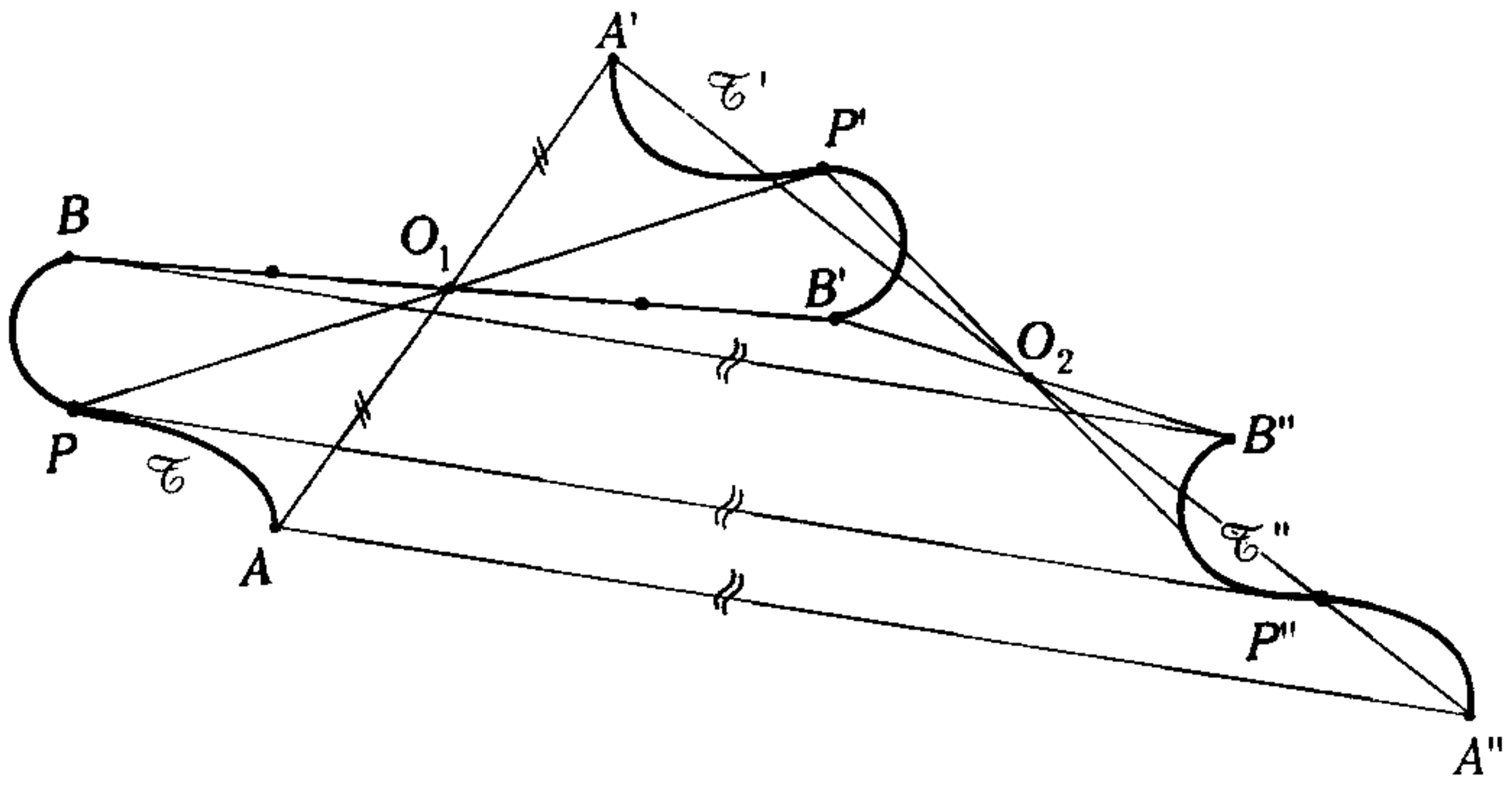


Figura 13.10

$\mathcal{T}' = \text{Sim. } \mathcal{T}(O_1)$

$\mathcal{T}'' = \text{Sim. } \mathcal{T}'(O_2)$

$$\mathcal{T}'' = \text{Sim. } \mathcal{T}(O_1) * \text{Sim. } \mathcal{T}'(O_2)$$

$\mathcal{T}''$ en la figura 13.10, resulta que $\mathcal{T}''$ es una traslación de $\mathcal{T}$. En general, el producto de dos simetrías centrales es una traslación.

Axial

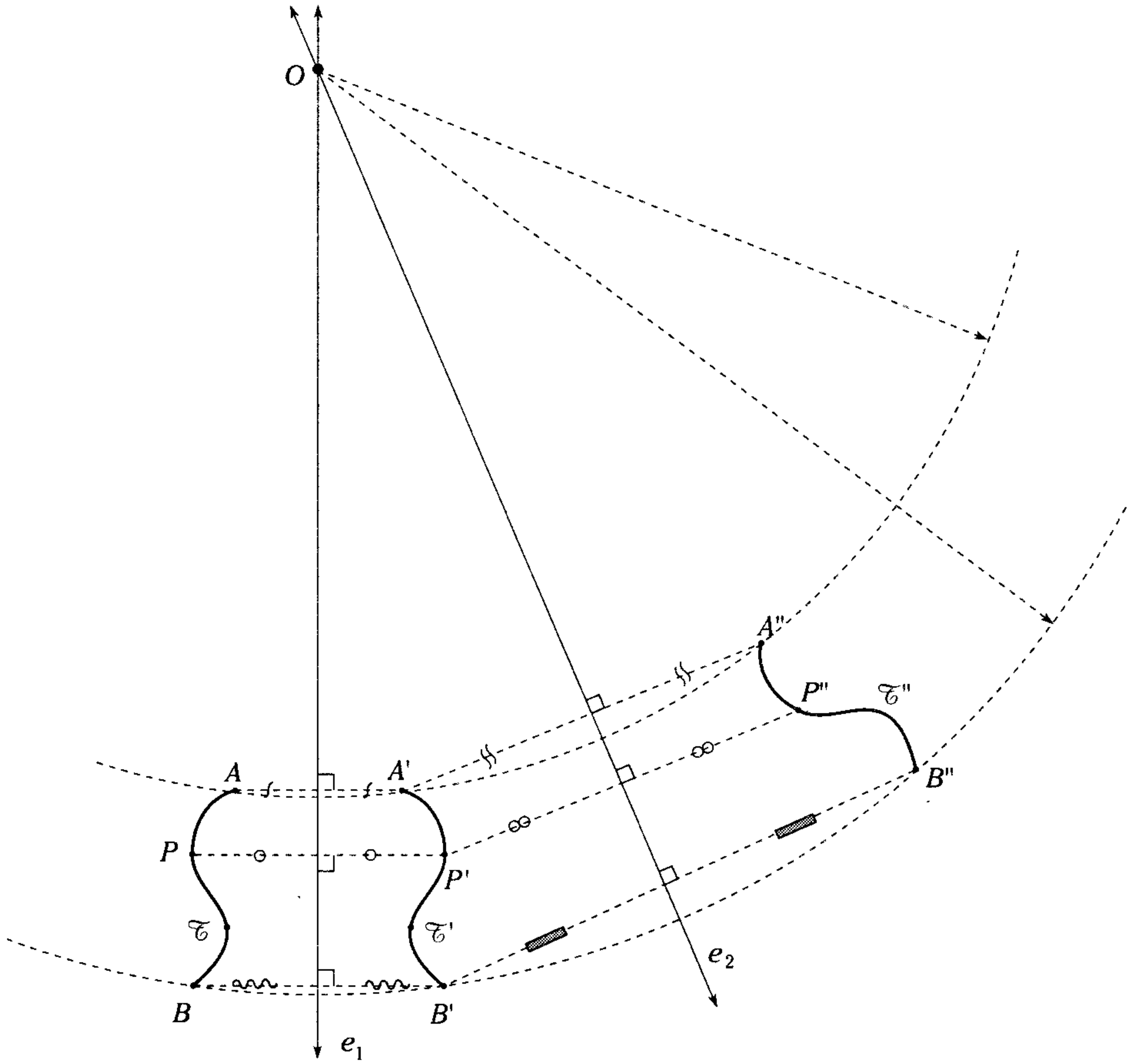


Figura 13.11

$\mathcal{T}' = \text{Sim. } \mathcal{T}\,(\overleftrightarrow{e_1})$

$\mathcal{T}'' = \text{Sim. } \mathcal{T}'\,(\overleftrightarrow{e_2})$

$$\mathcal{T}'' = \text{Sim.}\mathcal{T}(\overleftrightarrow{e_1}) * \text{Sim.}\mathcal{T}'(\overleftrightarrow{e_2})$$

Nota

En la figura 13.11, resulta que $\mathcal{T}''$ es una rotación de $\mathcal{T}$ con centro en O (O es el punto de intersección de los ejes $\overleftrightarrow{e_1}$ y $\overleftrightarrow{e_2}$). En general, el producto de dos simetrías axiales, de ejes secantes, es una rotación.

Si los ejes son paralelos, resulta que $\mathcal{T}''$ es una traslación de $\mathcal{T}$.

TRASLACIÓN

TRASLACIÓN DE UN PUNTO

Dada una recta fija $\mathscr{L}$ y una distancia d; se dice que un punto es la traslación de otro, si el segmento que los une es paralelo a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y la longitud de dicho segmento es d.

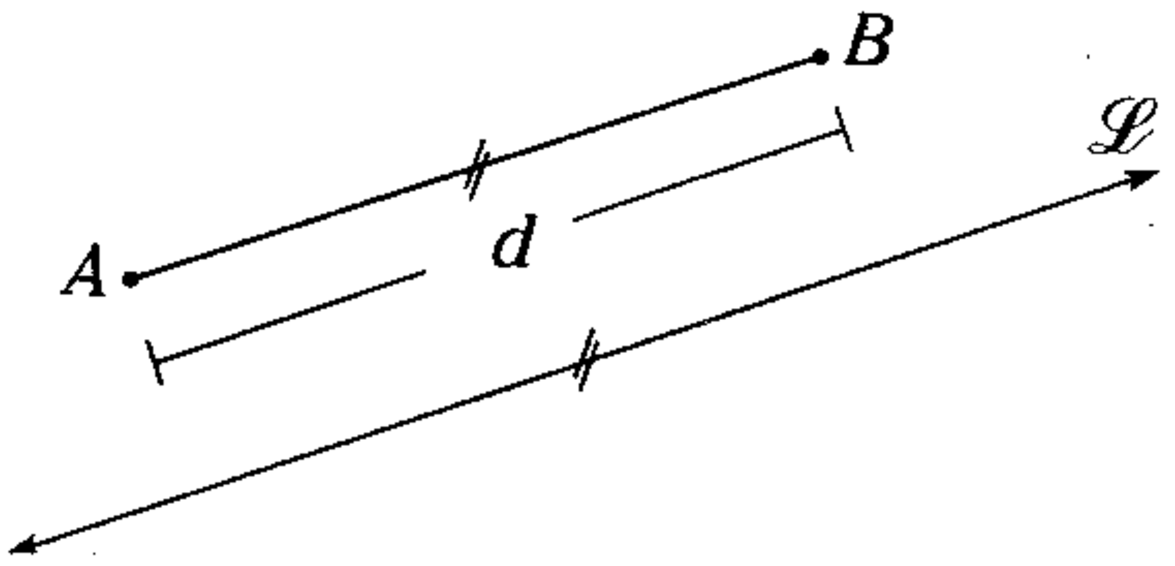


Figura 13.12

Si $\overline{AB} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $AB=d$

Entonces por definición

> B es la traslación de A respecto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ de longitud d y sentido AB.

Notación

$$B = \text{Tras.}\, A\,(\overleftrightarrow{\mathscr{L}}; d)$$

Observación

Si $B = \text{Tras.}\, A\,(\overleftrightarrow{\mathscr{L}}; d)$
entonces $A \neq \text{Tras.}\, B\,(\overleftrightarrow{\mathscr{L}}; d)$ debido a que el sentido de AB es diferente de BA.

TRASLACIÓN DE UNA FIGURA

Dada una recta fija $\mathscr{L}$ y una distancia d; se dice que una figura $\mathscr{T}'$ es la traslación de la figura $\mathscr{T}$ si para todo punto P' de $\mathscr{T}'$ existe un punto P en $\mathscr{T}$, tal que P' es la traslación de P respecto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y longitud d.

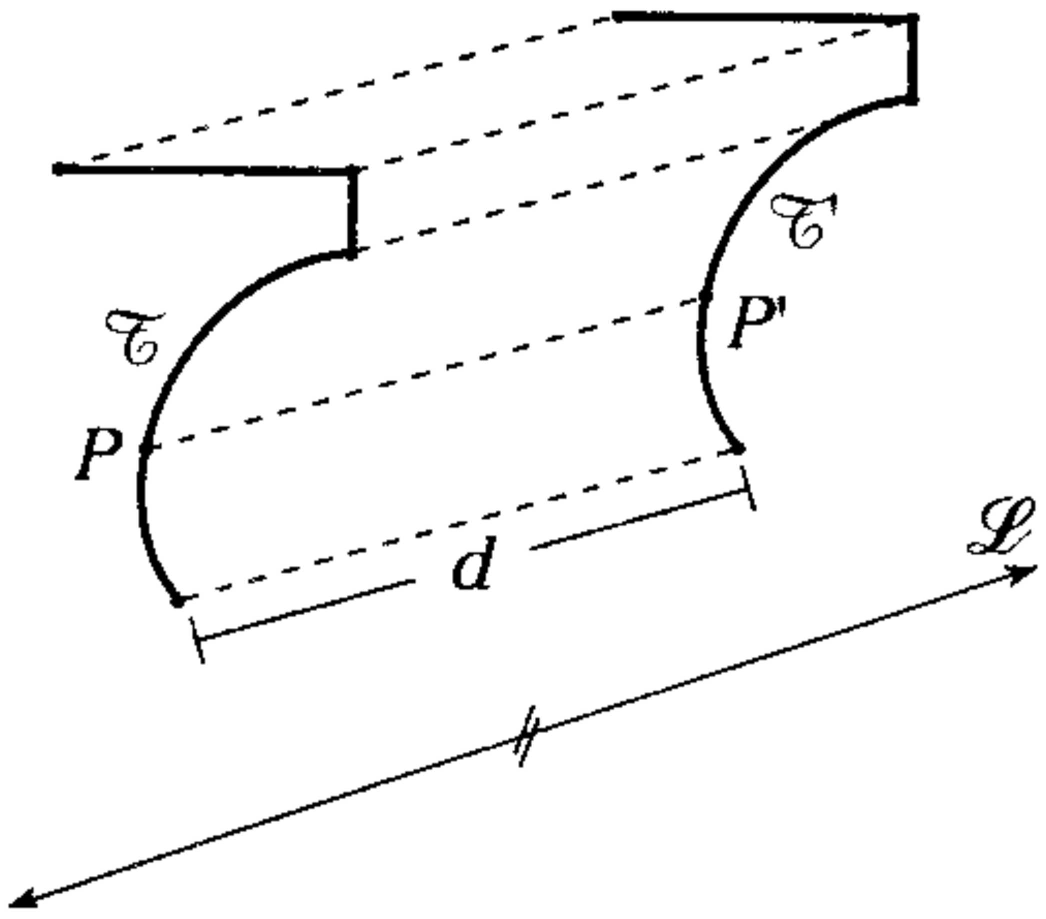


Figura 13.13

Si $\forall\ P' \in \mathscr{T}'\ \exists$ un $P \in \mathscr{T} / \overline{PP'} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $PP' = d$

→

> $\mathscr{T}'$ es la traslación de $\mathscr{T}$ respecto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y longitud d.

Notación

$$\mathscr{T}' = \text{Tras.}\,\mathscr{T}\,(\overleftrightarrow{\mathscr{L}}; d)$$

Observación

$\mathscr{T}' \cong \mathscr{T}$

$\text{Tras.}\,\mathscr{T}\,(\overleftrightarrow{\mathscr{L}}; d) \cong \mathscr{T}$

Un cuerpo se traslada cuando todo sus elementos después de la transformación no alteran su distribución y se han desplazado una misma distancia.

Observación

Dado un paralelogramo *ABCD* (Figura 13.6(a)), cuyas diagonales se intersecan en *O*, el simétrico del paralelogramo *ABCD*, respecto de *O*, es el propio paralelogramo *ABCD*, ya que estas se superponen. No obstante, la transformación no es de identidad porque los puntos homólogos no coinciden.

$\forall P \in \square ABCD \; \exists$ un $P' \in \square ABCD \,/\, P' = \text{Sim}.P(O)$.

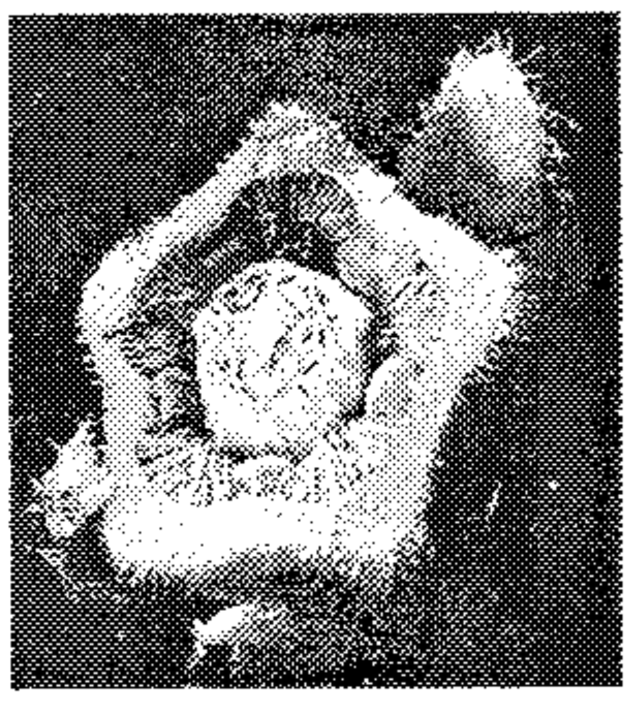
Una figura puede tener más de un orden de simetría, y así este número puede también coincidir con el número de ejes que presenta dicha figura. El triángulo isósceles es una figura simétrica de primer orden (figura 13.6(b)).

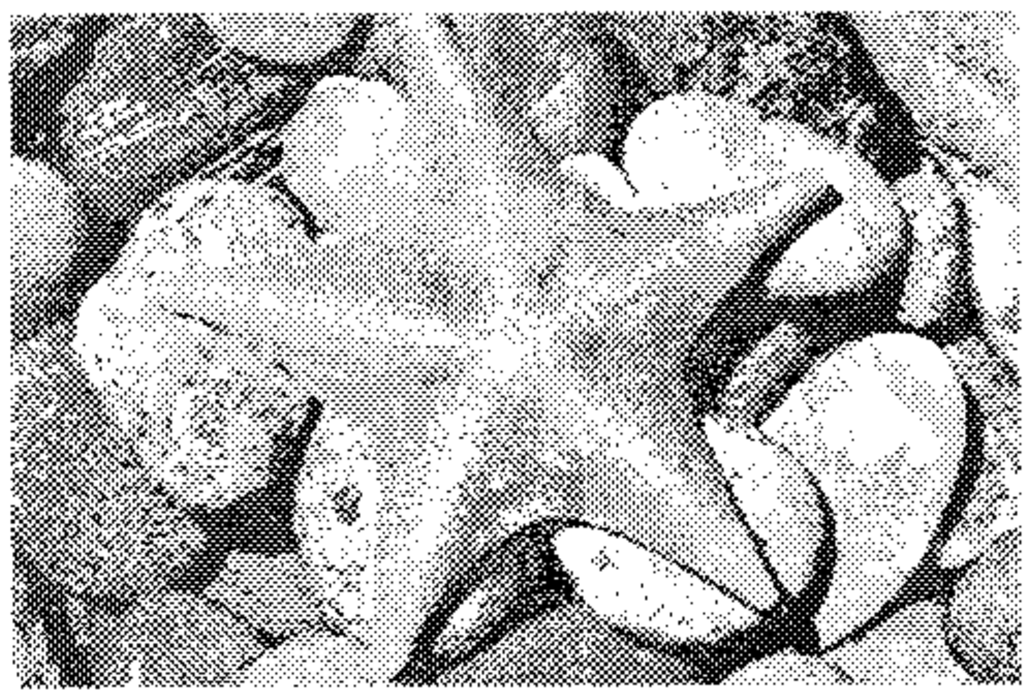
Un rectángulo es una figura simétrica de orden 2. (Figura 13.6(c)).

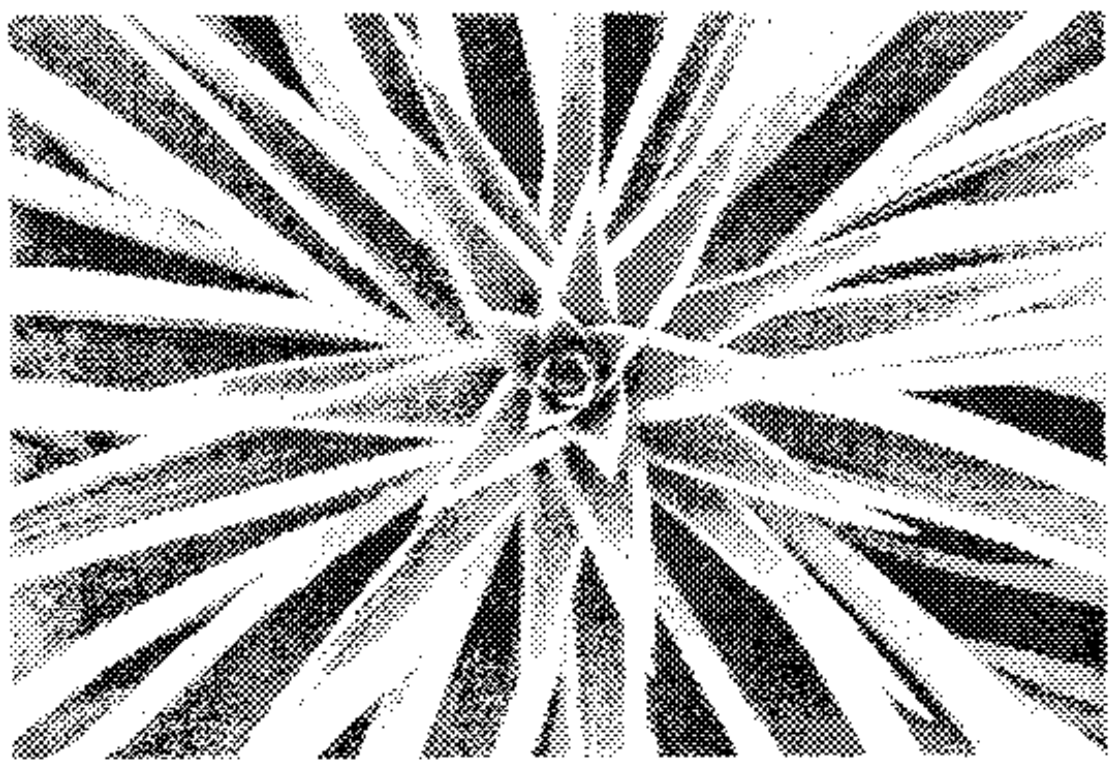
Un triángulo equilátero es una figura simétrica de orden 3 (Figura 13.6(d)).

Un cuadrado, un pentágono regular,... un polígono regular de *n* lados son ejemplos de simetrías de orden 4, 5, 6,...*n*; respectivamente.

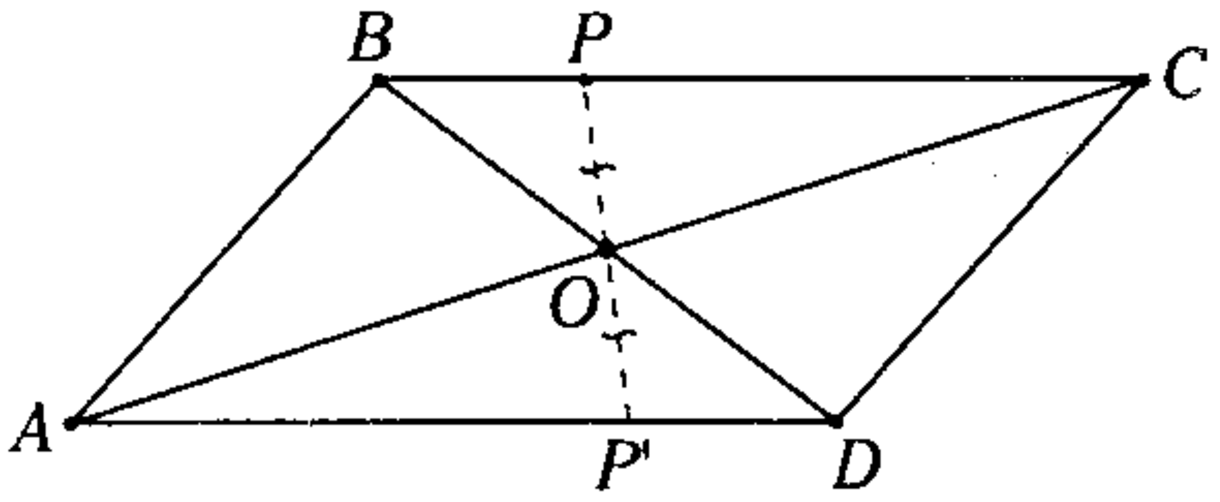
Una circunferencia tiene simetría central y simetría axial de orden infinito.



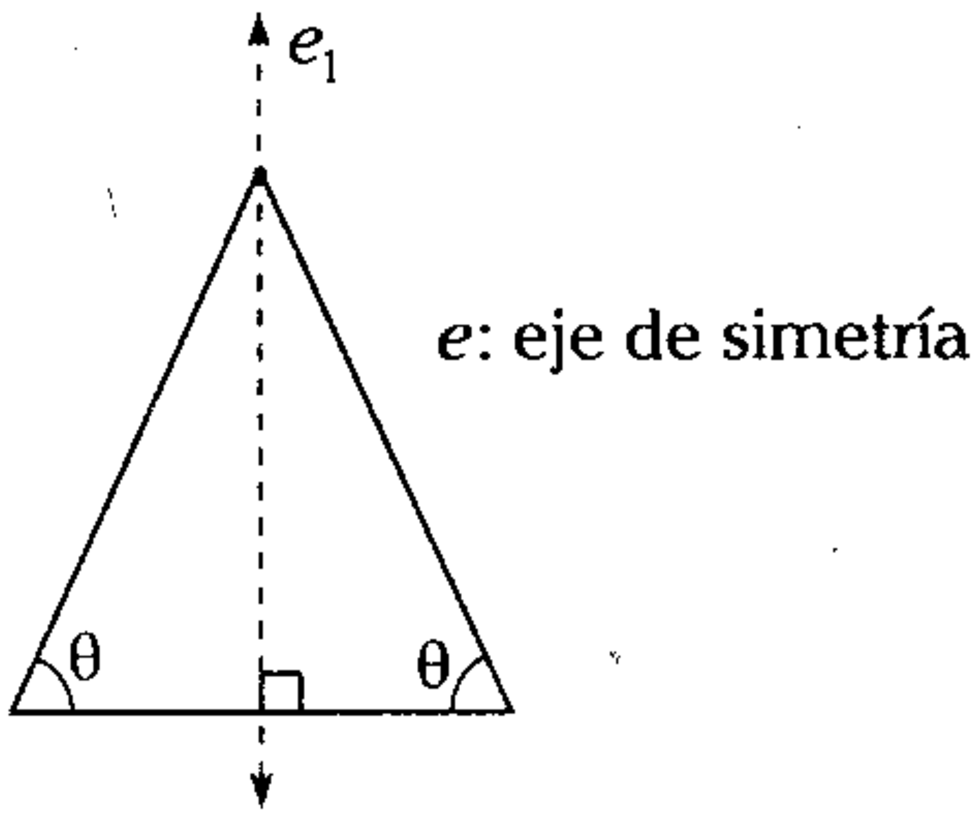




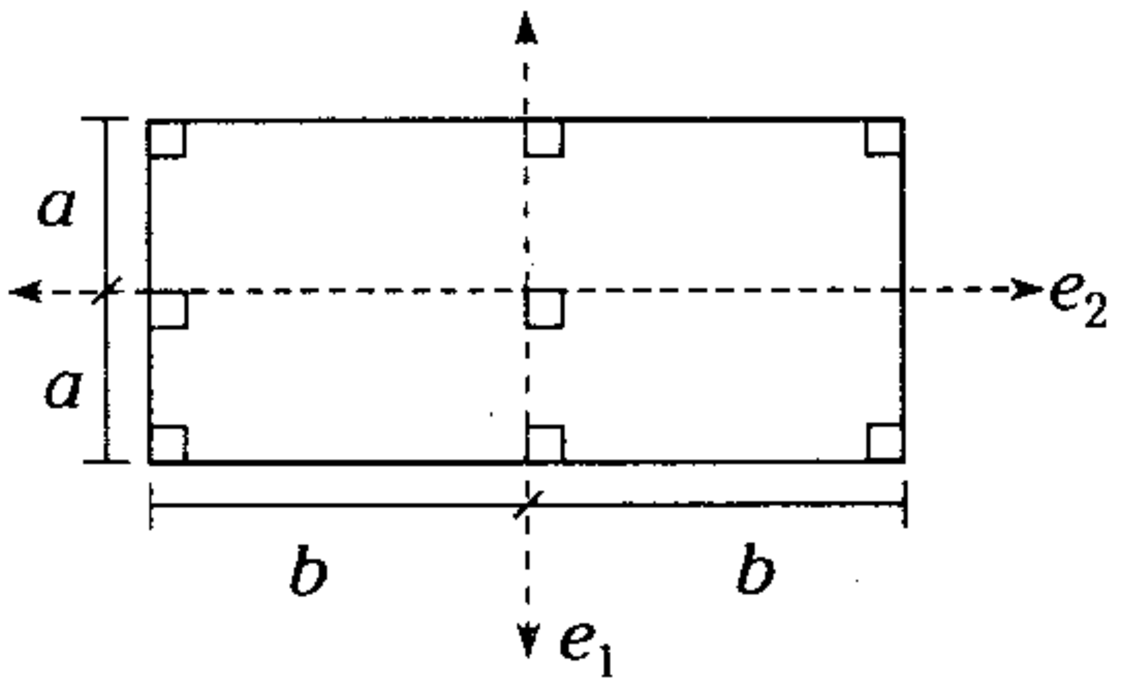
La estrella de mar pertenece a un grupo de animales marinos llamados equinodermos, y es simétrica respecto a cinco ejes. Las flores muestran simetría central de orden n; en la foto podemos ver flores de orden cinco y seis, respectivamente.



(a)

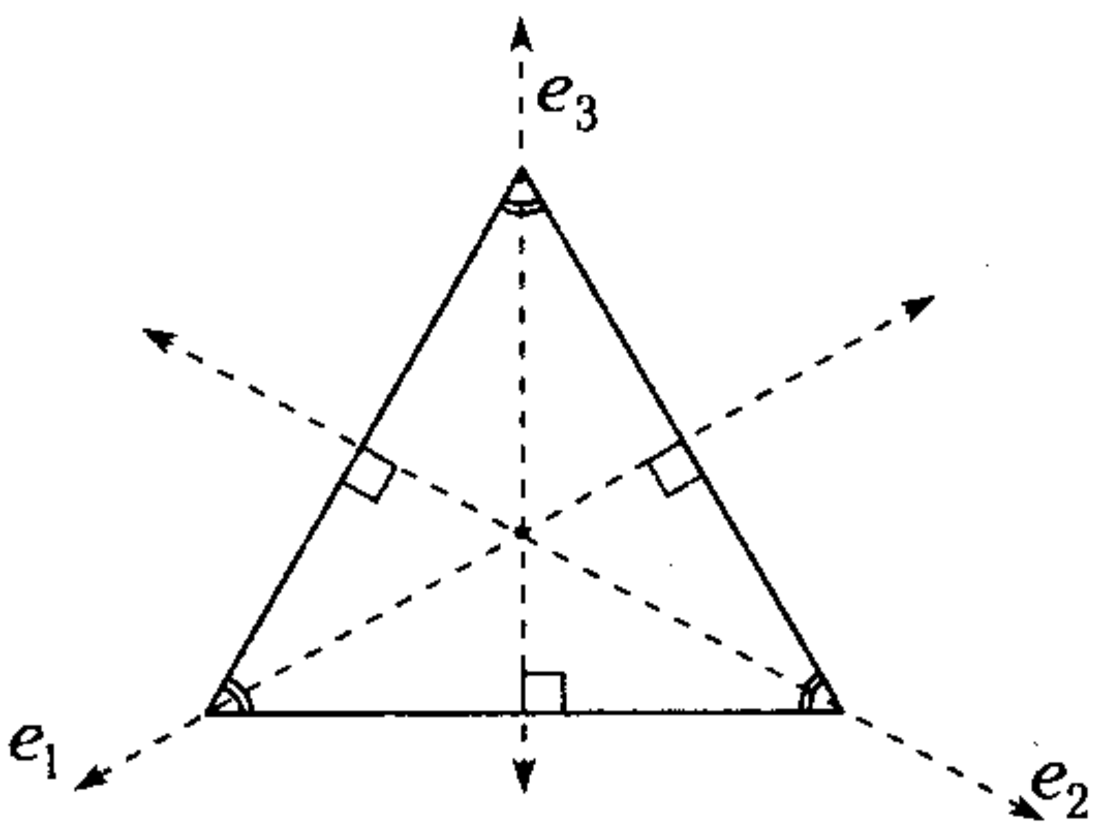


(b)



e_1 y e_2: ejes de simetría

(c)



e_1, e_2 y e_3 : ejes de simetría

(d)

Figura 13.12

PRODUCTO DE TRASLACIONES

De un punto

Es el producto de dos o más traslaciones aplicadas a un punto.

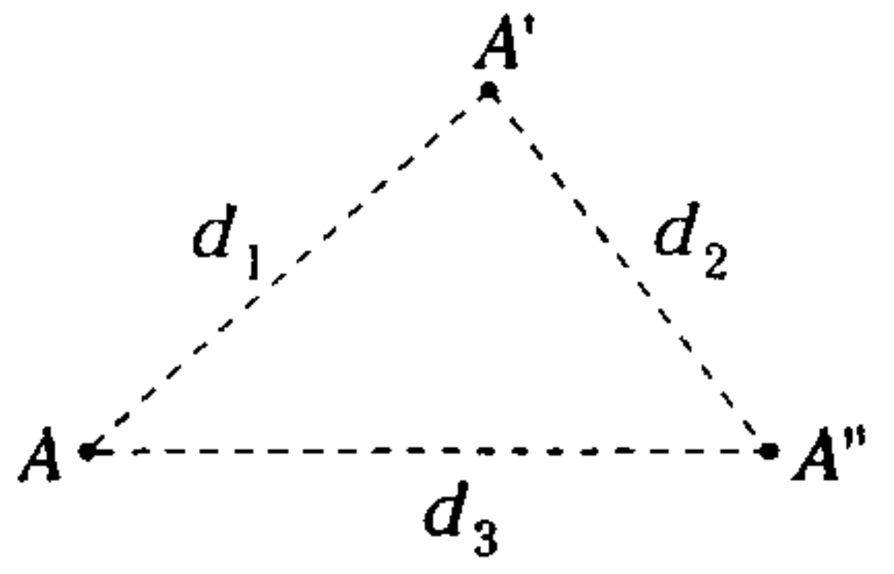


Figura 13.14

De la figura

$A' = \text{Tras. } A\,(\overline{AA'}; d_1)$

$A'' = \text{Tras. } A'\,(\overline{A'A''}; d_2)$

$\rightarrow$ $A'' = \text{Tras. } A'\,(\overline{A'A''}; d_2) * \text{Tras. } A\,(\overline{AA'}; d_1)$

Como $A'' = \text{Tras. } A\,(\overline{AA''}; d_3)$

$\rightarrow$ $\text{Tras. } A\,(\overline{AA''}; d_3) = \text{Tras. } A\,(\overline{AA'}; d_1) * \text{Tras. } A'\,(\overline{A'A''}; d_2)$

Donde $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''}$

De una figura

Es el producto de dos o más traslaciones aplicadas a una figura.

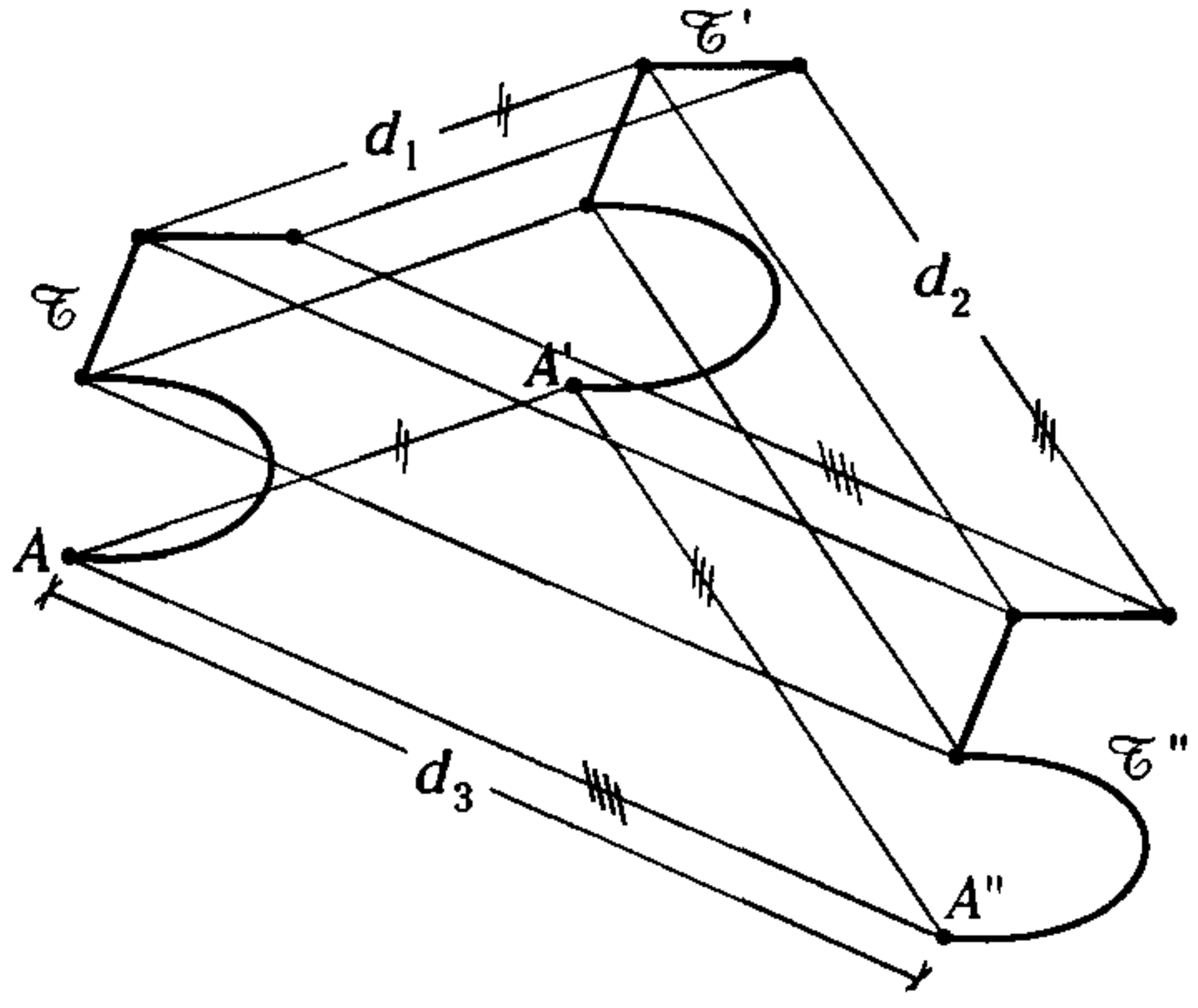


Figura 13.15

De la figura

$\mathcal{T}' = \text{Tras. } \mathcal{T}\,(\overline{AA'}; d_1)$

$\mathcal{T}'' = \text{Tras. } \mathcal{T}'\,(A'A''; d_2)$

$\mathcal{T}'' = \text{Tras. } \mathcal{T}\,(\overline{AA''}; d_3)$

$\rightarrow$ $\text{Tras. } \mathcal{T}\,(\overline{AA''}; d_3) = \text{Tras. } \mathcal{T}\,(\overline{AA'}; d_1) * \text{Tras. } \mathcal{T}'\,(\overline{A'A''}; d_2)$

Donde $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''}$

Nota

Sea $\mathcal{T}_n$ en la figura que resulta del producto de n traslaciones de una figura $\mathcal{T}$, entonces podemos pasar directamente de $\mathcal{T}$ a $\mathcal{T}_n$ aplicando una sola traslación.

$$\text{Tras. } \mathcal{T}(\vec{a}_1) * \text{Tras. } \mathcal{T}_1(\vec{a}_n) * \ldots * \text{Tras. } \mathcal{T}_{(n-1)}(\vec{a}_n) = \text{Tras. } \mathcal{T}(\vec{r}).$$

Donde $(\vec{r} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n)$

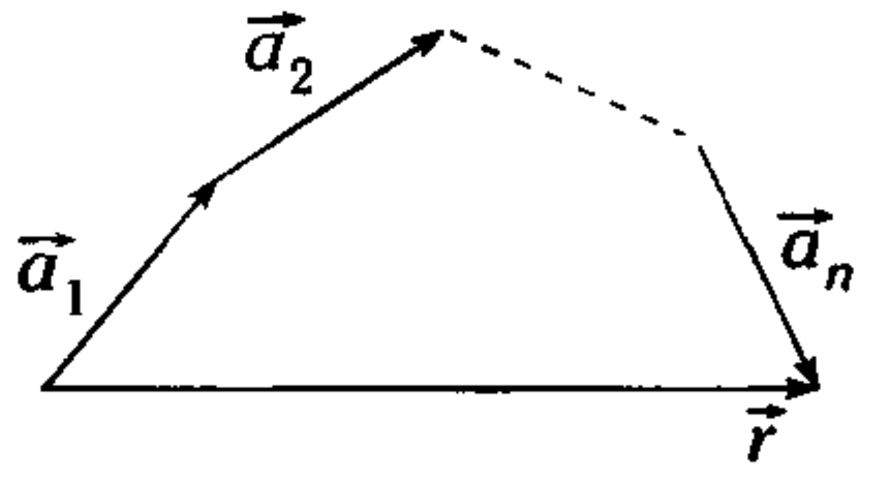
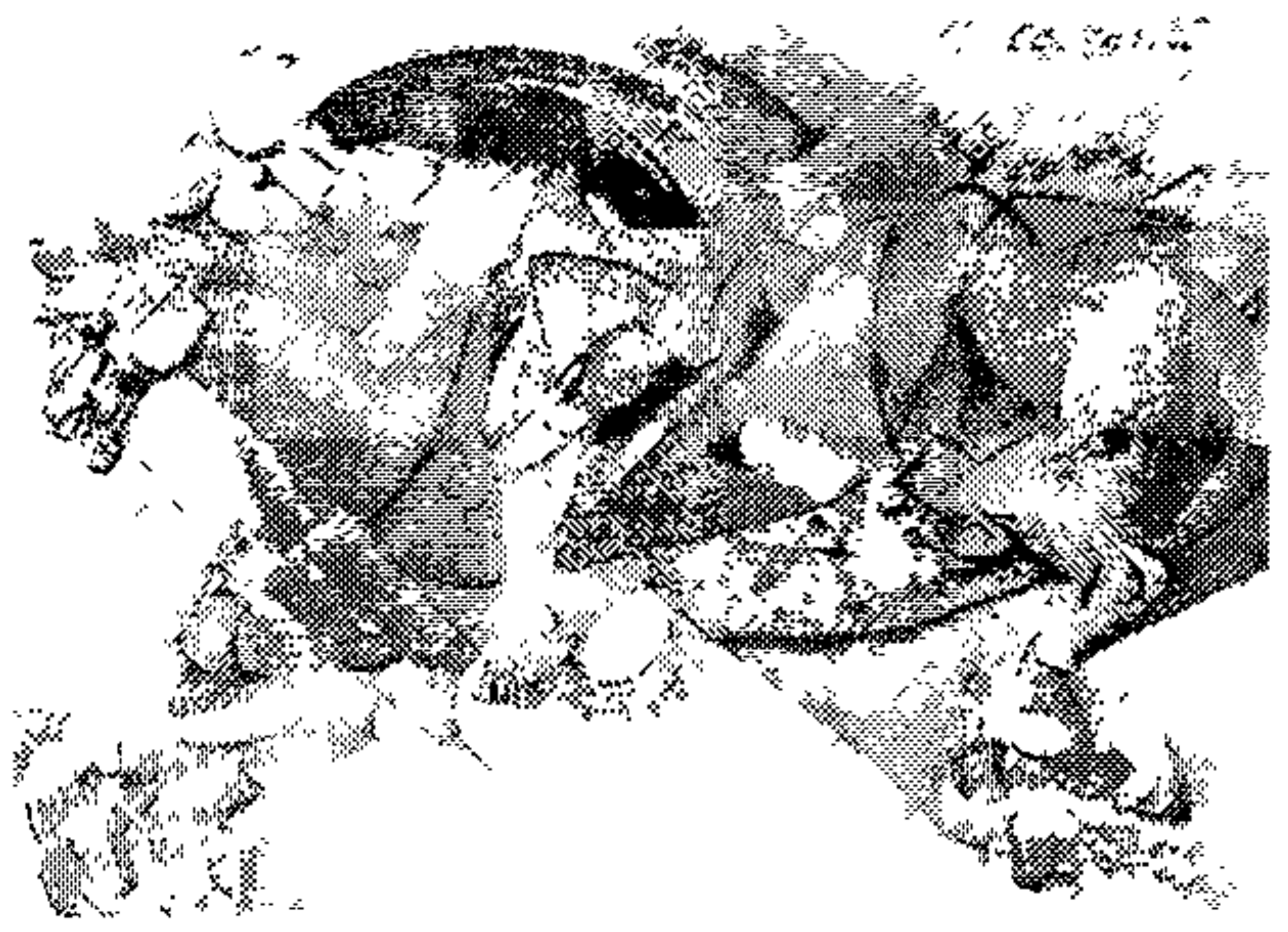


Figura 13.16



La traslación de figuras es representada en el cuadro denominado El jinete, donde los trazos del pintor simulan el desplazamiento del caballo.

ROTACIÓN

ROTACIÓN O GIRO RESPECTO DE UN PUNTO

Dado un plano orientado; un punto fijo **O** del plano, y una medida angular α, se dice que un punto P' es la rotación de otro punto P, si dichos puntos están contenidos en el plano dado, donde $OP' = OP$ y $m\measuredangle P'OP = \alpha + 2K\pi / K \in \mathbb{Z}$.

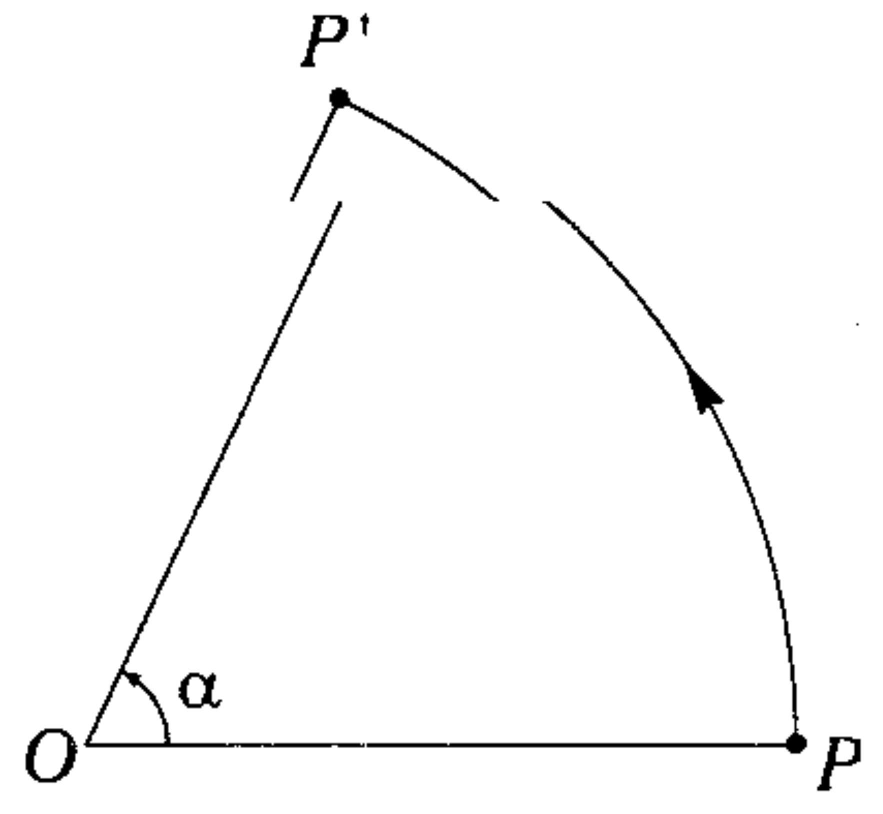


Figura 13.17

P: posición inicial

P': posición final

$OP = OP'$

$m\measuredangle P'OP = \alpha + 2K\pi$

De la definición

> P' es la rotación de P con centro O y ángulo de giro de medida α.

O: Centro de rotación

α: medida del ángulo de rotación

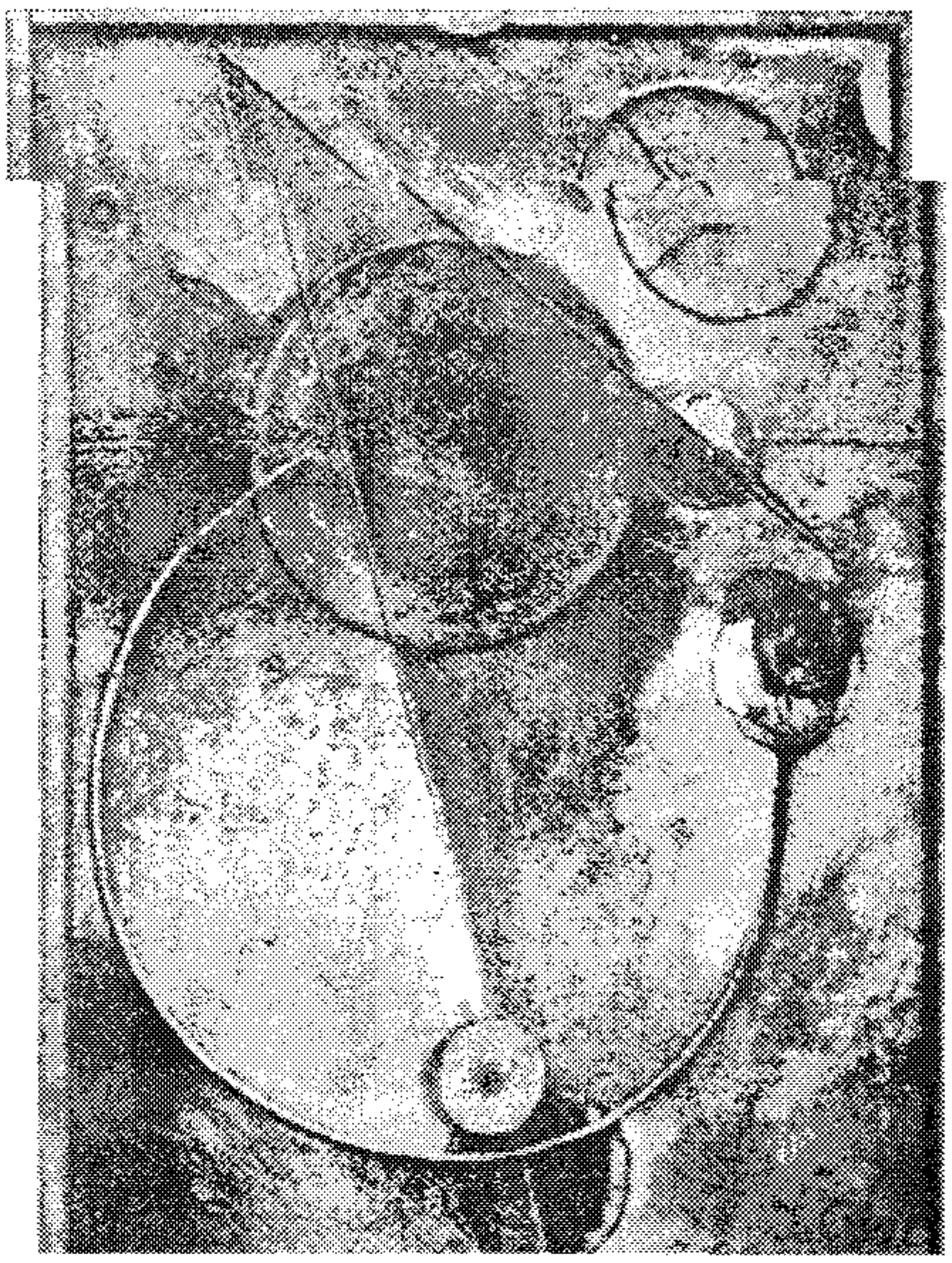
Notación

> $P' = \text{Rot}.P\,(O;\alpha)$

- Cuando $\alpha = 2K\pi$, la rotación es la identidad
- Cuando $\alpha = (2K+1)\pi$, la rotación es la simetría respecto de O.

Nota

La rotación es una transformación unívoca.
En la rotación, el centro de giro es el único punto doble.



Cuadro de Kurt Schwitters, al cual denominó Rotación (Revolving), 1919. En su obra, el autor utiliza madera y metal (técnica llamada Dadaísmo). Actualmente, es parte de la colección del Museo de Arte Moderno de New York.

ROTACIÓN DE UNA FIGURA

Dado un punto fijo O y una medida angular α; se dice que una figura $\mathscr{C}'$ es la rotación de otra $\mathscr{C}$, si están contenidas en un plano que contiene a O y que para todo punto P' de $\mathscr{C}'$, existe un punto P en $\mathscr{C}$, tal que $OP' = OP$ y $m\measuredangle P'OP = \alpha + 2K\pi$ $(K \in \mathbb{Z})$

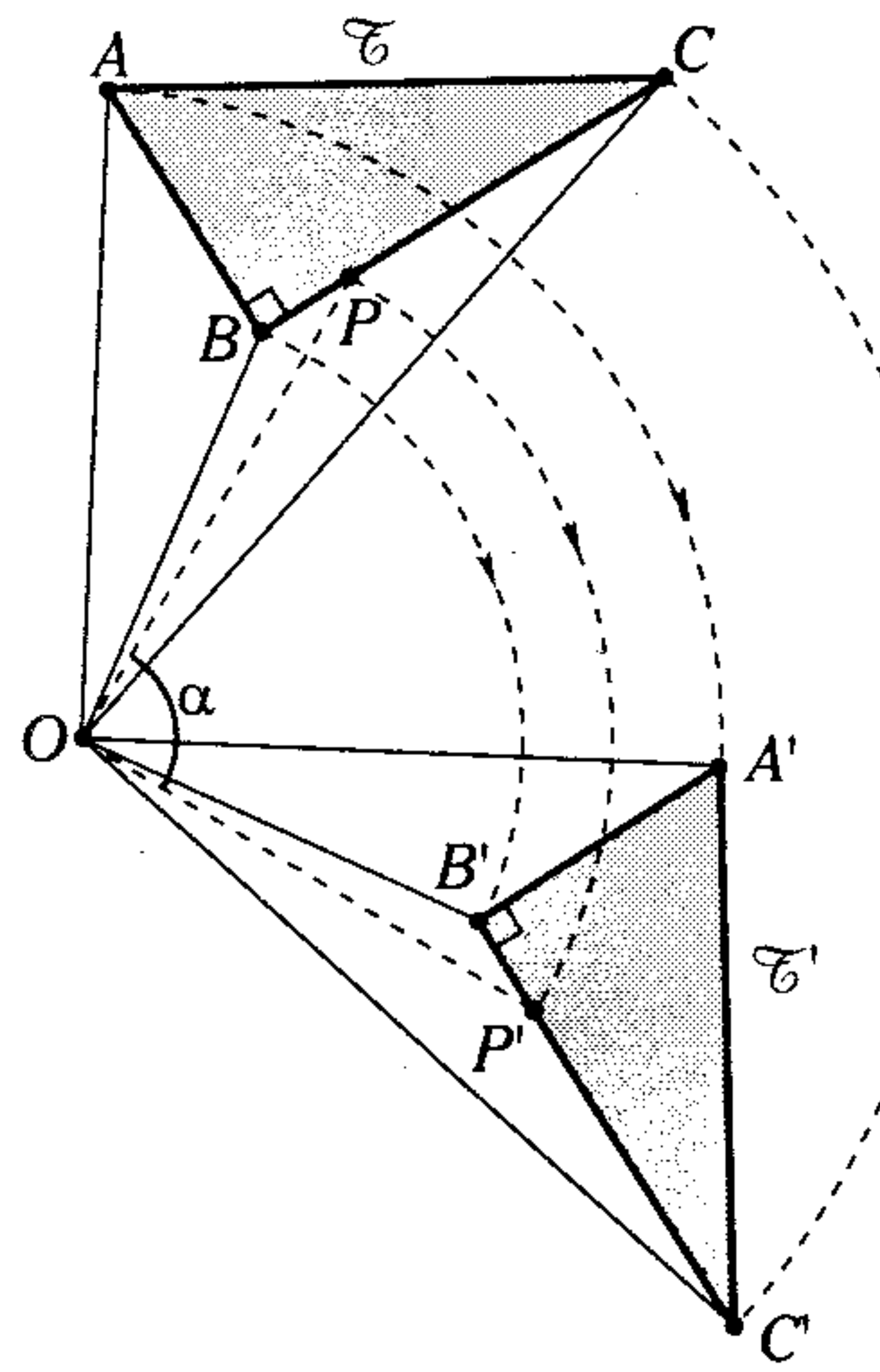


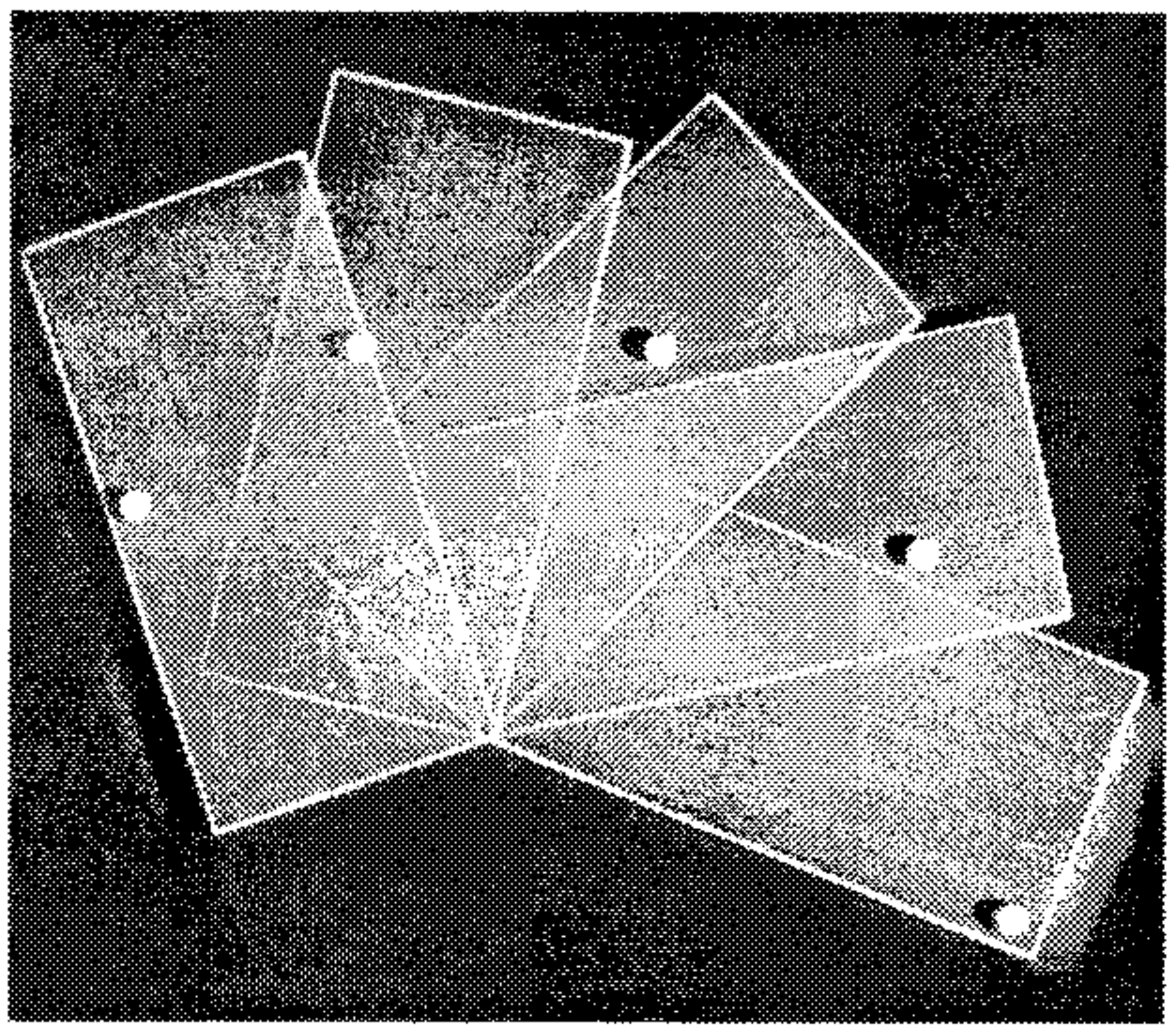
Figura 13.18

Si $\forall\ P' \in \mathcal{T}'\ \exists$ un $P \in \mathcal{T} / OP' = OP$
y $m\sphericalangle P'OP = \alpha$

$\mathcal{T}'$ es la rotación de $\mathcal{T}$ respecto de O con un ángulo de rotación de medida α.

Notación

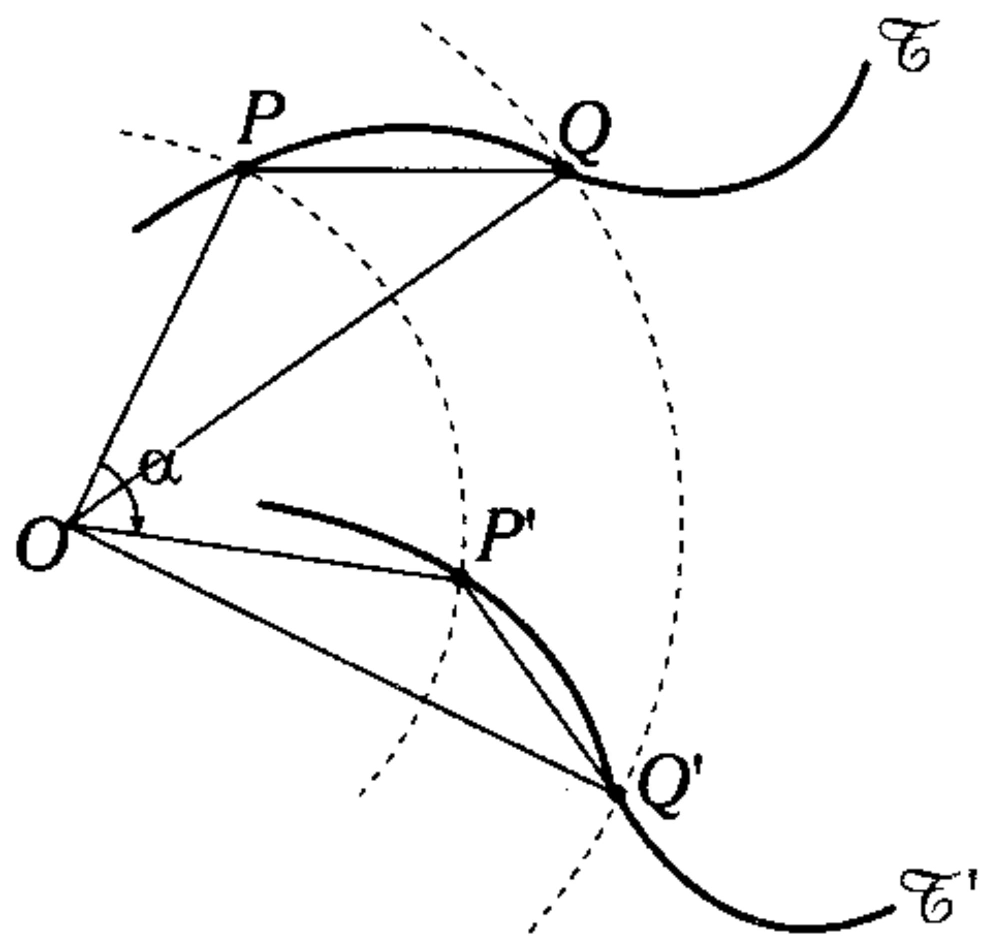
$\rightarrow$ $\boxed{\mathcal{T}' = \text{Rot. } \mathcal{T}\ (O;\ \alpha)}$



Cuando un cuerpo es colocado sobre una placa y esta es sometida a una rotación en torno a un eje perpendicular a su plano, el cuerpo es afectado por la aceleración de Coriolis. Se le denominó así en homenaje a su descubridor Gaspar Gustav de Coriolis (1792-1843), matemático francés.

Teorema

Sea $\mathcal{T}' = \text{Rot.}\mathcal{T}(O;\ \alpha)$. Si P y Q son dos puntos cualesquiera de la figura $\mathcal{T}$ distintos de O, además P' y Q' son sus respectivos puntos homólogos en $\mathcal{T}'$, entonces, $PQ = P'Q'$ y la medida del ángulo formado por $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{P'Q'}$ es α.



(a)

Si $\mathcal{T}' = \text{Rot. } \mathcal{T}\ (O;\ \alpha)$

Además

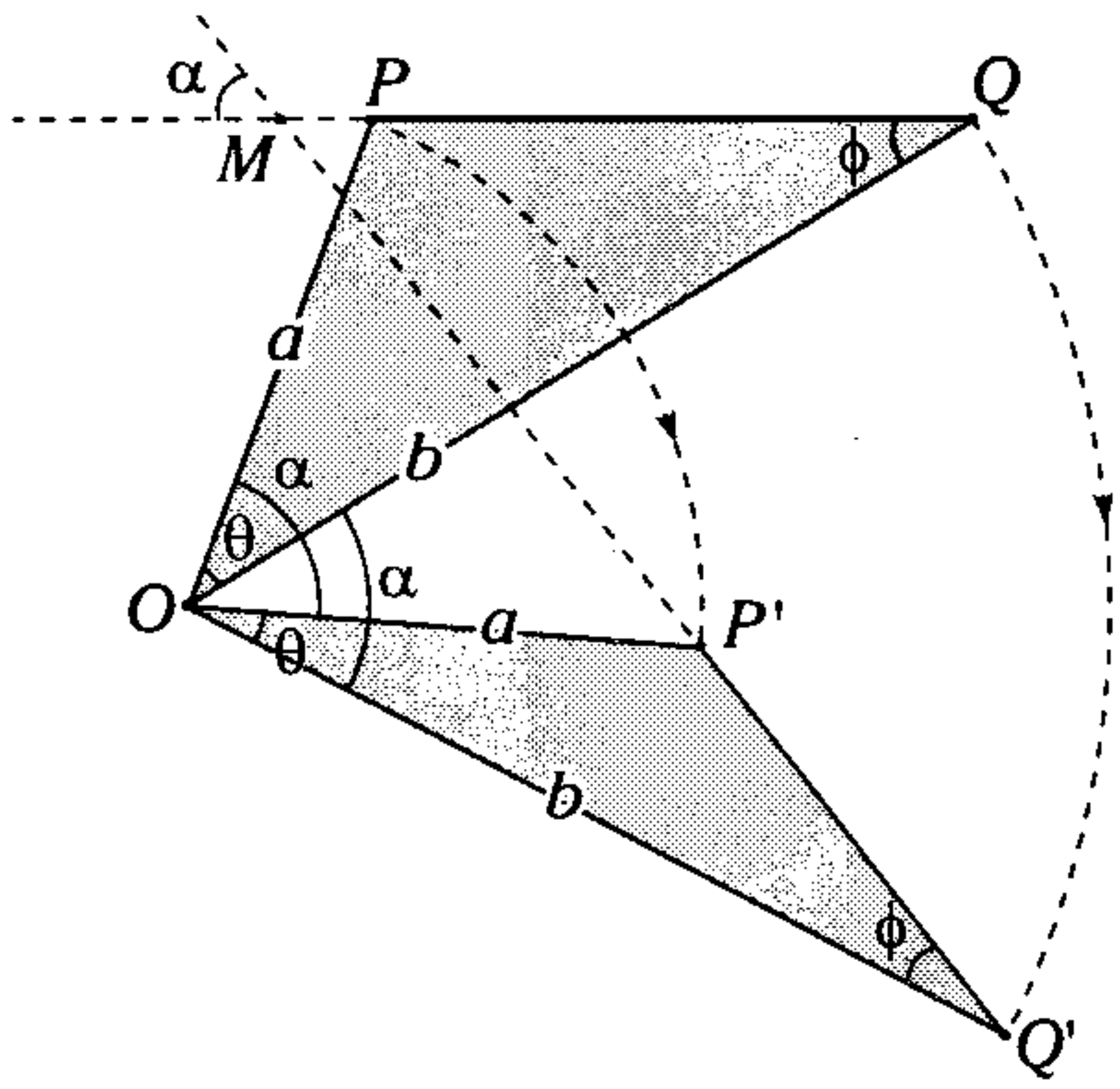
$P \in \mathcal{T};\ Q \in \mathcal{T}$

$P' \in \mathcal{T}';\ Q' \in \mathcal{T}'$

$\rightarrow$ $\boxed{PQ = P'Q'}$ y

$\boxed{\text{la medida del ángulo entre } \overline{PQ} \text{ y } \overline{P'Q'} \text{ es } \alpha}$

Demostración



(b)

Figura 13.19

Sea $P' = \text{Rot. } P(O;\alpha)$

$\rightarrow \quad OP' = OP = a \quad \text{y} \quad m\sphericalangle P'OP = \alpha$

Sea $Q' = \text{Rot. } Q(O;\alpha)$

$\rightarrow \quad OQ = OQ' = b \quad \text{y} \quad m\sphericalangle Q'OQ = \alpha$

Sea $m\sphericalangle POQ = \theta$

$\rightarrow \quad m\sphericalangle QOP = \alpha - \theta$

y como

$m\sphericalangle Q'OQ = \alpha \rightarrow m\sphericalangle P'OQ' = \theta$

$\therefore \quad \triangle POQ \cong \triangle P'OQ'$ (L.A.L.)

$\rightarrow \quad PQ = P'Q'$ y la $\sphericalangle PQO = m\sphericalangle P'Q'O = \phi$

entonces en la figura $\bowtie MQOQ'$: $m\sphericalangle QMQ' = \alpha$

$\therefore \quad m\sphericalangle$ entre $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{P'Q'} = \alpha$

Podemos concluir que si una figura es la rotación de otra, los elementos homólogos respectivamente son congruentes y determinan ángulos, cuya medida resulta igual a la medida del ángulo de rotación.

TRANSFORMACIÓN POR ROTACIÓN DE ALGUNAS FIGURAS

De una recta

Si la recta dada pasa por el centro de rotación.

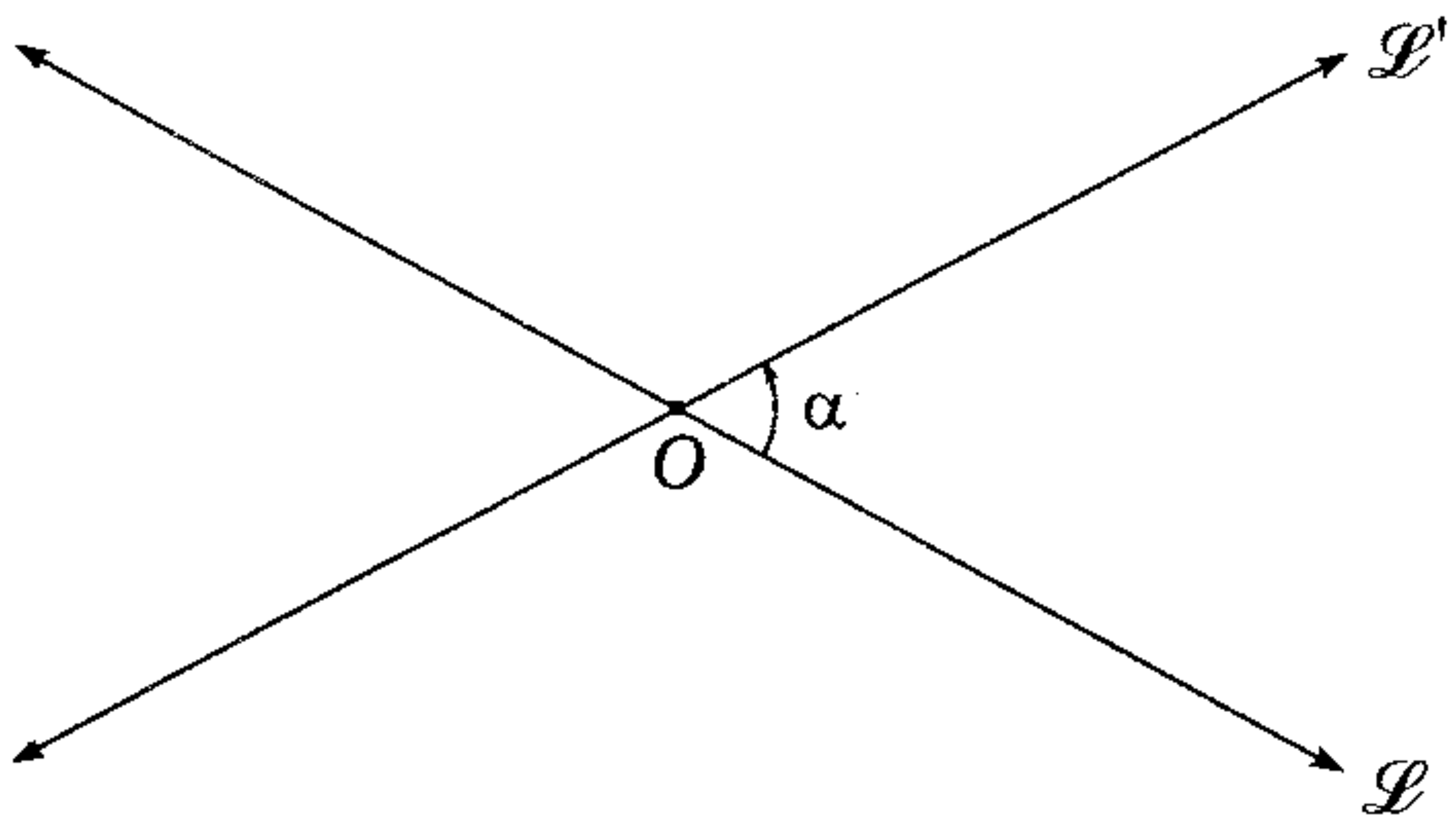


Figura 13.20

O: centro de rotación

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}'} = \text{Rot. } \overleftrightarrow{\mathscr{L}}\ (O;\alpha)$$

Si la recta no pasa por el centro de rotación.

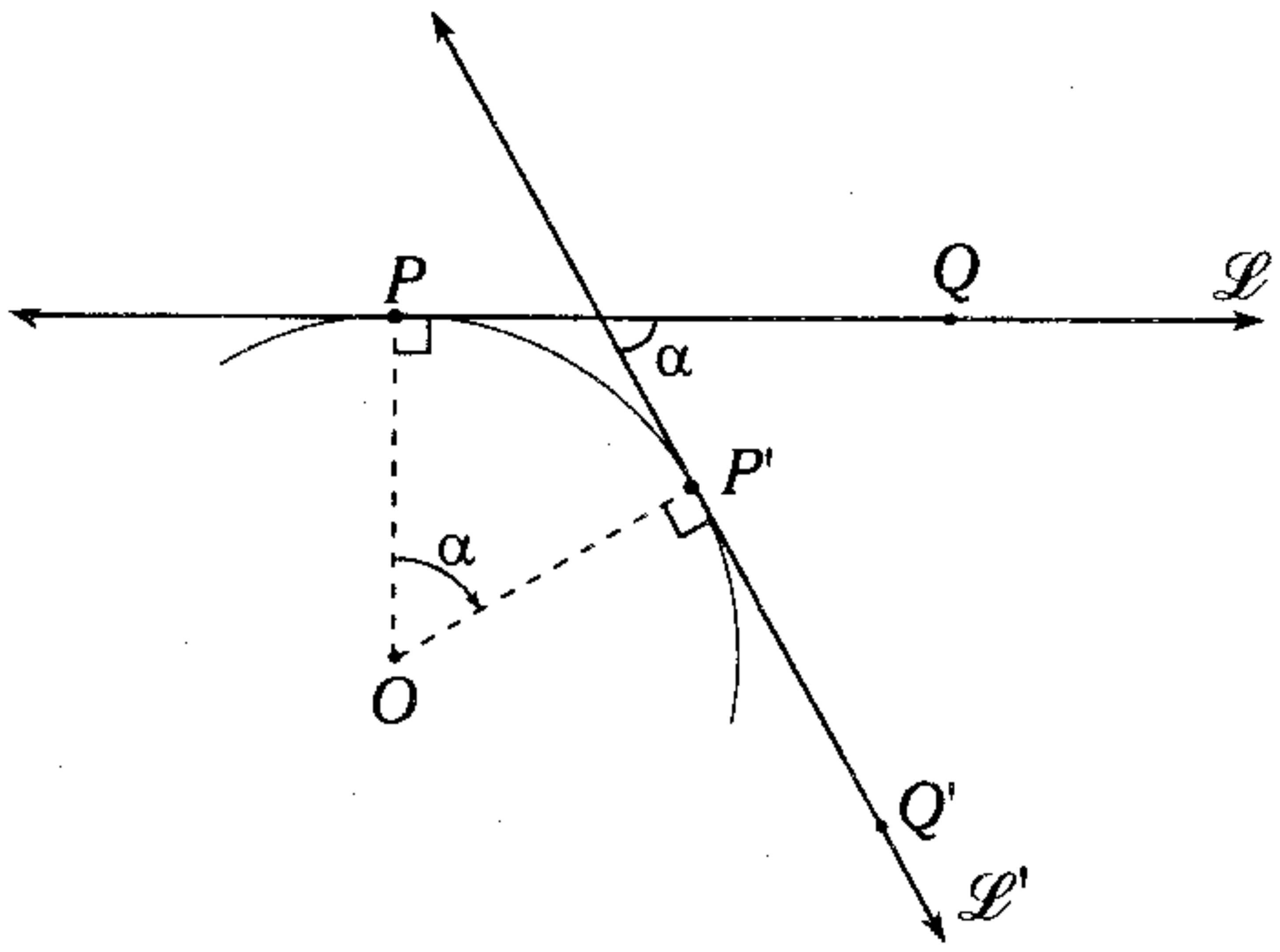


Figura 13.21

O: centro de rotación

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}'} = \text{Rot. } \overleftrightarrow{\mathscr{L}}\ (O;\alpha)$$

Para determinar $\overleftrightarrow{\mathscr{L}'}$ basta con hallar los homólogos P' y Q' de dos puntos cualesquiera P y Q de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$. Ello porque toda recta es determinada por dos puntos.

Nota

Como el $\triangle POQ \cong P'OQ'$;

entonces

$m\sphericalangle OPQ = m\sphericalangle OP'Q'$.

Si se toma r_a como punto P el pie de la perpendicular trazada desde O a la recta $\mathscr{L}$, entonces

$m\sphericalangle OP'Q' = m\sphericalangle OPQ = 90°$,

es decir, $\mathscr{L}'$ sería tangente a la circunferencia de centro O y radio OP.

Como método práctico bastará ubicar P' y trazar $\mathscr{L}'$ tangente a dicha circunferencia.

De una circunferencia

Si el centro C de la circunferencia dada coincide con el centro de rotación, es evidente que la figura transformada es una circunferencia que se confunde globalmente; pero no identicamente con la circunferencia dada, ya que los puntos homólogos no coinciden.

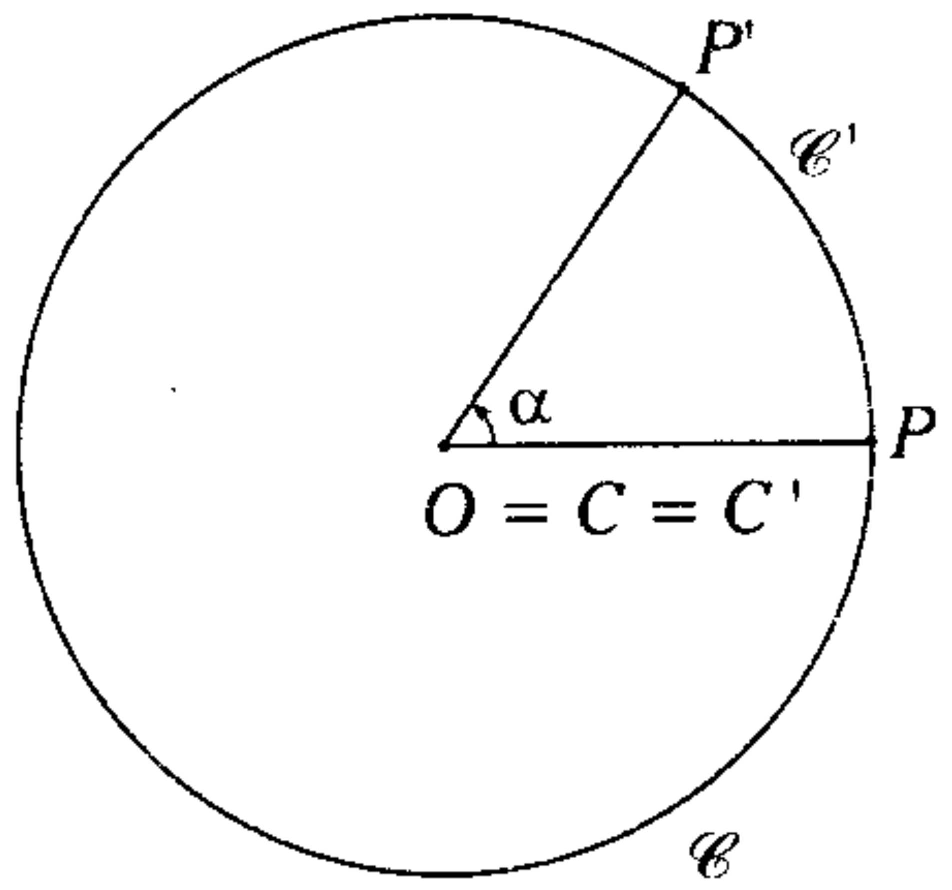


Figura 13.22

$\mathscr{C}' = \text{Rot. } \mathscr{C}(O; \alpha)$

Nota

En este caso, $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}$ se superponen; por lo tanto, son congruentes, pero no son iguales.

Si el centro C de $\mathscr{C}$ no coincide con el centro O de rotación, la figura transformada es otra circunferencia congruente con $\mathscr{C}$.

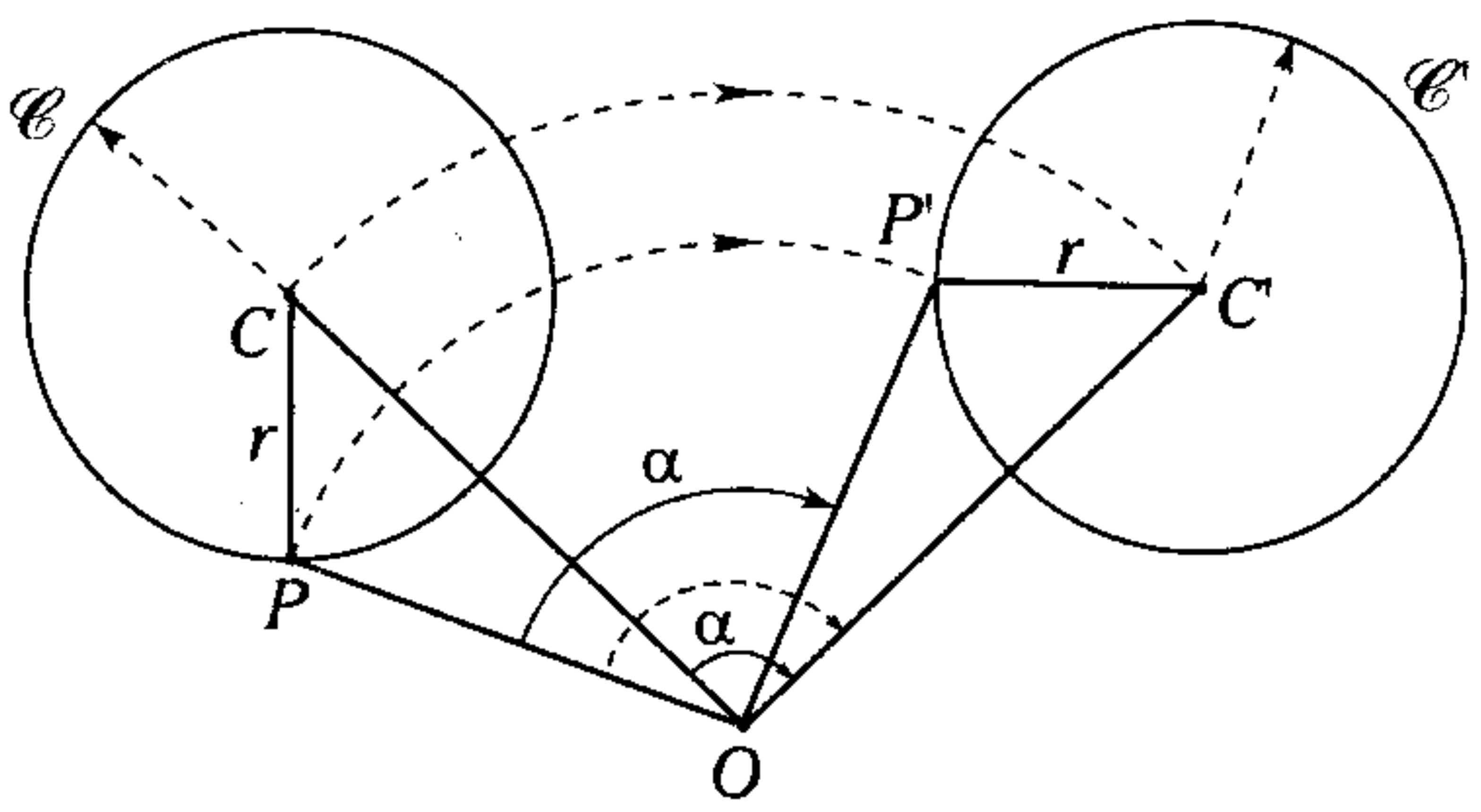


Figura 13.23

$\mathscr{C}' = \text{Rot. } \mathscr{C}(O; \alpha)$

$\mathscr{C}' \cong \mathscr{C}$

PRODUCTO DE ROTACIONES

De un punto

Es el producto de dos o más rotaciones aplicadas a un punto.

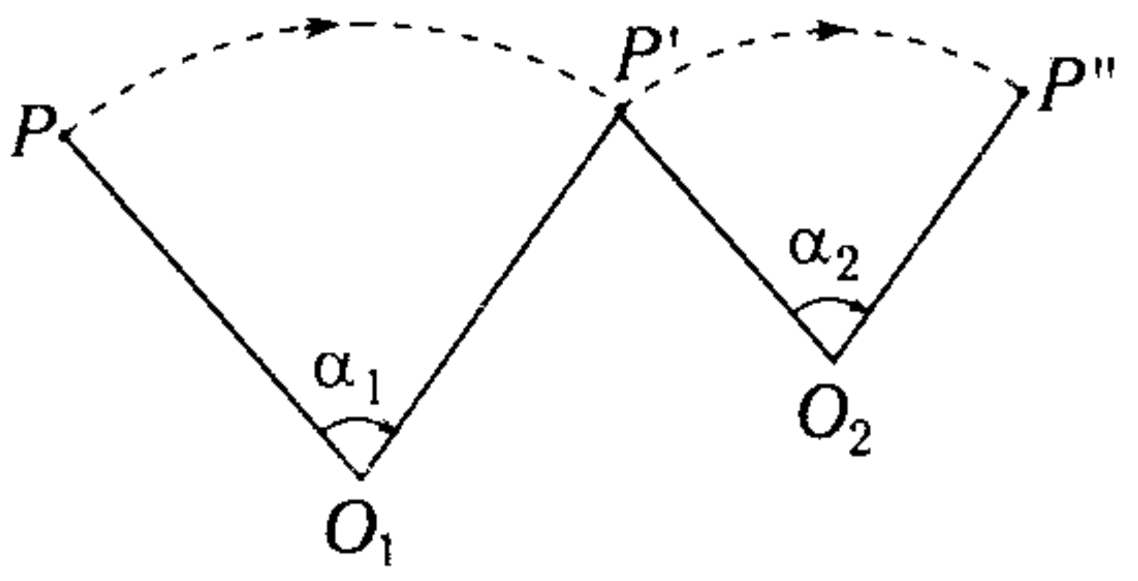


Figura 13.24

$P' = \text{Rot. } P\ (O_1; \alpha_1)$

$P'' = \text{Rot. } P'\ (O_2; \alpha_2)$

$P'' = \text{Rot. } P\ (O_1;\alpha_1) * \text{Rot. } P'\ (O_2;\alpha_2)$

Nota

Si O_1 y O_2 coincidieran, entonces podemos pasar directamente de P a P'' con un rotación de centro $O = O_1 = O_2$ y un ángulo de rotación de medida $\alpha_1 + \alpha_2$.

$\rightarrow\ P'' = \text{Rot. } P\ (O;\ \alpha_1 + \alpha_2)$

De una figura

Es el resultado de aplicar dos o más rotaciones a una figura.

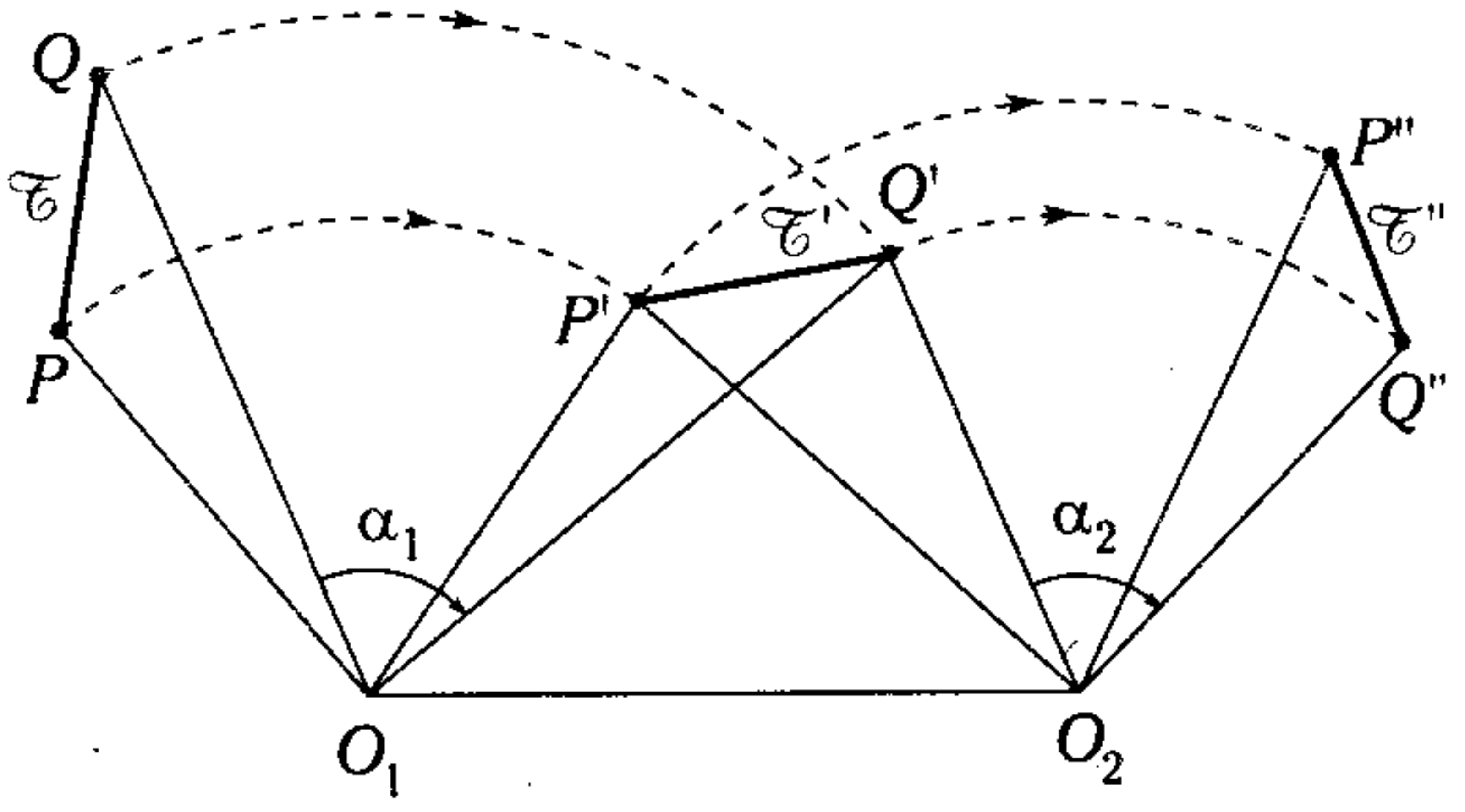


Figura 13.25

$\mathscr{T}' = \text{Rot. } \mathscr{T}(O_1; \alpha_1)$

$\mathscr{T}'' = \text{Rot. } \mathscr{T}'(O_2; \alpha_2)$

$\mathscr{T}'' = \text{Rot. } \mathscr{T}(O_1; \alpha_1) * \text{Rot. } \mathscr{T}'\ (O_2; \alpha_2)$

Nota

Si $\alpha_1 + \alpha_2 = 2K\pi$ ($\forall\, K \in \mathbb{Z}$), el producto de las dos rotaciones es:

- una traslación cuando $O_1 \neq O_2$
- una coincidencia (identidad) cuando $O_1 = O_2$

Como $\mathcal{T}$" y $\mathcal{T}$ son congruentes y se encuentran en contenidas en un plano, se puede pasar de $\mathcal{T}$ a $\mathcal{T}$" mediante una sola rotación.

Para determinar el centro O de esta rotación, basta observar que se halla en el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos $\overline{PP''}$ y $\overline{QQ''}$.

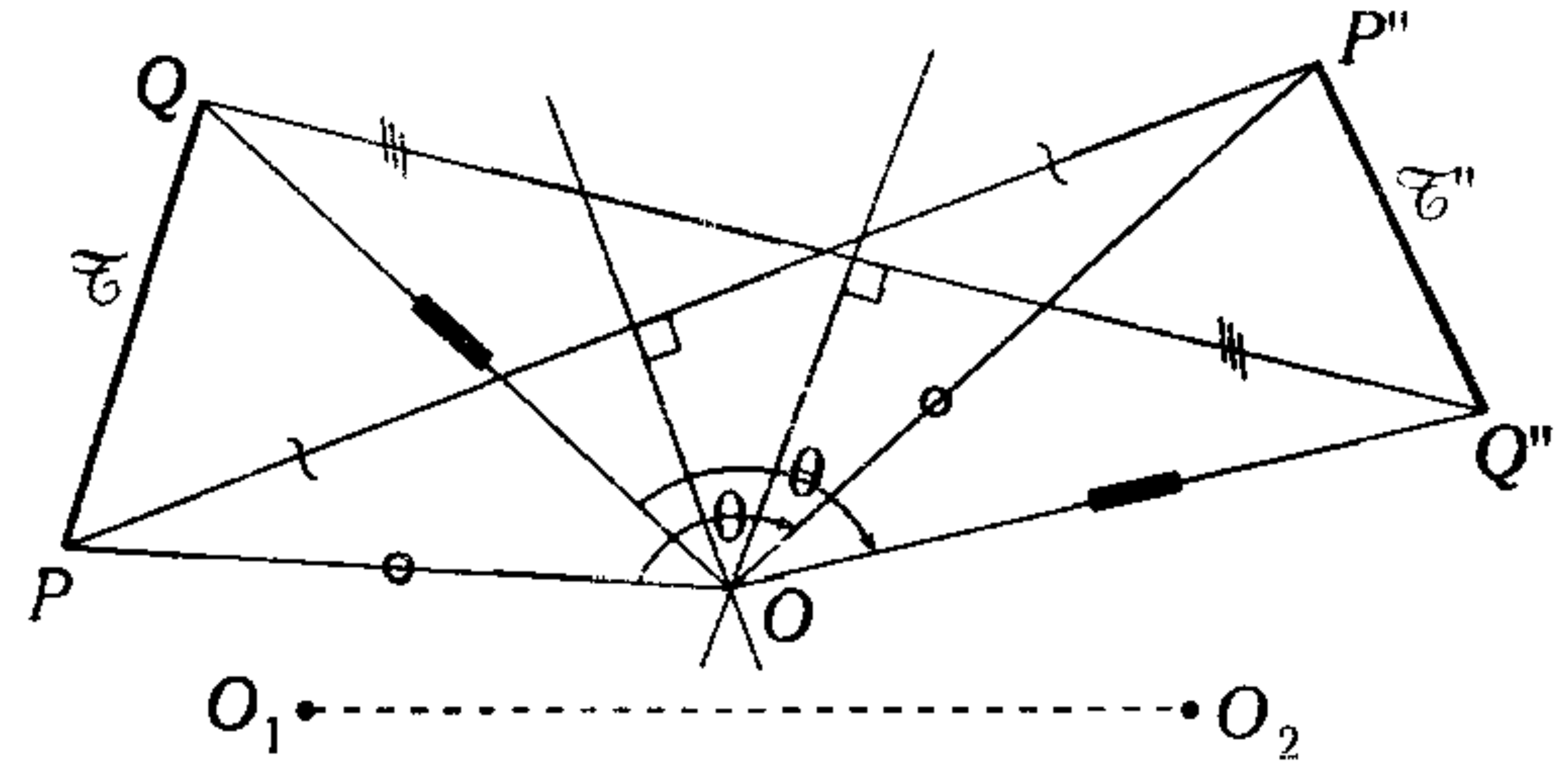


Figura 13.26

$\mathcal{T}$" Rot. = $\mathcal{T}$ $(O; \theta)$

Teorema

La suma de dos rotaciones de ángulos de medida α_1 y α_2, respectivamente, es una rotación de ángulo de medida $\alpha_1 + \alpha_2$.

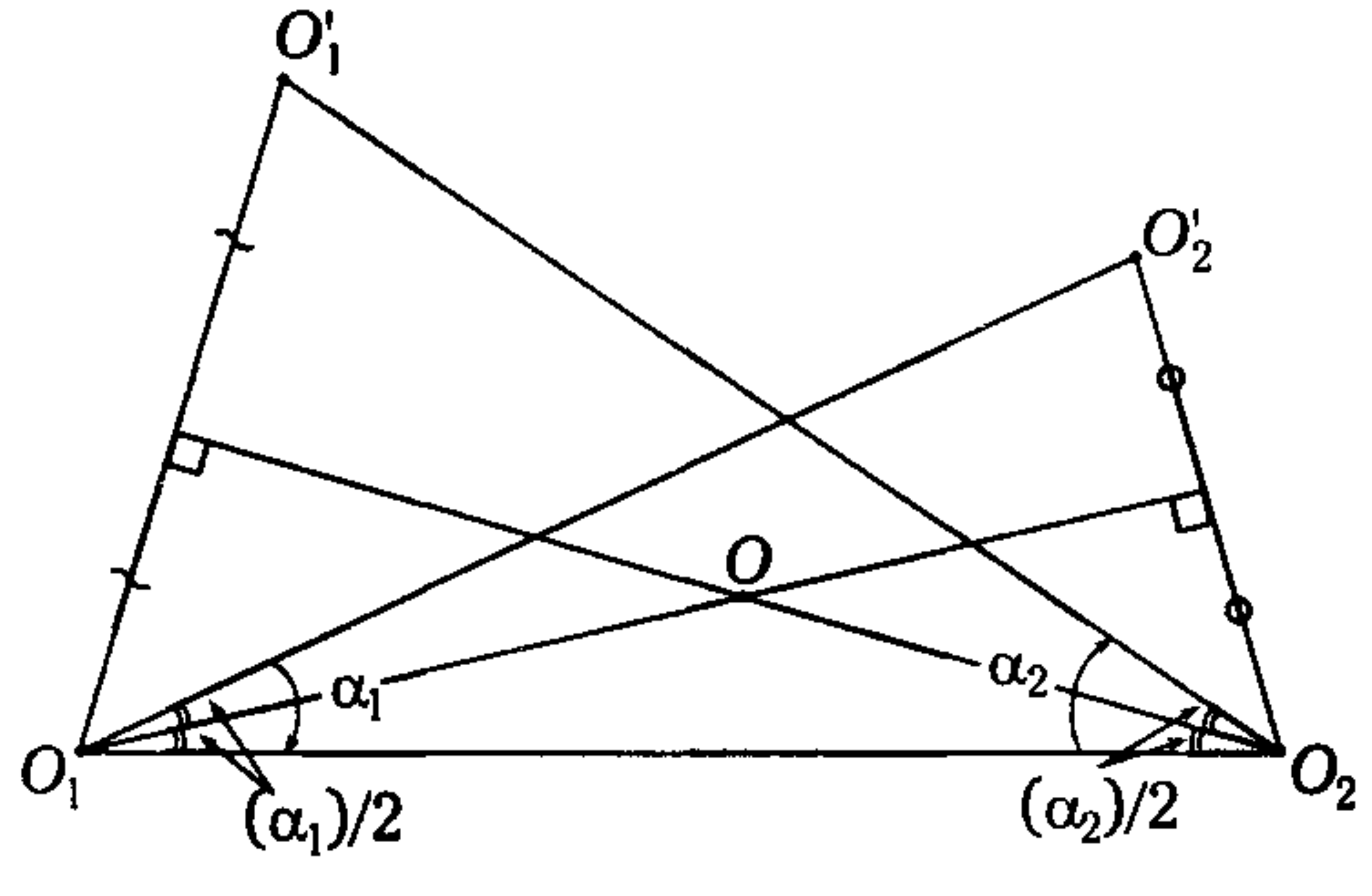


Figura 13.27

Para hallar el centro de la nueva rotación, sea O'_1 el punto en el cual se transforma O_1, después de las dos rotaciones (ver figura 13.27).

Después de la primera rotación, O_1 permanece constante mientras que O'_2 pasa a la posición O_2 donde $m\sphericalangle O_2O_1O'_2 = \alpha_1$ y $O_1O'_2 = O_2O_1$.

Después de la segunda rotación, O_1 pasa a la posición O'_1; mientras que O_2 permanece, constante. De esta manera, $m\sphericalangle O'_1O_2O_1 = \alpha_2$ y $O'_1O_2 = O_2O_1$.

Si O es el centro de la rotación equivalente, debe ser equidistante de O_1 y O'_1 así también de O'_2 y O_2. Por lo tanto, debe también pertenecer a las mediatrices de $\overline{O_1O'_1}$ y $\overline{O'_2O_2}$. Para poder hallar el centro de rotación equivalente O, por O_1 trazamos una recta, que forme un ángulo de medida a $\frac{\alpha_1}{2}$ con $\overline{O_1O_2}$, y por O_2 trazamos una recta, que forme un ángulo de medida $\frac{\alpha_2}{2}$ con $\overline{O_1O_2}$.

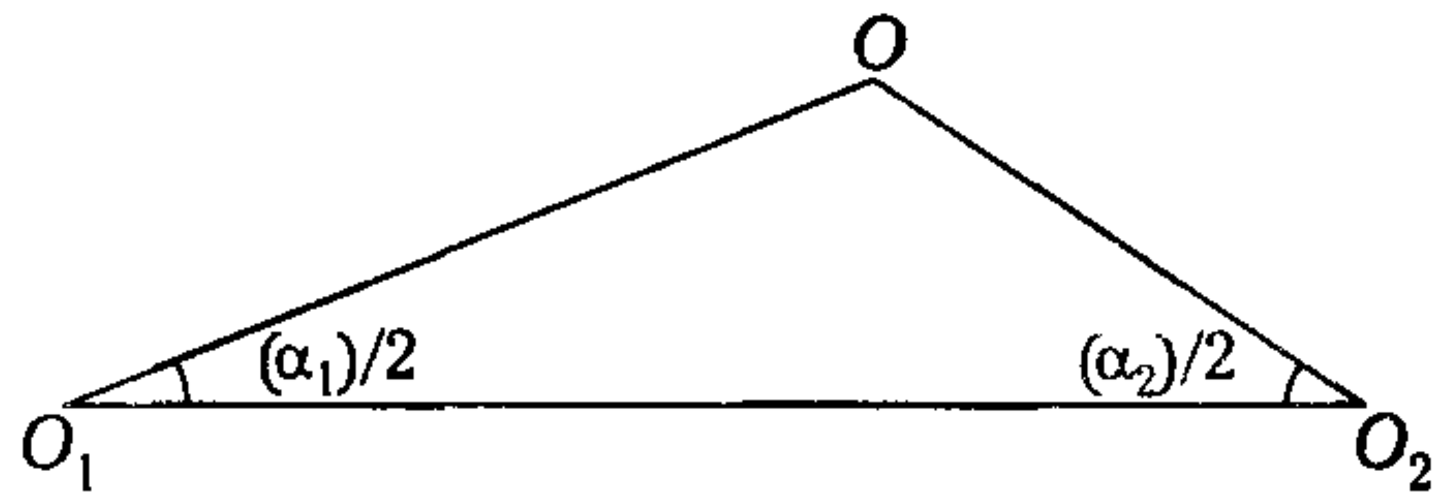


Figura 13.28

$$\text{Rot. } \mathcal{T}(O_1; \alpha_1) * \text{Rot. } \mathcal{T}'(O_2; \alpha_2) = \text{Rot. } \mathcal{T}(O; \alpha_1 + \alpha_2)$$

Observación

- Si las rectas PP'' y QQ'' fueran paralelas, las dos mediatrices se confunden; esto indica que los puntos P y Q están alineados con el centro O.
- Si los segmentos PP'' y QQ'' fueran paralelos y congruentes, las dos mediatrices serían paralelas y el centro de rotación O estaría en el infinito (el producto de las rotaciones resultaría ser una traslación).
- Cuando los centros O_1 y O_2 son distintos, el producto de rotaciones no es conmutativo.

HOMOTECIA

HOMOTECIA DE UN PUNTO

Dado un punto fijo O y una razón constante K se dice que un punto P' es el homotético de P, si P' pertenece al rayo OP y $\frac{OP'}{OP}=K$

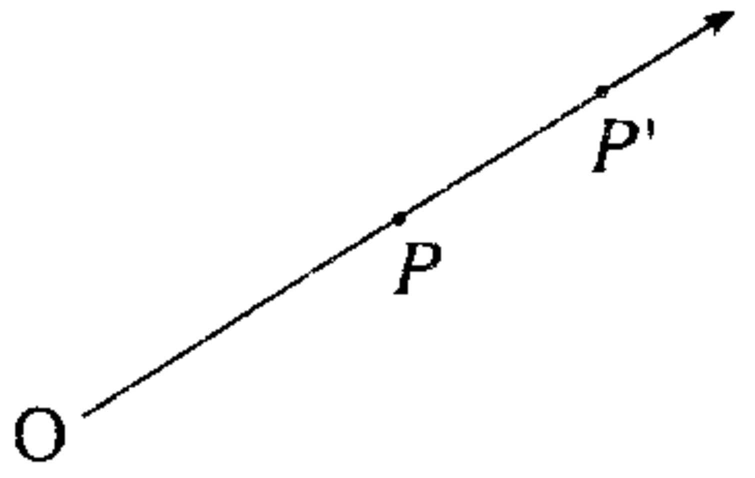


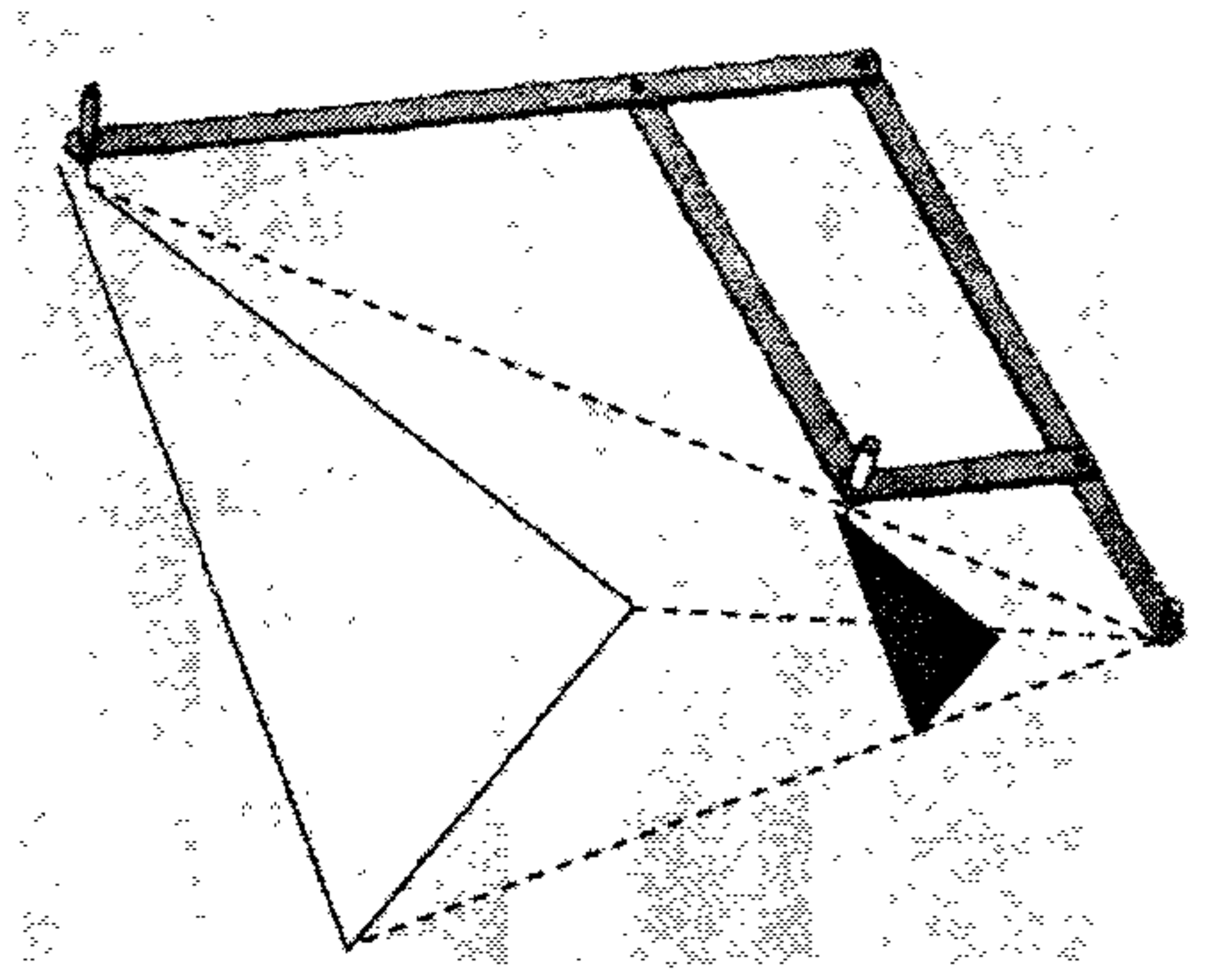
Figura 13.29

Si $P'\in \overleftrightarrow{OP}$ y $\frac{OP'}{OP}=K\ /\ (K\in\mathbb{R})$;

> entonces P' es el homotético de P, respecto de O y de razón K.

Notación

> P' = Hom. $P(O; K)$



El pantógrafo es sin duda el instrumento que nos permite obtener imágenes homotéticas al ser un paralelogramo articulado que sirve para copiar, ampliar o reducir un dibujo. Fue inventado alrededor de 1603 por el astrónomo alemán Christolph Scheiner.

HOMOTECIA DE UNA FIGURA

Dado un punto fijo O y una razón constante K se dice que una figura $\mathcal{T}'$ es la homotética u homotésica de la figura $\mathcal{T}$, si para todo punto P' de $\mathcal{T}'$ le corresponde un punto P de $\mathcal{T}$, tal que P' pertenece al rayo OP y $\frac{OP'}{OP}=K$.

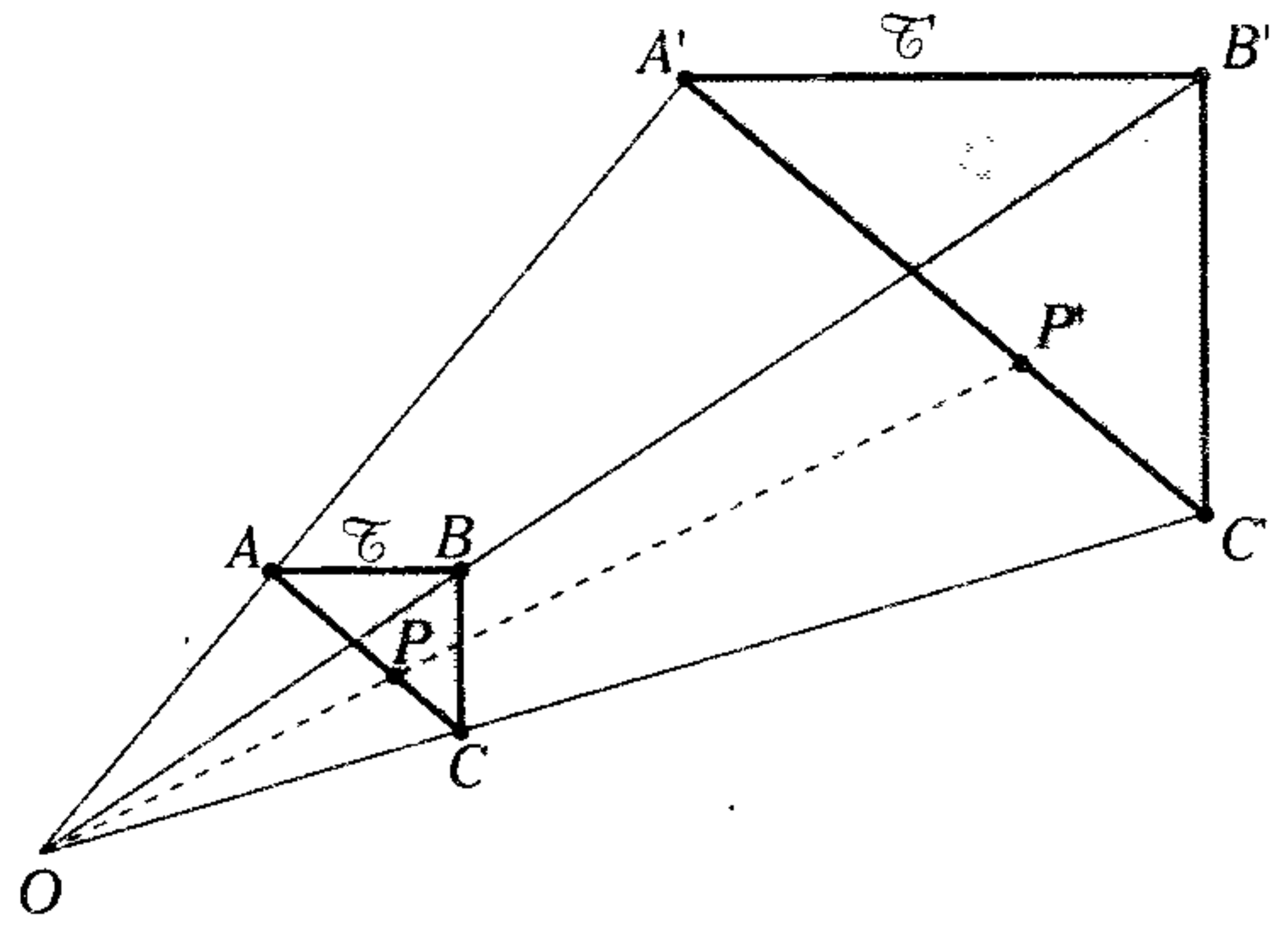


Figura 13.29

Si $\forall\ P'\in\mathcal{T}'\ \exists$ un $P\in\mathcal{T}/P'\in\overleftrightarrow{OP}$ y $\frac{OP'}{OP}=K$;

entonces $\mathcal{T}'$ es el homotésico de $\mathcal{T}$, respecto de O y de razón K.

$\rightarrow$ $\mathcal{T}'$ = Hom. $\mathcal{T}\ (O; K)$

Observación

- Cuando $K=1$, las figuras coinciden totalmente por lo cual estamos ante una transformación identidad.
- Cuando $K=-1$; la transformación es una simetría puntual o central.
- Cuando $K\neq 0$, las figuras son denominadas semejantes, donde K es la constante de proporcionalidad.

  $\rightarrow\ \mathcal{T}'\sim\mathcal{T}$ cuando $K\neq 0$.

> **Nota**
>
> Dos figuras homotésicas son semejantes pero dos figuras semejantes no necesariamente serán homotésicas.

HOMOTECIA DIRECTA

Dos figuras hometésicas tendrán homotecia directa si, K es mayor que cero.

Si $0 < K < 1$, la transformación es una reducción de la figura inicial.

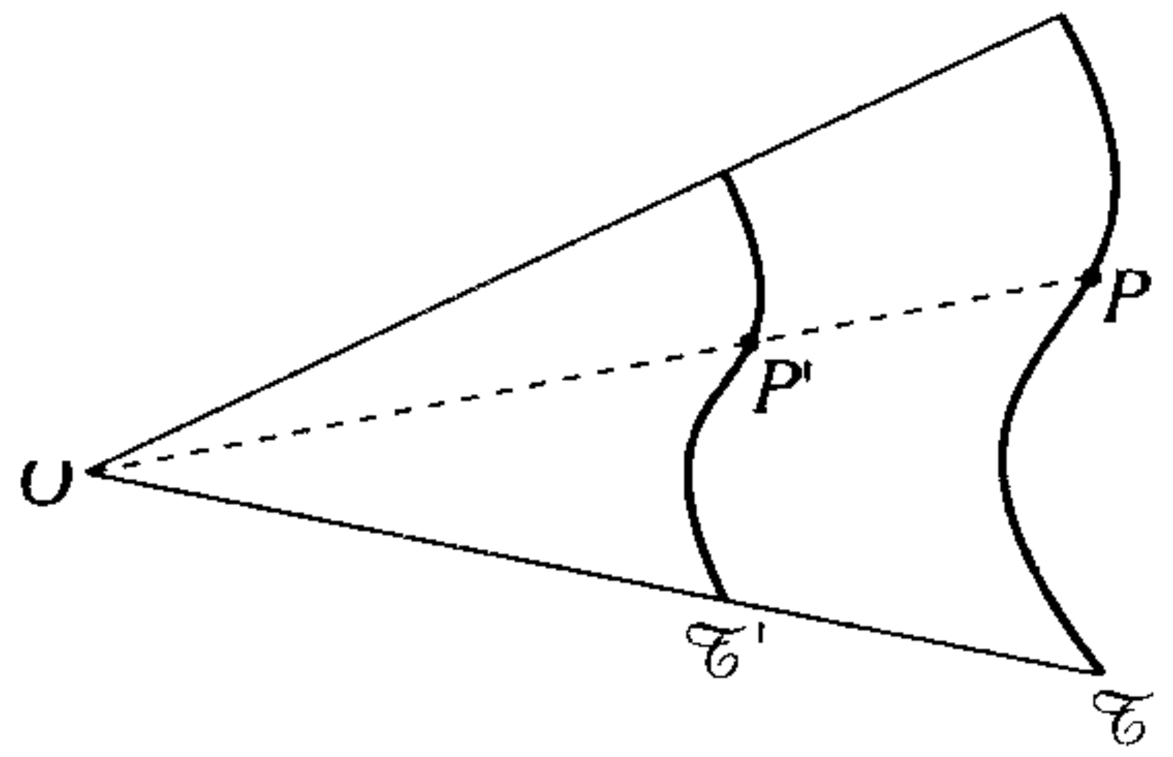


Figura 13.30

$$\frac{OP'}{OP} = K \ \dots (0<K<1)$$

$\mathcal{T}' = \text{Hom. } \mathcal{T}(O; K)$

Si $K > 1$, la transformación es una ampliación de la figura inicial.

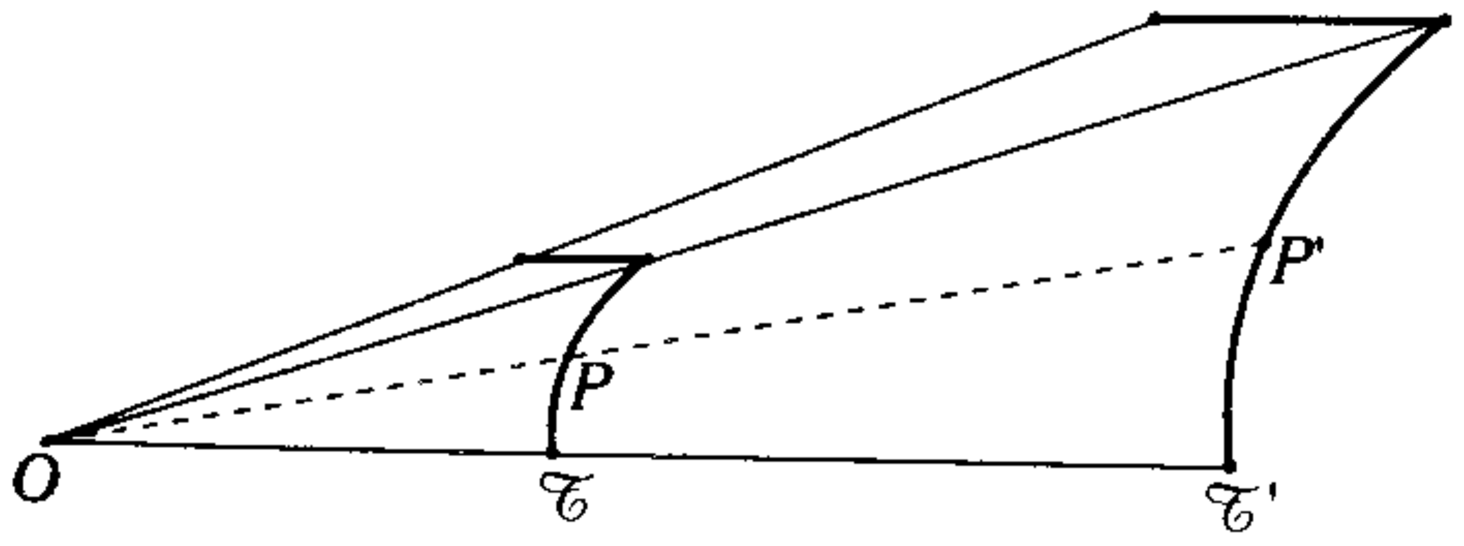


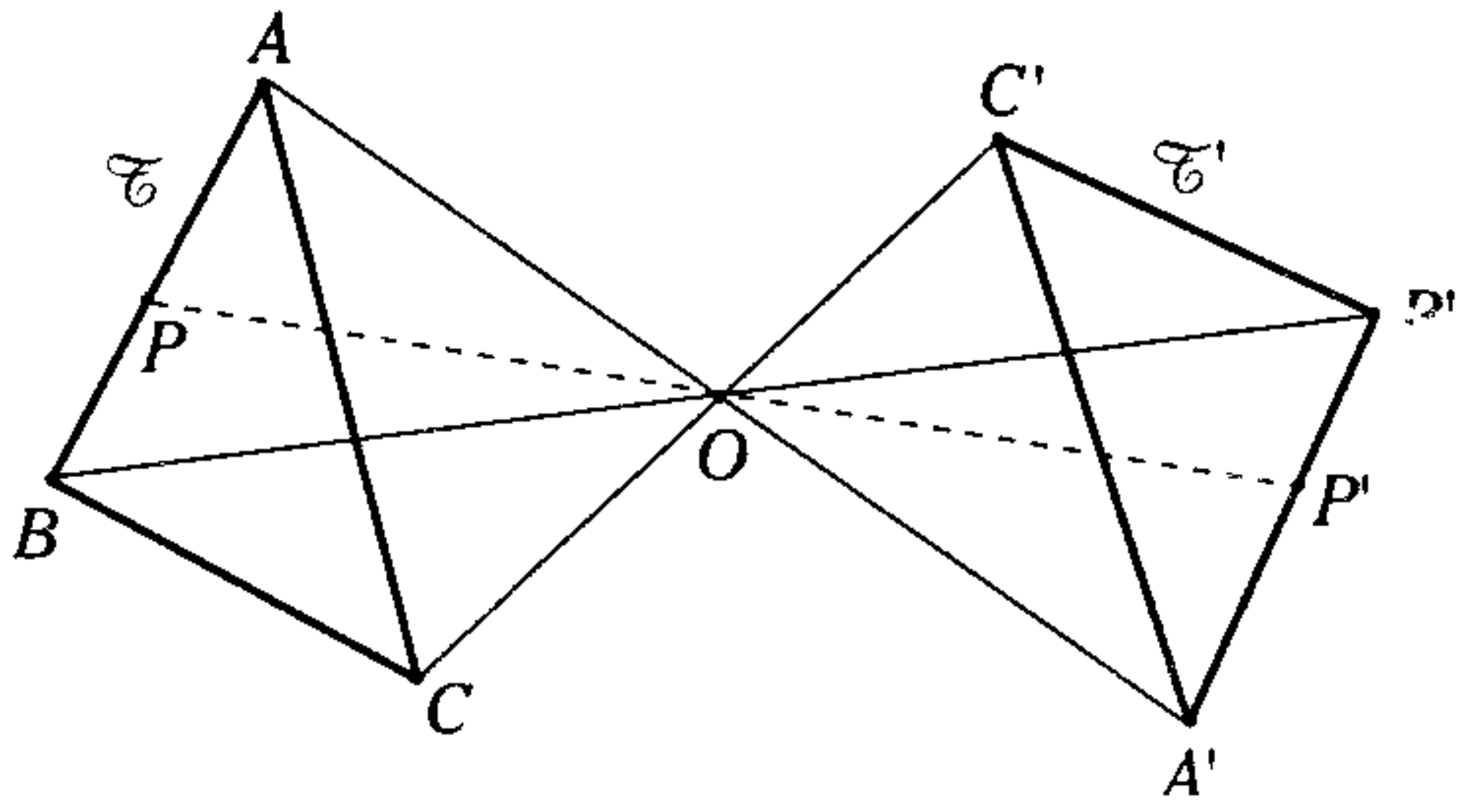
Figura 13.31

$$\frac{OP'}{OP} = K \ (K > 1)$$

$\mathcal{T}' = \text{Hom. } \mathcal{T}(O; K)$

HOMOTECIA INVERSA

Dos figuras homotésicas tendrán homotecia inversa, si K es menor que cero.



$$\frac{OP'}{OP} = |K| \ (K < 0) \qquad \mathcal{T}' = \text{Hom. } \mathcal{T}(O; K)$$

PRODUCTO DE HOMOTECIAS

De un punto

Es el producto de dos o más homotecias aplicadas a un punto.

Con un mismo centro de homotecia

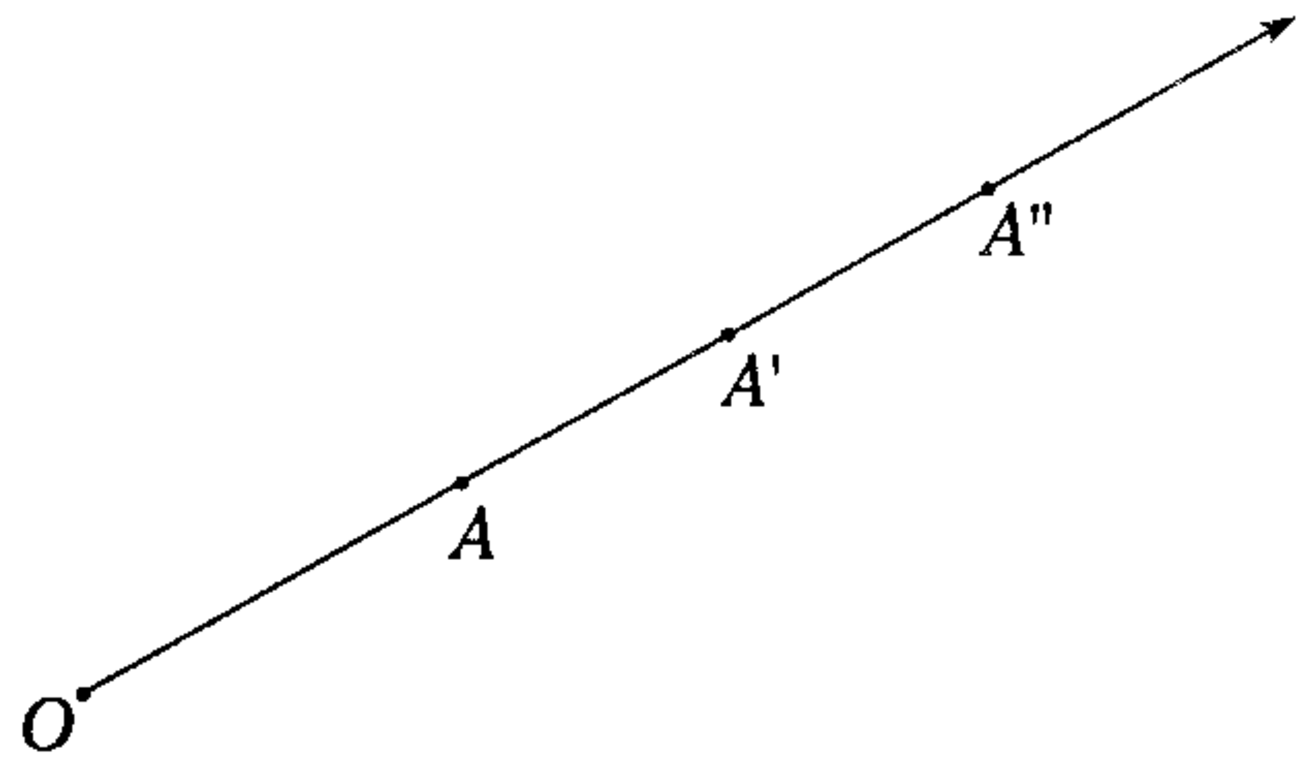


Figura 13.32

$$A' = \text{Hom. } A\left(O ; \frac{OA'}{OA}\right)$$

$$A'' = \text{Hom. } A'\left(O ; \frac{OA''}{OA'}\right)$$

$$\boxed{A'' = \text{Hom. } A\left(O ; \frac{OA'}{OA}\right) * \text{Hom. } A'\left(O ; \frac{OA''}{OA}\right)}$$

pero también podemos observar que

$$A'' = \text{Hom. } A\left(O\,;\frac{OA''}{OA}\right)$$

$$\therefore\ \text{Hom. } A\left(O\,;\frac{OA''}{OA}\right) = \text{Hom. } A\left(O\,;\frac{OA'}{OA}\right) * \text{Hom. } A'\left(O\,;\frac{OA''}{OA}\right)$$

Observación

De la figura

$$\frac{OA''}{OA} = \frac{OA'}{OA} \times \frac{OA''}{OA'}$$

$\rightarrow$ Hom. $P(O;r_1)$ * Hom. $Q(O;r_2)$
$=$ Hom. $P(O;r_1 \times r_2)$

- Si $r_2 = \dfrac{1}{r_1}$, entonces el producto de homotecias resulta una identidad.
- Si $r_2 = -\dfrac{1}{r_1}$, entonces el producto de homotecias resulta una simetría.

Con diferentes centros de homotecia.

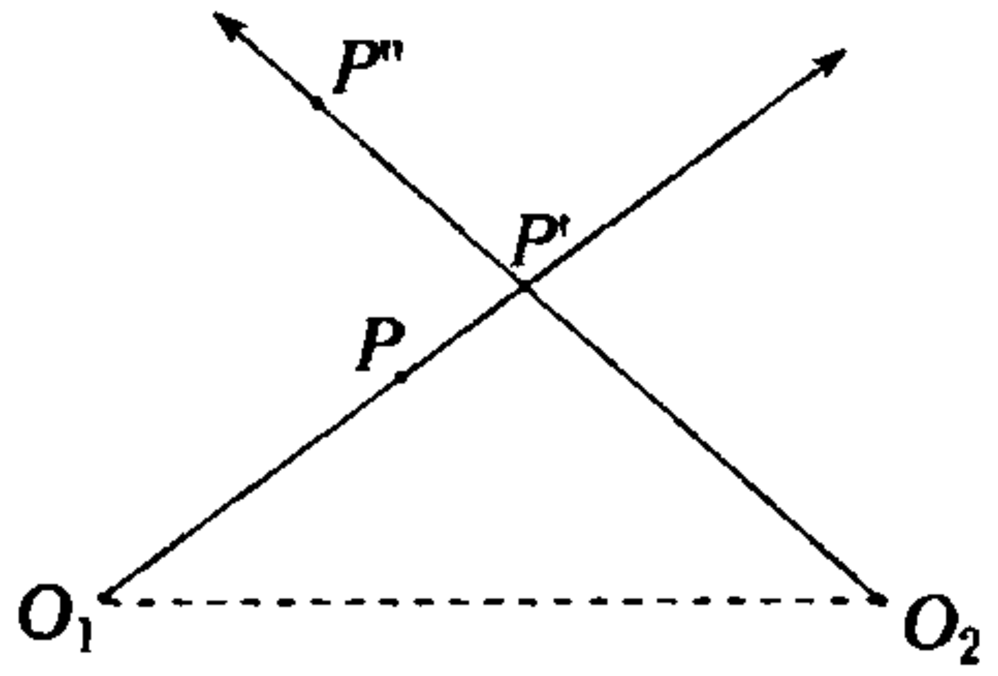


Figura 13.33

$$P' = \text{Hom. } P\left(O_1\,;\ \frac{O_1P'}{O_1P}\right)$$

$$P'' = \text{Hom. } P'\left(O_2\,;\ \frac{O_2P''}{O_2P'}\right)$$

$$P'' = \text{Hom. } P\left(O_1\,;\ \frac{O_1P'}{O_1P}\right) * \text{Hom. } P'\left(O_2\,;\ \frac{O_2P''}{O_2P'}\right)$$

Nota

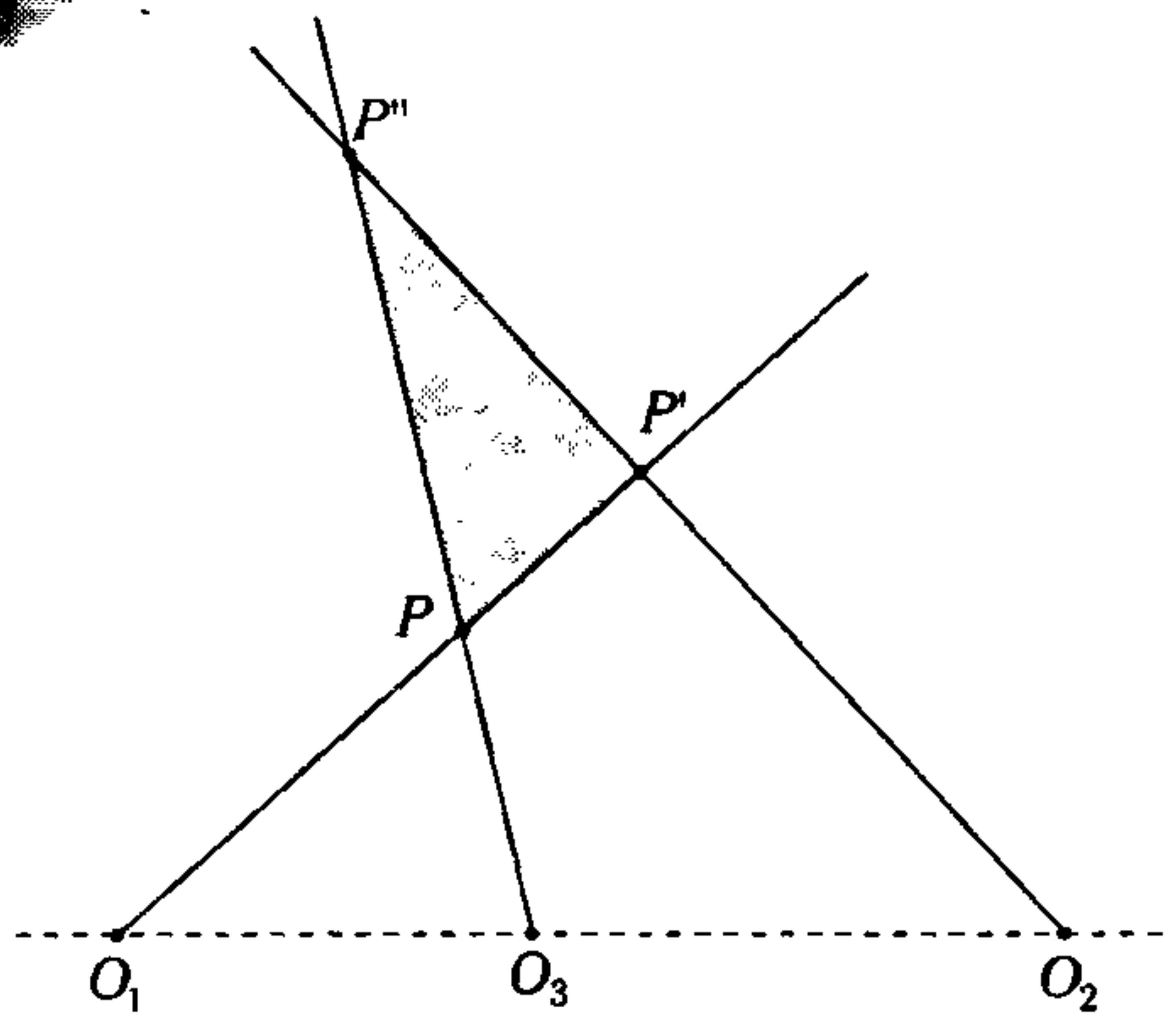


Figura 13.34

Sea

$$\frac{O_1P'}{O_1P} = r_1 \qquad \frac{O_2P''}{O_2P'} = r_2 \qquad \frac{O_3P''}{O_3P} = r_3$$

del teorema de Menelao para el $\triangle PP'P''$ se cumple

$$\frac{O_1P'}{O_1P} \cdot \frac{O_2P''}{O_2P''} \cdot \frac{O_3P}{O_3P''} = 1$$

$$\rightarrow \frac{O_1P'}{O_1P} \cdot \frac{O_2P''}{O_2P''} = \frac{O_3P}{O_3P''}$$

$$\therefore\ r_1 \cdot r_2 = r_3$$

$\rightarrow P'' = \text{Hom.}P(O_3;r_3) = \text{Hom.}P(O_3;r_1 \times r_2)$

pero

$$P'' = \text{Hom. } P\,(O_1\,;r_1) * \text{Hom. } P'\,(O_2\,;r_2)$$

$$\therefore\ \text{Hom. } P(O_1;r_1) * \text{Hom. } P'(O_2\,;r_2) = \text{Hom. } P\,(O_3;r_1 * r_2)$$

donde O_1, O_2 y O_3 están alineados (colineales).

- Si $r_2 = \frac{1}{r_1}$, el producto de homotecias es traslación paralela a la recta determinada por O_1O_2.
- Si $r_2 = -\frac{1}{r_1}$, el producto de homotecias es una simetría, cuyo centro de simetría es colineal con O_1 y O_2.

De una figura

Es el producto de dos o más homotecias aplicadas a una figura.

Con un mismo centro de homotecia

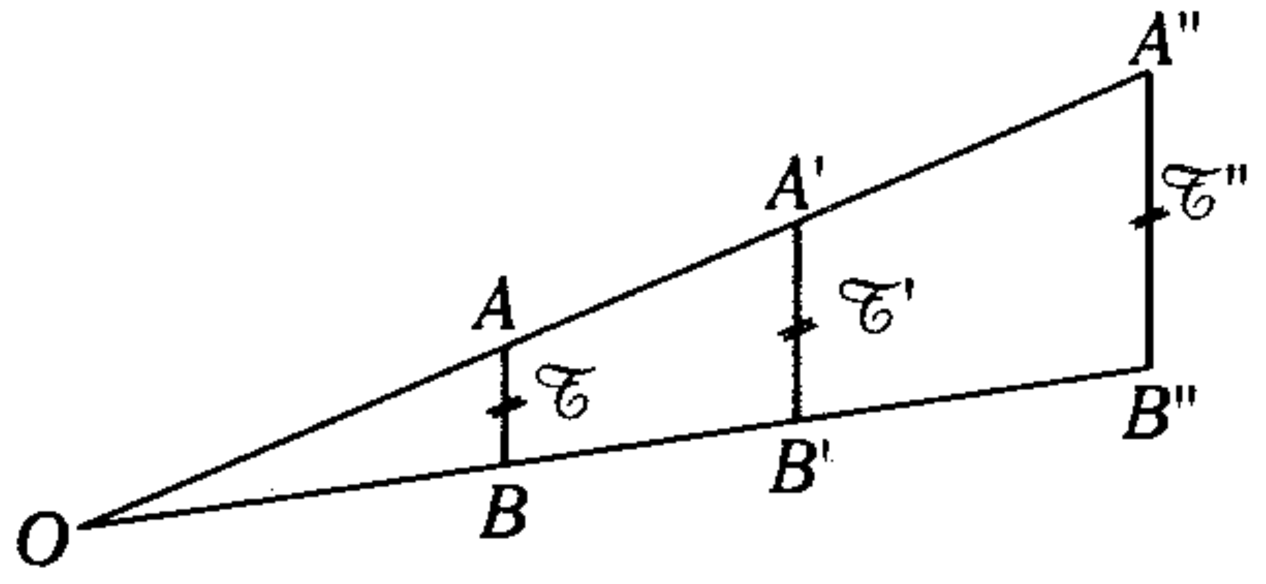


Figura 13.35

$$\mathcal{T}' = \text{Hom.}\mathcal{T}\left(O\,;\frac{OA'}{OA}\right)$$

$$\mathcal{T}'' = \text{Hom.}\mathcal{T}'\left(O\,;\frac{OA''}{OA'}\right) = \text{Hom.}\mathcal{T}\left(O\,;\frac{OA''}{OA}\right)$$

$$\therefore \quad \text{Hom.}\,\mathcal{T}\left(O\,;\frac{OA'}{OA}\right) * \text{Hom.}\mathcal{T}'\left(O\,;\frac{OA''}{OA'}\right) = \text{Hom.}\mathcal{T}\left(O\,;\frac{OA''}{OA}\right)$$

Observación

Si $\frac{OA''}{OA} \cdot \frac{OA'}{OA} = 1$

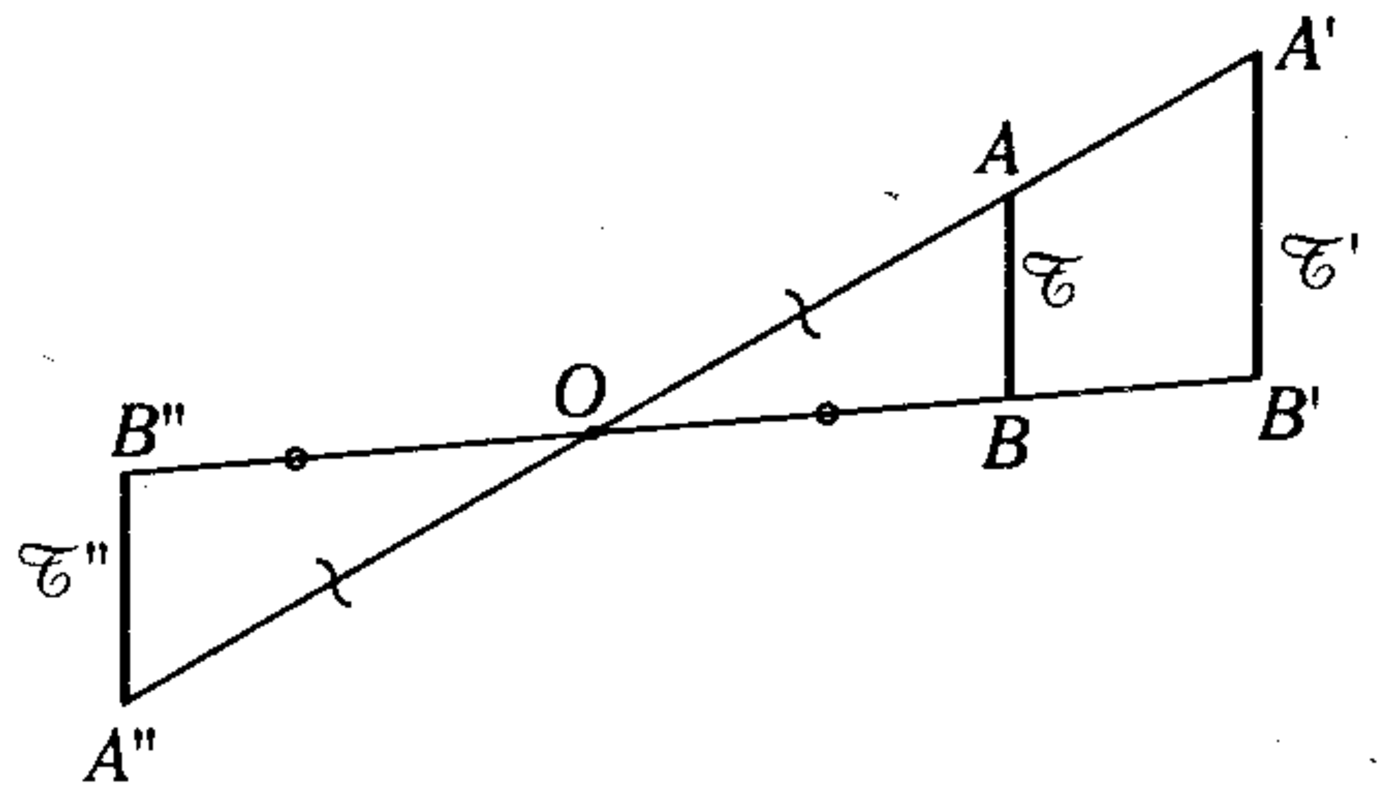


Figura 13.36

$$\mathcal{T}' = \text{Hom.}\mathcal{T}\left(O\,;\frac{OA'}{OA}\right)$$

$$\mathcal{T}'' = \text{Hom.}\mathcal{T}'\left(O\,;\frac{OA''}{OA'}\right)$$

$$\text{Hom.}\mathcal{T}\left(O\,;\frac{OA'}{OA}\right) * \text{Hom.}\mathcal{T}'\left(O\,;\frac{OA''}{OA'}\right)$$

$$= \text{Hom.}\ \mathcal{T}(O\,;-1)$$

Si es que $r_1 \times r_2 = -1$

$$\therefore \quad \text{Hom.}\mathcal{T}(O\,;r_1) * \text{Hom.}\mathcal{T}'(O\,;r_2) = \text{Sim.}\mathcal{T}(O)$$

entonces el producto de dos homotecias cuyas razones son inversas y de signos contrarios nos dará una simetría central.

Con diferentes centros de homotecia

$$\mathscr{T}' = \text{Hom.}\mathscr{T}\left(O_1\,;\,\frac{OA'}{OA}\right)$$

$$\mathscr{T}'' = \text{Hom.}\ \mathscr{T}'\left(O_2\,;\,\frac{OA''}{OA'}\right)$$

Sea $r_1 = \dfrac{O_1A'}{O_1A}$; $r_2 = \dfrac{O_2A''}{O_2A'}$ y $r_3 = \dfrac{O_3A''}{O_3A}$

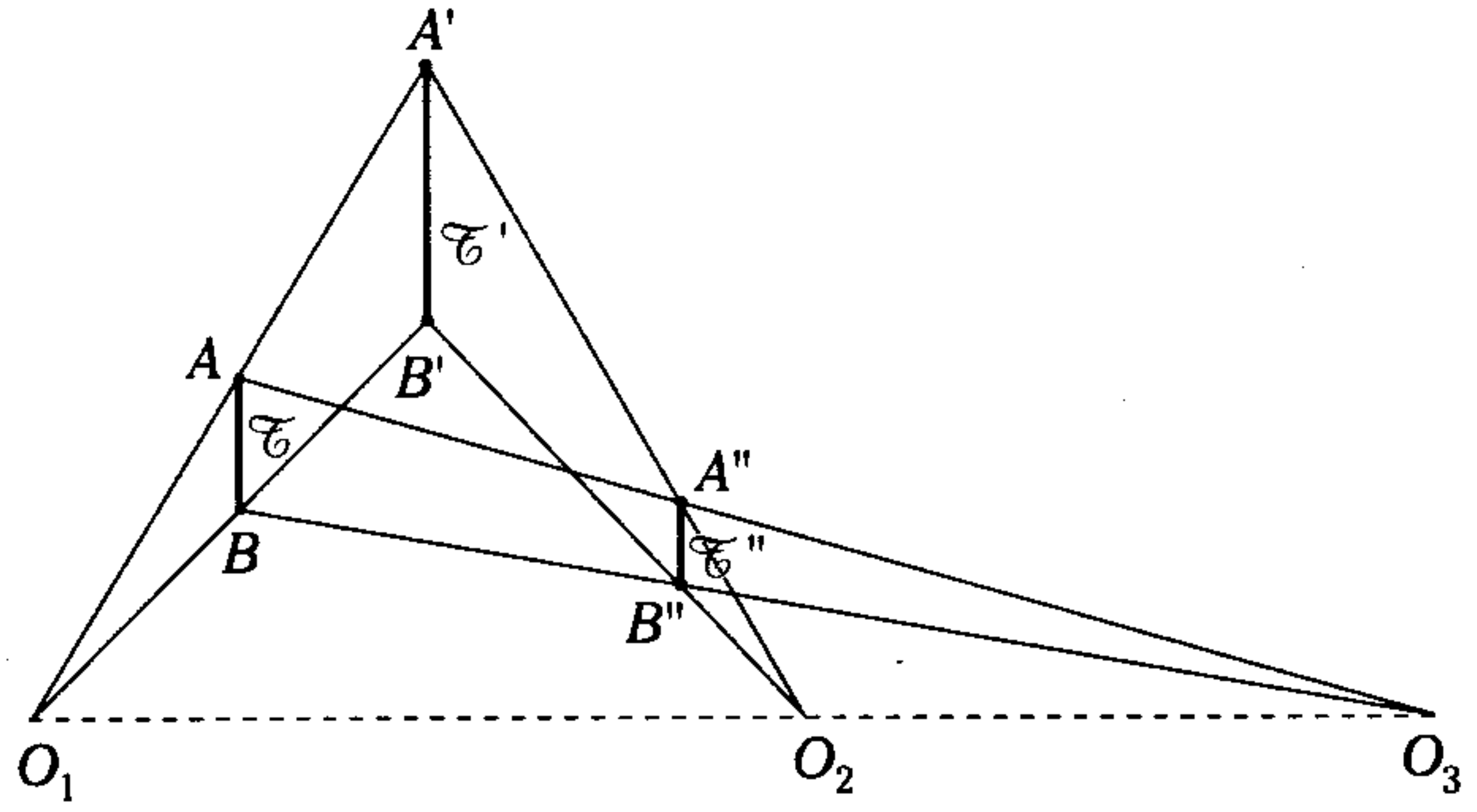


Figura 13.37

Del teorema de Menelao para el triángulo $AA'A''$

$$\frac{O_1A'}{OA}\cdot\frac{O_2A''}{O_2A'}\cdot\frac{O_3A}{O_3A''} = 1$$

$$\therefore\ r_1\,.\,r_2 = r_3$$

entonces los centros O_1,O_2 y O_3 son colineales

$$\therefore\ \boxed{\text{Hom.}\mathscr{T}(O_1;r_1)\cdot\text{Hom.}\mathscr{T}'(O_2;r_2) = \text{Hom.}\mathscr{T}(O_3;r_3)}$$

donde $r_3 = r_1\,.\,r_2$ y O_1, O_2 y O_3 son colineales

- Si $r_2 = \dfrac{1}{r_1}$, asumimos entonces que

  el producto de homotecias resulta una traslación ($r_1\,.\,r_2 = 1$).

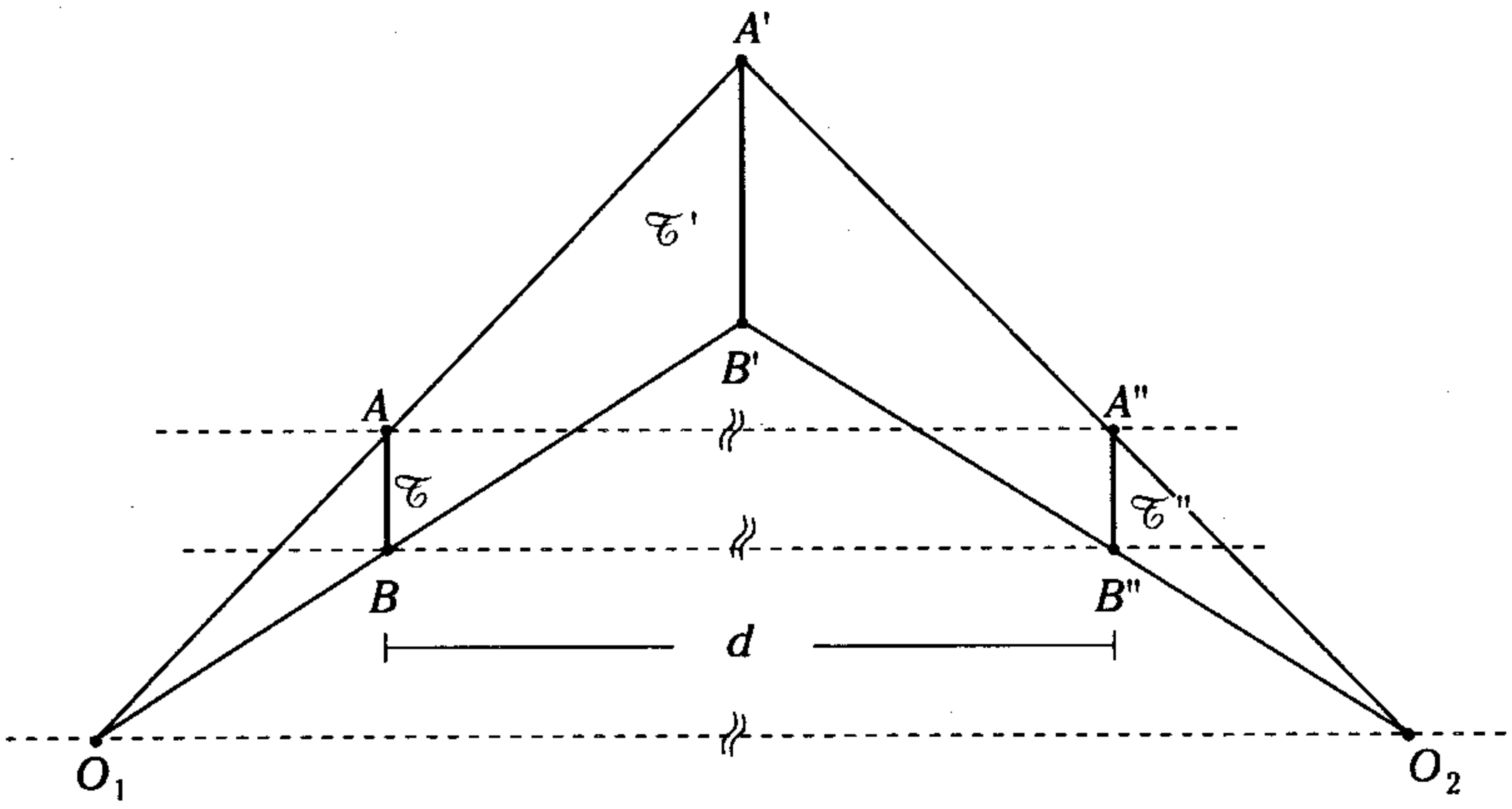


Figura 13.38

De la figura 13.38

si $\mathcal{T}'' = \text{Hom.}\mathcal{T}(O_1; r_1) * \text{Hom.}\mathcal{T}'\left(O_2 ; \frac{1}{r_1}\right)$

$$\rightarrow \quad \mathcal{T}'' = \text{Tras.}\mathcal{T}(\overleftrightarrow{O_1O_2} ; d)$$

pero

$$\frac{d}{O_1O_2} = \frac{O_1A' - O_1A}{O_1A'} = 1 - \frac{1}{r_1} \rightarrow d = O_1O_2\left(\frac{r_1 - 1}{r_1}\right)$$

$$\therefore \quad \text{Hom.}\mathcal{T}(O_1 ; r_1) * \text{Hom.}\mathcal{T}'\left(O_2 ; \frac{1}{r_1}\right) = \text{Tras.}\mathcal{T}(\overline{O_1O_2} ; d)$$

Donde $d = O_1O_2\left(\frac{r_1 - 1}{r_1}\right)$

- Si $r_2 = -\frac{1}{r_1}$,

significa que el producto de homotecias resulta una simetría central.

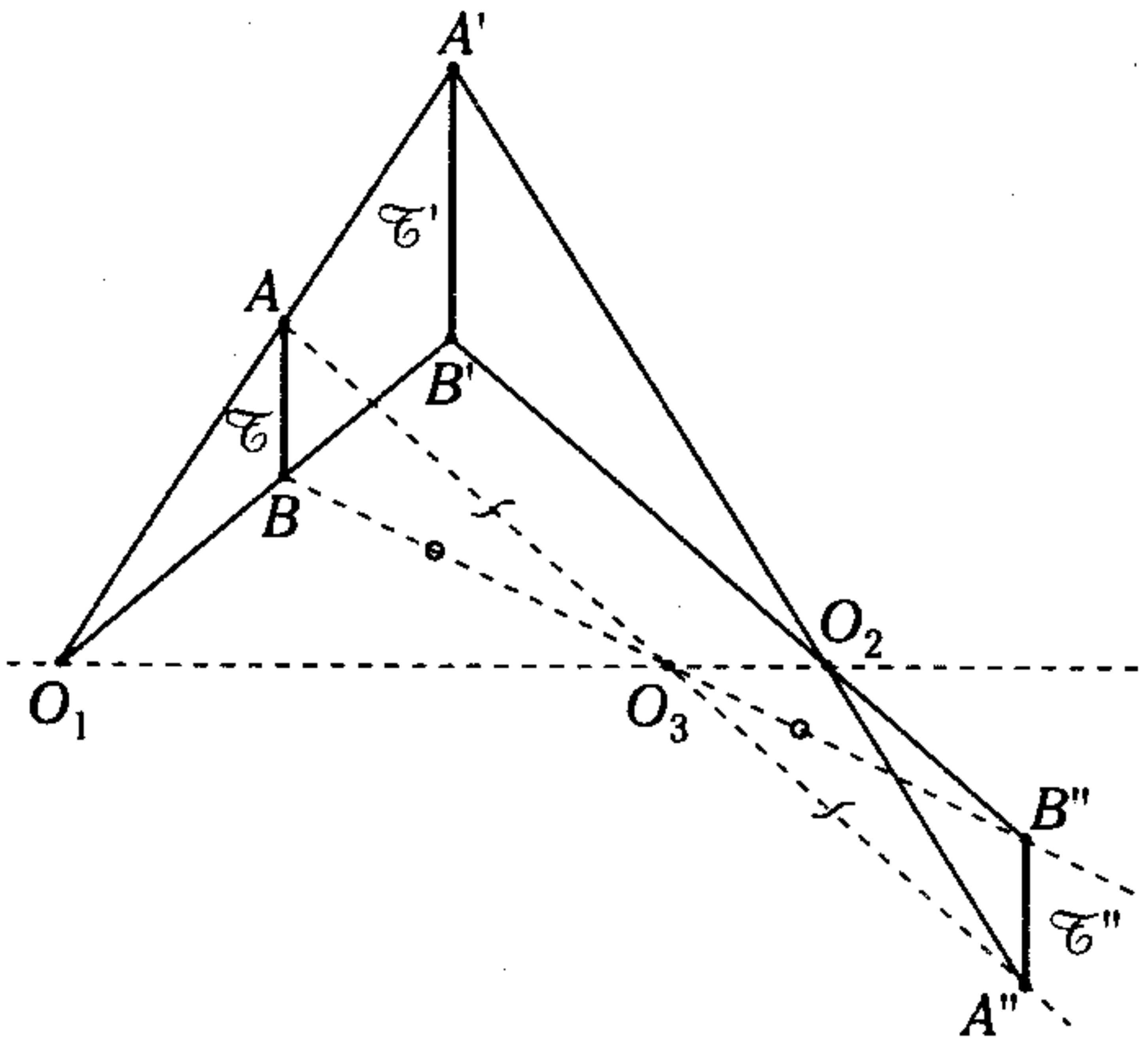


Figura 13.39

Sea $r_1 = \frac{O_1A'}{O_1A}$; $r_2 = \frac{O_2A''}{O_2A'}$;

pero, del teorema recíproco de Menelao para el $\triangle AA'A''$

Si $\frac{O_1A'}{O_1A} \cdot \frac{O_2A''}{O_2A'} \cdot \frac{O_3A''}{O_3A''} = 1$,

los puntos O_1, O_3 y O_2 son colineales, más al decir que

$$r_1 \times r_2 = -1 \rightarrow \frac{O_1A'}{O_1A} \cdot \frac{O_2A''}{O_2A'} = 1,$$

asumimos que $\frac{O_3A''}{O_3A''} = -1$

$$\therefore \quad |O_3A| = |O_3A''|$$

concluimos que $\mathcal{T}''$ es el simétrico de $\mathcal{T}$ respecto de O_3.

$$\mathcal{T}'' = \text{Hom.}\mathcal{T}(O_1; r_1) * \text{Hom.}\mathcal{T}'\left(O_2 ; \frac{-1}{r_1}\right)$$

$$\mathcal{T}'' = \text{Sim.}\mathcal{T}(O_3)$$

$$\therefore \quad \text{Hom.}\mathcal{T}(O_1; r_1) * \text{Hom.}\mathcal{T}'\left(O_2; \frac{-1}{r_1}\right) = \text{Sim.}\mathcal{T}(O_3)$$

donde O_1, O_2 y O_3 son colineales.

Teorema

Dos pares de puntos homólogos de dos figuras homotéticas, respectivamente, determinan rectas paralelas.

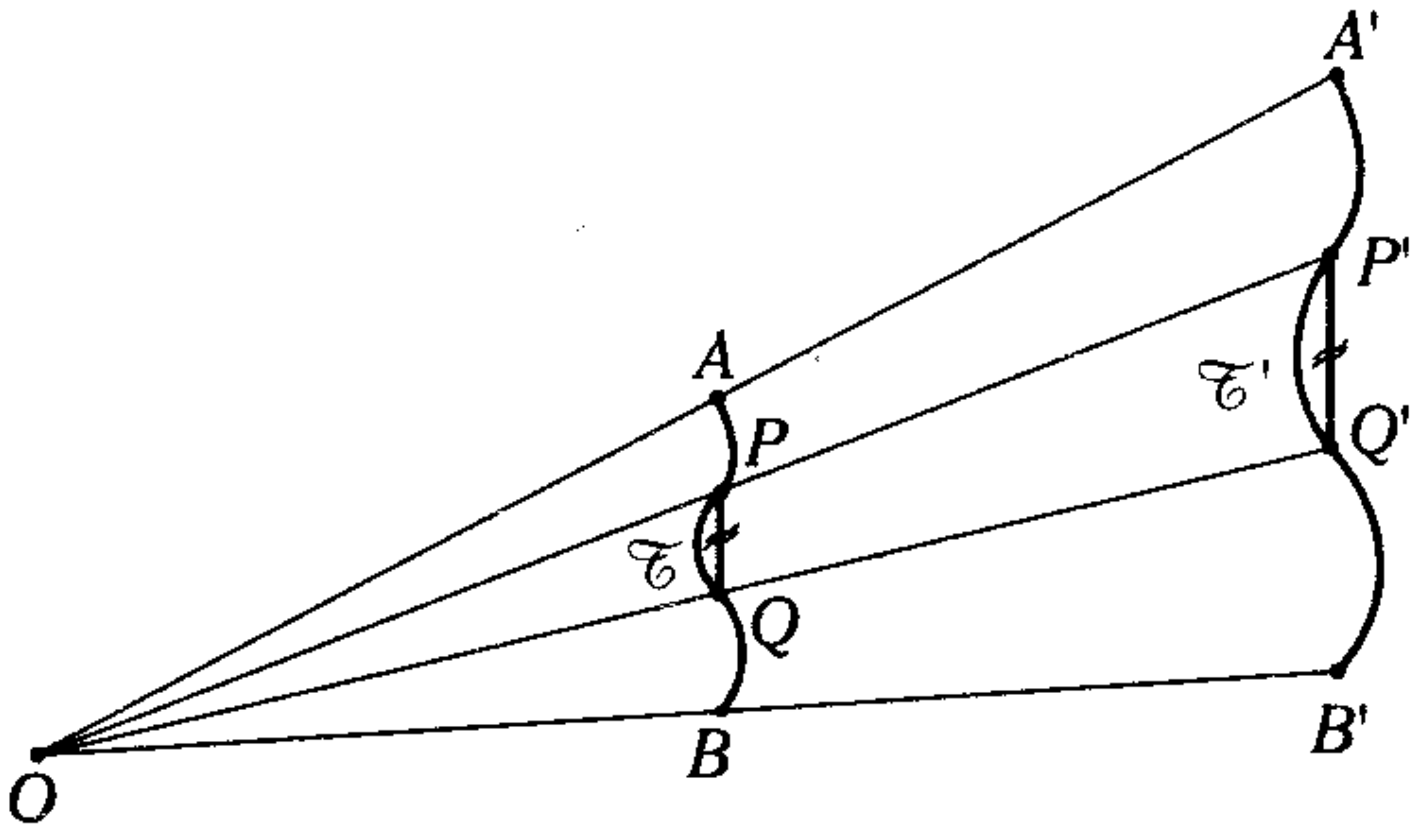


Figura 13.40

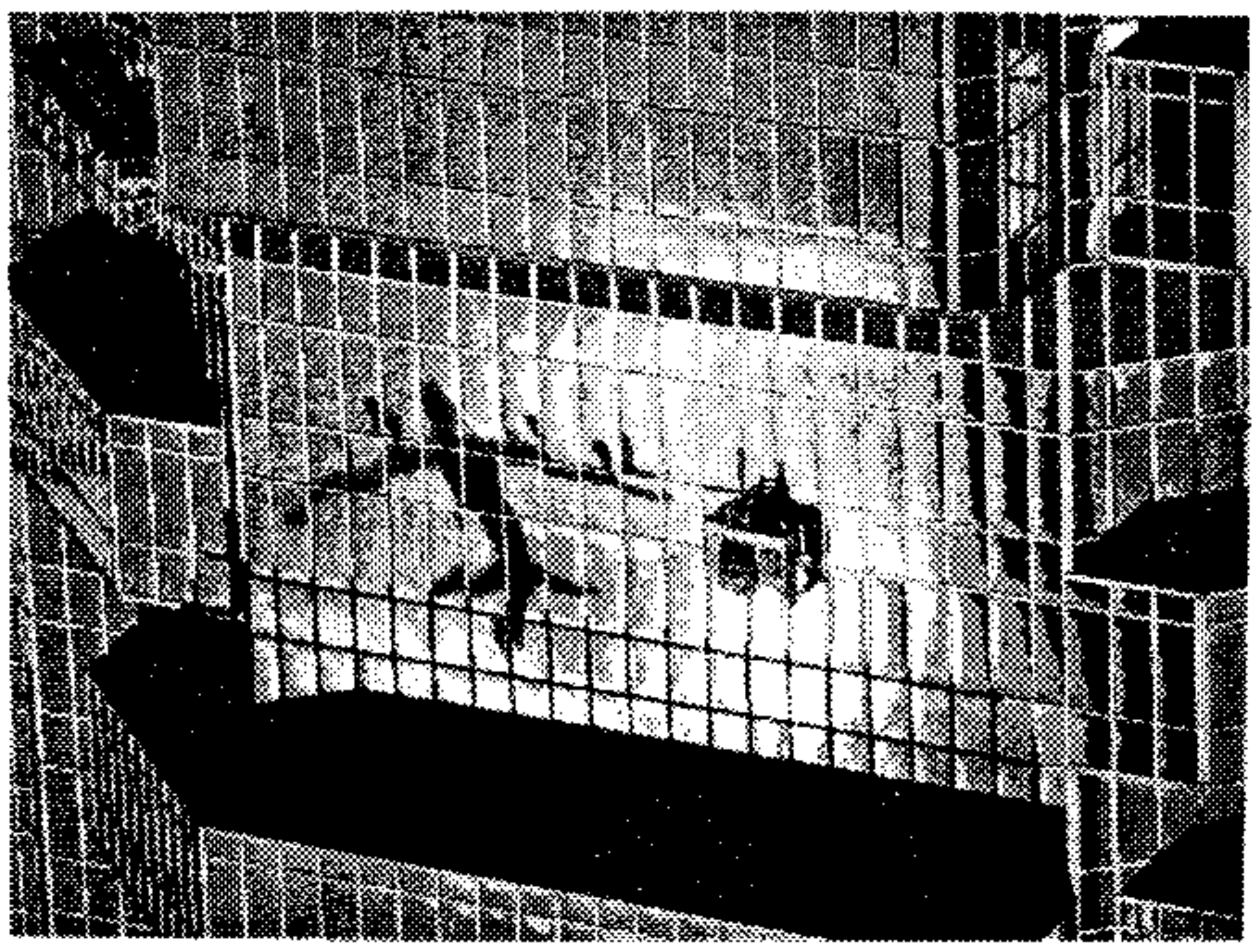
Sea $\mathscr{C}' = \text{Hom.}\mathscr{C}\left(O\,;\,\dfrac{OA'}{OA}\right)$

Si $P' = \text{Hom.}P\left(O\,;\,\dfrac{OA'}{OA}\right)$ y $Q' = \text{Hom.}\,Q\left(O\,;\,\dfrac{OA'}{OA}\right)$

$\rightarrow$ $\boxed{\overline{P'Q'} \,//\, \overline{PQ}}$

Nota

La transformación puede ser una homotecia *Directa o Inversa.*



Cuando un objeto es reflejado en una superficie, normalmente la apreciamos invertido respecto de su posición real, incluso de diferente tamaño. Así, en la foto, la imagen del avión es el producto de varias homotecias.

Centro de homotecia de dos circunferencias

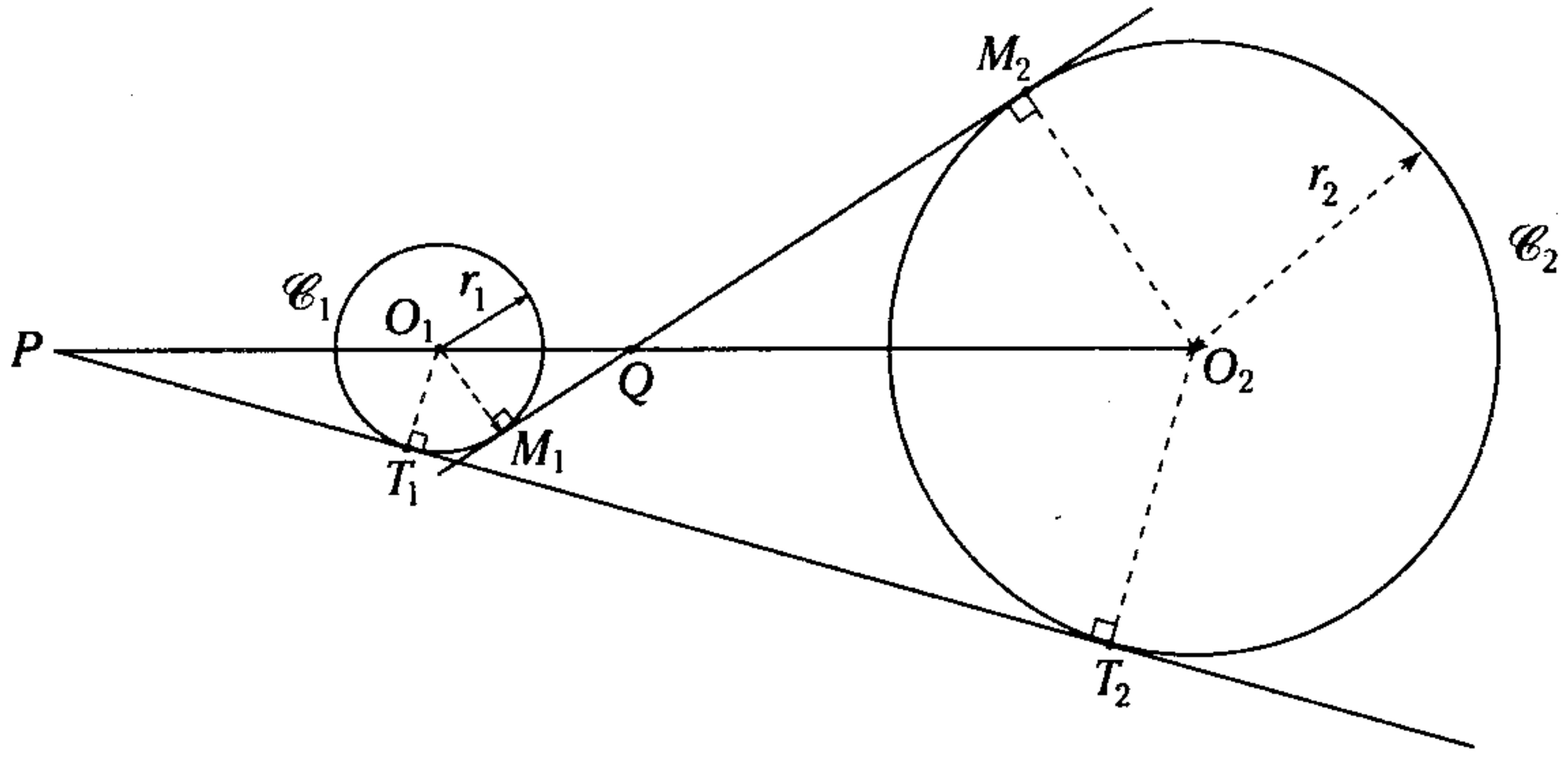


Figura 13.41

P y Q son centros de homotecia directa e inversa, respectivamente, de las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ de radios r_1 y r_2, y centros O_1 y O_2.

P y Q están situados en la recta O_1O_2 y satisfacen las relaciones:

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{y} \quad \frac{O_1Q}{O_2Q} = \frac{r_1}{r_2}$$

La recta que une los extremos de dos radios paralelos de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, respectivamente, pasa por el centro de homotecia (directo P o inverso Q), esta propiedad es fácilmente demostrable). La propiedad recíproca también resulta evidente, porque esta recta es la tangente común (exterior o interior) trazada por P o Q a las dos circunferencias; y por ser perpendicular a sus radios en el punto de tangencia, estos son paralelos.

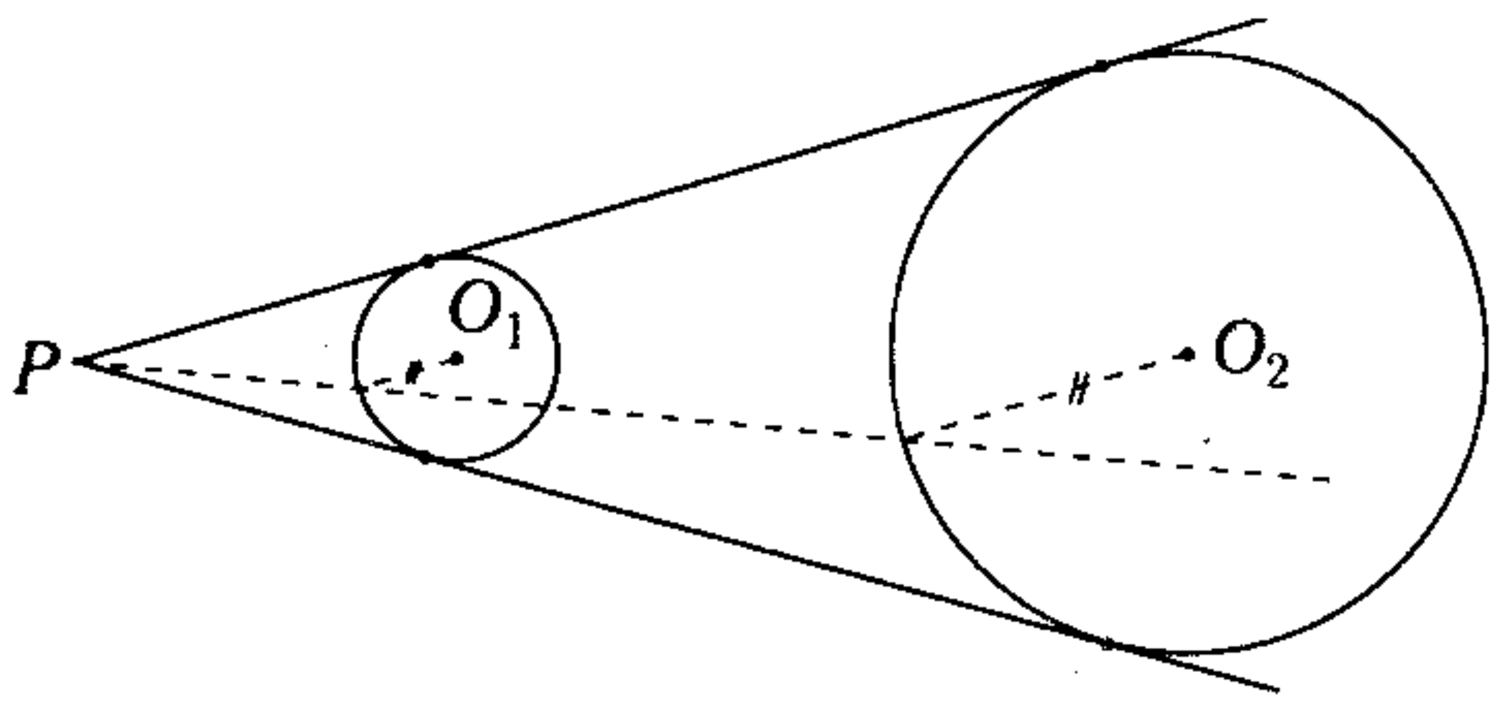


Figura 13.42

EJE DE HOMOTECIA

Teorema de D'alembert

Los centros de homotecia directo de tres circunferencias dadas, consideradas por pares, pertenecen a una recta que se denomina **eje de homotecia.**

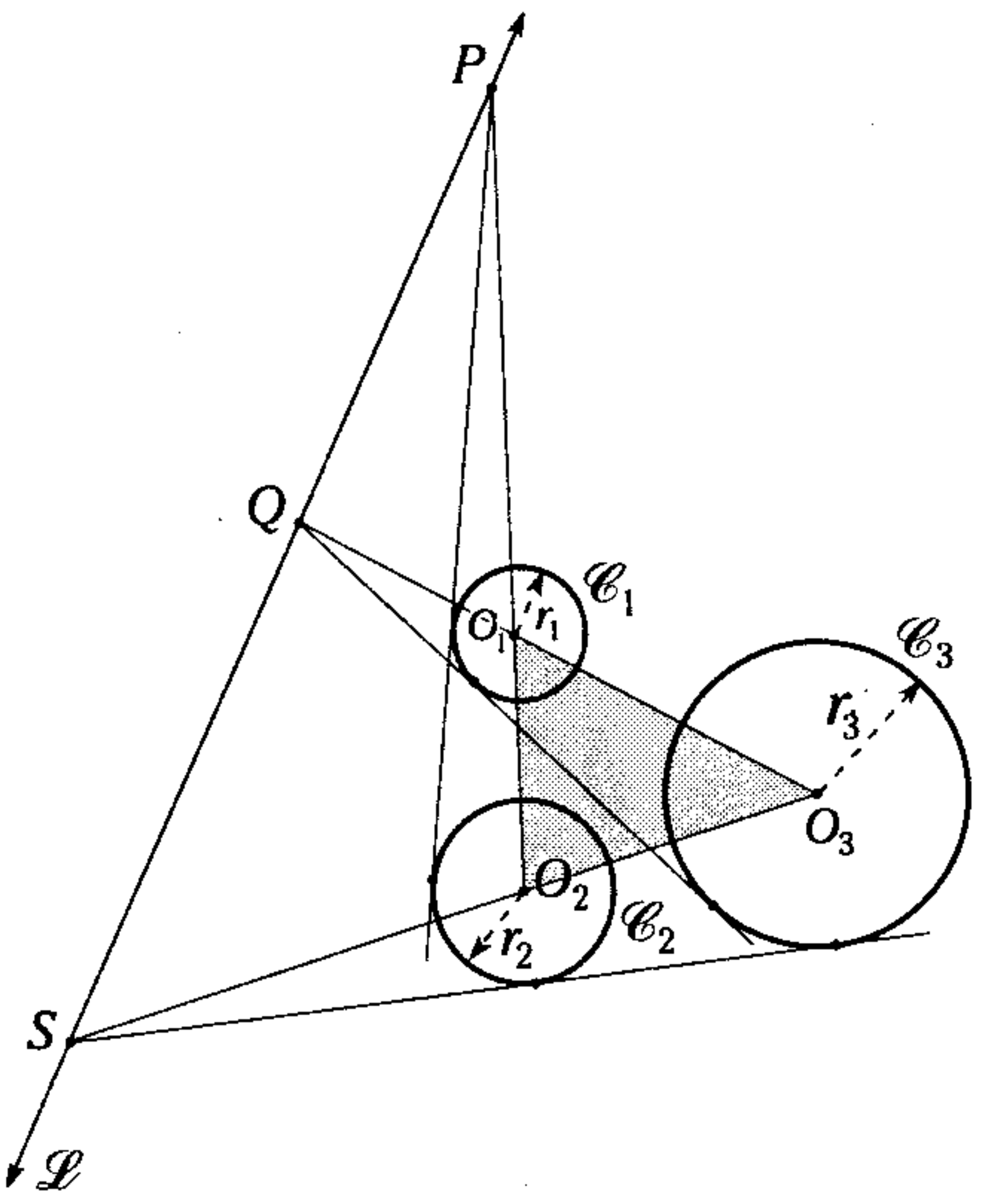


Figura 13.43

P, Q y S son puntos colineales.

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: eje de homotecia de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

Demostración

Sean $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$, donde P, Q y S son los centros de homotecia directa de directa de ($\mathscr{C}_1$; $\mathscr{C}_2$), ($\mathscr{C}_1$;$\mathscr{C}_3$) y ($\mathscr{C}_2$;$\mathscr{C}_3$) respectivamente, por lo tanto:

$$\frac{PO_2}{PO_1}=\frac{r_2}{r_1};\frac{QO_1}{QO_3}=\frac{r_1}{r_3} \text{ y}$$

$$\frac{SO_3}{SO_2}=\frac{r_3}{r_2}$$

entonces

$$\frac{PO_2}{PO_1}\times\frac{QO_1}{QO_3}\times\frac{SO_3}{SO_2}$$

y del segundo teorema recíproco de Menelao, para el $\triangle O_1O_2O_3$ los puntos P, Q y S son colineales (cuya recta que las contiene es $\mathscr{L}$ eje de homotecia de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$).

PUNTO DE JERABECK

Es aquel punto de la región interior de un triángulo, del cual se pueden trazar segmentos congruentes y paralelos a los lados (cuyos extremos están en dichos lados, respectivamente).

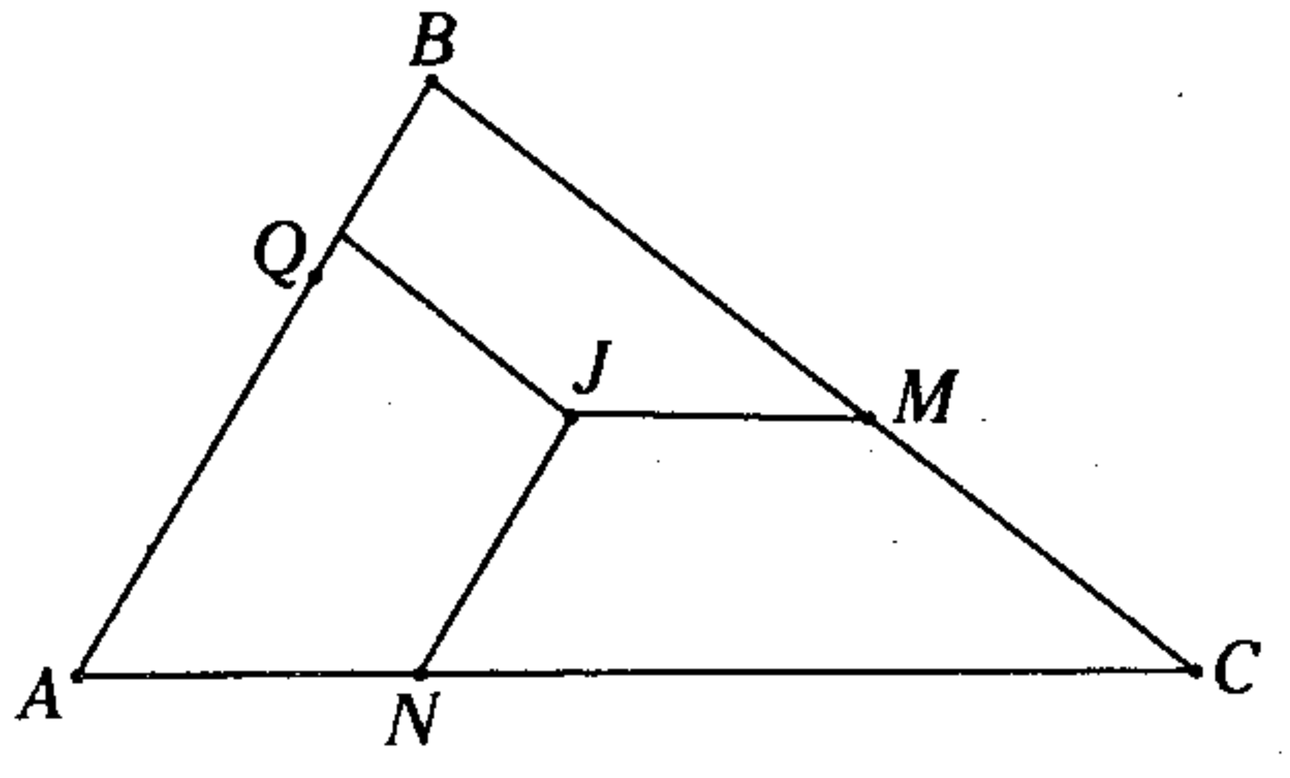


Figura 13.44

Si $\overline{JM} // \overline{AC}$; $\overline{JN} // \overline{AB}$; $\overline{JQ} // \overline{BC}$ y $JM=JN=JQ$, entonces J es uno de los puntos de Jerabeck del triángulo ABC.

PRODUCTO DE TRANSFORMACIONES

Si a una figura dada se le aplica más de una transformación en forma sucesiva, el resultado de esta sucesión es denomino producto de transformaciones.

Así, una figura $\mathscr{T}$ se transforma en una figura $\mathscr{T}_n$ producto de n transformaciones, que pueden ser de una misma especie (simetría, traslación, rotación, homotecia,...) o de una combinación de ellas.

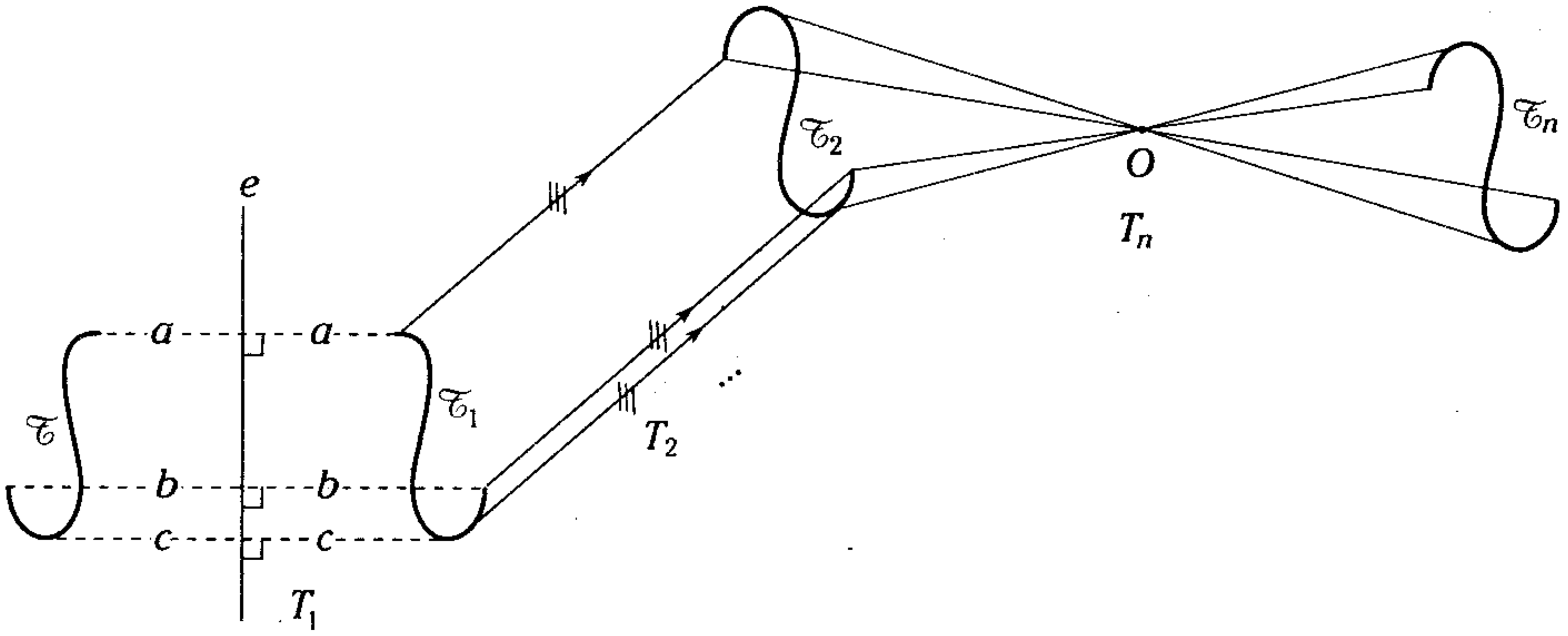


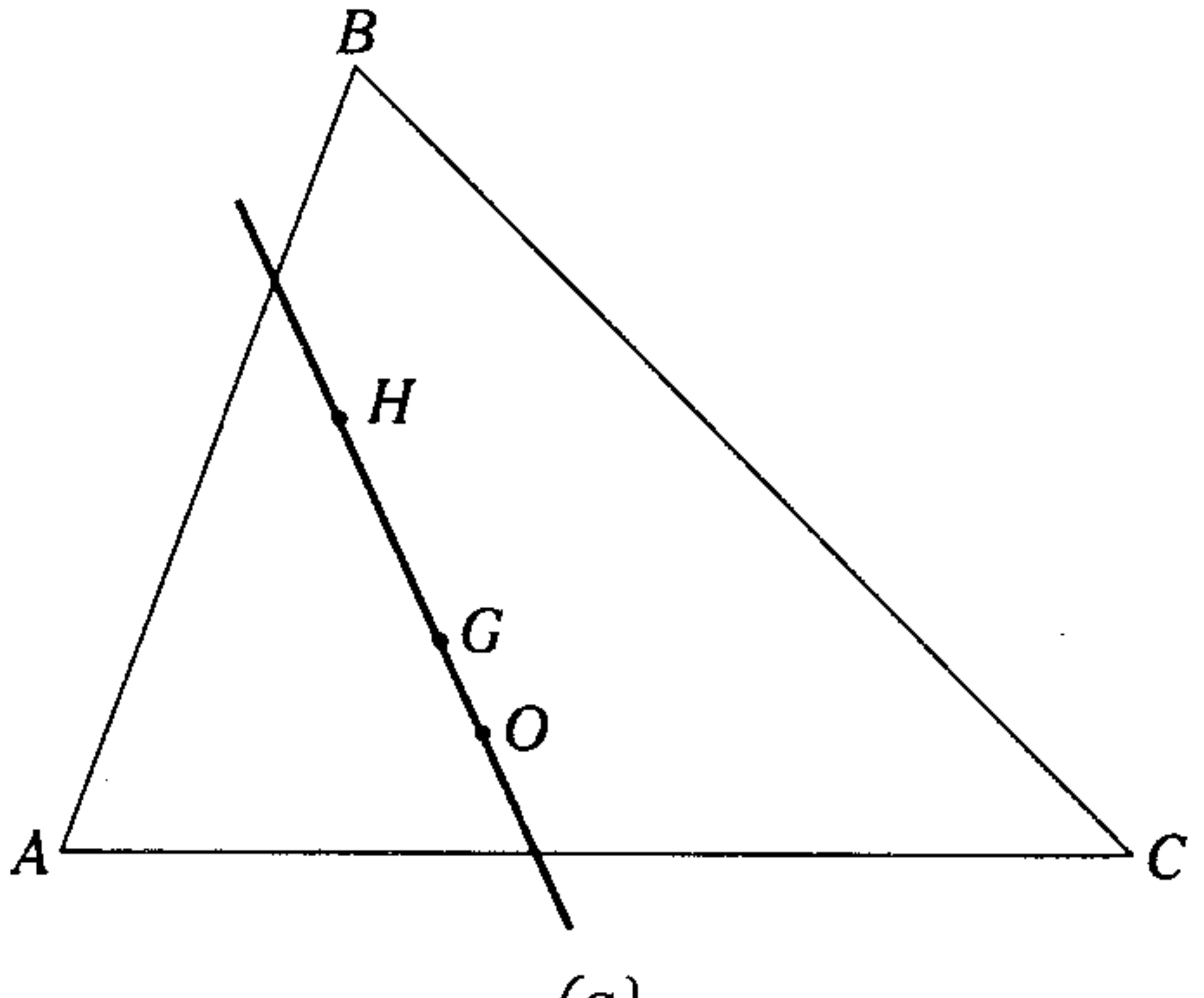
Figura 13.45

$$\mathscr{T}_n=(T_1 * T_2 * .. T_n)\times\mathscr{T}$$

En el deporte de patinaje acrobático sobre hielo, se aprecia el producto de transformaciones, ya que en los saltos realizados se combina traslación con rotación.

TEOREMA DE EULER

En todo triángulo no equilátero, el ortocentro (H); el baricentro (G) y el circuncentro (O) son colineales.



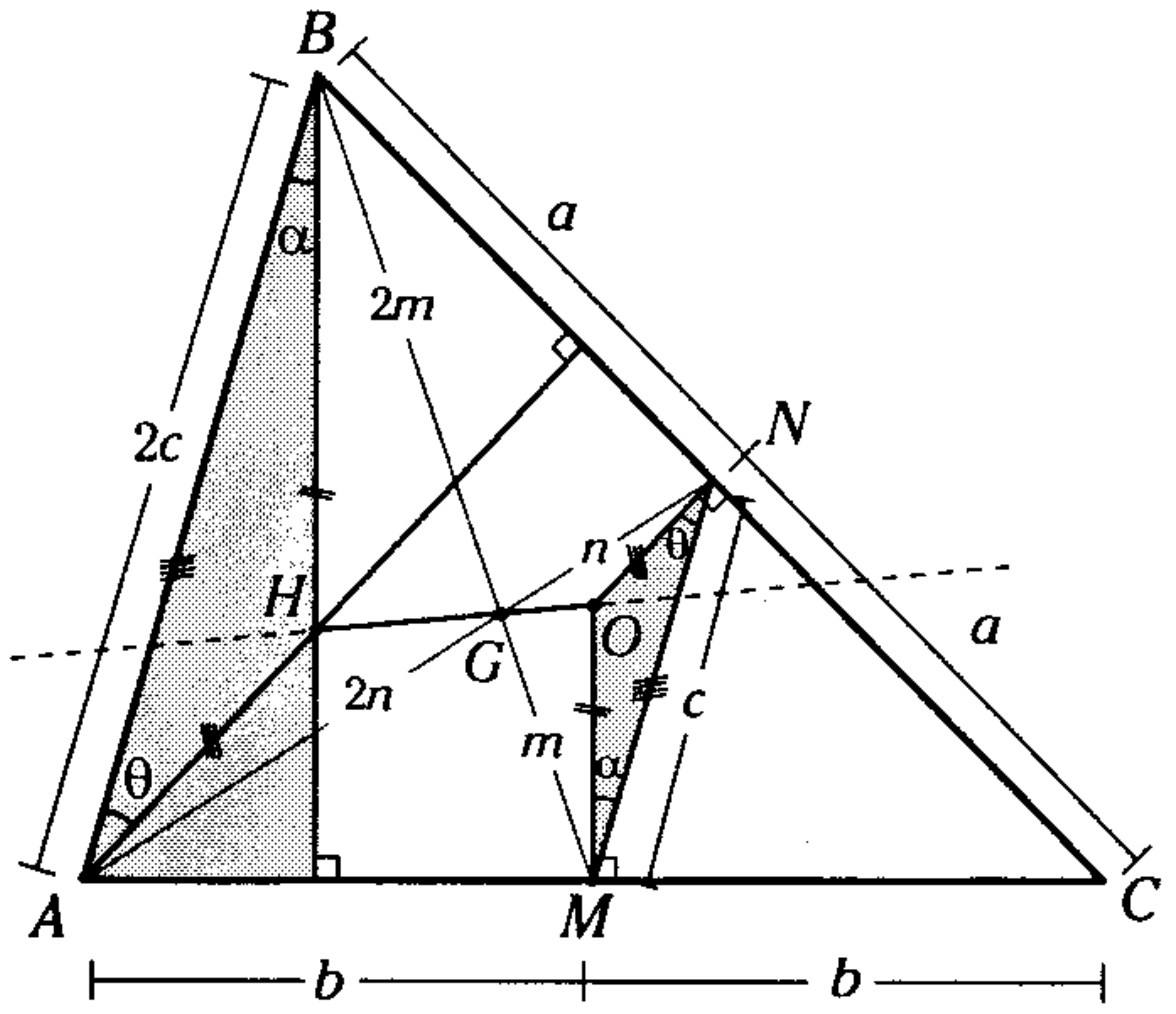
(a)

Sean H, G y O: ortocentro, baricentro y circuncentro del $\triangle ABC$ respectivamente.

Luego H, G y O son colineales.

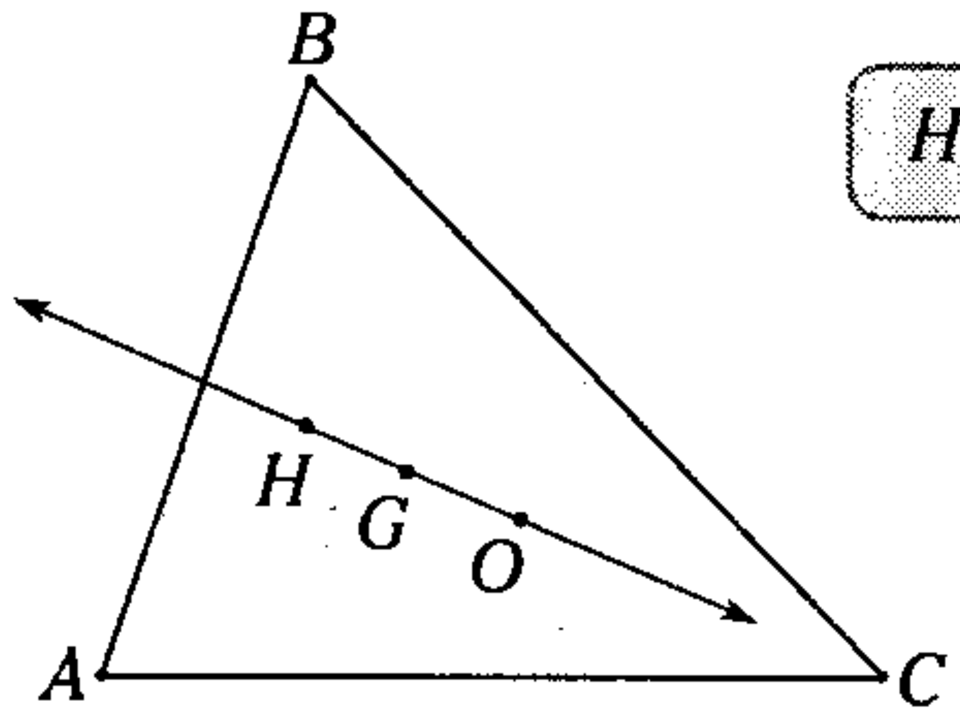
Nota

A la recta que pasa por H,G y O se le denomina la recta de Euler, en honor al matemático suizo Leonard Euler.

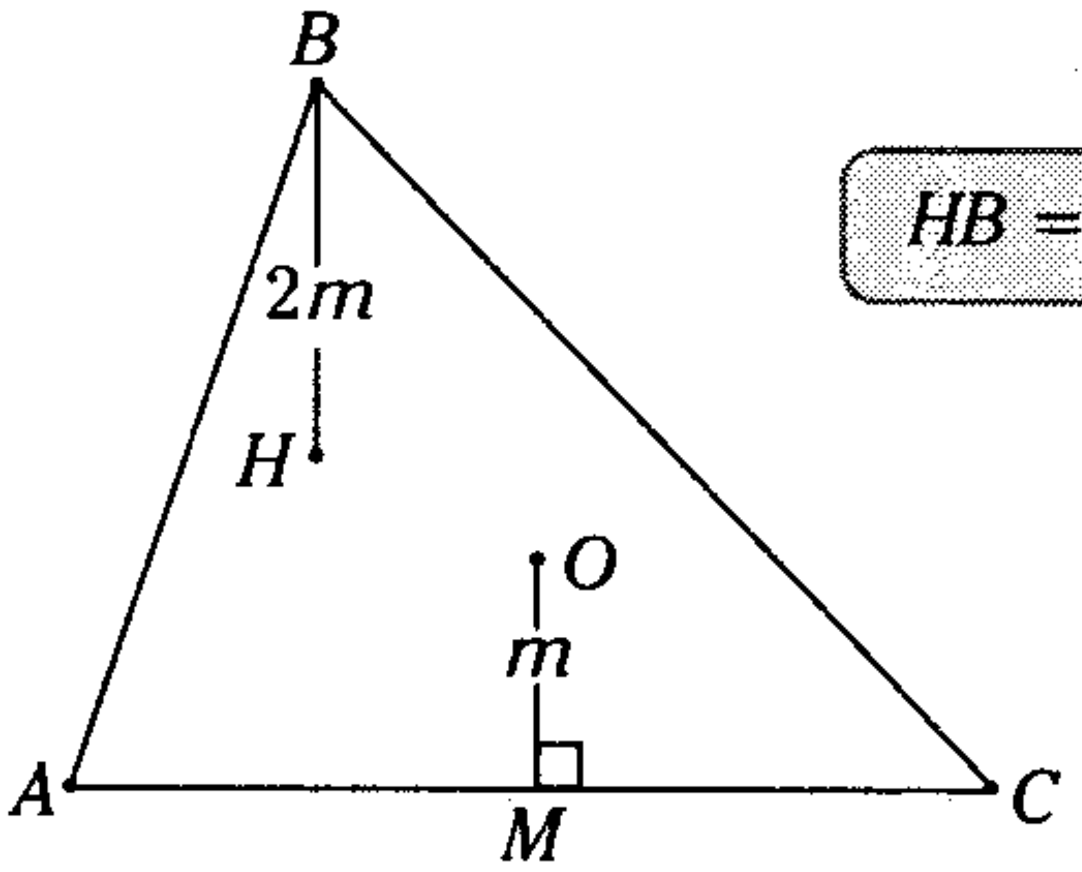


(b)

Luego



(c)



(d)

Figura 13.46

Demostración

Como

$MN = \dfrac{AB}{2}$; $\overline{MN} \,//\, \overline{AB}$ (teorema de los puntos medios) $\overline{OM} \,//\, \overline{BH}$ y $\overline{ON} \,//\, \overline{AH}$

entonces, los triángulos OMN y HBA son homotéticos inversos con centro en G.

$\triangle MON = \text{Hom.} \triangle BHA \ (G; -0{,}5)$

$\therefore \ O = \text{Hom.}\ H \ (G; -0{,}5)$

Concluimos que H, G y O son colineales.

Observación

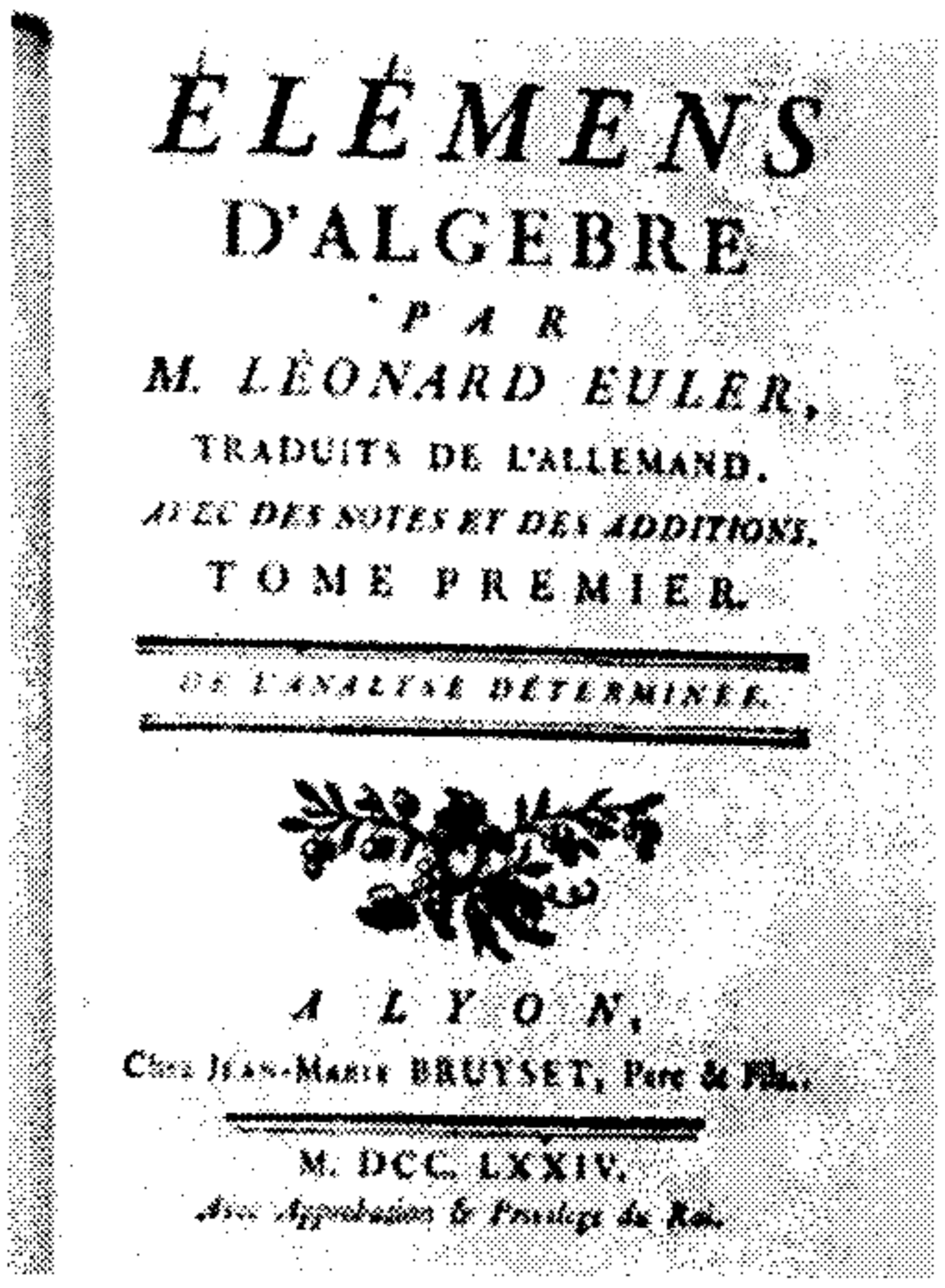
Si $O = \text{Hom.}\ H\ (G; -0{,}5)$

$\rightarrow \dfrac{GO}{GH} = 0{,}5$

$\therefore \ HG = 2(GO)$

también

$HB = 2(OM)$
$HA = 2(ON)$

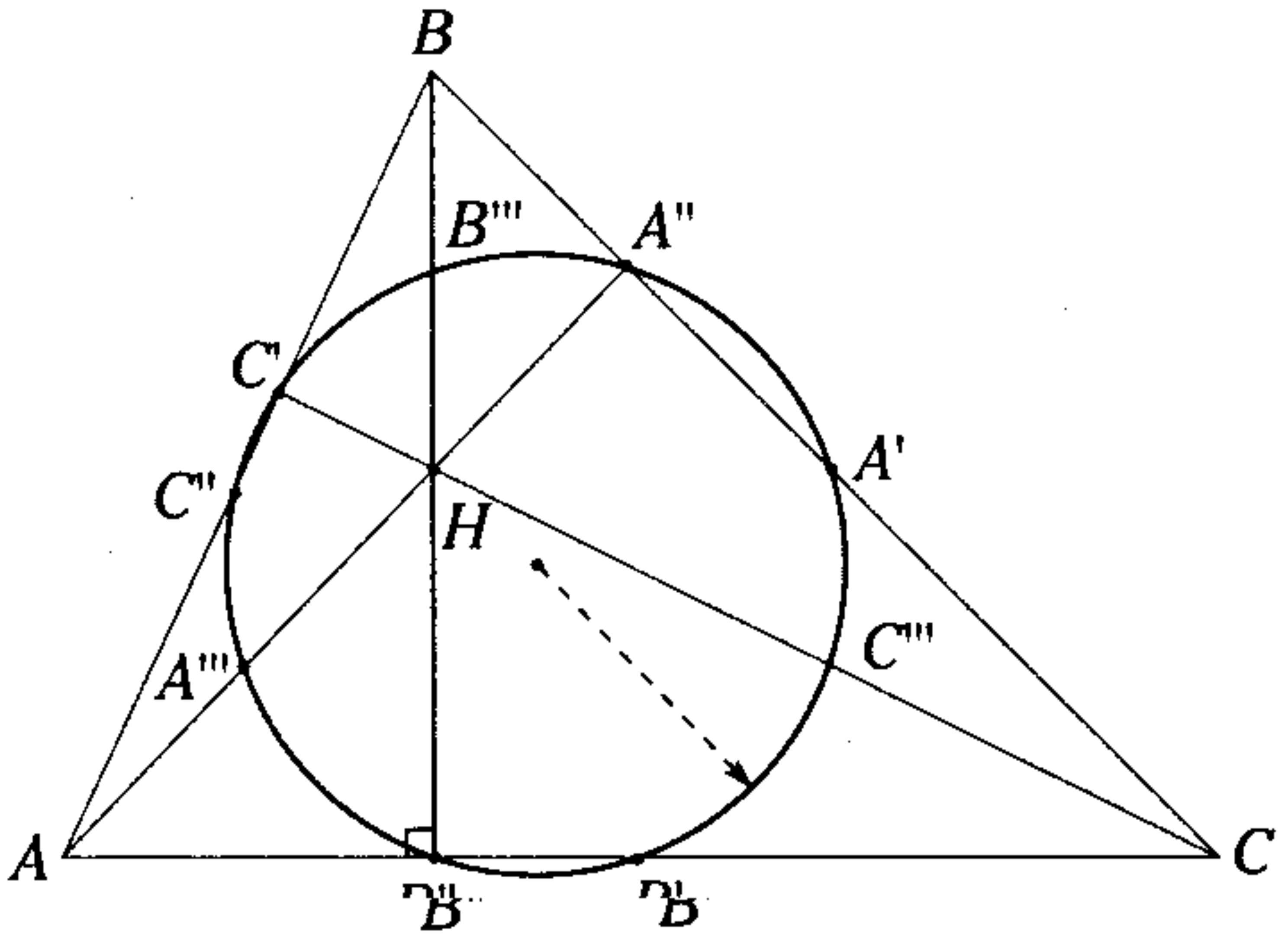

ÉLÉMENS
D'ALGEBRE
PAR
M. LÉONARD EULER,
TRADUITS DE L'ALLEMAND.
AVEC DES NOTES ET DES ADDITIONS.
TOME PREMIER.
DE L'ANALYSE DÉTERMINÉE.
A LYON,
Chez JEAN-MARIE BRUYSET, Pere & Fils.
M. DCC. LXXIV.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

Leonard Euler (1707-1783) escribió una diversidad de artículos de matemática. Fue alumno de Bernoulli; y durante doce años, ganó el premio que anualmente ofrecía la Academia de París sobre diversos temas científicos. En la foto se muestra la portada del libro Elementos del Álgebra.

CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS

Teorema

En un triángulo, los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices con el ortocentro están en una misma circunferencia.



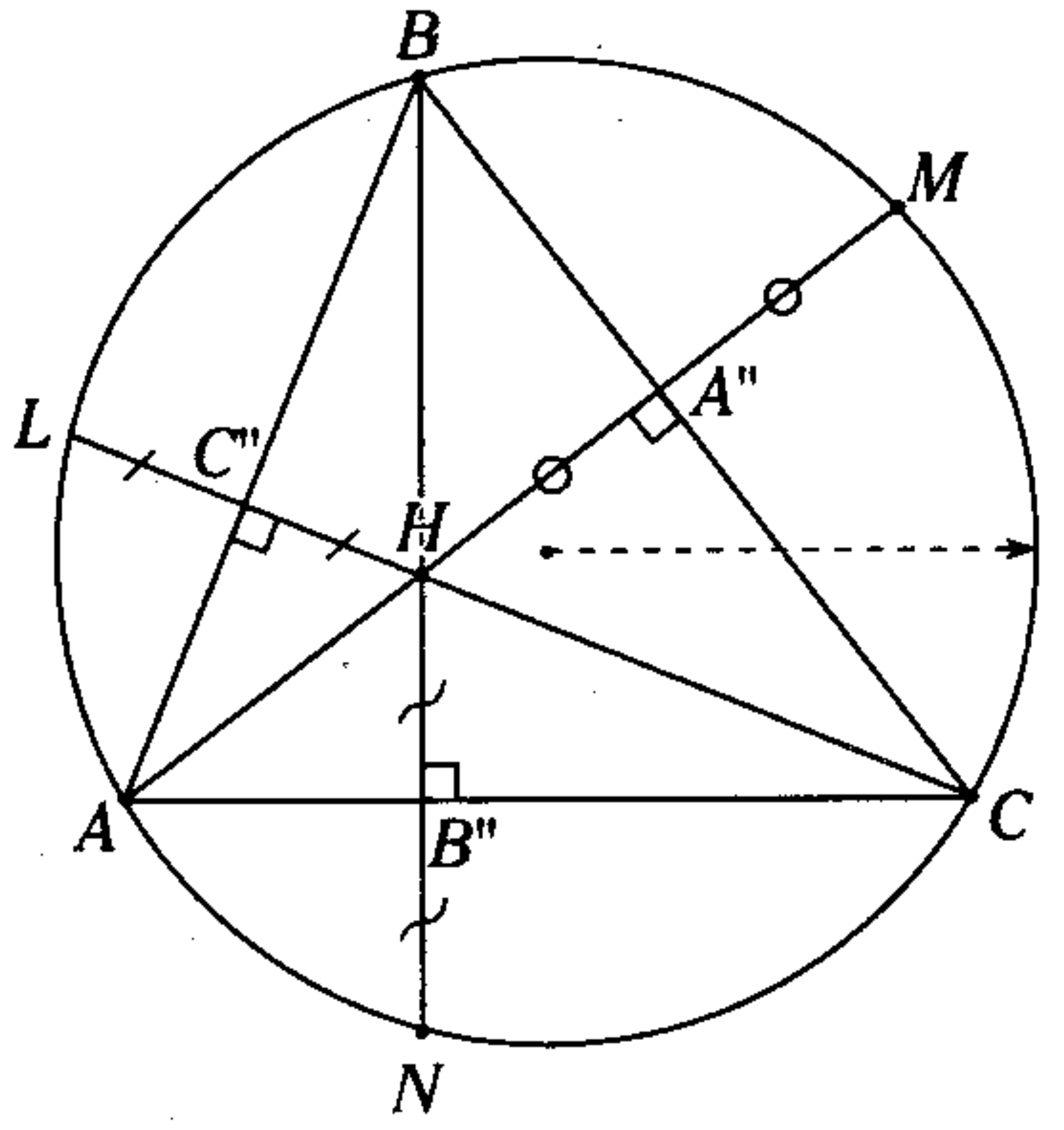
(a)

A', B' y C': puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.
A'', B'' y C'': los pies de las alturas.
A''', B''' y C''': los puntos medios de $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ y $\overline{CH}$.
H: ortocentro del $\triangle ABC$. A partir de lo anterior, los puntos A', A'', A''', B', B'', B''', C', C'' y C''', son concíclicos.

Demostración

Sabemos que:

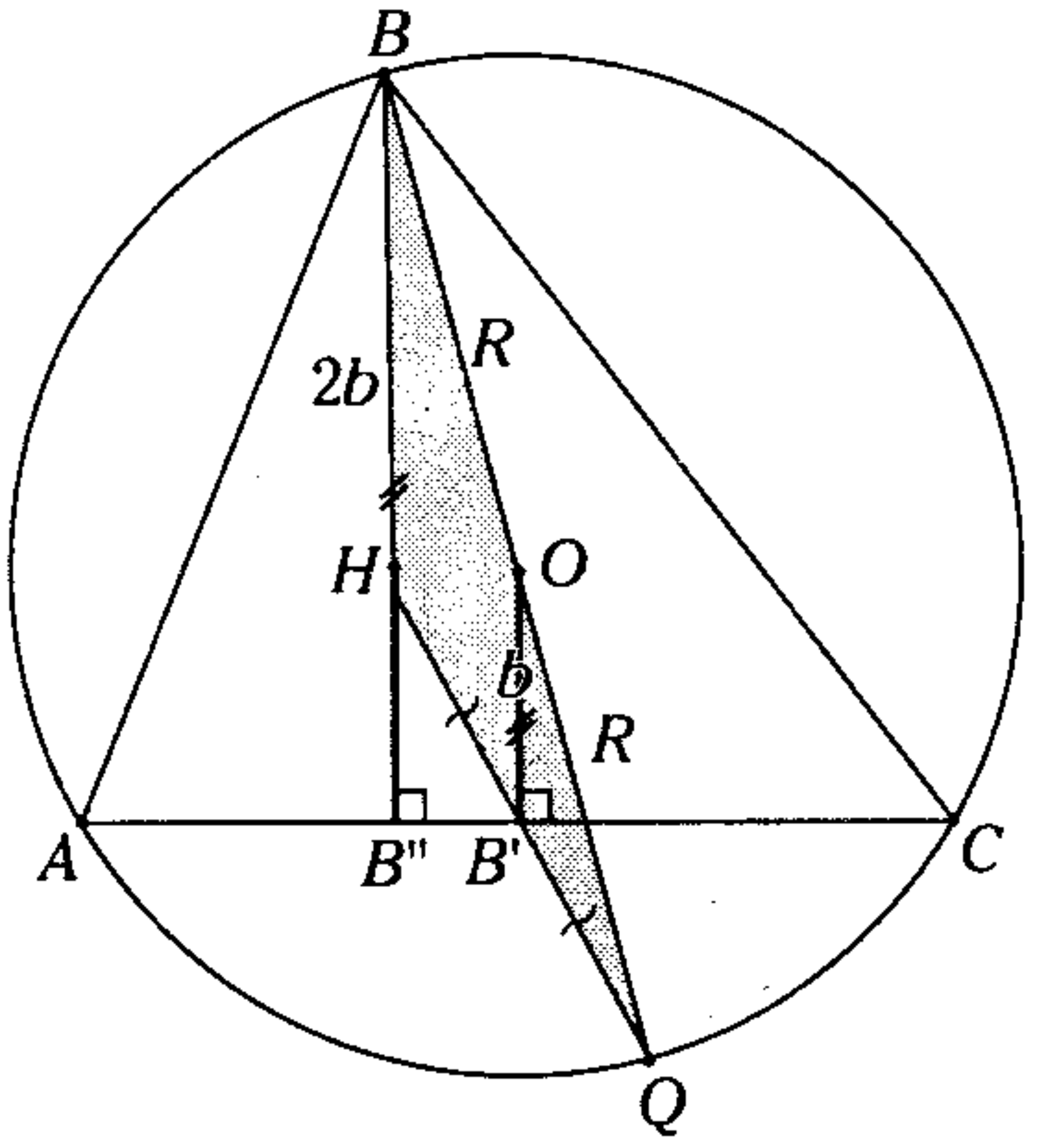
a.



(b)

De la figura 13.47(b), A'', B'' y C'' son puntos medios de $\overline{HM}$, $\overline{HN}$ y $\overline{HL}$, respectivamente.

b.

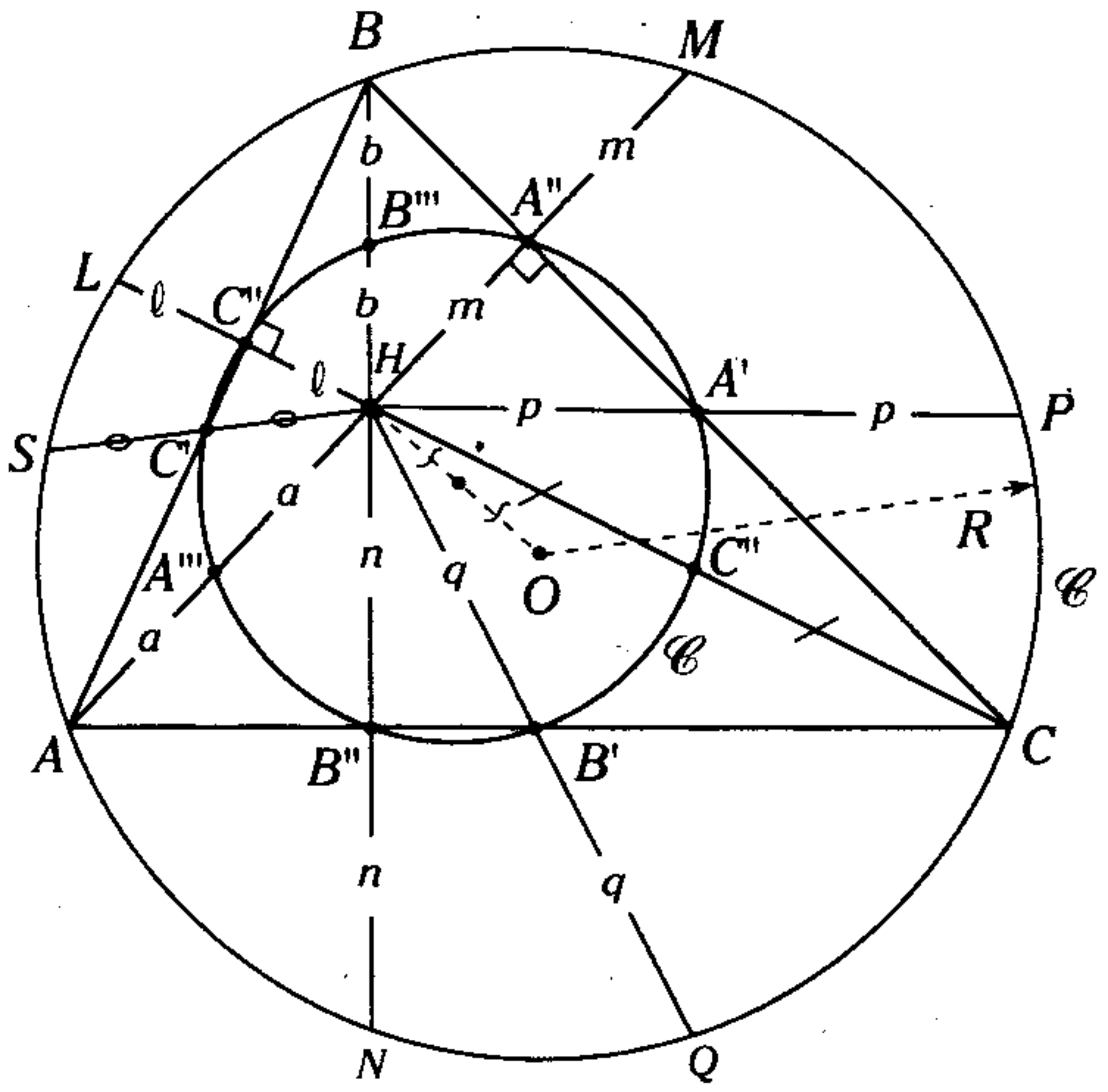


(c)

Del teorema de Euler $OB' = \dfrac{BH}{2} = b$

De la figura 13.47(c), como $BO = OQ = R$ y $\overline{OB'} \parallel \overline{BH}$, entonces H, B' y Q son colineales y $HB' = B'Q$. Esto significa que B' es punto medio de $\overline{HQ}$.

Análogamente, sucede en los otros dos lados. Luego podemos observar que



(d)

Figura 13.47

$A', A'', B''', C'', C', A''', B'', B'$ y C''', son los homotéticos de P, M, B, L, S, A, N, Q y C respectivamente con centro en H y razón 0,5 ($r = 0{,}5$)

$\therefore\ \mathscr{C} = \text{Hom. } \mathscr{C}.\ (H; 0{,}5)$

Esto quiere decir que los puntos mencionados pertenecen a una circunferencia homotética $\mathscr{C}$ y de centro H.

Teorema

El radio de la circunferencia de los nueve puntos es la mitad del circunradio del triángulo, al cual es relativo.

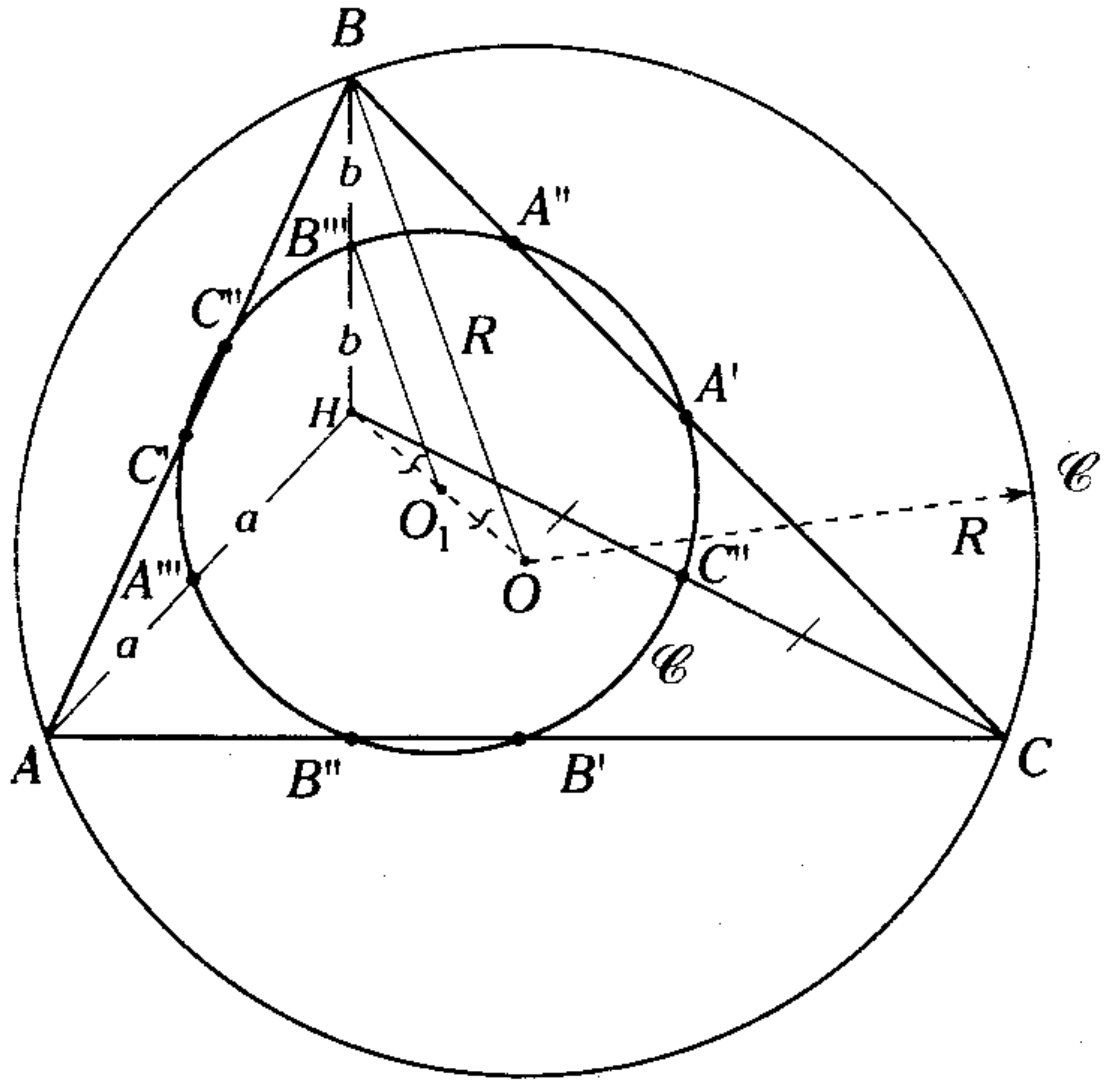


Figura 13.48

Demostración

Sean $\mathscr{C}$ el homotético de $\mathscr{C}'$, respecto de H y razón 0,5 y O el circuncentro del $\triangle ABC$; entonces en $\overleftrightarrow{HO}$ se encuentra el centro de $\mathscr{C}$ (O_1) así

$$HO_1 = \frac{1}{2} = HO$$

Por lo tanto, O_1 es el punto medio de $\overline{HO}$ como

$$HB''' = B'''B \text{ y } B''' \in \mathscr{C} \ \rightarrow\ O_1M = \frac{1}{2}OB = \frac{R}{2}$$

$$\therefore\ \boxed{O_1B''' = \frac{R}{2}}$$

Desnudo bajando la escalera, por Marcel Duchamp. Este pintor que militó en los diferentes movimientos artísticos de su época. En su pintura nos muestra el producto de más de 2 traslaciones.

L E C T U R A

¿POR QUÉ SE PRODUCEN LOS ESPEJISMOS?

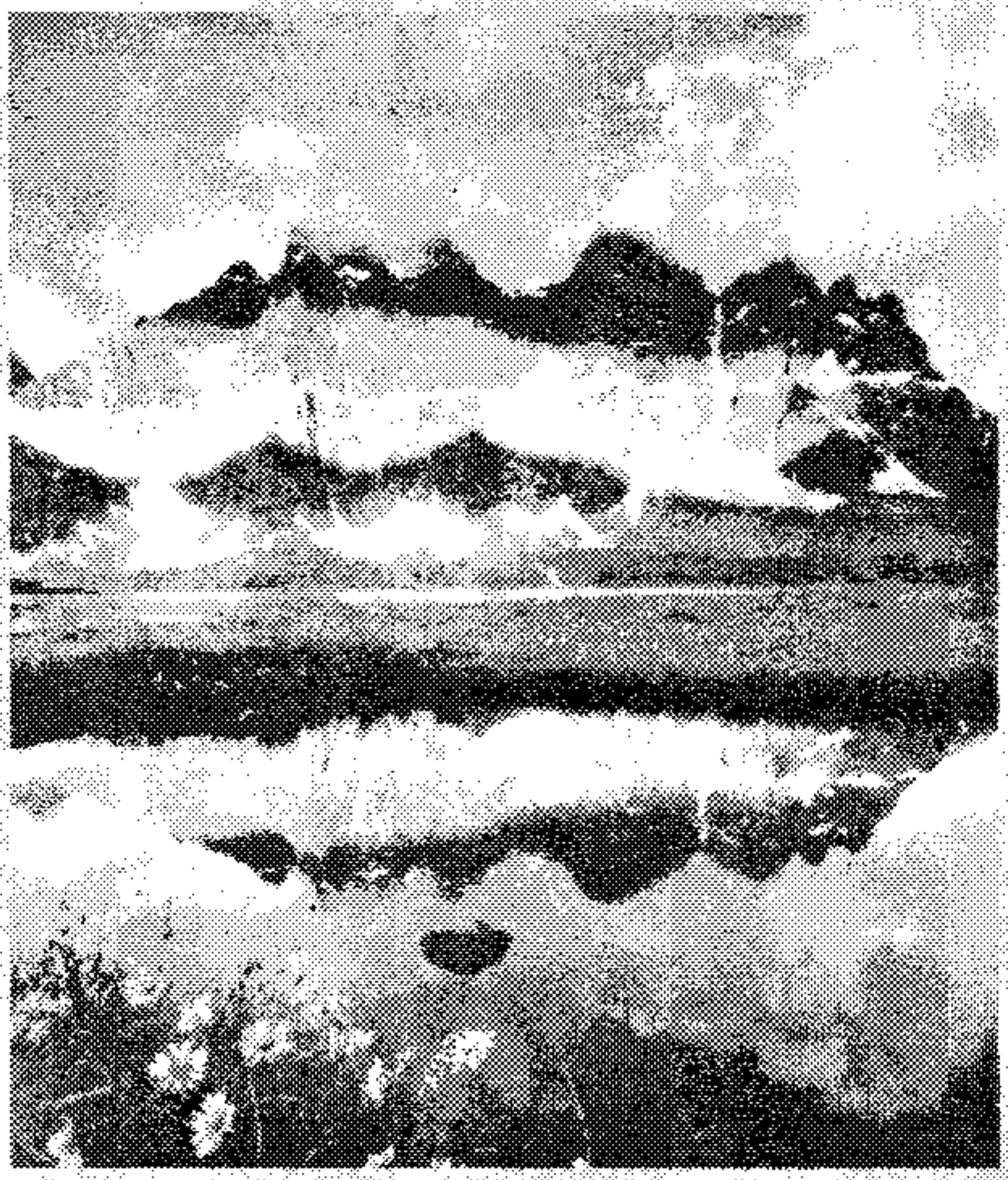
Los espejismos y las alucinaciones

Son bastante probables en personas con mucha sed o cuya tensión, mental o física es muy intensa. En el caso del fenómeno que hace que los objetos aparezcan en un lugar distinto al real, la explicación se encuentra en las condiciones atmosféricas. Cuando una superficie emite mucho calor, disminuye la densidad del aire y, por encima de este aire que se ha calentado y enrarecido, se encuentra una capa de aire más densa. El límite entre ambas capas produce un efecto similar al de una lente y desvía los rayos de luz procedentes de un objeto lejano.

La imagen producida por los rayos aparece invertida y por debajo del objeto real o muchas veces proyectando sombras sobre el crepúsculo. El ejemplo más común es cuando los objetos parecen reflejarse sobre el asfalto caliente como si fuera un espejo, produciendo un fenómeno de simetría axial. También, la presencia de altamina liberada por las plantas genera que la superficie de un lago funcione como un espejo, reflejando el paisaje sobre su superficie.

Un espejismo es la reflexión aparente de cuerpos en el suelo, como si existiera un espejo de agua, que se observa en días muy soleados. El aire caliente en el suelo se dilata hasta hacerse menos denso que el aire más frío de arriba, esto disminuye el índice de refracción del aire de la capa superior hasta que está en el suelo. La luz emitida desde un objeto hacia el suelo cambia su dirección de propagación continuamente y termina recorriendo un camino curvo que la dirige finalmente hacia arriba.

Un observador ve el objeto en la dirección que tiene la luz cuando llega a su ojo; es decir, la ve en la dirección general del suelo, como si ahí se hubiera reflejado la luz del objeto.



(a)

(b)

La reflexión (a) y el espejismo (b) son ejemplos de transformaciones geométricas.

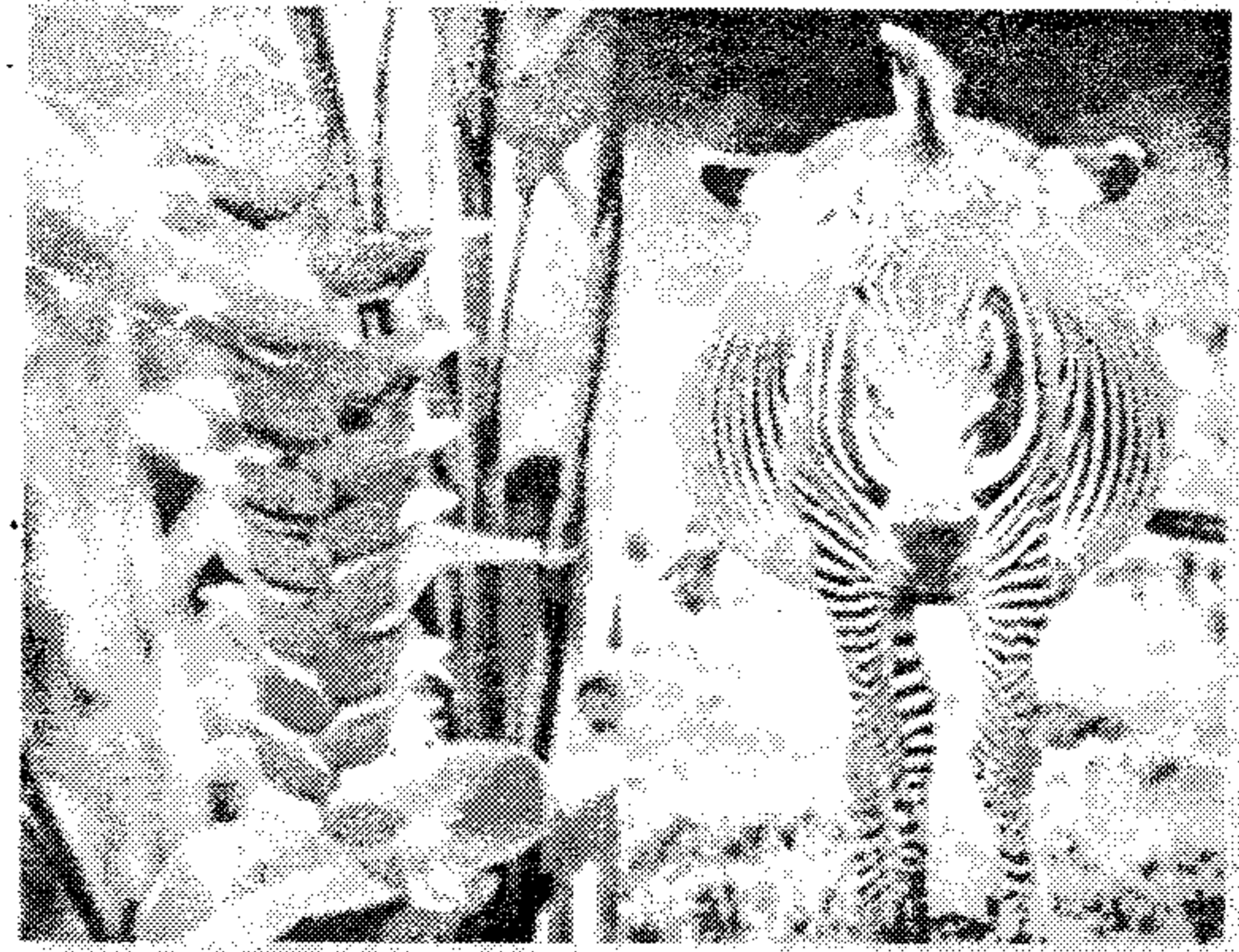
Un espejismo es la reflexión aparente de cuerpo, como si existiera un espejo de agua en el suelo.

SIMETRÍA, EL ESTADIO PREVIO DE LA VIDA

A las diecinueve semanas de vida, el embrión humano tiene ya inscrito en su rostro aquella armonía a la cual obedecen tanto las más lejanas galaxias en los remotos abismos del universo como el microcosmo de las partículas elementales. Una armonía que impregna de igual manera la fantasía de los artistas; aunque, la vida parece surgir únicamente cuando el orden se rompe.

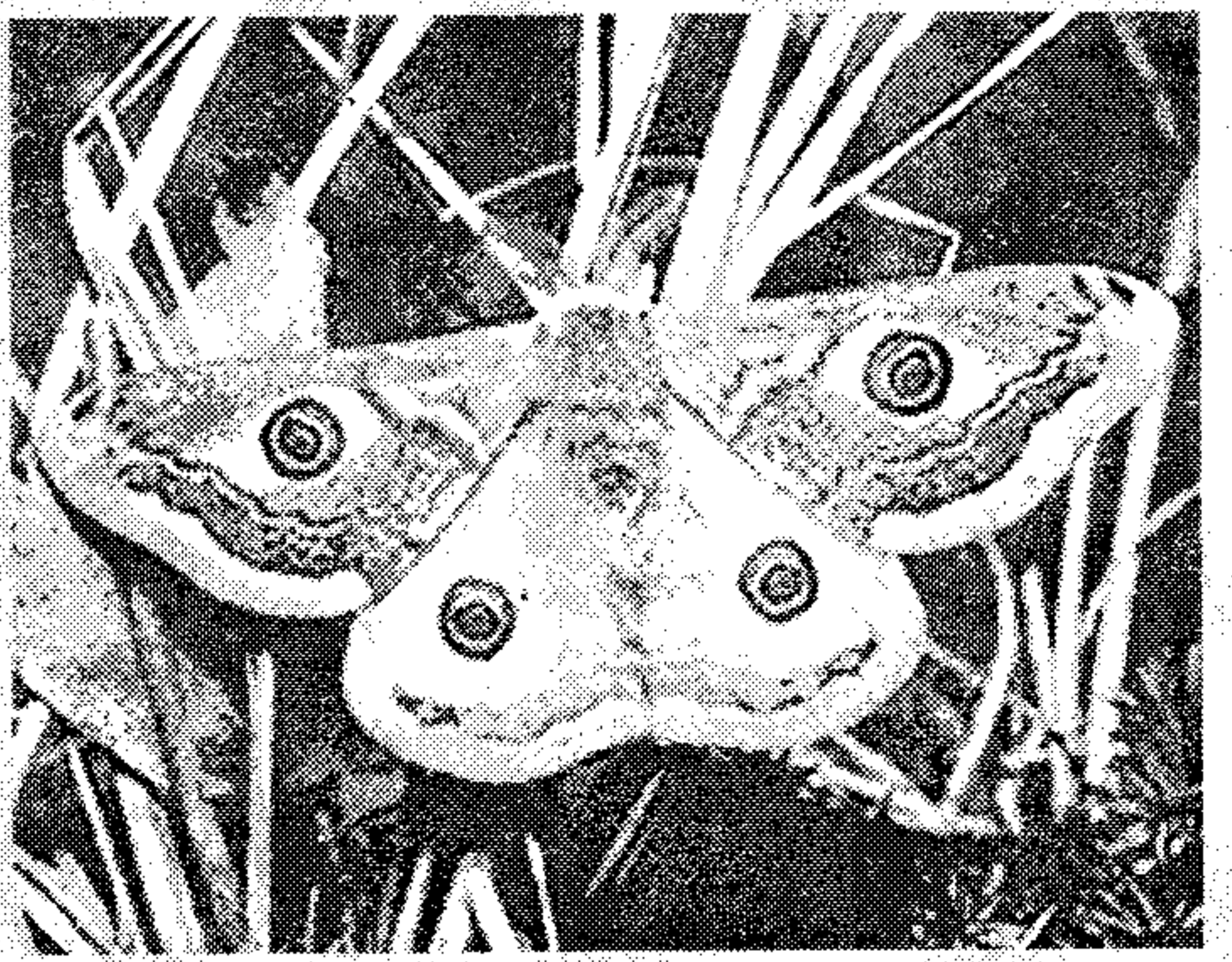
De manera intuitiva se percibe lo regular como bello, su armonía nos atrae, refleja perfección, crea modelos y complace sutilmente a los sentidos.

De manera intuitiva, percibimos una belleza en las cosas regulares y simétricas. El principio que rige su construcción es fácil de entender y a la vez misterioso. Su armonía nos atrae y es grata para los sentidos. Dicho principio hermana los cristales de hielo con entidades tan diversas como las imprevisibles orquídeas, las mariposas primorosamente adornadas o los arabescos que hacen danzar las paredes de la Alhambra.



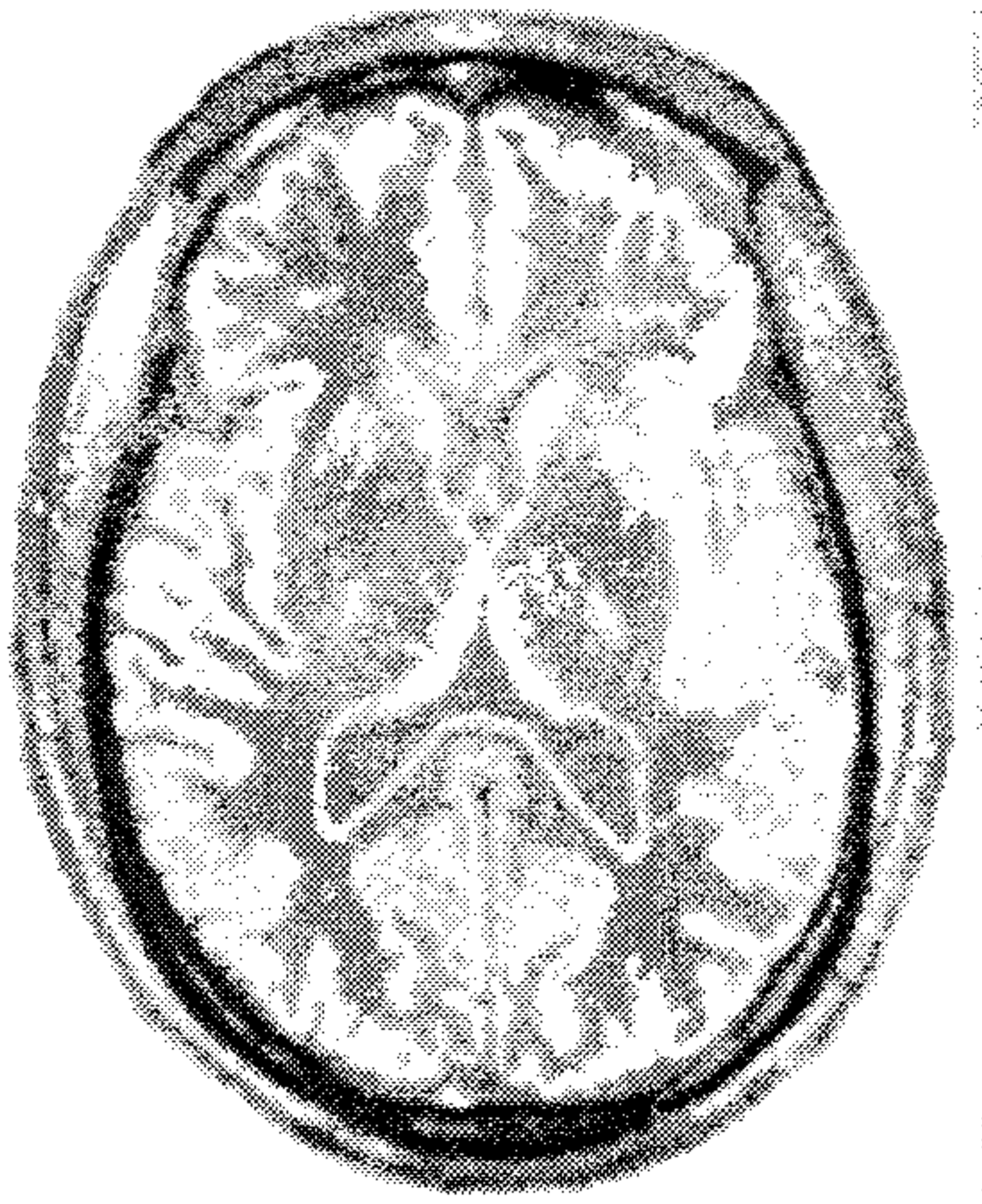
Universo uniforme*. Los físicos aspiran a encontrar un modelo de mundo en virtud, del cual, el cosmos, en el momento de su aparición, estaba regido por una fuerza primigenia que se quebró en el transcurso de los milenios. Del universo uniforme se separaron las partículas y se formaron las galaxias, las estrellas y los planetas; configurando el escenario de la vida.*

En la quintaesencia de la simetría, se reflejan la **perfección** y la **intemporalidad**. Desde tiempos remotos, los arquitectos proyectaban templos, pagodas, iglesias y mezquitas en función de estrictas proporciones áureas. También los distintivos arquitectónicos de las grandes potencias mundiales se han ceñido siempre a estrictos principios simétricos.



El pequeño pavón nocturno, un ejemplo de simetría y armonía entre las mariposas.

El británico Billings experimentó con diagramas circulares, en la geometría.



El cerebro. *En esta sección transversal se aprecian los hemisferios y corteza cerebral; con el desarrollo de los estudios neurológicos se ha demostrado que el cerebro trabaja de forma asimétrica. En el derecho vive el pintor, en el izquierdo, el genio del lenguaje. En la parte diestra reside la intuición (aquí recaen las corazonadas), la emotividad y la creatividad. La izquierda analiza el mundo en categorías, lógicas (palabras, cifras...).*

Simetría en el rostro

Son muy pocas las caras realmente simétricas. Si miramos atentamente un rostro y trazamos una línea imaginaria que divida la cara en dos mitades exactas, apreciaremos diferencias sútiles: un ojo está más abierto, una ceja está más alta que otra, las arrugas de los gestos son más marcadas en un lado. Si consideramos que los músculos de cada mitad están controlados por el hemisferio cerebral contrario, no es de extrañar que una mitad (habitualmente la izquierda) sea más expresiva que la otra. La primera foto corresponde a la cara real de la chica. La segunda se ha elaborado uniendo dos mitades derechas (la normal y otra invertida fotográficamente): muestra una imagen más decidida. La tercera foto se ha *fabricado* con dos mitades izquierdas, el resultado es un rostro más emotivo.

Orden, sentido y consistencia

La simetría proporciona orden, reviste de sentido y da consistencia a un mundo de entramada y confusa diversidad. Casi obligada por una instancia superior, nuestra percepción siempre predispuesta a la simetría anhela modelos y semejanzas. Incluso en las interferencias radiofónicas, tendemos siempre a encontrar un ritmo.

Por otro lado, nos resulta mucho más sencillo percibir lo singular como una desviación. La simetría, por más amplias o escuetas que sean las definiciones que adoptemos de ella, es una idea en virtud de la cual el ser humano, desde tiempos remotos, ha intentado comprender y crear el orden, la belleza y la perfección, la sensación estimulante de una obra de arte; altera el automatismo de la percepción y hace salir a la luz lo singular.

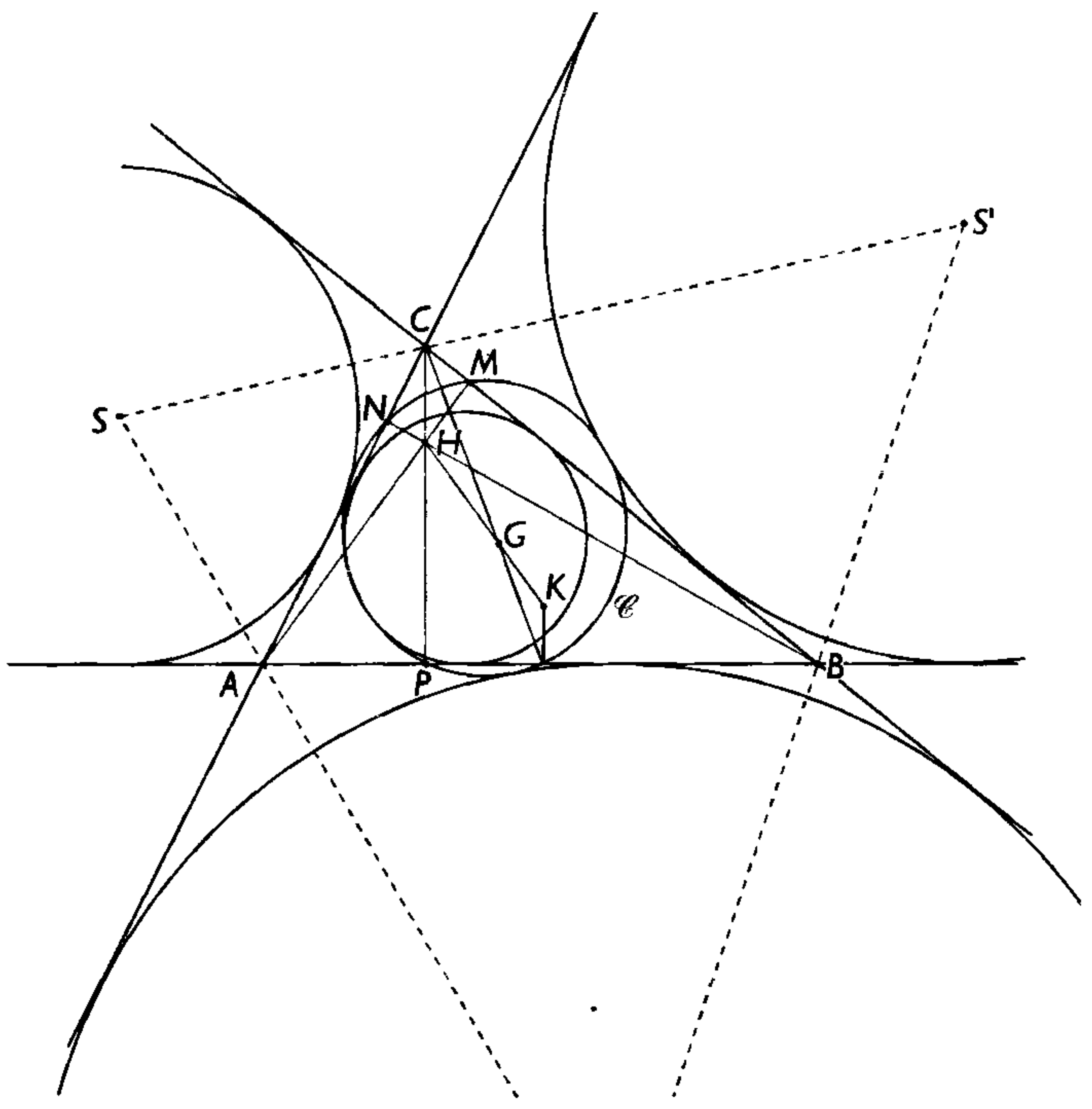
Simetría, asimetría por todas partes advertimos esta pareja inseparable. ¿O es tal vez lo regular un simple fantasma que domina sobre las formas y las leyes? Justamente llevados por nuestra obsesión por la simetría solemos por alto las discordancias. Sentimos ya la simetría cuando simplemente dos mitades se corresponden toscamente, como sucede por ejemplo con el rostro humano. La tendencia del ser humano a descubrir más y más simetrías en su mundo como realmente existentes resulta por eso disculpable. Ya que un poco más de orden en la cabeza suele ser mejor que un poco menos.

FUENTE: Revista Integral, simetría (el secreto de la naturaleza), abril 1996. pp. 14-21.

BIOGRAFÍA

KARL WILHELM FEUERBACH (1800 - 1834)

Nacido en Alemania, tuvo como padre a Paul J. A. Ritter von Feuerbach, quien fue profesor de leyes y escribió *the Bavarian criminal Code*. De sus 8 hijos, 5 decidieron ser médicos, 3 de ellos llegaron a ser catedráticos, el más famosos fue el filósofo (nunca se inició como profesor) Ludwig A Feuerbach (1804-1872) quien tuvo uno de los muy influyentes críticos de la religión y así la eminente importancia para Marx y el marxismo. Karl Feuerbach fue un brillante estudiante, que a la edad de 22 años decidió ejercer la medicina, pero fue designado a ser catedrático en el Gymnasium de Erlangen, con lo que pudo publicar un documento importante de matemática. Su carrera como profesor solamente duró 6 años, e igualmente estos fueron de gran dificultad por su frágil salud. Ya en 1828, Karl Feuerbach tuvo que retirarse de la cátedra al empeorar su estado.



Manuscrito del famoso teorema de Feuerbach (New York Public Library).
𝒞: Circunferencia de los 9 puntos del △ABC
𝒞: tangente a la circunferencia inscrita y a las tres circunferencias exinscritas.

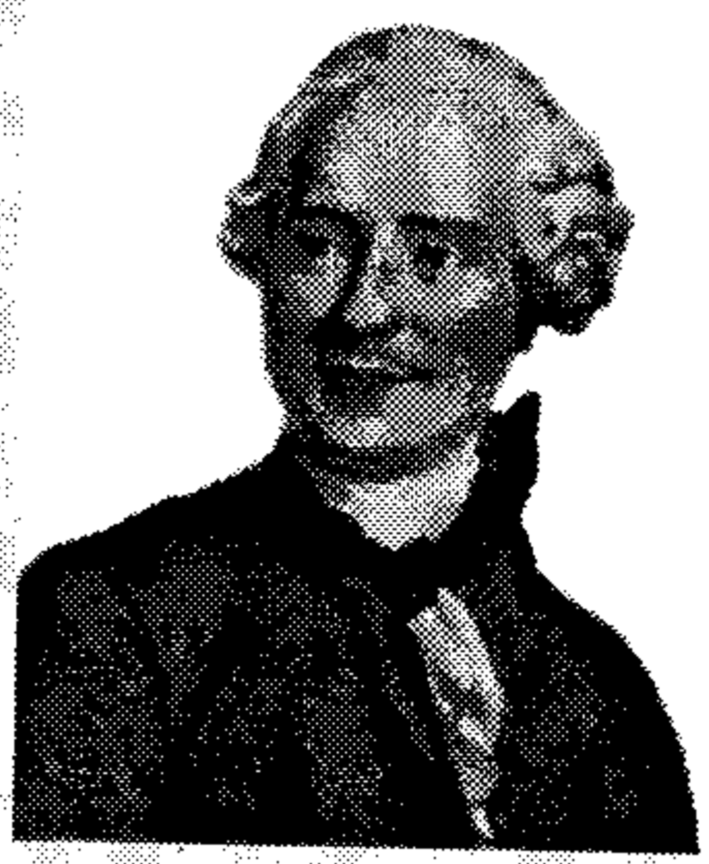
Karl Feuerbach era un geómetra que descubrió la circunferencia de los puntos en el triángulo, algunos lo llaman la circunferencia de Euler. Demostró que la circunferencia inscrita en el triángulo es tangente a la circunferencia de los 9 puntos y tres circu nferencias del triángulo. Esos resultados aparecen en sus documentos en 1827, y este primer documento de Feuerbach representa su mayor reconocimiento.

Por otra parte; en 1827; introdujo las coordenadas homo-géneas, independientes de Möbius (dicho aporte de los dos personajes fue el mismo año).

FUENTE: www.biografíasyvidas.com/biografía/karlwilhelmfeuerbach.html

BIOGRAFÍA

JEAN BAPTISTE LE ROND (D'ALEMBERT) (1717 - 1783)



Jean le Rond, conocido también como D'alembert, se desarrolló como matemático, físico y filósofo. Fue hijo natural del caballero Destouches y de la señora Tencín, que lo abandonó desde su nacimiento, en París, a las puertas de una iglesia. Saint - Jean le Rond, de la cual tomaría su nombre. A los 23 años, ingresó a la academia de ciencias de Francia; donde redactó numerosos artículos de Geometría, Álgebra, Física, etc. en 1772, se convirtió en secretario perpetuo junto con Denis Diderot.

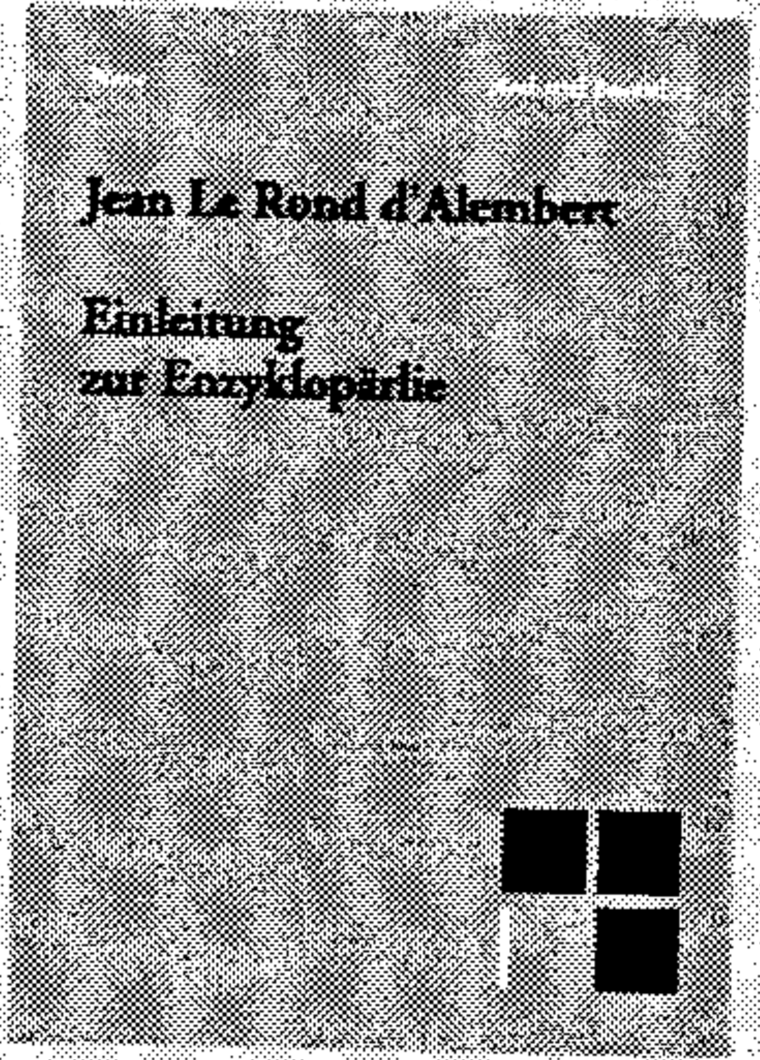
Declinó la invitación de Federico II para vivir en Berlín y la de Catalina de Rusia para encargarse de la educación de su hijo, a pesar de que esta le ofreció un tratamiento anual de cien mil libras.

Fue miembro de todas las Academias de Europa, amigo de todos los filósofos y conocido en todo los salones aristocráticos de Francia. Es en casa de la señora Geoffrin, de quien recibió renta vitalicia de 1275 francos, donde pudo conocer a la señorita Lespinasse, con la que vivió 20 años. Richelieu no estaba de acuerdo con el nombramiento del Rey respecto a secretario perpetuo, por lo que intentó anularlo sin éxito. El naturalista Buffon también trató de limitar su poderosa influencia, de D'alembert, pero fracasó.

Fue el primero no solo en estudiar las ecuaciones diferenciales y su uso en la física, sino también en comprender la importancia de las funciones. En este artículo, definió la derivada de una función como el límite los cocientes de los incrementos. Asimismo fue el que más se acercó a una definición precisa del límite y de la derivada. En realidad toda duda se desvanecía ante el éxito de sus aplicaciones, de manera que el cálculo infinitesimal, más que una rama de la matemática, se convertía en una especie de doncella de la ciencia natural, en un auxiliar muy valioso, pero auxiliar al fin de las varias ramas de la física. Dentro de sus obras más importantes destaca *Memoria sobre el cálculo integral*.

Libro I de D'Alembert

D'Alembert escribiendo su libro.



Libro 2 de D'Alembert.

FUENTE: www.biografíasyvidas.com/biografía/a/dalembert.html

Problemas Resueltos

Problema 1

El simétrico del exágono regular $ABCDEF$, respecto al eje que pasa por la diagonal $\overline{CE}$, es el hexágono $A_1B_1CD_1EF_1$. Si $AB = a$ unidades, señale la longitud de $\overline{AB_1}$.

A) $a\sqrt{2}$ B) $a\sqrt{3}$ C) $a\sqrt{5}$
D) $a\sqrt{7}$ E) $a\sqrt{11}$

Resolución

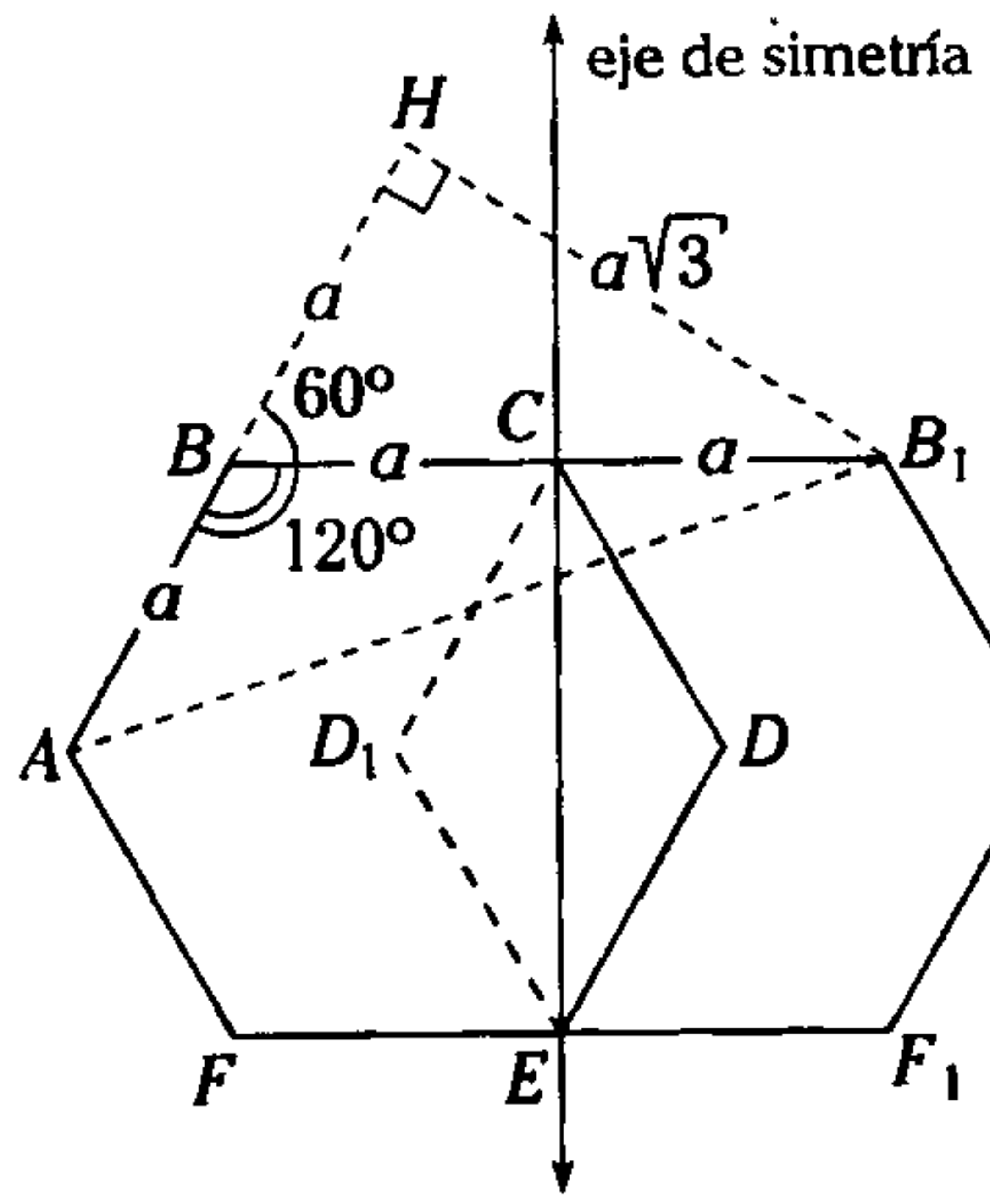


Figura 13.49

Piden $AB_1 = x$

Prolongamos $\overline{AB}$ y trazamos $\overline{B_1H} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (H en $\overleftrightarrow{AB}$)

como m∢ABC = 120°

$\rightarrow$ m∢HBB_1 = 60°

⊿HBB_1: si $BB_1 = 2a$

$\rightarrow$ $BH = a$ y $HB_1 = a\sqrt{3}$

⊿AHB_1: del teorema de Pitágoras

$x^2 = (2a)^2 + (a\sqrt{3})^2$

$\therefore$ $x = a\sqrt{7}$

CLAVE D

Problema 2

En un trapezoide $ABCD$ ($BC = CD$ y $AB = AD$), las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ se intersecan en O. Si las bisectrices de los ángulos BOC y BAD se intersecan en Q y m∢CDA = 100°, halle la m∢OBQ.

A) 100° B) 80° C) 130°
D) 120° E) 150°

Resolución

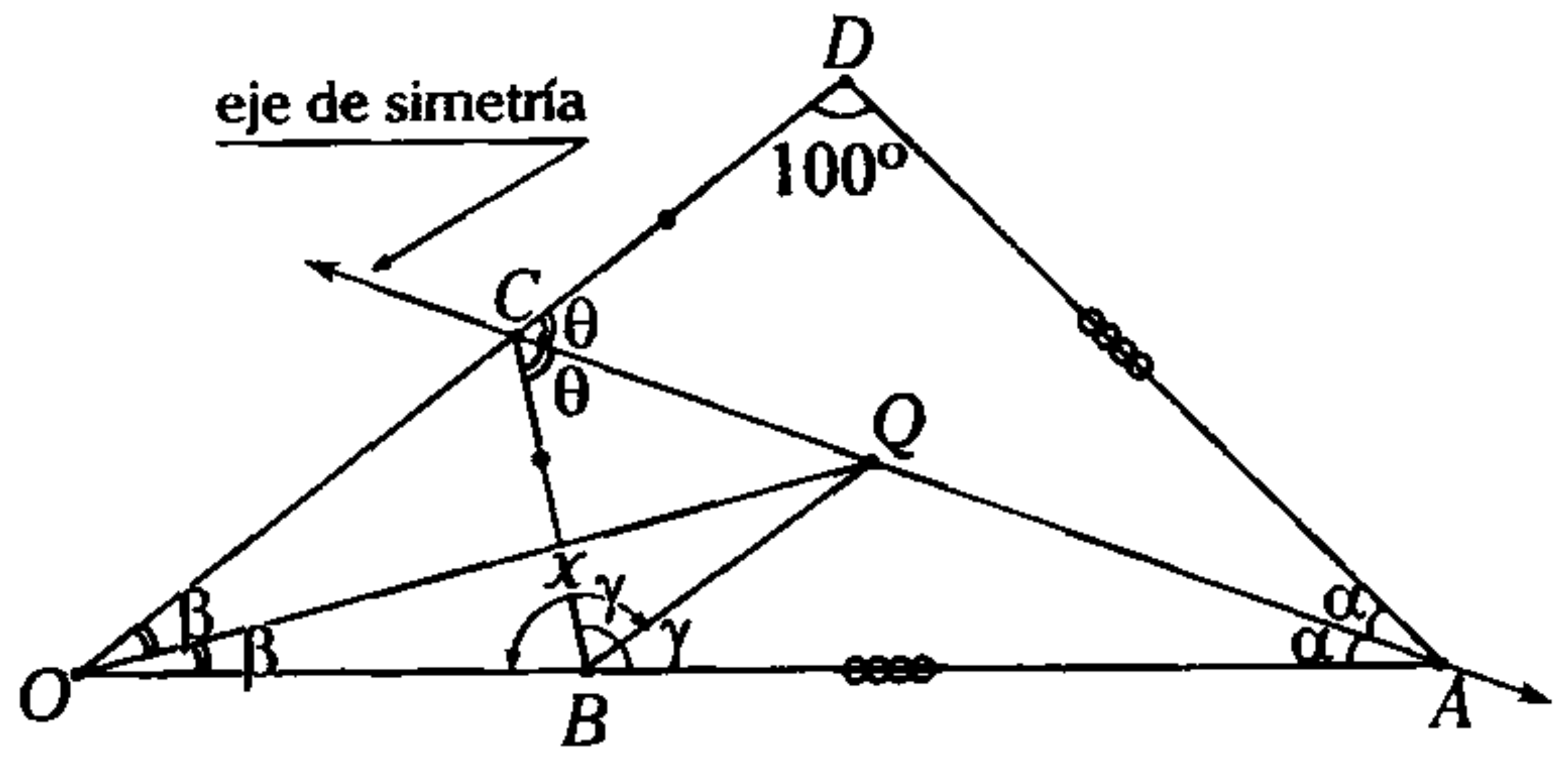


Figura 13.50

Piden m∢$OBQ = x$

Para el trapezoide $ABCD$, $\overleftrightarrow{AC}$ es eje de simetría

$\rightarrow$ m∢BCA = m∢DCA = θ

Se nota: Q es excentro del △OBC, relativo a $\overline{BC}$.

Resulta así que $\overrightarrow{BQ}$ es bisectriz del ángulo exterior y

m∢ABQ = m∢CBQ = γ = 50°

$\therefore$ x = 130°

CLAVE C

Problema 3

En un triángulo ABC, se trazan las alturas BE y CD, las cuales se intersecan en H. Si M y N representan los puntos medios de $\overline{AH}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, indique la medida del ángulo formado por $\overline{MN}$ y $\overline{ED}$.

A) 60° B) 90° C) 45°
D) 135° E) 75°

Resolución

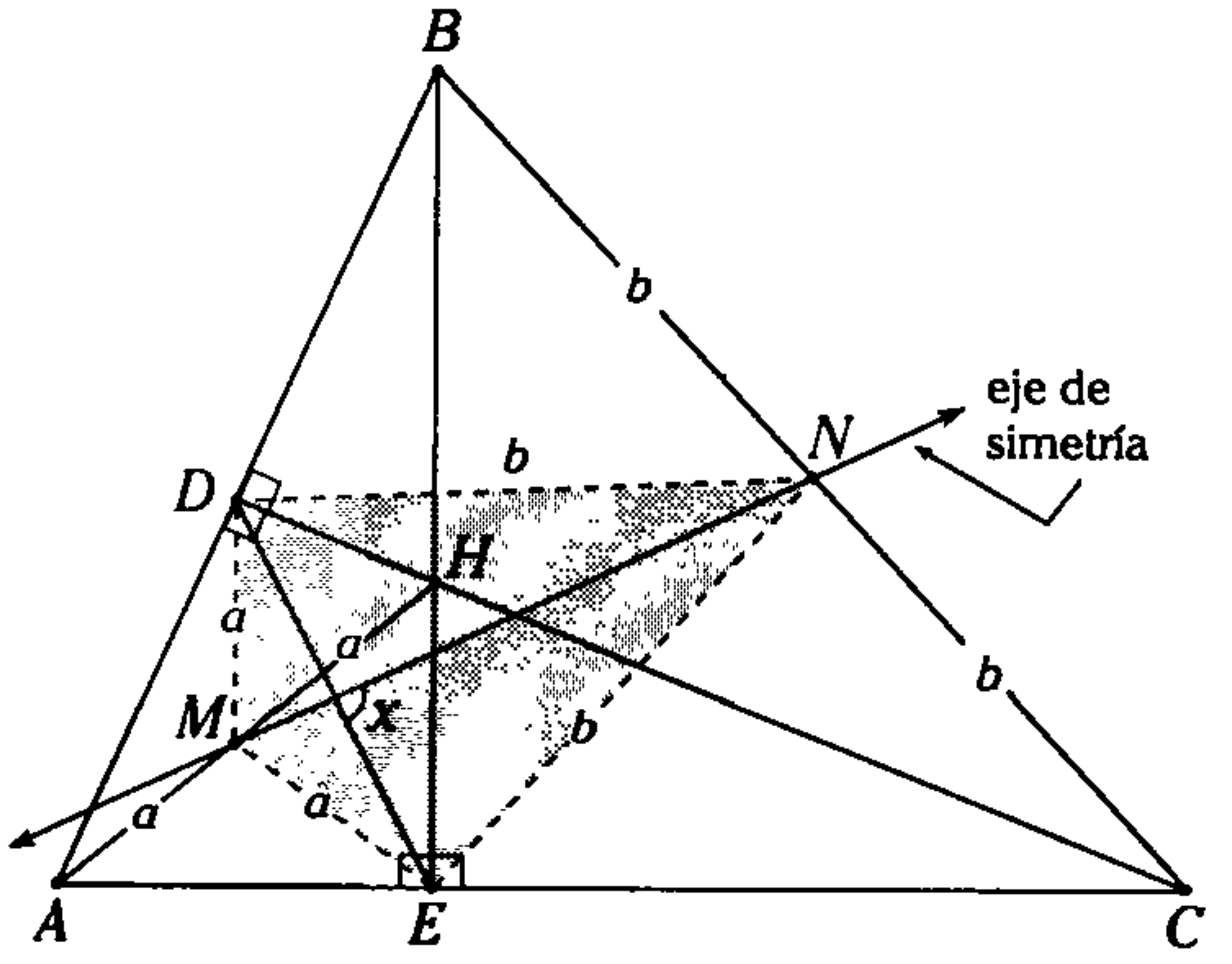


Figura 13.51

Piden x

En los triángulos rectángulos ADH y AEH

$DM = AM = MH = ME$

$\rightarrow\ DM = ME = a$

En los triángulos rectángulos BDC y BEC

$DN = BN = CN = EN$

$\rightarrow\ DN = EN = b$

En $\triangle MDNE$: se nota que $\overleftrightarrow{MN}$ es el eje de simetría.

De esta manera, $\overleftrightarrow{MN}$ es mediatriz de

$\overline{DE}\ \rightarrow\ \overline{MN} \perp \overline{DE}$

$\therefore\ x = 90°$.

CLAVE B

Problema 4

En una mesa de billar $ABCD$, de 1,60 m × 2,60 m ($AB = 1{,}6$ m y $BC = 2{,}6$ m), una bola blanca dista 40 cm y 30 cm de $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$; respectivamente. Calcule la longitud del mínimo recorrido que debe efectuar la bola blanca para impactar en la bola azul, que dista 120 cm de $\overline{AD}$ y 110 cm de CD. Considere que antes debe impactar en las bandas AB y AD, respectivamente.

A) 2,8 m B) 1,8 m C) 2 m
D) 2,5 m E) 3 m

Resolución

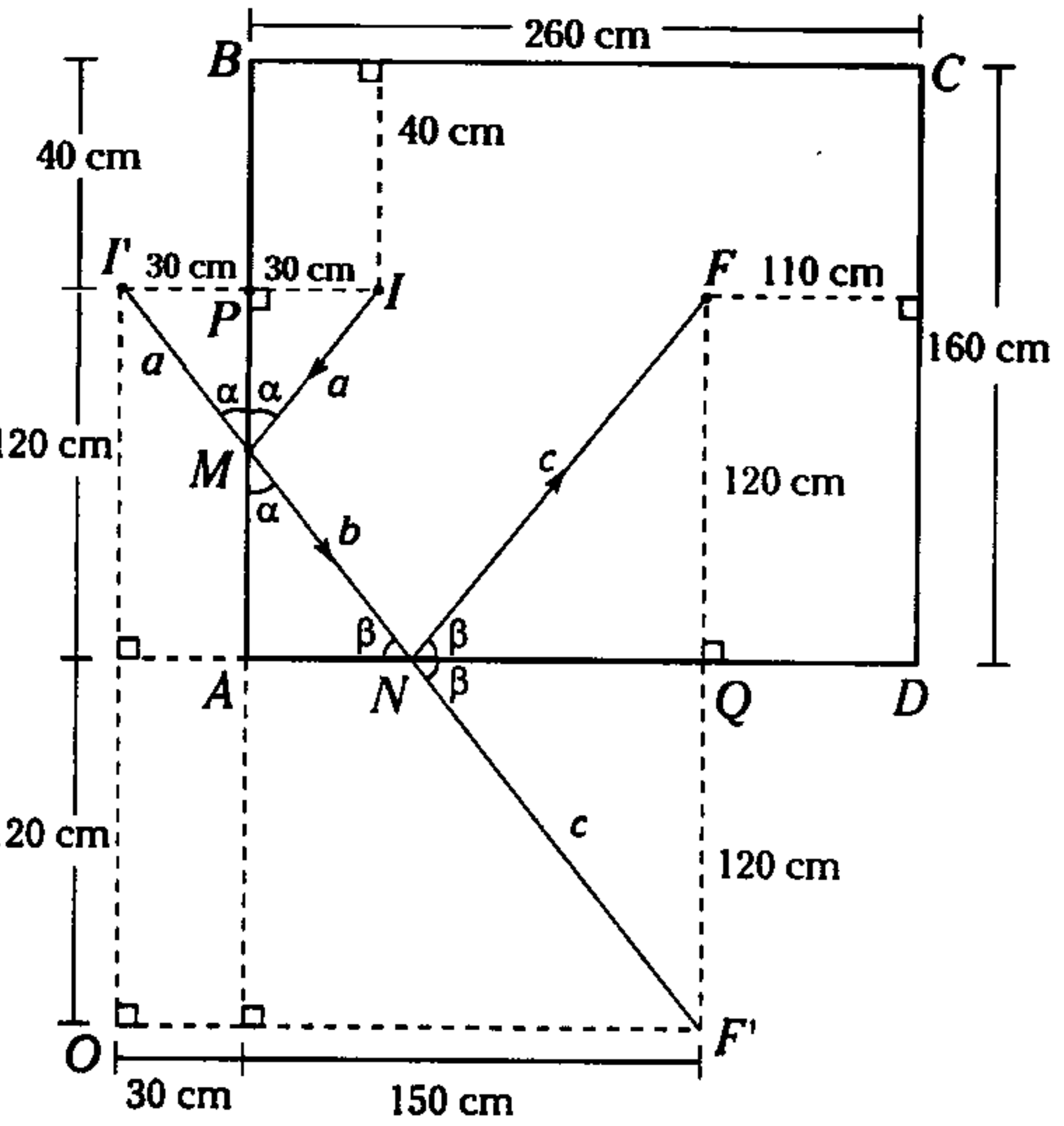


Figura 13.52

Como la bola blanca en su recorrido debe tocar la banda AB; ubicamos, por ende, el simétrico de I respecto de AB: $I' = \text{Sim. } I(\overleftrightarrow{AB})$.

Luego, como debe tocar la banda AD, entonces ubicamos el simétrico de F respecto de AD: $F' = \text{Sim. } F(\overleftrightarrow{AD})$ para seguidamente unir I' con F' y ubicar, así, los puntos M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. Entonces el recorrido buscado

es *IMNF*, como el que se muestra en el gráfico, por lo tanto

$I'M = MI$ y $NF = NF'$

Piden $a + b + c$

⊾$I'OF'$

$\therefore\ a + b + c = 300\text{ cm} = 3\text{ m}$

CLAVE E

Problema 5

Sea *ABC* un triángulo cualesquiera y *P* un punto fijo del lado *AC*; ubique, en *AB* y *BC*, los puntos *M* y *N*, tal que la región triangular *PMN* tenga el menor perímetro.

Resolución

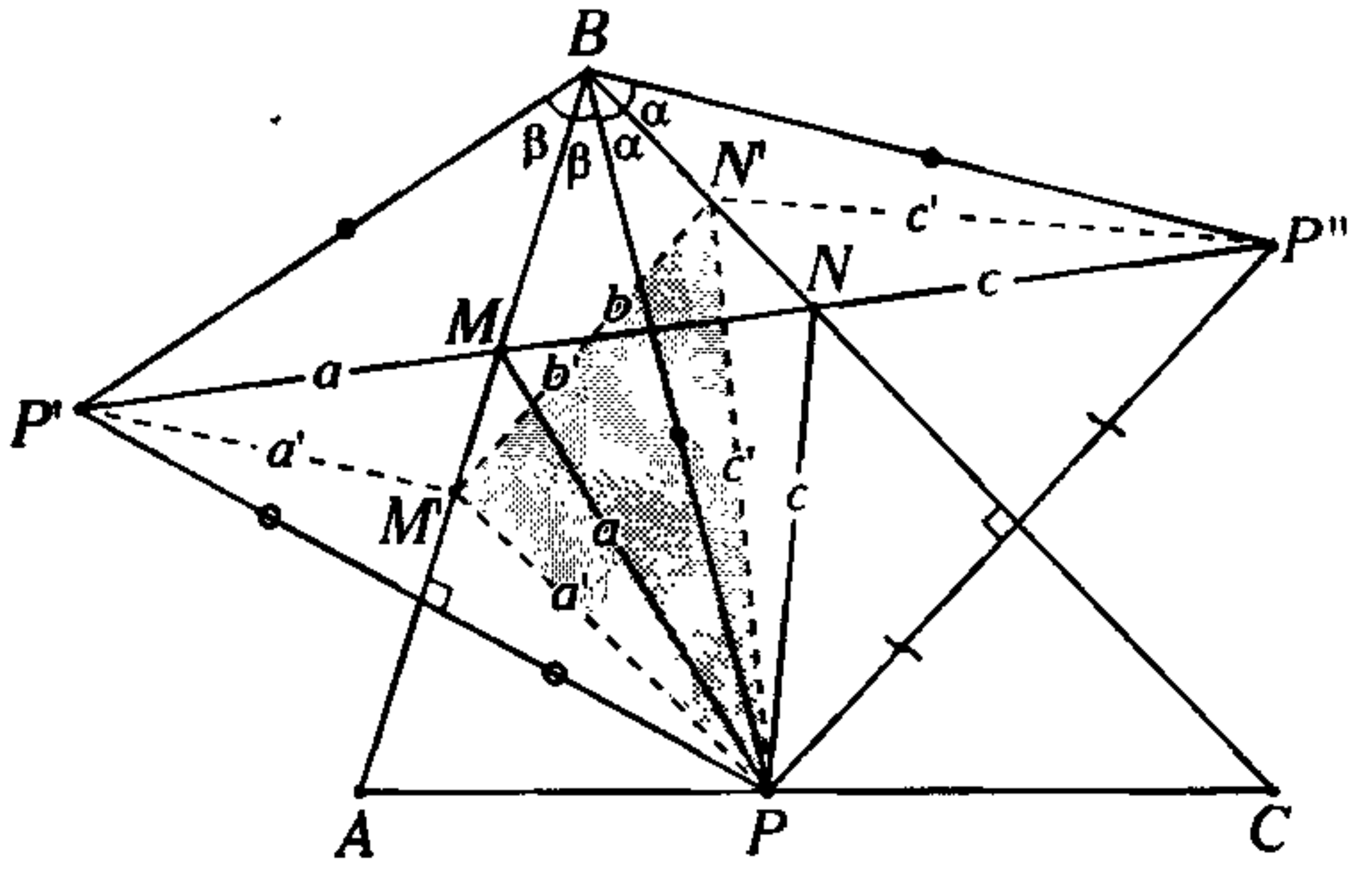


Figura 13.53

Sea P' = Sim. $P(\overleftrightarrow{AB})$ y sea P'' = Sim. $P\ (\overleftrightarrow{BC})$

$\rightarrow\ P'M' = PM' = a'$ y

$P''N' = PN' = c'$

Por lo tanto, $P'M'N'P''$ tendrá menor longitud cuando dichos puntos sean colineales. Al unir P' y P'', ubicaremos, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, los puntos *M* y *N*, los cuales determinan el triángulo *PMN* (cuya región triangular tendrá el menor perímetro).

Observación

Note que para cualquier punto *P* de *AC*, m∢$P'BP''$ = 2 (m∢*ABC*). De esta manera, para que $P'P''$ tenga la menor longitud *BP* debe de ser mínimo; eso se cumple cuando $\overline{BP}$ es altura.

Problema 6

De todos los triángulos inscritos en un triángulo oblicuángulo, el triángulo cuyo perímetro de su región es mínimo se denomina

A) mediano.
B) isósceles.
C) tangencial.
D) órtico.
E) equilátero.

Resolución

De la observación anterior, si un punto de $\overline{AC}$ es vértice del triángulo inscrito de menor perímetro, entonces dicho punto es pie de la altura trazada desde *B*.

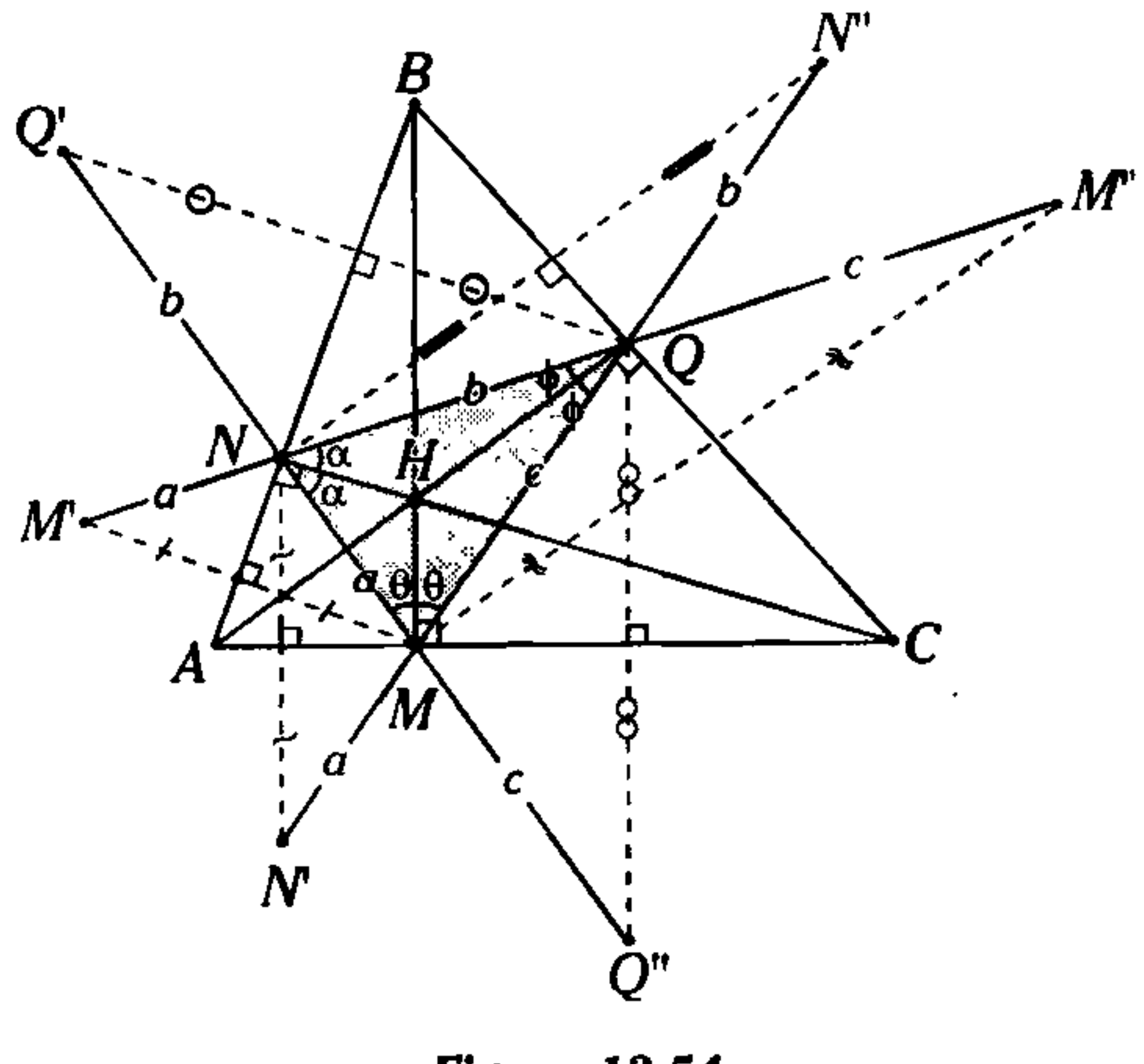


Figura 13.54

Análogamente los 3 vértices serán los respectivos pies de las alturas trazadas en el $\triangle ABC$, entonces el $\triangle MNQ$ es el triángulo órtico del $\triangle ABC$ (Teorema de Fagnano).

Observación

$M'M'' = N'N'' = Q'Q'' = a + b + c = 2P(\triangle MNQ)$.

CLAVE D

Problema 7

En un triángulo ABC m$\measuredangle ABC = 60°$. Si la altura relativa a AC tiene longitud h, el triángulo MNQ está inscrito en ABC, y el perímetro de la región triangular MNQ resulta el mínimo posible, indique dicho perímetro.

A) h B) $2h$ C) $3h$
D) $h\sqrt{3}$ E) $2h\sqrt{3}$

Resolución

Sabemos que el triángulo órtico es el triángulo inscrito, cuya región triangular es la de menor perímetro; por lo tanto, bastará con hallar la suma de las longitudes de los lados del triángulo órtico.

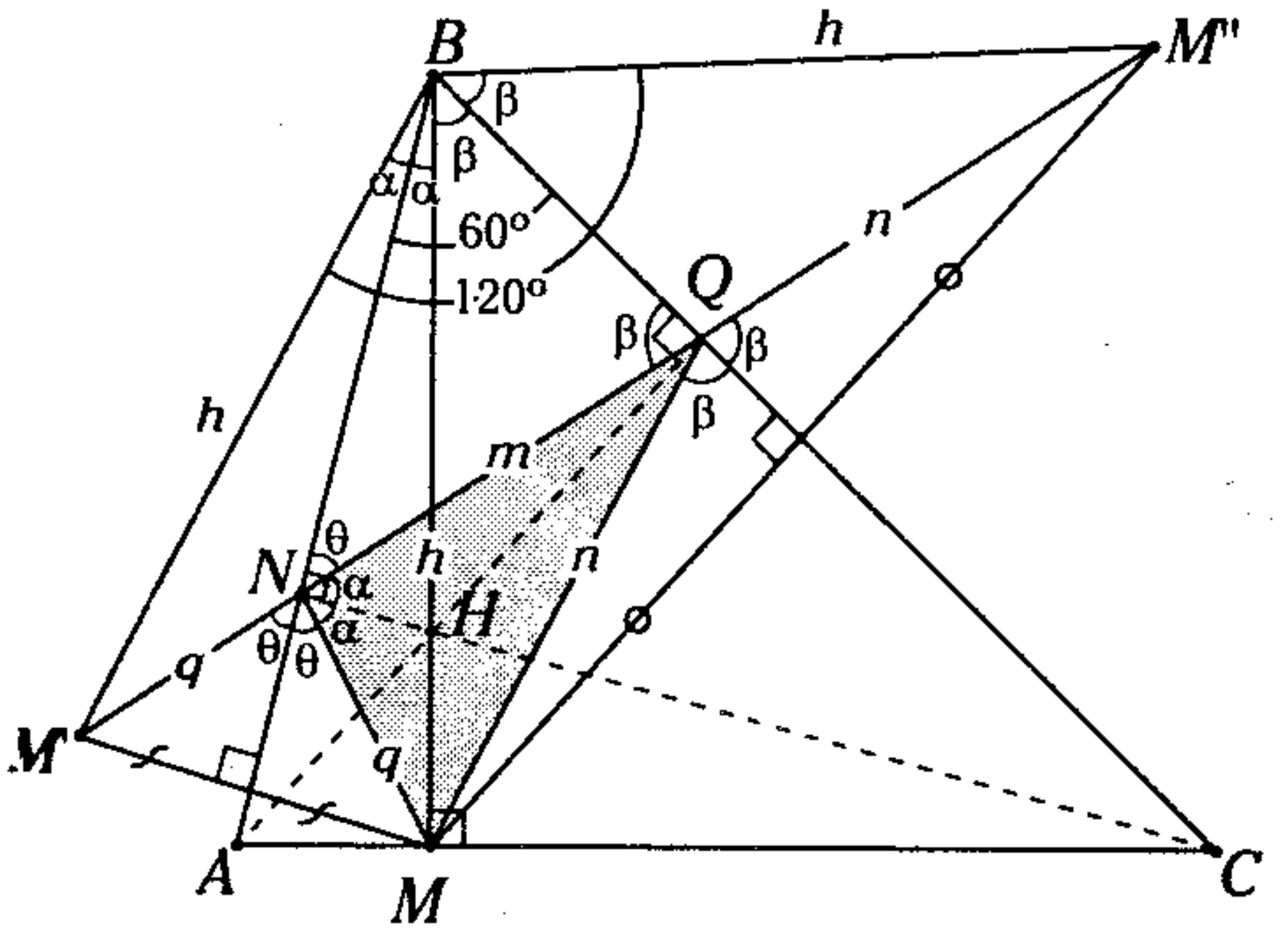


Figura 13.55

Sea M' el simétrico de M respecto de $\overline{AB}$

$M' = \text{Sim. } M(\overleftrightarrow{AB})$

$\rightarrow\ M'N = MN = q$ y $M'B = MB = h$

Sea M'' el simétrico de M respecto de $\overline{CB}$

$M'' = \text{Sim. } M(\overleftrightarrow{CB})$

$\rightarrow\ M'M'' = q + m + n =$ perímetro de la $\triangle MNQ$

como m$\measuredangle ABC = 60° \rightarrow$ m$\measuredangle M'BM'' = 120°$

y el $\triangle M'BM''$ es notable de (30°; 120°; 30°)

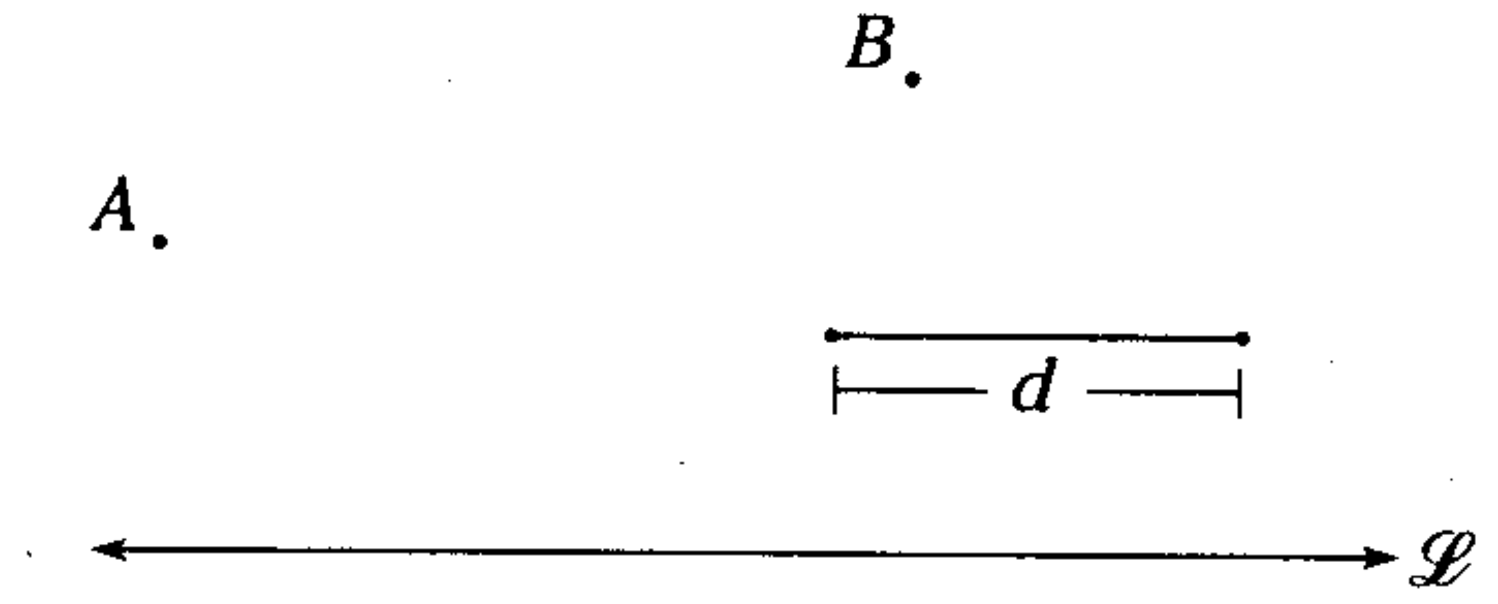
$\rightarrow\ M'M'' = h\sqrt{3}$

$\therefore\ 2p(\triangle MNQ) = m + n + q = h\sqrt{3}$

CLAVE D

Problema 8

Dada una longitud d, ubique en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ los puntos P y Q, tal que $PQ = d$. Considere que el recorrido $APQB$ es mínimo.



Resolución

Al ser PQ constante, bastará demostrar que $AP + QB$ es mínimo para que el recorrido $APQB$ también lo sea. Si desplazamos B hasta B' paralelo a $\mathscr{L}$ y d unidades

$B' = \text{tras. } B\ (\overleftrightarrow{\mathscr{L}}\ ; d)$

Solo será necesario encontrar que $AP + PB'$ es mínimo.

Sabemos que para encontrar el menor recorrido entre A y B' pasando por $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, ubicamos el simétrico de A respecto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ ($A' = \text{Sim. } A(\overleftrightarrow{\mathscr{L}})$), entonces si $\overline{A'B'} \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}} = P$. El recorrido APB es el buscado. En el problema como PQ es constante ($PQ = d$).

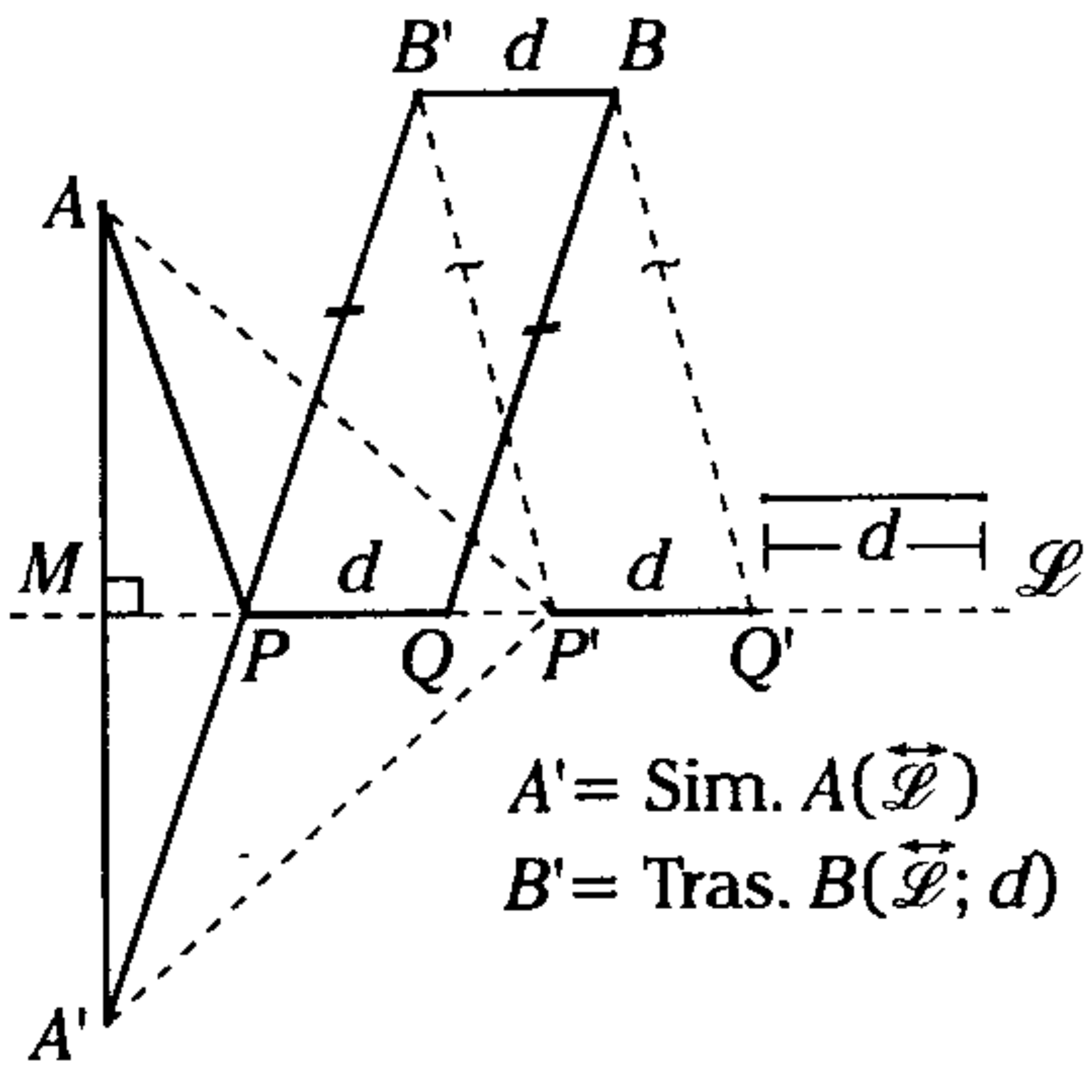


Figura 13.56

y $\overline{PQ}$ // $\overline{BB'}$ entonces

$\overline{PB'}$ // $\overline{QB}$ y $PB' = QB$,

por ende el recorrido *APQB* conseguido en el gráfico sería el buscado.

Ya que para otro punto $P' \neq P$ el recorrido $AP'B'$ es mayor que *APB'*, por lo tanto el menor recorrido es *APQB*, donde *P* y *Q* pertenecen a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $PQ = d$.

Problema 9

Dadas las rectas $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$, donde $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$ es secante a las anteriores, construya un cuadrado cuyos vértices se encuentren uno en cada recta dada.

Resolución

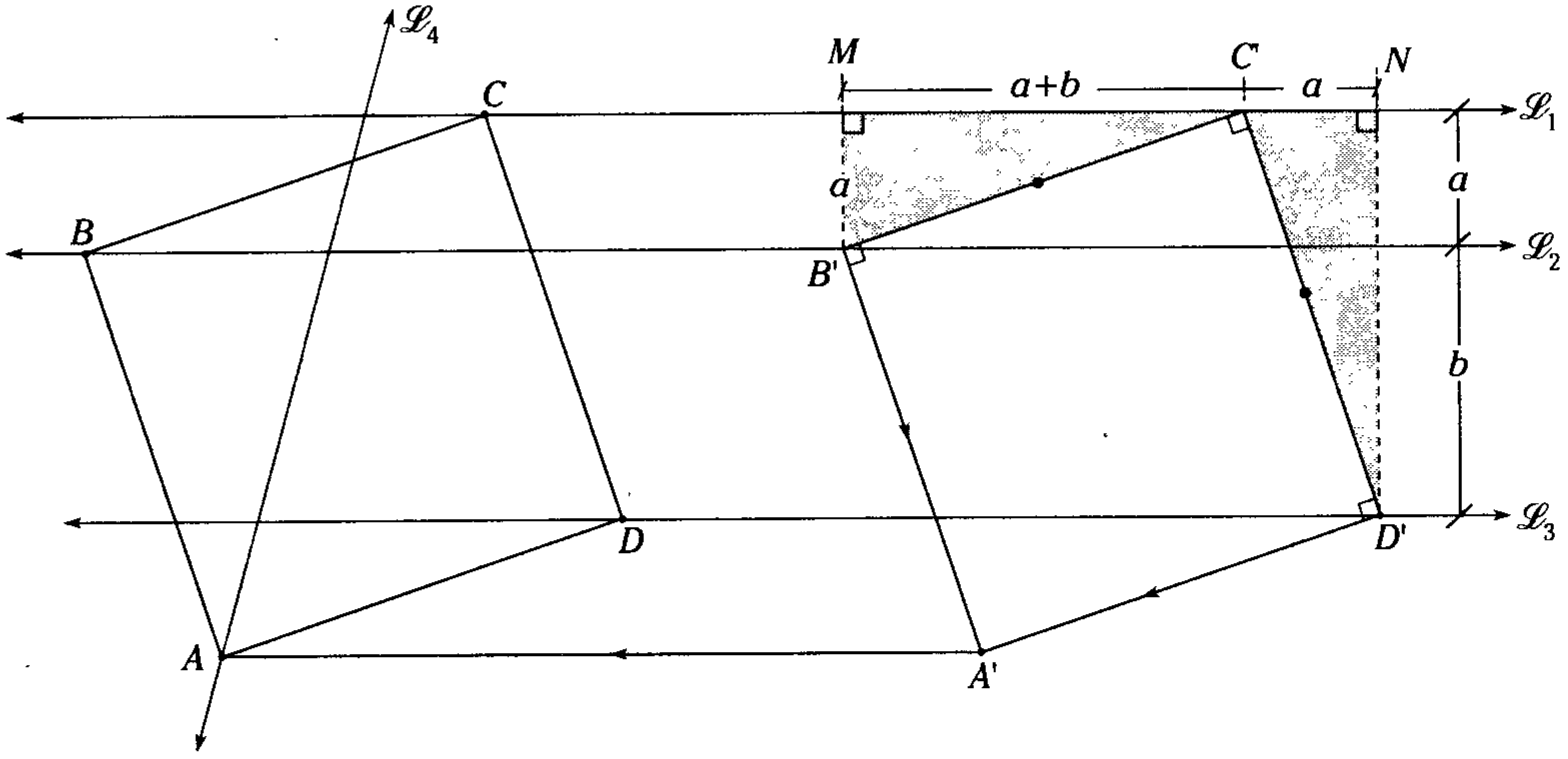


Figura 13.57

Suponemos un cuadrado *A'B'C'D'* en donde $C' \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $B' \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $D' \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ y trazamos $\overline{D'N}$ y $\overline{B'M}$ perpendiculares a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ entonces los $\triangle B'MC' \cong \triangle C'ND'$ donde $C'N = B'M = \boldsymbol{a}$ y $MC' = D'N = \boldsymbol{a} + b$ siendo "**a**" la distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, y *b*, la distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, luego por *D'* trazamos una recta paralela a $\overline{B'C'}$ y por *B'* una paralela a $\overline{C'D'}$, donde se intersecan esta recta se ubica el punto *A'*.

Una vez obtenido el cuadrado $A'B'C'D'$, trasladamos dicho cuadrado, paralelo a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$, hasta que A' interseca a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_4$.

Por lo tanto, $ABCD = \text{Tras.}\ (A'B'C'D')\ (\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1\ ;\ AA')$ con lo cual hemos resuelto el problema.

Problema 10

Dadas las rectas paralelas $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$, trace un triángulo equilátero cuyos vértices pertenezcan uno a cada recta dada.

Resolución

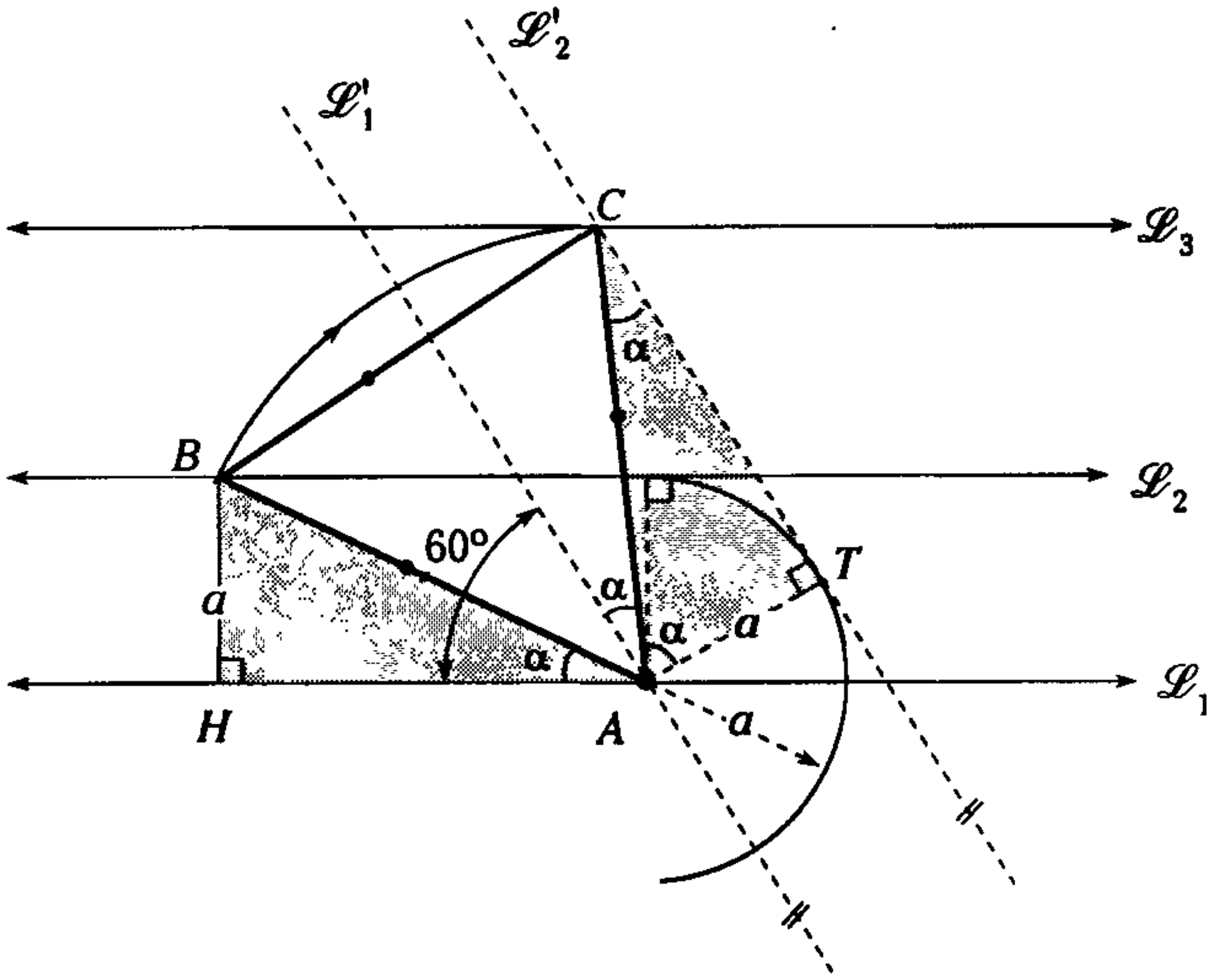


Figura 13.58

Supongamos el problema resuelto, donde ABC es el triángulo equilátero con A en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$, B en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ y C en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$, podemos observar que C es la rotación de B con centro en A y un ángulo de giro que mide 60°.

$C = \text{Rot.}\ B\ (A\ ;\ 60°)$

Si B gira hasta C, con centro en A y un ángulo de giro que mide 60° entonces $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ también girarán 60° respecto de A siendo su nueva posición $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}'_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}'_2$. Podemos observar que para ubicar el punto C en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$ bastará con trazar $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}'_2$, que forma 60° con $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y dista a unidades de A (siendo "a" la distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$).

Los pasos para trazar ABC serían los siguientes:

Ubicamos un punto genérico A en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ con centro en A y radio igual a la distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ trazamos una circunferencia, trazamos una recta que forme 60° con $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y que sea tangente a la circunferencia donde interseca esta recta a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3$, allí estará el punto C con centro en A y radio $\overline{AC}$ trazamos una circunferencia que interseca a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ en B.

Problema 11

Dadas tres circunferencias concéntricas $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$, trace un triángulo equilátero o vértices pertenezcan uno a cada circunferencia dada.

Resolución

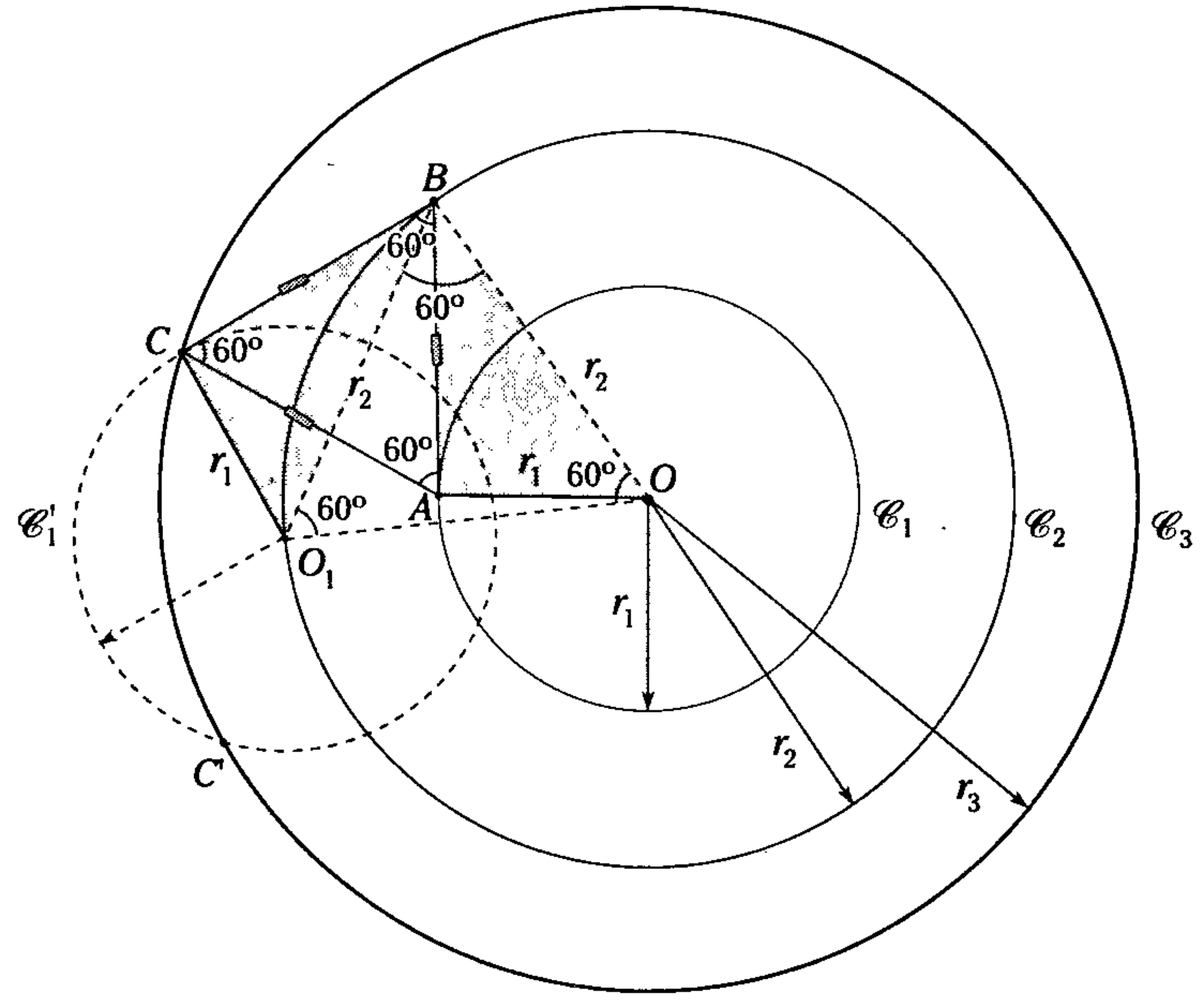


Figura 13.59

Supongamos resuelto el problema, donde el triángulo equilátero es ABC. Si $A \in \mathscr{C}_1$; $B \in \mathscr{C}_2$ y $C \in \mathscr{C}_3$, podemos observar que A puede pasar a C mediante una rotación de centro B y ángulo de giro de medida 60°. $C = \text{Rot.}\, A\ (B;\ 60°)$

Si A gira 60° respecto de B, entonces $\mathscr{C}_1$ también gira 60° respecto de B con esto, $\mathscr{C}'_1$ sería su nueva posición y O_1 su centro.

Como $BO = r_2 \rightarrow BO_1 = r_2$,

además $m\measuredangle O_1BO = 60°$, por lo que el $\triangle O_1BO$ es equilátero y $OO_1 = r_2$.

Así, O_1 debe pertenecer a $\mathscr{C}_2$ por lo tanto para ubicar el punto B ubicamos arbitrariamente el punto O_1 en $\mathscr{C}_2$ y con centro en O_1 y radio r_2 ubicamos el punto B en $\mathscr{C}_2$.

Luego con centro en O_1 y radio r_1 trazamos $\mathscr{C}'_1$ que debe intersecar a $\mathscr{C}_3$.

Sean C y C' los puntos en los cuales interseca $\mathscr{C}'_1$ a $\mathscr{C}_3$, entonces con centro en C o C' y radio CB o CB' trazamos el triángulo equilátero CBA o $CB'A'$, con lo cual habremos resuelto el problema.

Observación

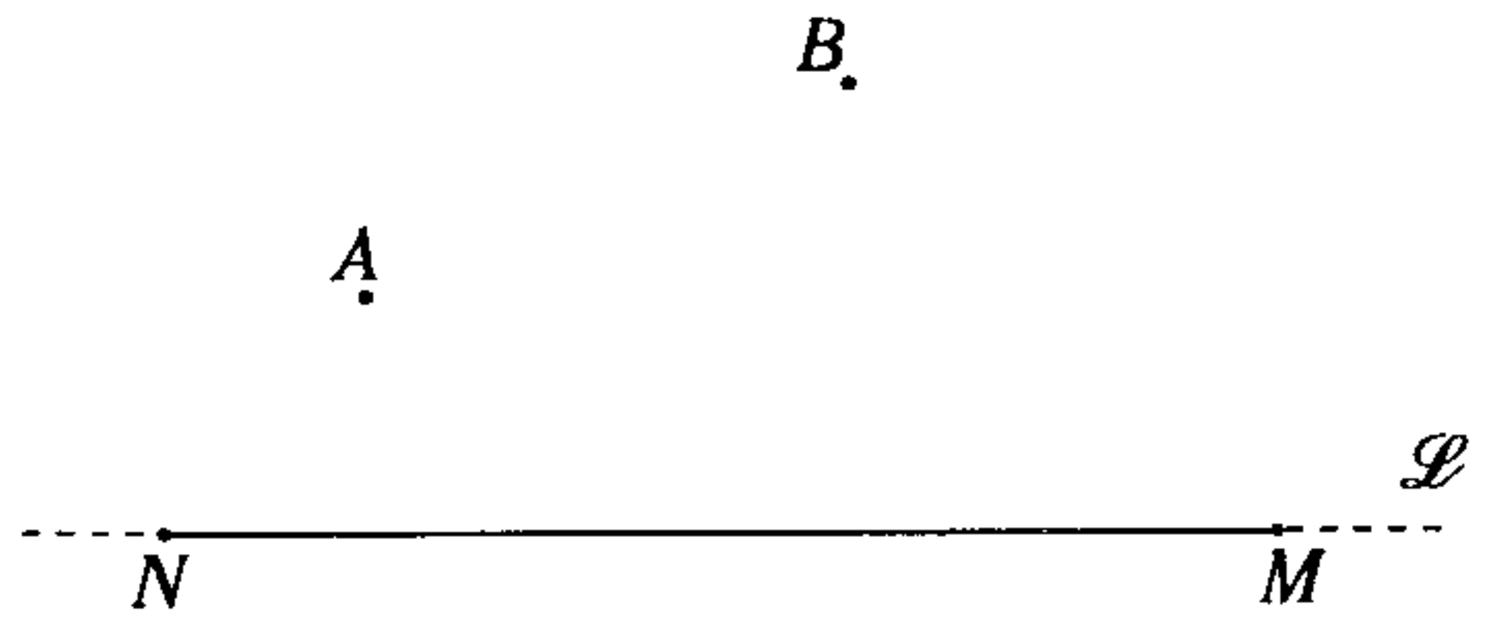
Si $\mathscr{C}'_1$ interseca a $\mathscr{C}_3$ en dos puntos, existirán 4 soluciones.

Si $\mathscr{C}'_1$ es tangente con $\mathscr{C}_3$, existen 2 soluciones.

Si $\mathscr{C}'_1$ no interseca a $\mathscr{C}_3$, no existe solución alguna.

Problema 12

En la figura mostrada, A, B y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ son puntos y recta fijos en el plano. Ubique en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ un punto P, tal que $m\measuredangle BPM = 2(m\measuredangle APN)$.



Resolución

Ubicamos A' el simétrico de A respecto de $\mathscr{L}$ (A'= Sim. A ($\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$) luego con centro en A' aplicamos una rotación de B hasta que interseque a $\mathscr{L}$. (B' = Rot. $B(A'))/B' \in \mathscr{L}$, luego trazamos la mediatriz de $\overline{BB'}$ que interseca a $\mathscr{L}$ en P.

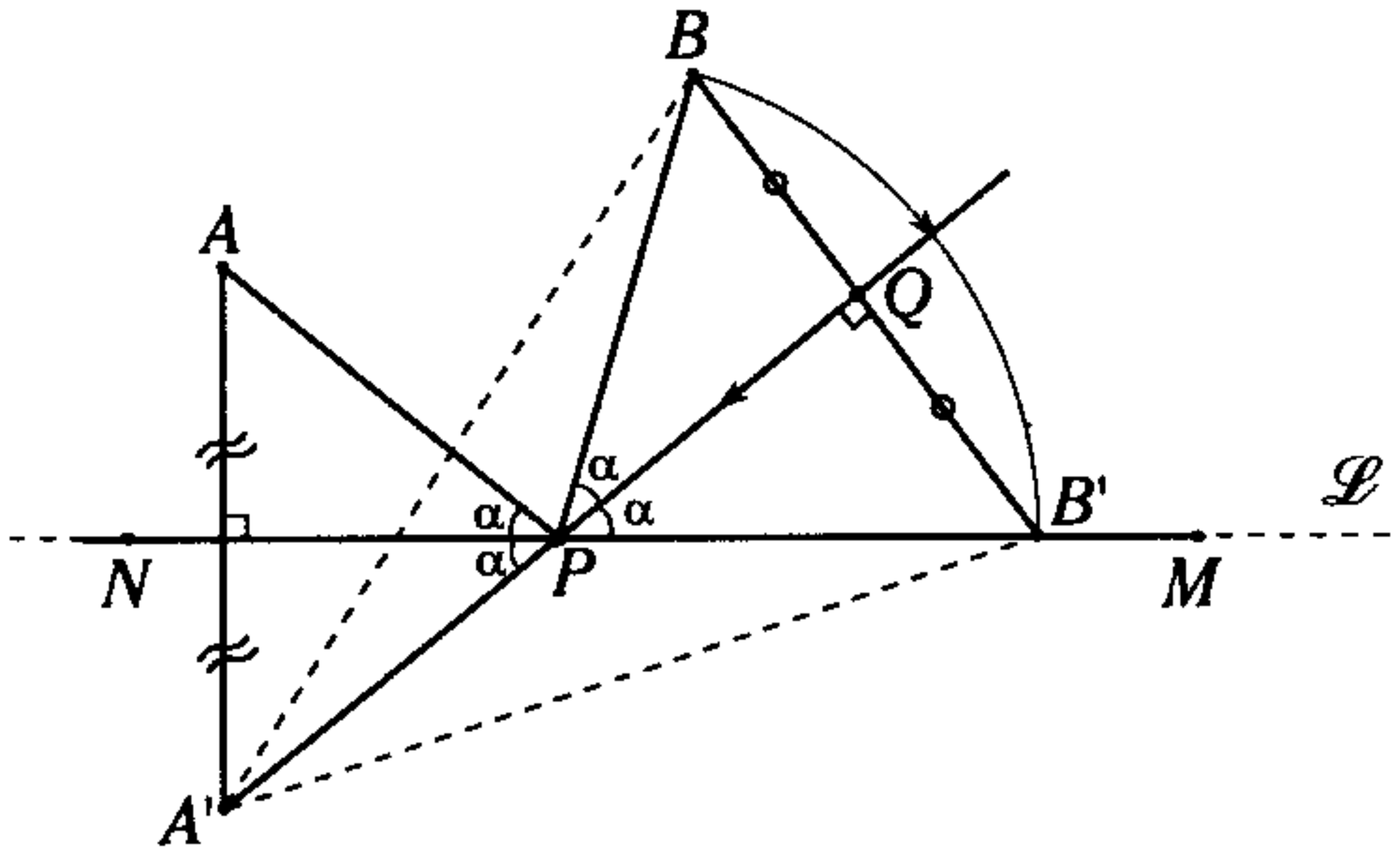


Figura 13.60

A' = Sim. $A(\overleftrightarrow{\mathscr{L}})$

B' = Rot. $B(A')/B' \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$\overrightarrow{QA'}$ es mediatriz de $\overline{BB'}$ que interseca a $\mathscr{L}$ en P.

$\rightarrow$ $PB = PB'$ y

$m\measuredangle BPQ = m\measuredangle B'PQ = \alpha$

Como

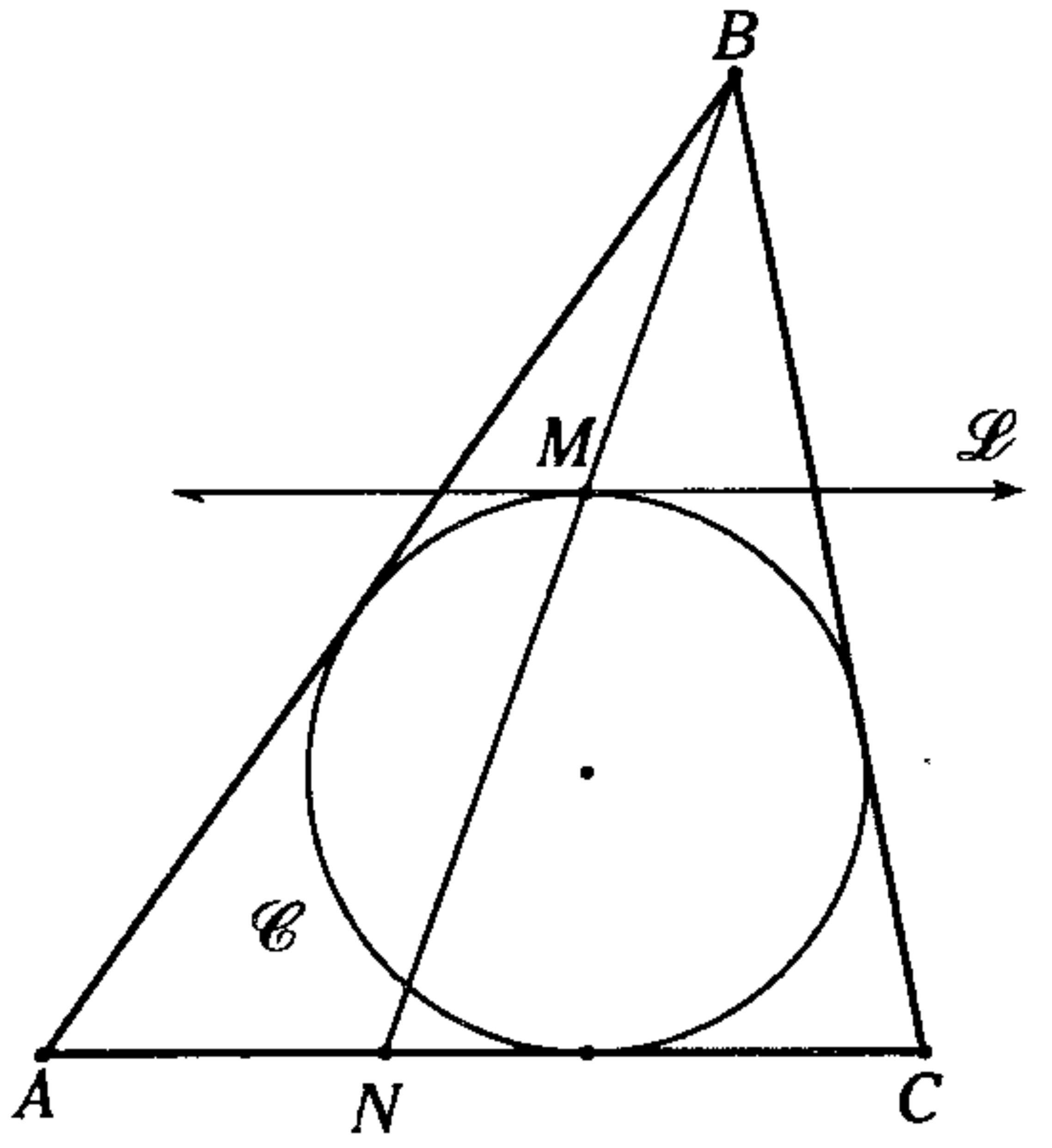
$m\measuredangle NPA' = MPQ = \alpha$

$\rightarrow$ $m\measuredangle APN = m\measuredangle NPA' = \alpha$

$\therefore$ $m\measuredangle BPM = 2(m\measuredangle APN)$ que es lo que se estaba buscando

Problema 13

En un triángulo ABC, está inscrita la circunferencia $\mathscr{C}$. Si la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es paralela a $\overline{AC}$ y tangente a $\mathscr{C}$ en M, la recta $\overleftrightarrow{BM}$ interseca a $\overline{AC}$ en N. $AB=9$; $BC=7$ y $AC=6$, calcule AN.



A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

Resolución

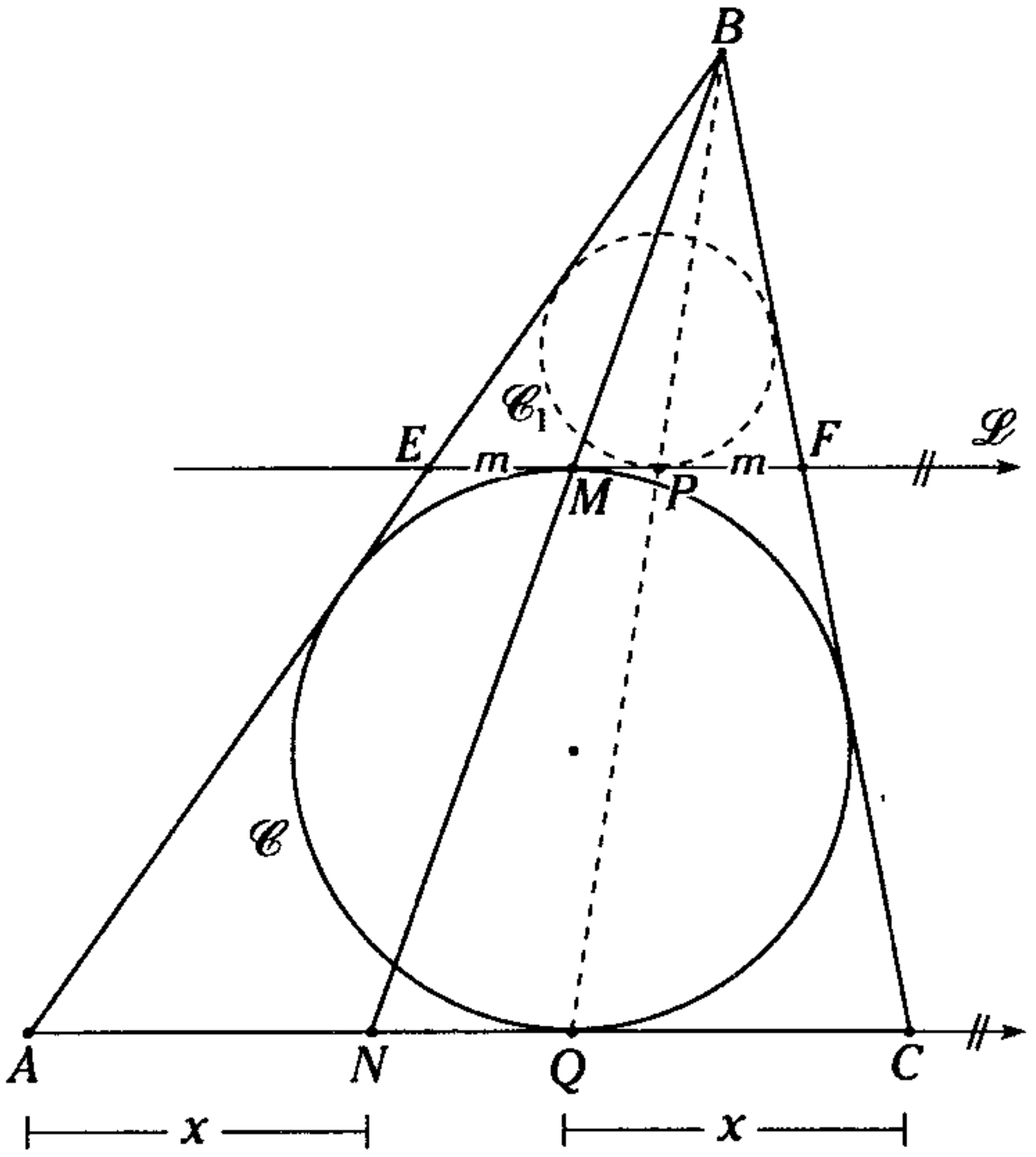


Figura 13.61

En el triángulo EBF, inscribimos la circunferencia $\mathscr{C}_1$ tangente en P a $\overline{EF}$. Sabemos por propiedad de circunferencias exteriores que $EM = PF$; además, Q representa el punto de tangencia de $\mathscr{C}$ con $\overline{AC}$.

Como $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_1$ son homotéticos de centro B, notemos que Q y P son también, respectivamente, puntos homotéticos, por lo tanto son colineales con B.

Si en el $\triangle EBF$: $EM = PF$

$\rightarrow$ en su homotético ABC

$AN = QC = x$, pero $QC = (p - c)$

Como

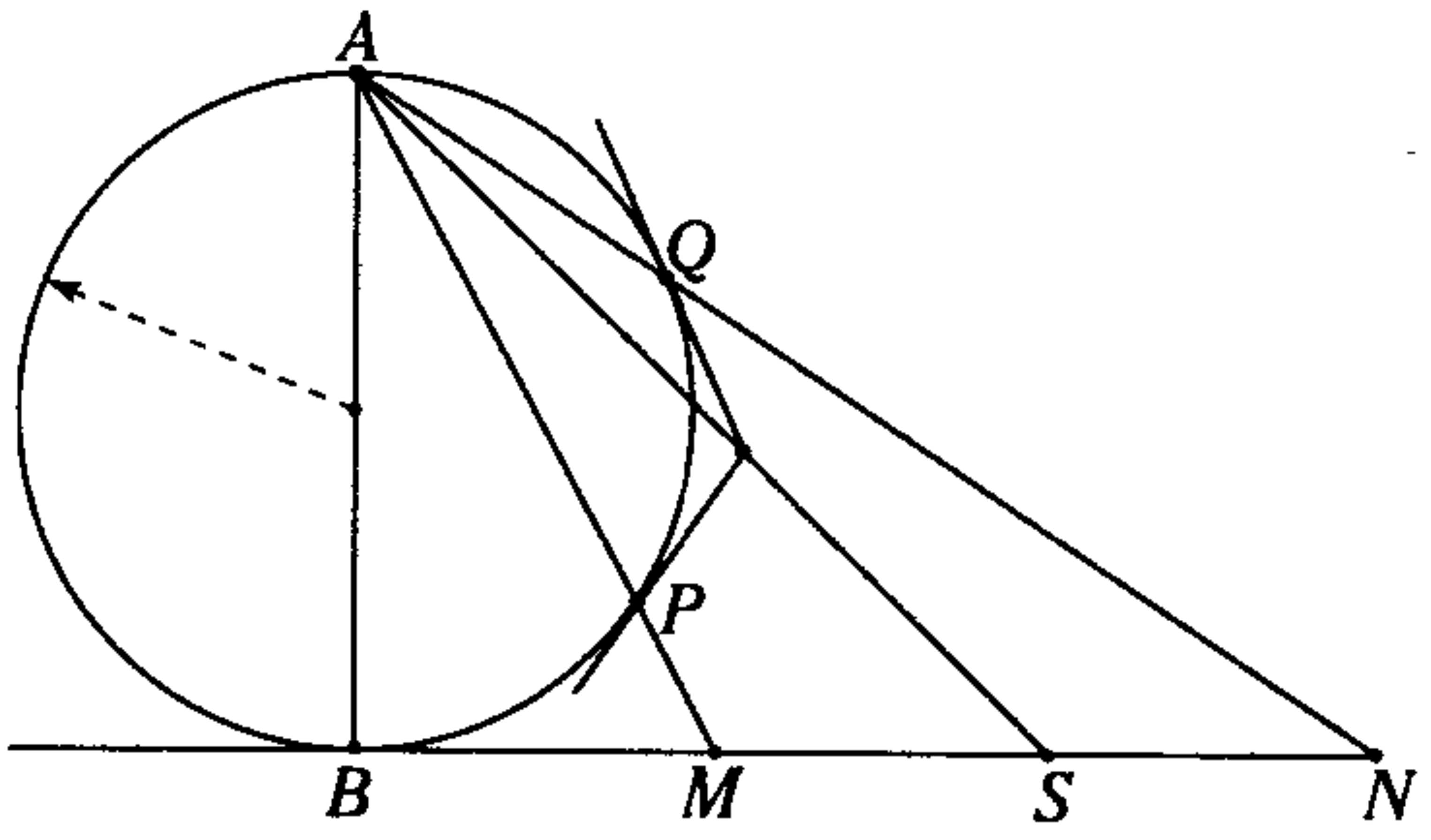
$$p = \frac{7+6+9}{2} = 11$$

$$\rightarrow \; QC = (11 - 9) = 2$$

CLAVE B

Problema 14

En la figura mostrada, B, P y Q son puntos de tangencia. Si $MS = 5$, calcule SN.



A) 2,5
B) $\sqrt{5}$
C) 5
D) 10
E) $2\sqrt{5}$

Resolución

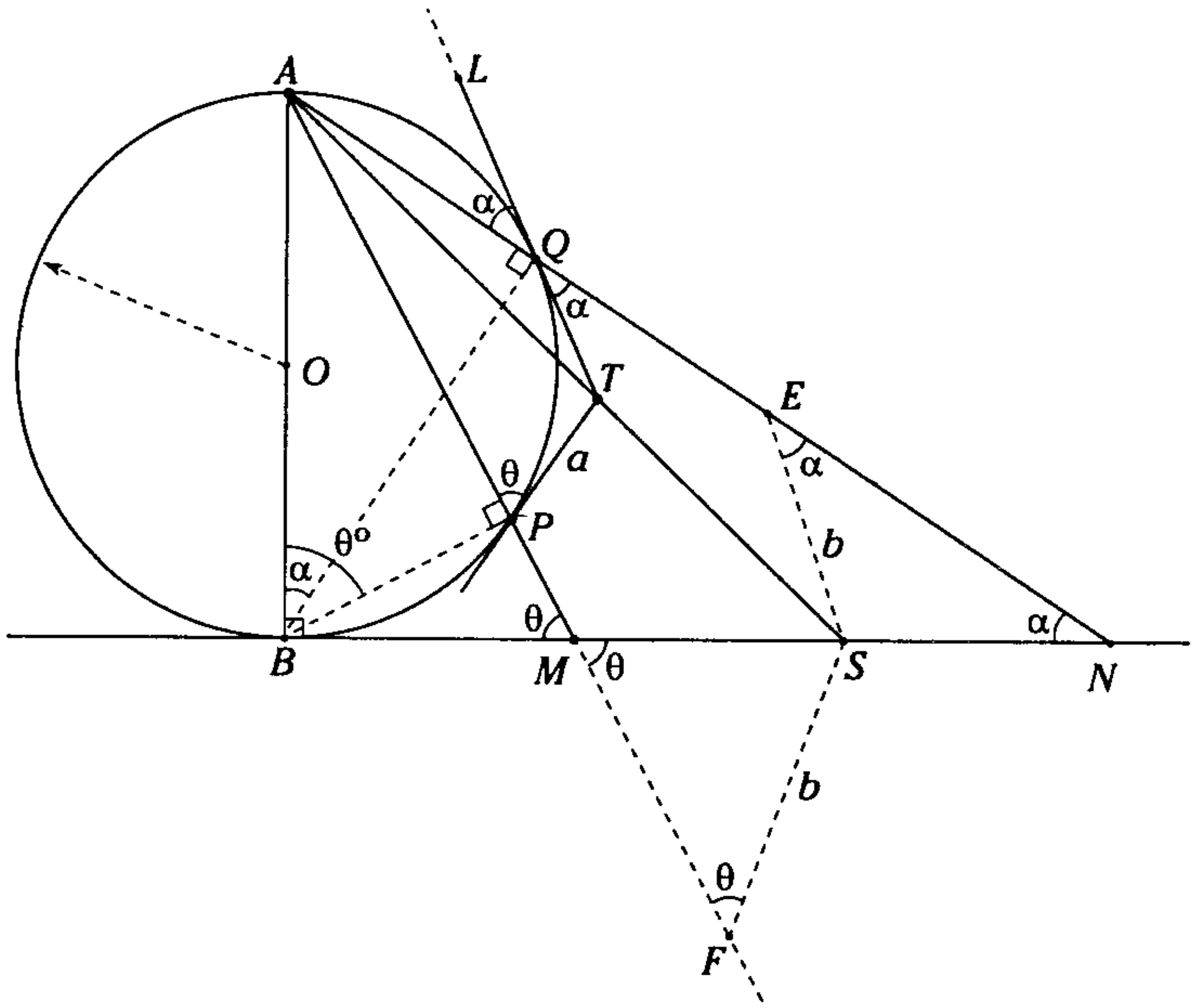


Figura 13.62

Sabemos que $TP = TQ = a$

Sea $S = \text{Hom. } T\left(A\,;\,\dfrac{AS}{AT}\right)$, ubicamos

$F = \text{Hom. } P\left(A\,;\,\dfrac{AS}{AT}\right)$

$E = \text{Hom. } Q\left(A\,;\,\dfrac{AS}{AT}\right)$

por lo tanto $\overline{SE} \,//\, \overline{TQ}$ y $\overline{SF} \,//\, \overline{TP}$

$m\sphericalangle SFA = m\sphericalangle TPA = \theta$ y

$m\sphericalangle SEN = m\sphericalangle TQN = \alpha$;

pero, $m\sphericalangle TPA = m\sphericalangle PBA = \theta$

y en el $\triangle MBA$: $m\sphericalangle AMB = m\sphericalangle PBA = \theta$

$\therefore\ SM = SF$

también $m\sphericalangle TQN = m\sphericalangle LQA = m\sphericalangle QBA = \alpha$

y en el $\triangle NBA$: $m\sphericalangle ANB = m\sphericalangle QBA = \alpha$

$\therefore\ SN = SE$

Como $\widehat{ESF} = \text{Hom. } \widehat{QTP}\left(A;\dfrac{AS}{AT}\right)$

$\rightarrow\ SF = SE$

$\therefore\ MS = SN = 5$

CLAVE C

Problema 15

En un triángulo rectángulo *ABC*, recto en *B*, se inscribe el cuadrado *MNPQ*; tal que *N* y *P* pertenecen a $\overline{AC}$. $\overline{AM}$ y $\overline{CQ}$ se intersecan en *O*; $m\sphericalangle ACB = 53°$ y la distancia de *O* a $\overline{AC}$ es 5 u, halle la distancia de *O* a $\overline{AB}$.

A) 2 u B) 3 u C) 4 u D) 5 u E) 2,5 u

Resolución

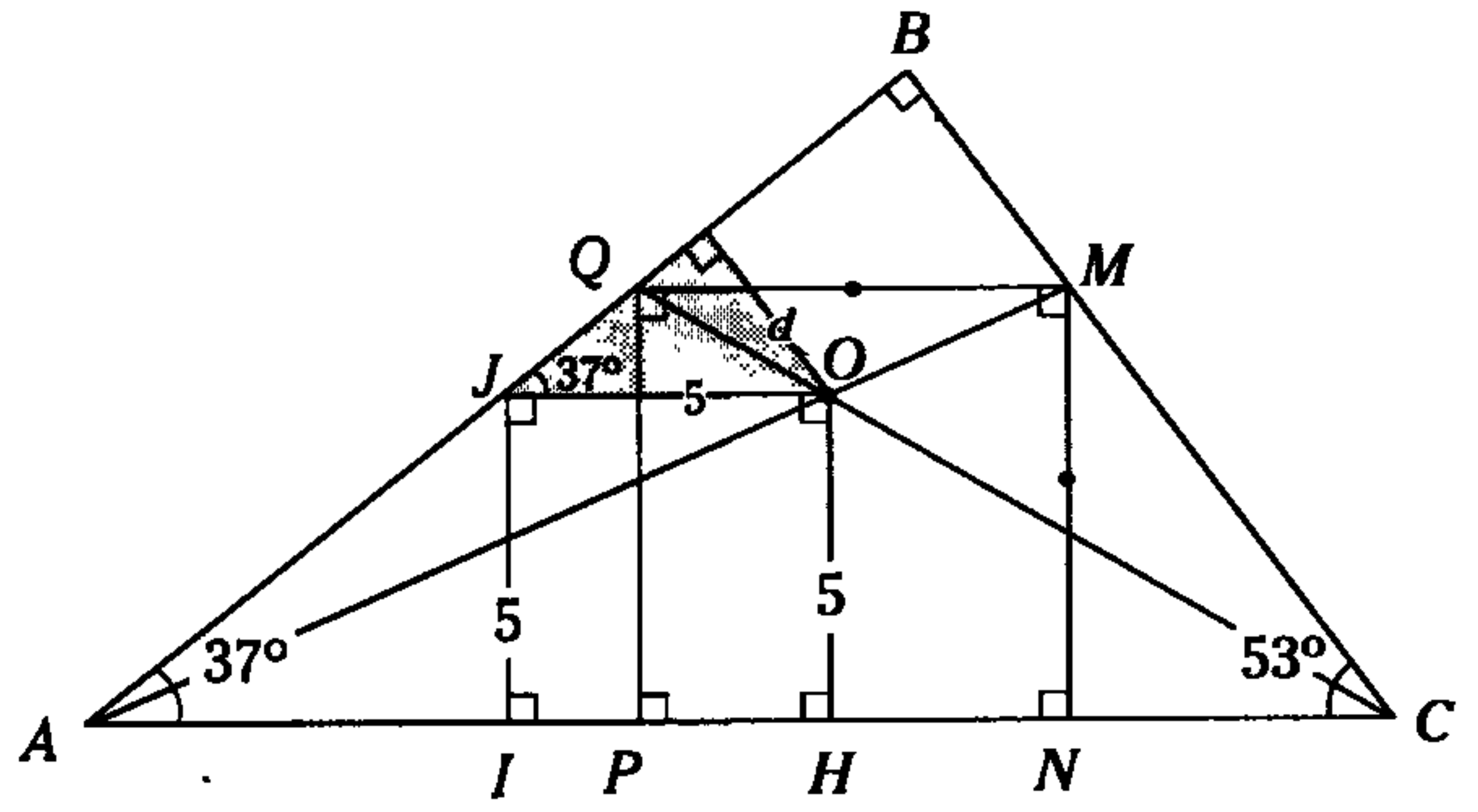


Figura 13.63

Si *A* es el centro de homotecia de los rayos $\overleftrightarrow{AQ}$, $\overleftrightarrow{AM}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, entonces el homotécico del cuadrado *QMNP* de razón $\dfrac{AO}{AM}$ será el cuadrado *JOHI*. Por lo tanto, $JO = OH = 5$, además $\overline{JO} \,//\, \overline{AC}$ entonces $m\sphericalangle OJQ = m\sphericalangle CAB = 37°$, entonces por triángulo notable de 37° y 53°.

$d = 3$ u.

CLAVE B

Problema 16

Exterior al cuadrado *ABCD* y relativo al lado $\overline{BC}$; se ubica el punto *E*. Si la m$\sphericalangle BEC=90°$. $\overline{EA}$ y $\overline{ED}$ intersecan a $\overline{BC}$ en *M* y *N*, respectivamente; $BM=a$ y $CN=b$, señale *MN*.

A) $\dfrac{a+b}{2}$ B) $2\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{ab}$

D) $\sqrt{2ab}$ E) $\dfrac{2ab}{a+b}$

Resolución

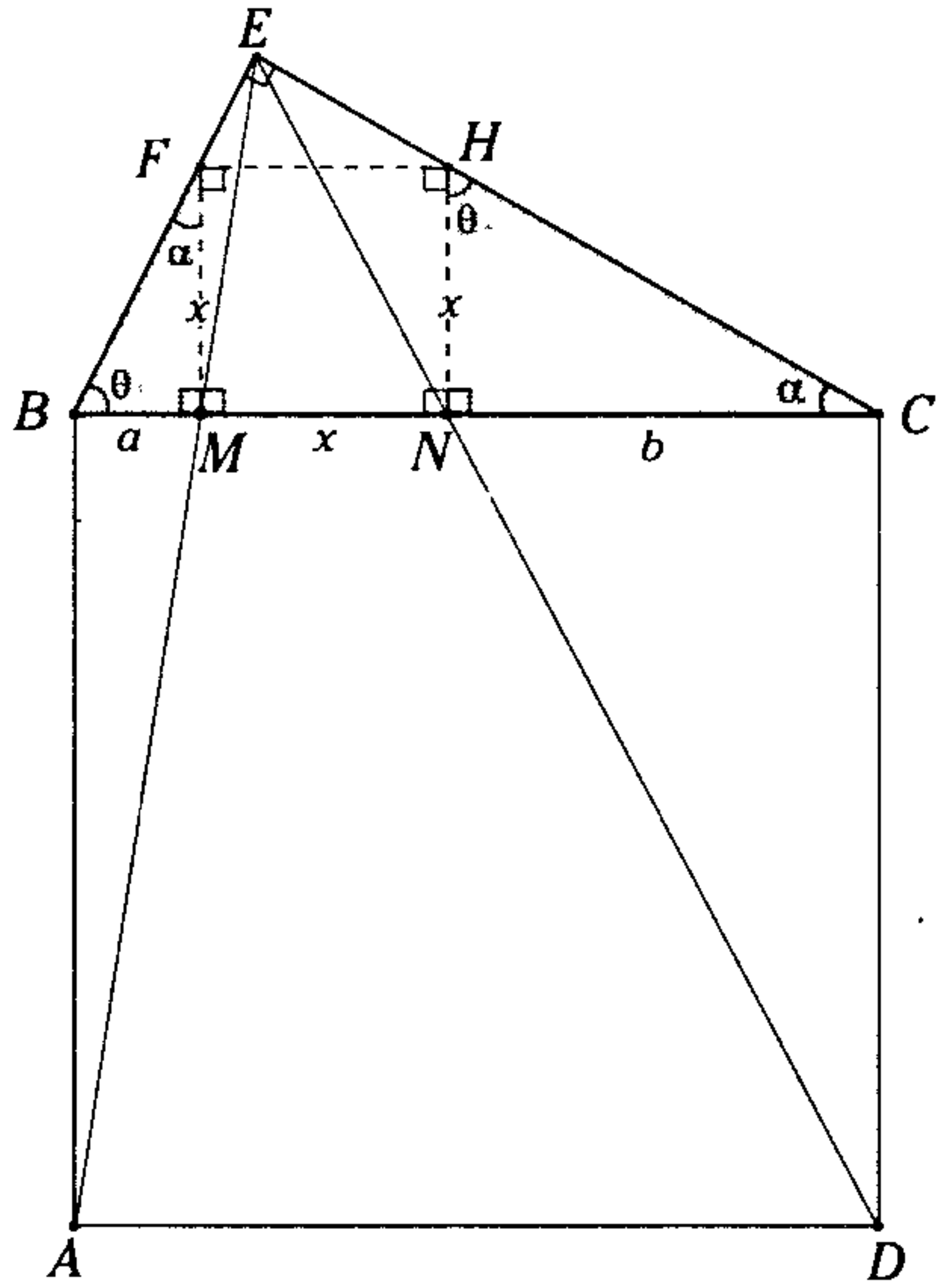


Figura 13.64

Considerando a *E* como centro de homotecia, entonces $\overline{EB}$, $\overline{EA}$, $\overline{ED}$, y $\overline{EC}$ serán rayos homotésicos.

Si *ABCD* resulta ser un cuadrado, su homotécico *MFHN* también será un cuadrado. Por lo tanto, $FM=HN=MN=x$.

No obstante los triángulos rectángulos *BMF* y *HNC* son semejantes

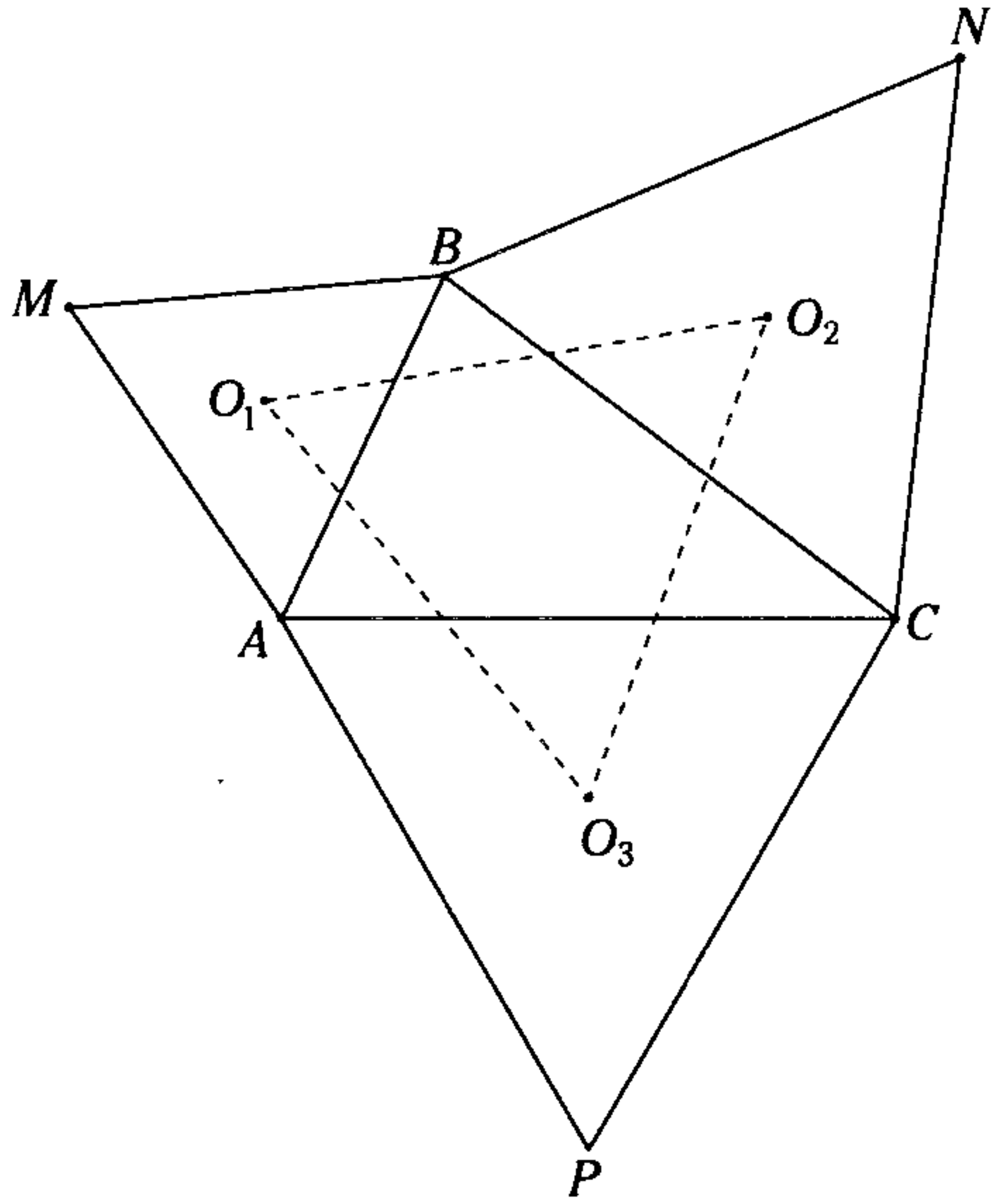
$\therefore \ \dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{b}$ (relacionando sus elementos homólogos)

$\rightarrow \ x=\sqrt{ab}$

CLAVE C

Problema 17

Sea *ABC* un triángulo escaleno. Si exteriormente se construyen los triángulos equiláteros *ABM*; *BCN* y *ACP*, demuestre que los centros de dichos triángulos son vértices de un triángulo equilátero.



Resolución

Si O_1 es centro del triángulo equilátero *ABM*, entonces $O_1A=O_1B$ y m$\sphericalangle AO_1B=120°$, análogamente en el $\triangle BNC$.

$O_2B=O_2C$ y m$\sphericalangle BO_2C=120°$

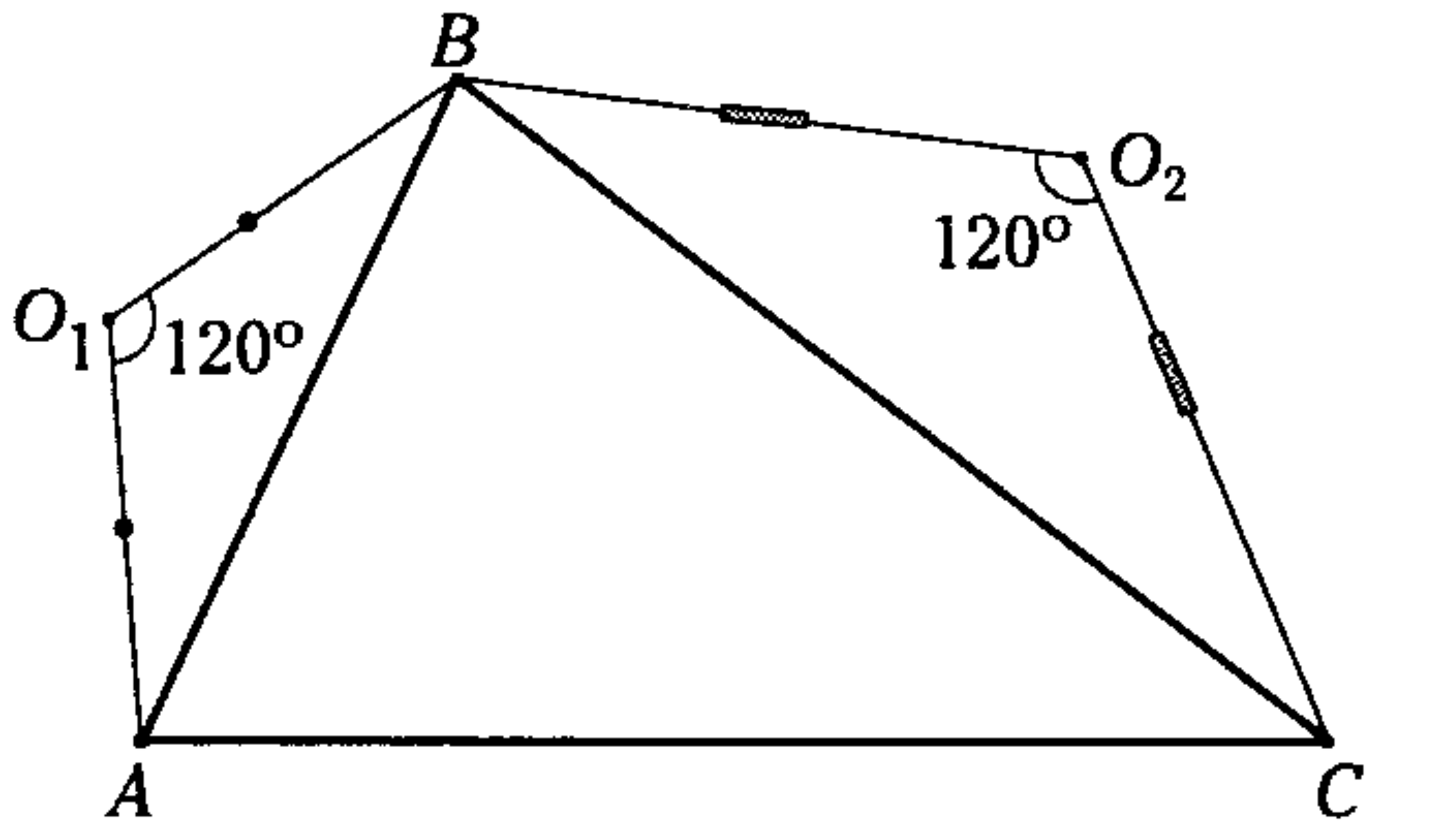


Figura 13.65

De la figura 13.65, podemos advertir que

B = Rot. A (O_1; 120°)

C = Rot. B (O_2; 120°)

Podemos pasar directamente de A a C con una rotación con centro en O_3 y ángulo de giro de 240°.

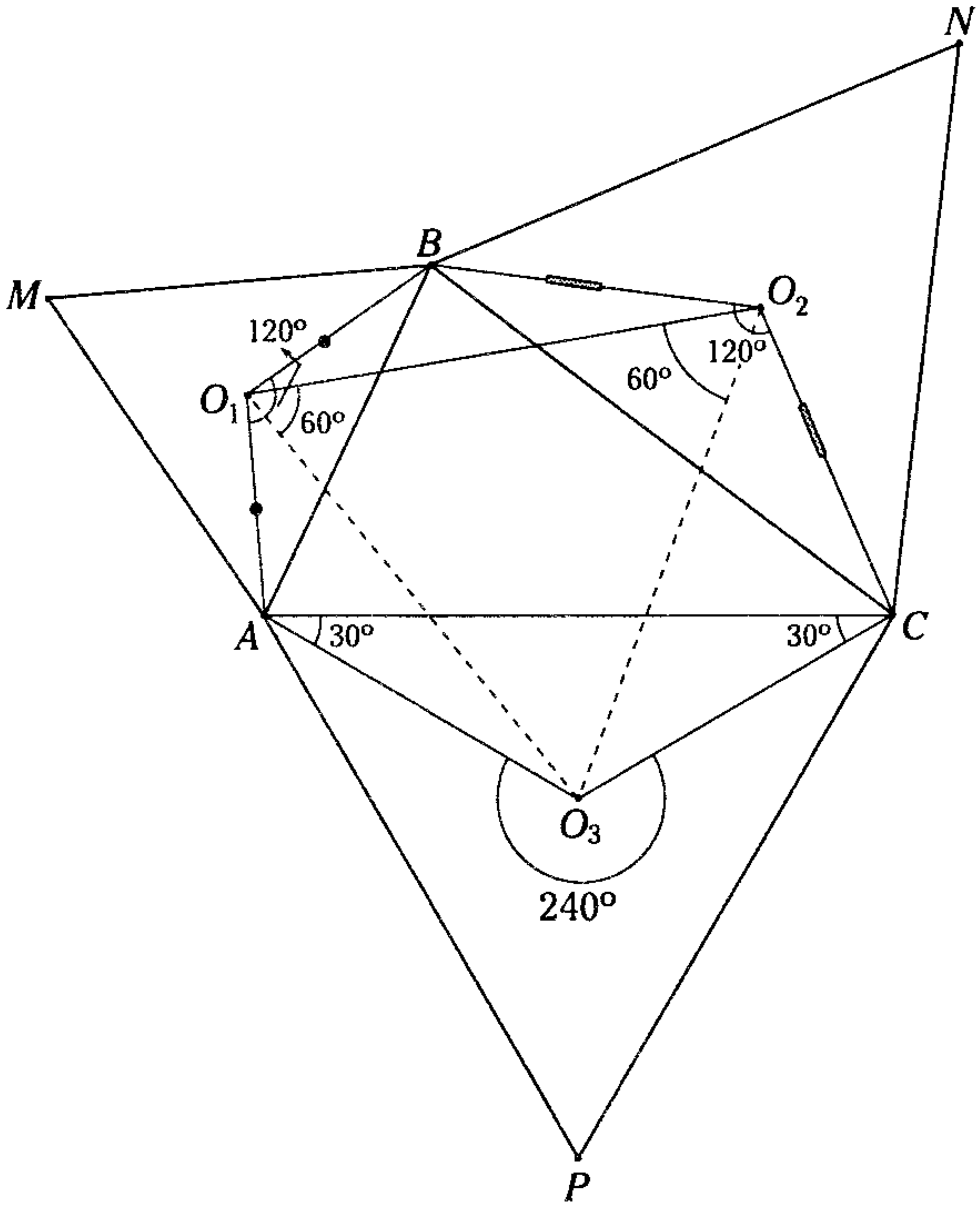


Figura 13.66

B = Rot. A (O_1 ; 120°); $\alpha_1 = 120°$

C = Rot. B (O_2 ; 120°); $\alpha_2 = 120°$

$\rightarrow$ C = Rot. A (O_3 ; $\alpha_1 + \alpha_2$) = Rot. A (O_3 ; 240°)

para ubicar O_3; por O_1 trazamos una recta que forme $\frac{\alpha_1}{2} = 60°$ con $\overline{O_1O_2}$ y por O_2 trazamos una recta que forme $\frac{\alpha_2}{2} = 60°$ con $\overline{O_2O_1}$, donde se intersecan estas rectas ese punto es O_3. (Ver producto de rotaciones de una figura).

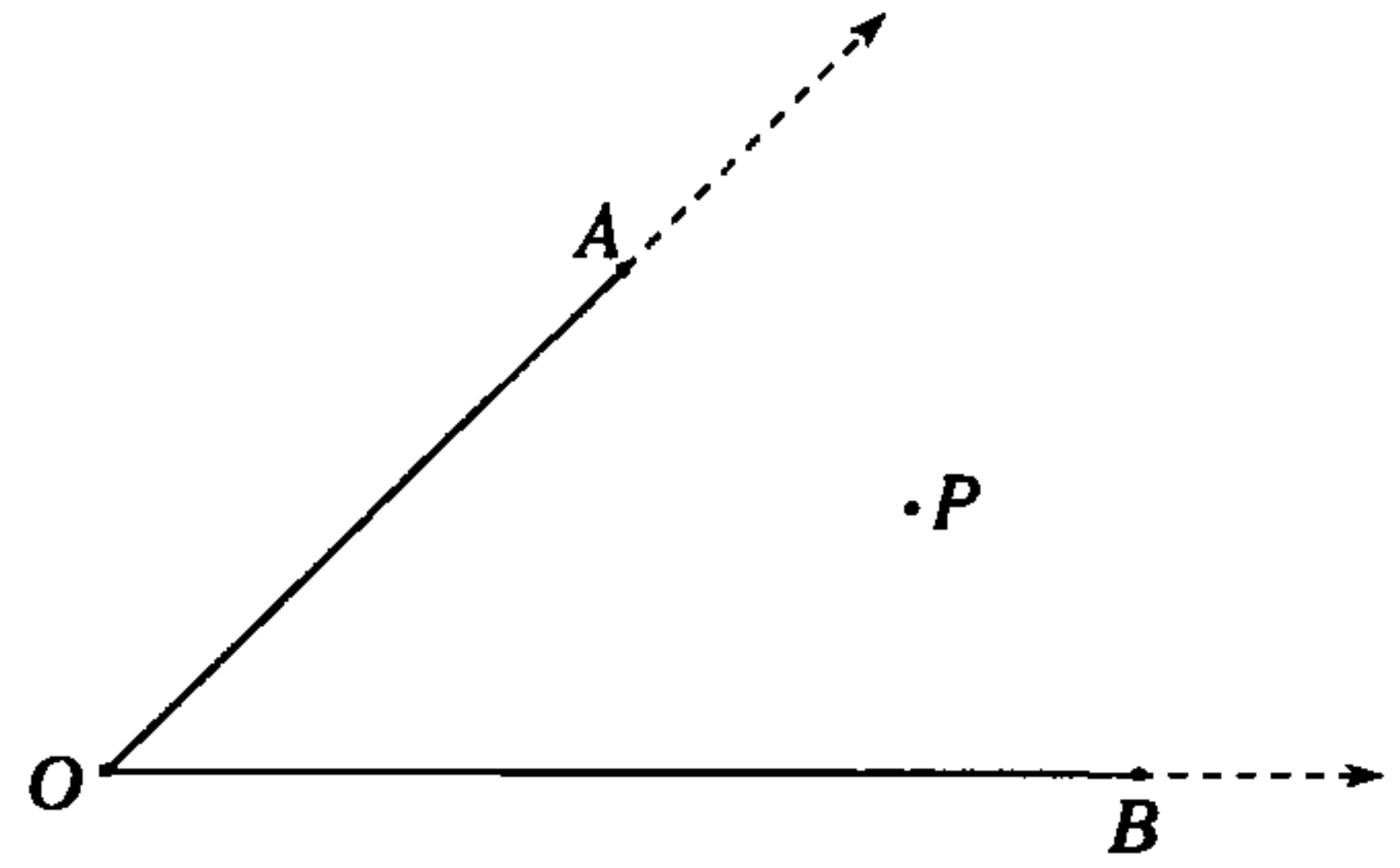
Entonces $O_3A = O_3C$ y la $m\measuredangle AO_3C = 240°$, por lo tanto el triángulo AO_3C resulta ser notable de (30°; 120°; 30°) por lo tanto O_3 coincide con el centro del triángulo equilátero APC.

como $m\measuredangle O_2O_1O_3 = m\measuredangle O_1O_2O_3 = m\measuredangle O_1O_3O_2$

$\rightarrow$ $m\measuredangle O_1O_2O_3$: triángulo equilátero.

Problema 18

En el gráfico mostrado, trace una circunferencia que pase por P y sea tangente a $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.



Resolución

Para resolver este problema bastará con encontrar el centro de la circunferencia buscada. Para ello trazamos una circunferencia arbitraria tangente a $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, así como la bisectriz del $\measuredangle AOB$.

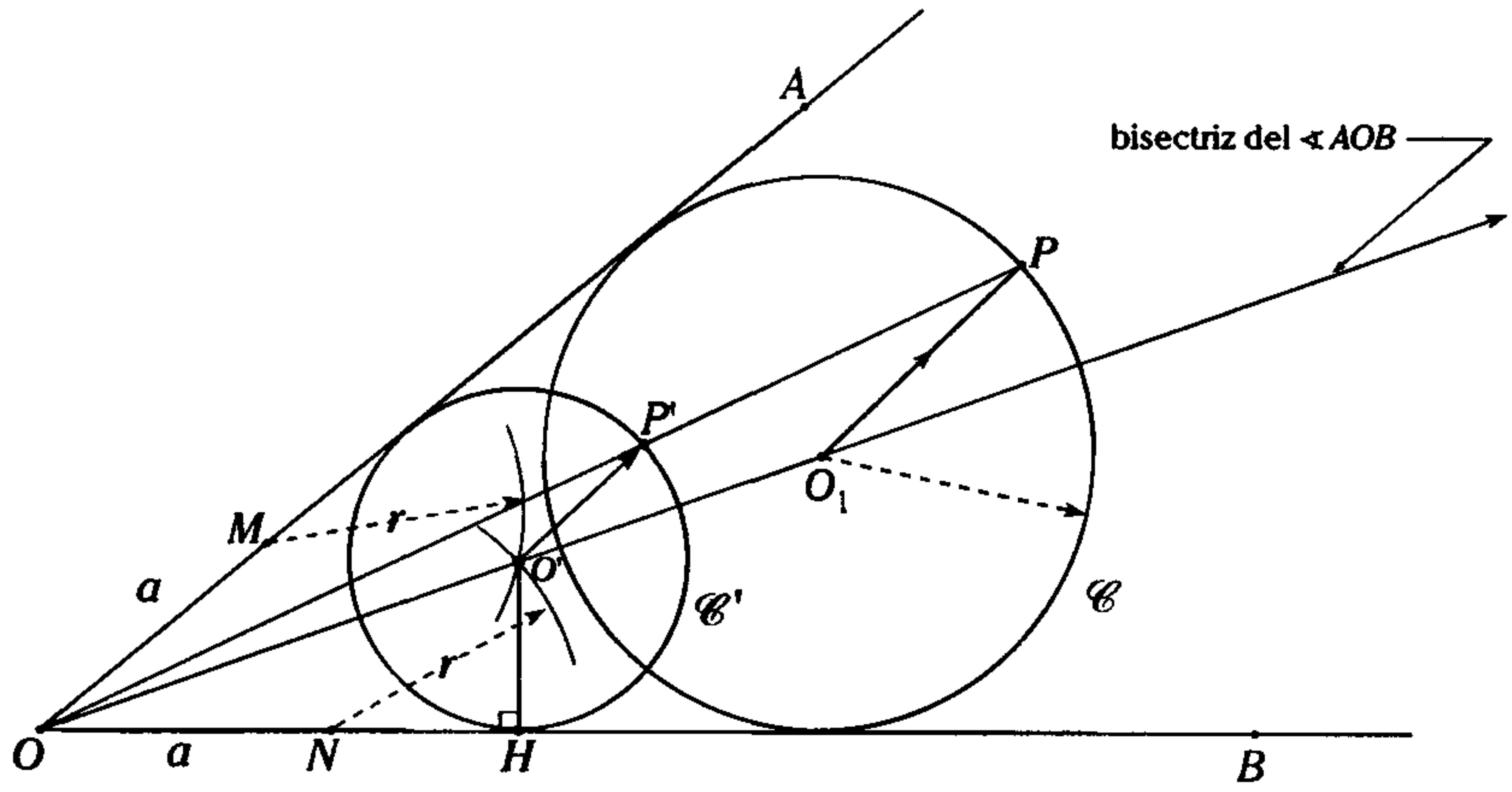


Figura 13.67

Entonces sea OM = ON = a (M en $\overline{OA}$, N en $\overline{OB}$) luego con centro en M y N y con radio r ubicamos O trazamos $\overline{O'H} \perp \overline{OB}$ con centro en O' y radio $O'H$ trazamos la circunferencia $\mathscr{C}'$ que es tangente a $\overline{OB}$ y $\overline{CA}$ respectivamente (H: punto de tangencia).

$\mathscr{C}'$ interseca a OP en P'.

Luego por P trazamos una recta paralela a $O'P'$ que interseca a $\overline{OO'}$ en O_1 siendo este punto el centro de la circunferencia buscada.

Finalmente con centro en O_1 y radio $\overline{O_1P}$ trazamos la circunferencia $\mathscr{C}$ que será tangente a $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y contiene a P.

Observación

Como $\overline{OP}$ interseca a $\mathscr{C}'$ en dos puntos, cada uno de ellos determina una circunferencia $\mathscr{C}$. Por consiguiente, este problema admite dos soluciones.

Problema 19

En un triángulo ABC, m∢$ABC = 60°$. Si en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos medios M y N, respectivamente; además, P es el punto de Torricelli, determine m∢NPM.

A) 90° B) 60° C) 120° D) 150° E) 135°

Resolución

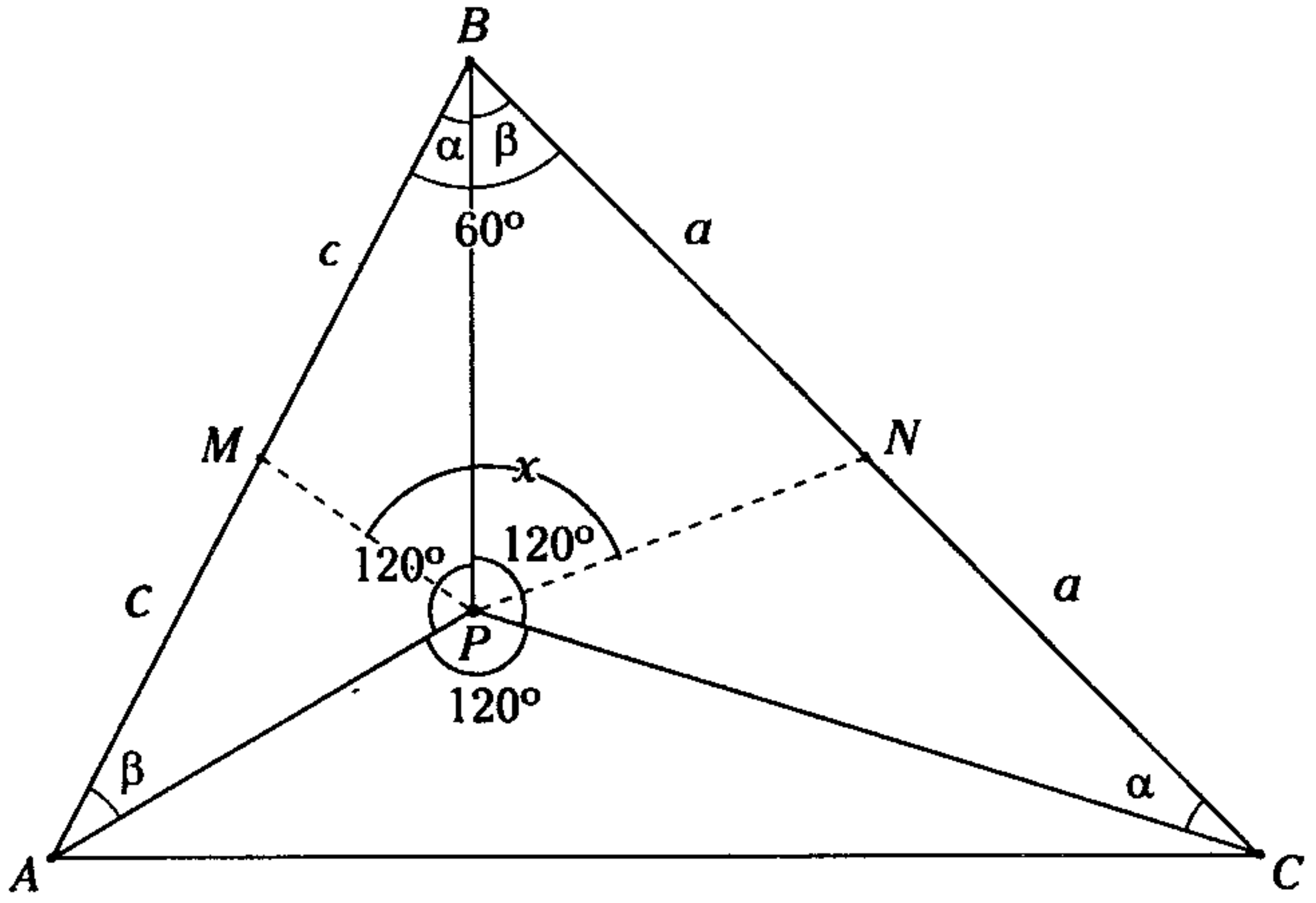


Figura 13.68

Sabemos que

m∢APB = m∢BPC = m∢ABP = 120°

por ser P, Punto de Torricelli.

Sean m∢$ABP = \alpha$ y m∢$PBC = \beta$ → $\alpha + \beta = 60°$.

En el △BPC,

m∢PCB + m∢PBC = 60°. como m∢$PCB = \beta$

→ m∢$PCB = \alpha$

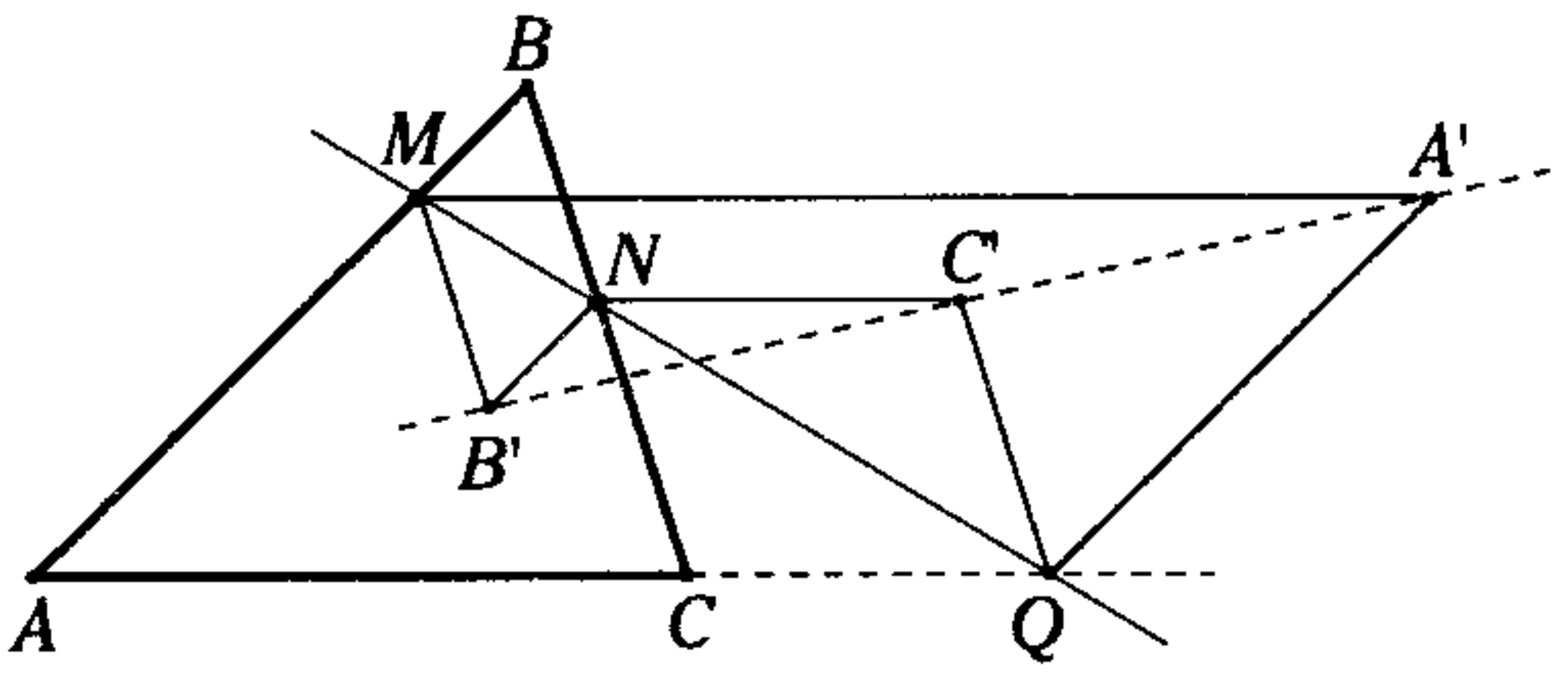
Significa así que el △CPB es el resultado de aplicar una homotecia de razón $\frac{BC}{AB}$ y un giro de 120° al △BPA, si las medianas PN y PM son homólogas, por conservar la medida del ángulo de giro,

∴ m∢NPM = 120°

CLAVE C

Problema 20

En el gráfico mostrado, $AMA'Q$; $BNB'M$ y $CNC'Q$ son romboides. Demuestre que A', B' y C' son colineales.



Resolución

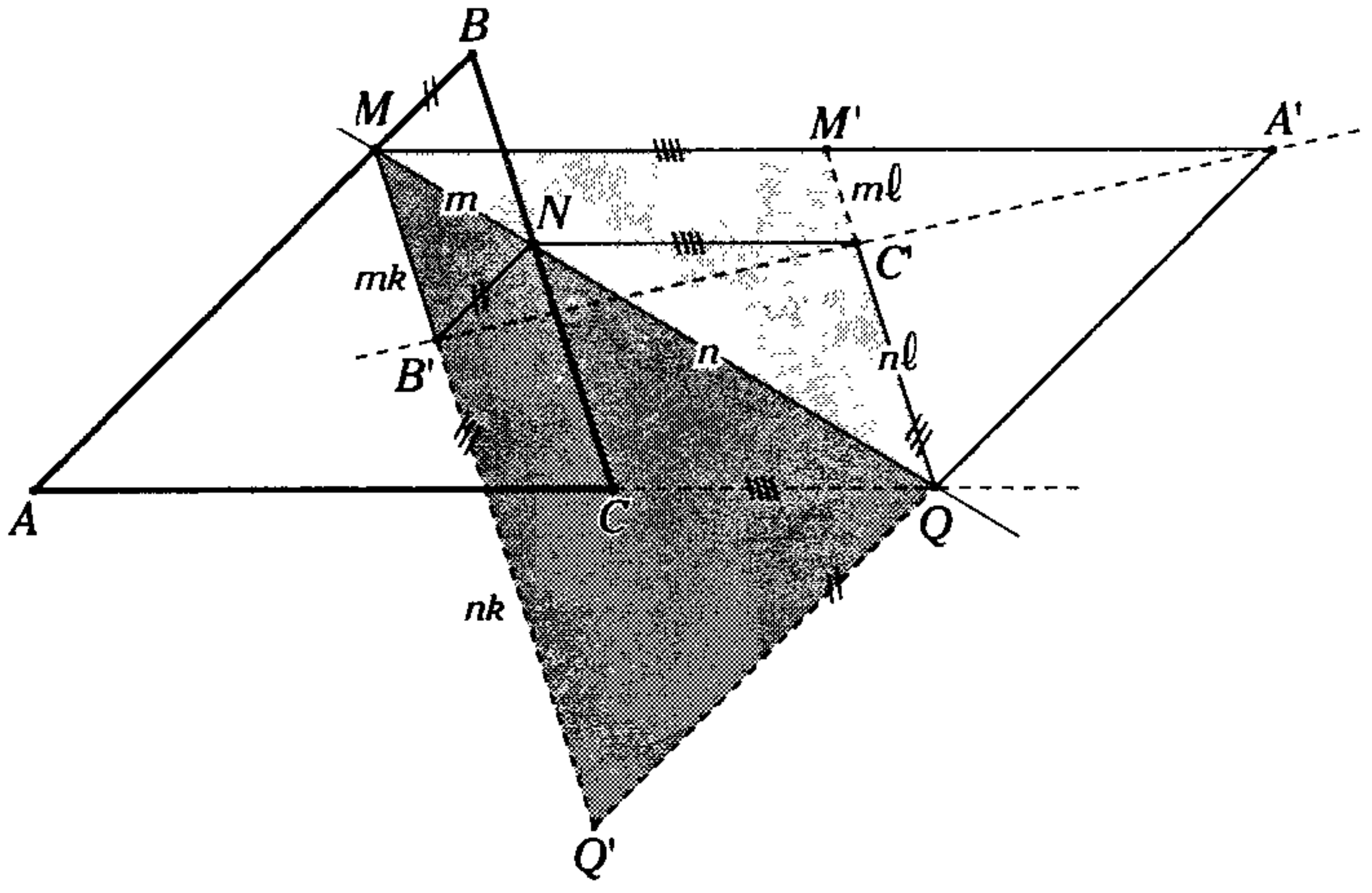


Figura 13.69

Prolongamos $\overline{MB'}$ y $\overline{A'Q}$ y $\overline{QC'}$ hasta Q' y M'

En el $\triangle QMQ'$: $\overline{QQ'} \parallel \overline{NB'}$ $\rightarrow$ $\dfrac{MB'}{B'Q'}=\dfrac{m}{n}$

En el $\triangle MQM'$: $\overline{MM'} \parallel \overline{NC'}$ $\rightarrow$ $\dfrac{M'C'}{C'Q'}=\dfrac{m}{n}$

$\rightarrow$ $\dfrac{MB'}{B'Q'}=\dfrac{M'C'}{C'Q}$ (I)

y como $\overline{MQ'} \parallel \overline{M'Q}$ entonces A' es centro de homotecia de $\overline{M'Q}$ y $\overline{MQ'}$

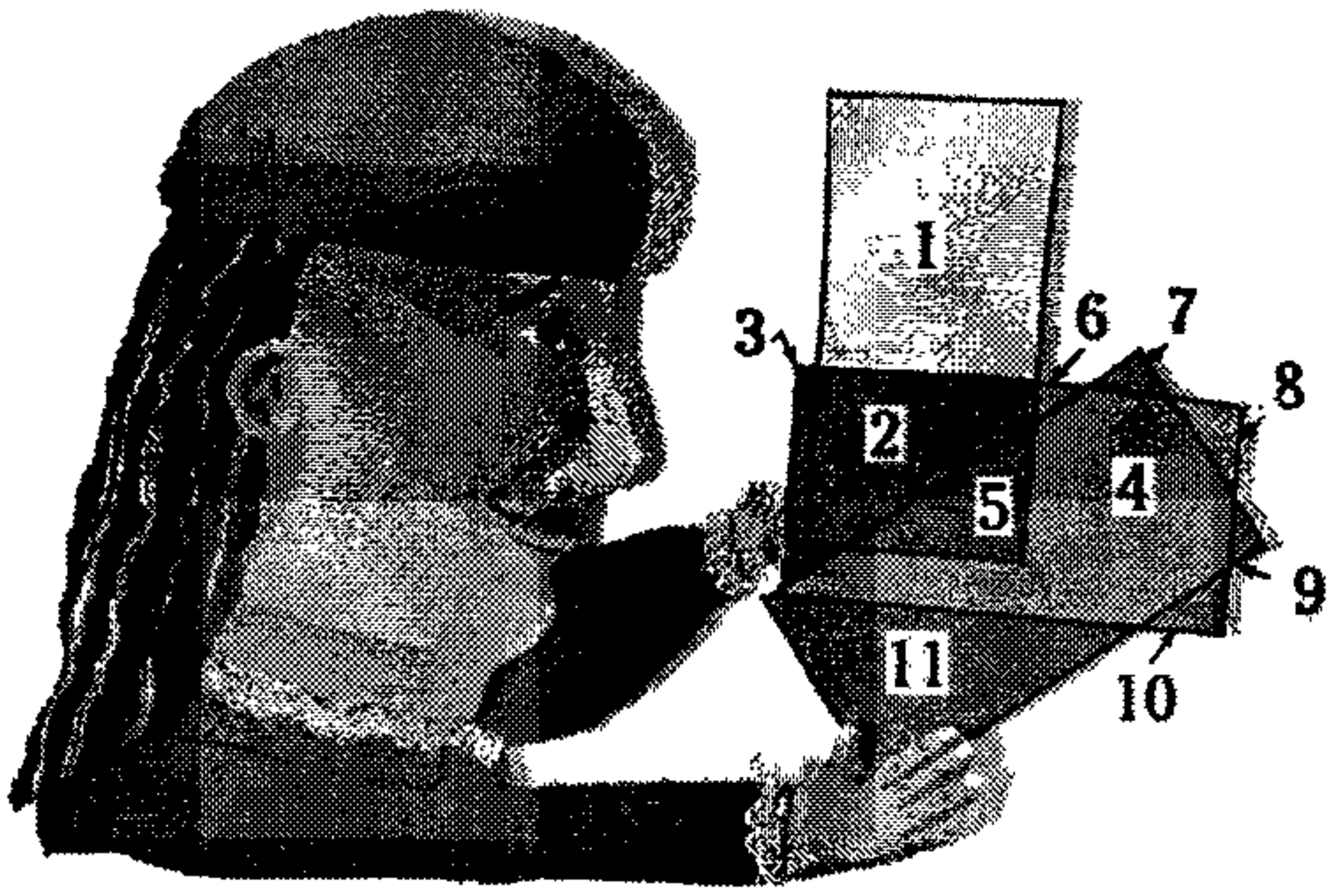
Sabemos que si $\forall$ P' de $\overline{M'Q}$ $\exists$ un P en $\overline{MQ'}$ / $\dfrac{M'P'}{P'Q}=\dfrac{MP}{PQ'}$, entonces los puntos P, P' y A' son colineales.

Por lo tanto de (I) concluimos que B',C' y A' son colineales.

Problemas Recreativos

1. Arco iris de cristal

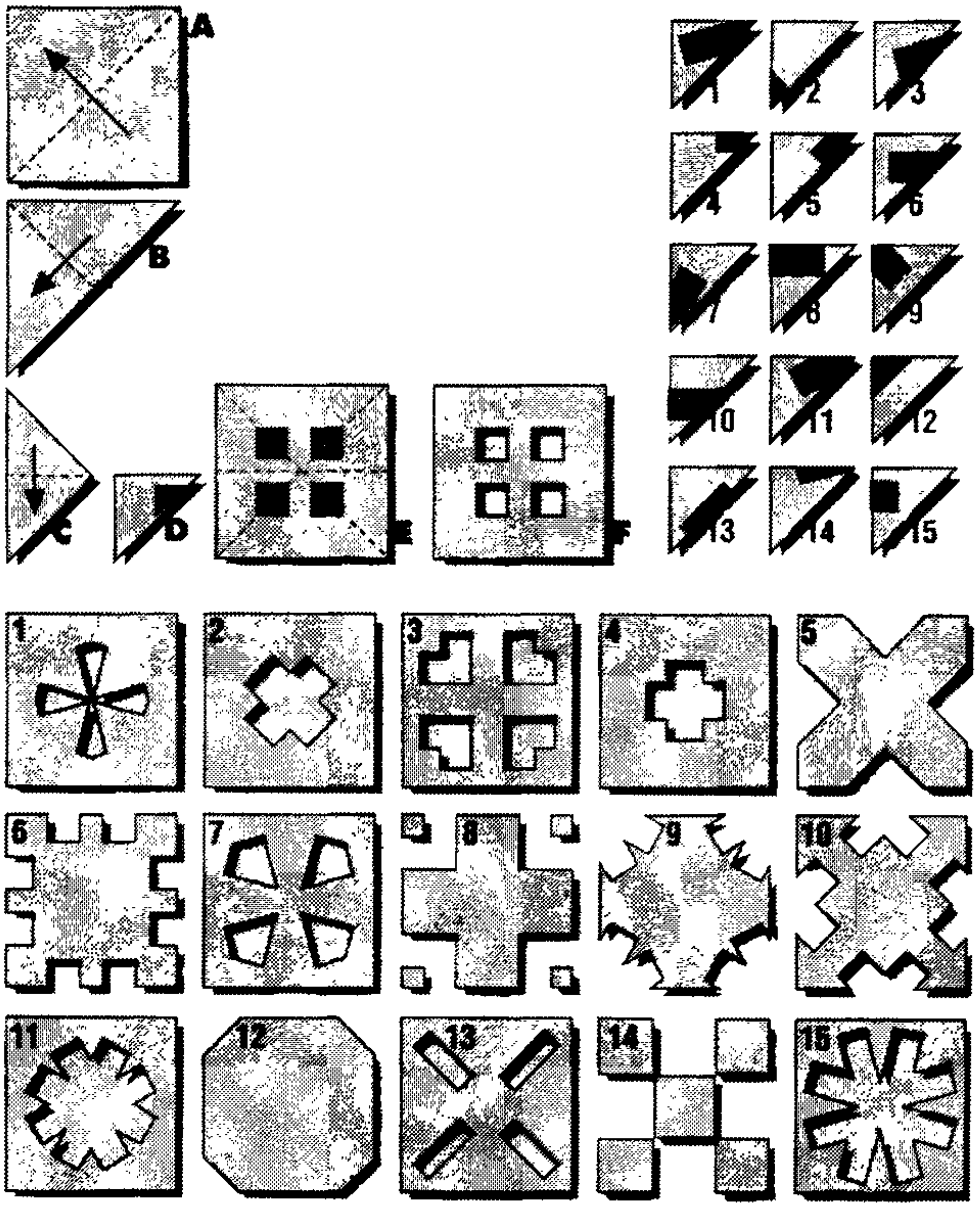
Le corresponde ser aprendiz de Traslucentro, el gran artista italiano fabricante de vitrales. Después de varios años soldando metales y cortando vidrios, ha llegado la hora de poner a prueba sus habilidades. El maestro le entrega tres marcos metálicos, cada uno de 1,20 × 0,60 metros, ya que se necesita un colgante que utilice tantos colores como sea posible. Coloque estos tres marcos uno sobre otro, y vea cuántas secciones separadas puede obtener. Rellene cada una con un color distinto.



Una sección es cualquier área limitada por un pedazo de marco en cada uno de sus lados (arriba puede ver un ejemplo con 13 partes). ¿Cuál es la mayor cantidad de secciones que puede obtenerse de los tres marcos?

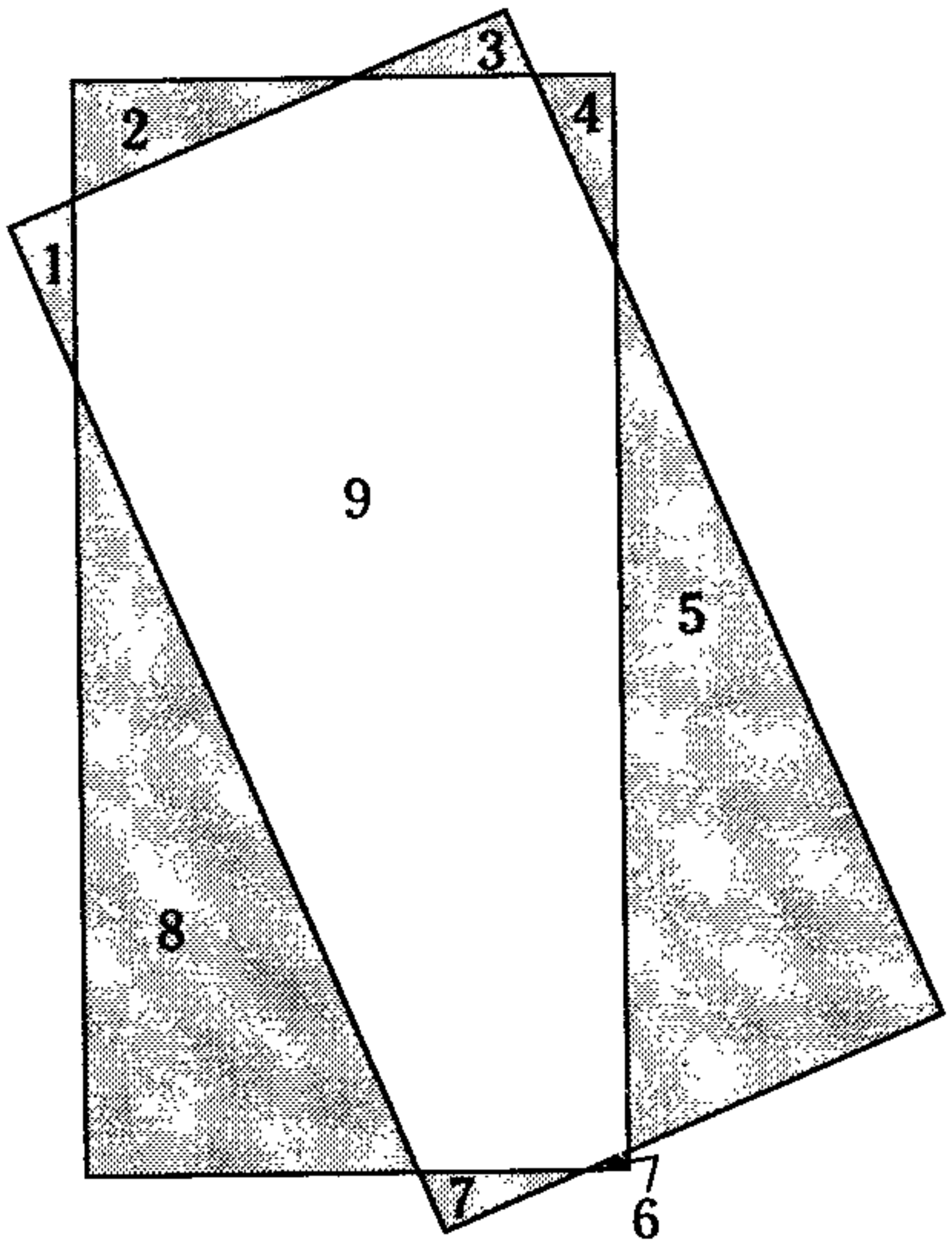
2. Figuras plegadas

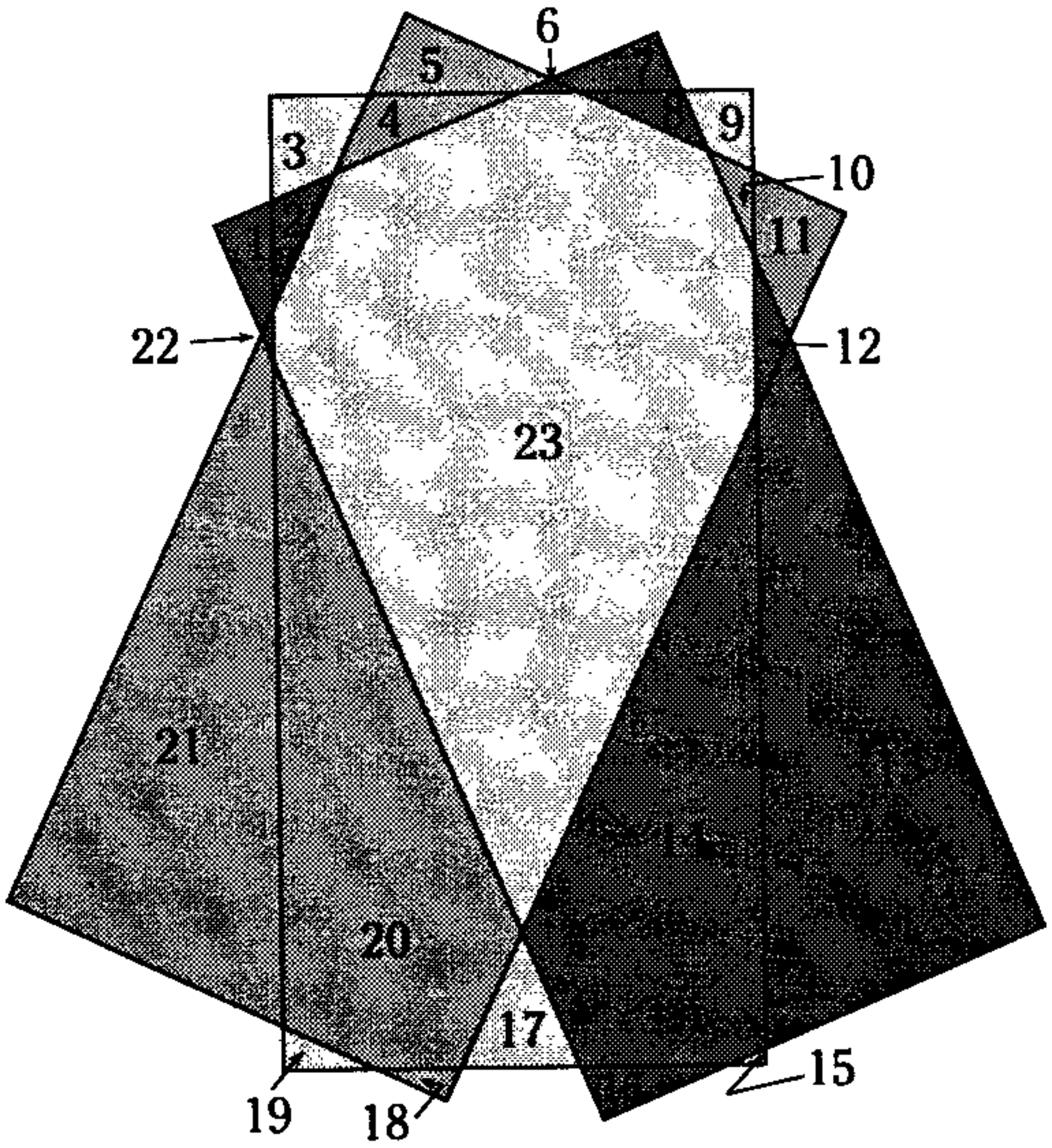
Tras los sucesivos plegados *A*, *B* y *C*, se puede ver cómo se ha reducido un cuadrado de papel a un pequeño triángulo (D) de superficie ocho veces menos. A continuación, si se realiza un corte haciendo la figura que aparece en color rojo y se vuelve a desplegar el papel, nos encontramos con los agujeros que se muestran en E, que dan como resultado un papel perforado como F. Abajo se tienen 15 papeles que han sido realizados al darles 15 cortes con las formas que pueden verse en los triángulos de la derecha. El objetivo de este pasatiempo es que se emparejen los triángulos de la derecha con los cuadrados que se ven abajo.



Resolución 1

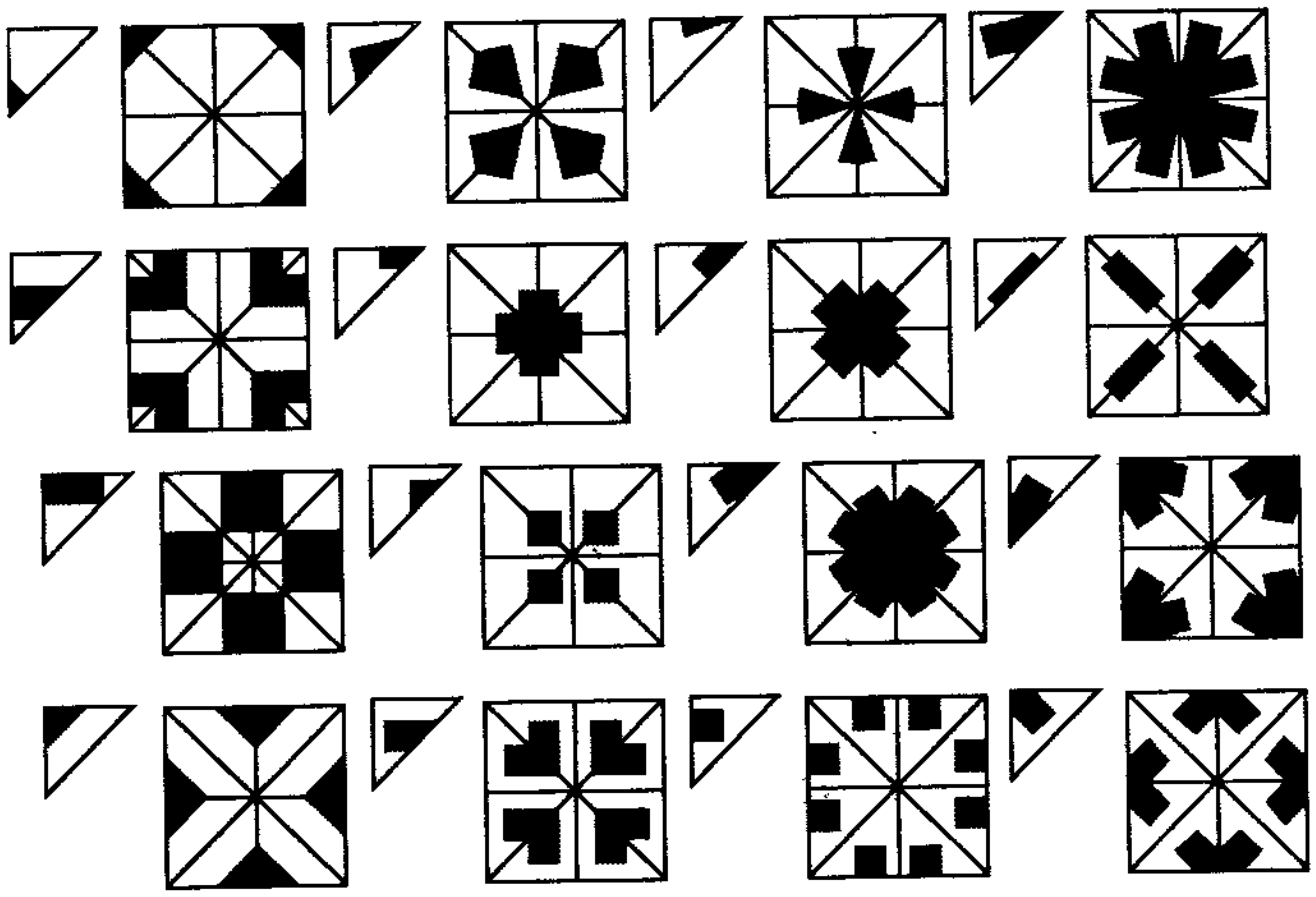
Cómo se trata de obtener la mayor cantidad de secciones, empecemos con dos marcos. Vemos que podemos obtener como máximo 9 secciones y esto se consigue superponiendo los cuadros para luego trasladarlos y girarlos a la vez. Lo mismo se hace con los 3 marcos con esto se obtienen 23 secciones como máximo.





Resolución 2

Al desarrollar las hojas plegadas, se obtienen las imágenes que aparecen a su costado; de esta manera a la figura plegada 2 le corresponde el desarrollo 12 y así sucesivamente se, puede notar que los desarrollos presentan simetría de orden 4.



Problemas Propuestos

1. En un cuadrado $ABCD$, se ubica el punto M en $\overline{AB}$, tal que $AM = 2(MB)$. Si en $\overline{MC}$ se ubica el punto P y las rectas AP y DP intersecan a $\overline{BC}$ en Q y N, respectivamente, indique $\frac{NQ}{QC}$.

   A) 1 B) 2 C) 3
   D) 0,5 E) 0,25

2. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, exteriormente se traza el triángulo equilátero BCD. Halle la distancia entre los puntos medios de $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$, si $AD=a$

   A) $\frac{a}{3}$ B) $\frac{a}{2}$ C) $\frac{a}{4}$
   D) $\frac{2a}{3}$ E) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$

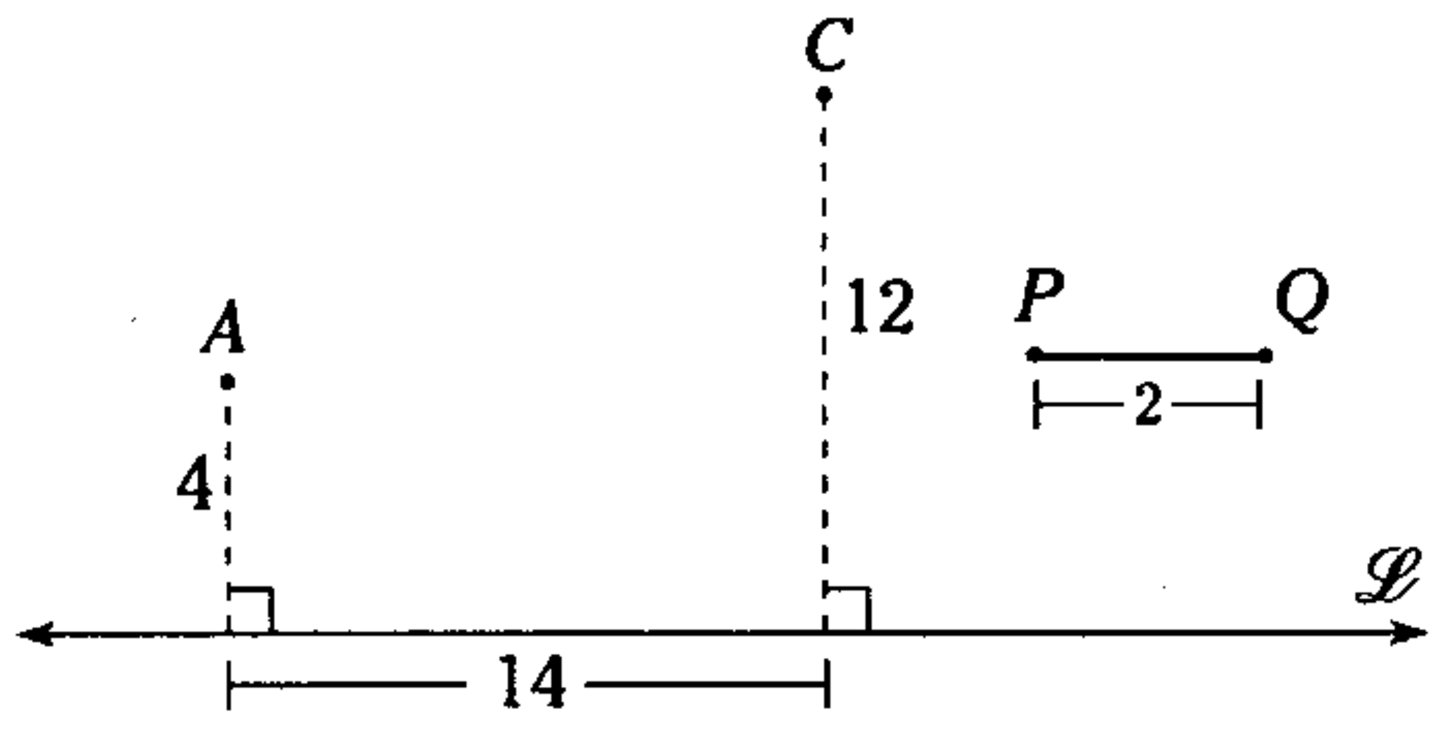
3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero en el que $EF = \frac{AB+CD}{2}$, donde E y F son los puntos medios de AD y BC, respectivamente. ¿Qué tipo de cuadrilátero es $ABCD$?

   A) Trapezoide simétrico
   B) Trapecio
   C) Paralelogramo
   D) Cuadrilátero inscriptible
   E) Rectángulo

4. Los puntos A y B están a un mismo lado de una recta y distan 1,25 m y 1,95 m, respectivamente, de ella. Si la distancia entre A y B es 2,5 m; calcule la longitud del menor recorrido para ir de A hasta B tocando a dicha recta.

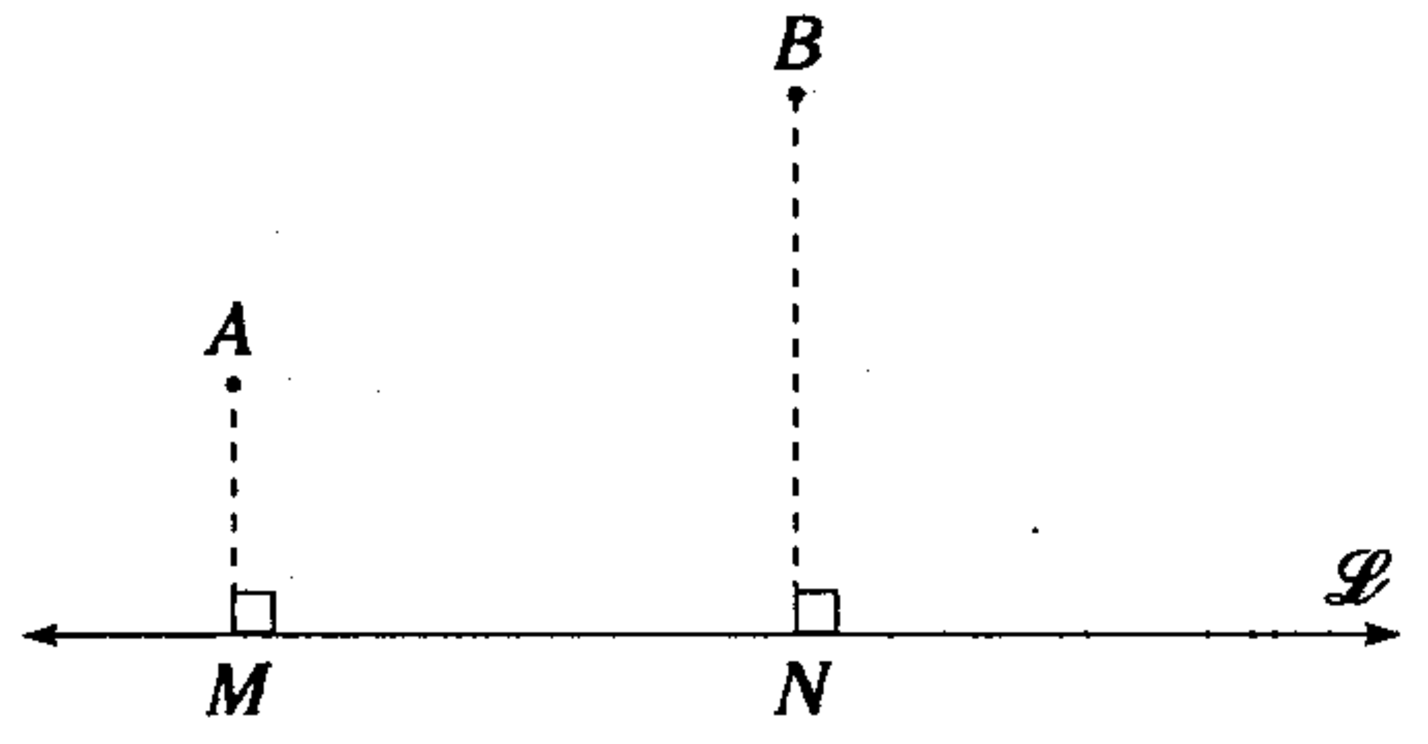
   A) 2,4 m B) 3,2 m C) 4 m
   D) 4,2 m E) 4,8 m

5. En el gráfico mostrado, ubique el segmento PQ en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, tal que el recorrido $APQC$ sea mínimo. Calcule en esa posición $AP + QC$.



   A) 15 B) 18 C) 20
   D) 22 E) 24

6. En el gráfico mostrado, $AM = \frac{BN}{3} = a$ y $MN = 2a\sqrt{3}$. Si se ubica en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ un punto P, tal que $m\measuredangle NPB = 2(m\measuredangle MPA)$, Señale $m\measuredangle APB$.



   A) 45° B) 60° C) 90°
   D) 120° E) 135°

7. Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia circunscrita al triángulo equilátero ABC, trace una cuerda PQ en $\mathscr{C}$, tal que $\overline{PQ}//\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ trisequen el segmento PQ. Si $AC = 6$ cm, indique PQ.

   A) 4 cm B) 6 cm C) 8 cm
   D) $6\sqrt{3}$ cm E) $3\sqrt{2}$ cm

14. Sea el triángulo ABC, exteriormente a los lados AB y AC se construyen los triángulos APB y AQC, tales que $m\measuredangle ABP = m\measuredangle ACQ = 45°$ y $m\measuredangle BAP = m\measuredangle CAQ = 30°$. Si exteriormente al lado BC se construye el triángulo RBC, tal que $m\measuredangle BCR = m\measuredangle CBR = 15°$, calcule la $m\measuredangle PRQ$.

A) 80° B) 60° C) 75°
D) 90° E) 120°

15. Dado un triángulo ABC, de baricentro G, en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos M y N, respectivamente, tal que $\overline{GM}//\overline{AC}$ y $\overline{MN}//\overline{AB}$. Si el perímetro de la región triangular GMN es 4 cm, señale el perímetro de la región triangular ABC.

A) 8 cm B) 10 cm C) 12 cm
D) 16 cm E) 18 cm

16. Sean M, N y Q puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Si $ABCD$ un cuadrilátero de diagonales perpendiculares y congruentes, indique $m\measuredangle MQN$.

A) 45° B) 60° C) 30°
D) 90° E) 135°

17. Se sabe que ABC es un triángulo de incentro I, $AB=6$, $BC=8$ y $AC=7$. Calcule $CM-AM$, si M es el homotético de I, con centro en B y razón 3/2 (M = Hom. I (B;1,5)).

A) 0,3 B) 0,5 C) 0,8
D) 2 E) 1

18. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la altura BH. Si $I_1 \in I_2$, los incentros de ABH y HBC; M y N los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{I_1I_2}$, respectivamente, calcule $m\measuredangle MHN$.

A) 45° B) 53° C) 37°
D) 60° E) 90°

19. Dado un triángulo equilátero ABC, de centro O, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos M y N, respectivamente. Si $AM = BN$, señale la $m\measuredangle MON$.

A) 90° B) 60° C) 120°
D) 135° E) 108°

20. En un triángulo ABC (escaleno), de circunradio R, las alturas AM y BN se intersecan en P. Si L es punto medio de $\overline{CP}$, señale el circunradio del triángulo MNL.

A) R B) $\frac{R}{3}$ C) $\frac{R}{4}$
D) $\frac{2R}{3}$ E) $\frac{R}{2}$

21. Un segmento AB se encuentra en una de las regiones determinadas por las rectas secantes $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ (A y B no pertenecen a ninguna de las rectas).
En $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ se ubican los puntos M y N respectivamente, tal que $\overline{MN}$ se encuentra en la misma región del $\overline{AB}$. Si se cumple que cuando $AM + MN + NB$ es mínimo, $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ son perpendiculares, calcule la medida del ángulo que determinan $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ ($\overline{AM} \cap \overline{BN} = \phi$).

A) 90° B) 100° C) 120°
D) 135° E) 145°

22. En un cuadrilátero $ABCD$ circunscrito a una circunferencia, la medida de los ángulos interiores en B y D son respectivamente 53° y 90°. Si $AB - AD = 3$ cm, calcule el radio de la circunferencia inscrita en $ABCD$.

A) 3 cm B) 4 cm C) 5 cm
D) $3\sqrt{2}$ cm E) $4\sqrt{2}$ cm

8. Si construimos cuadrados externamente sobre los lados de un paralelogramo, entonces sus centros son vértices de un

A) trapecio.
B) paralelogramo.
C) rectángulo.
D) trapezoide simétrico.
E) cuadrado.

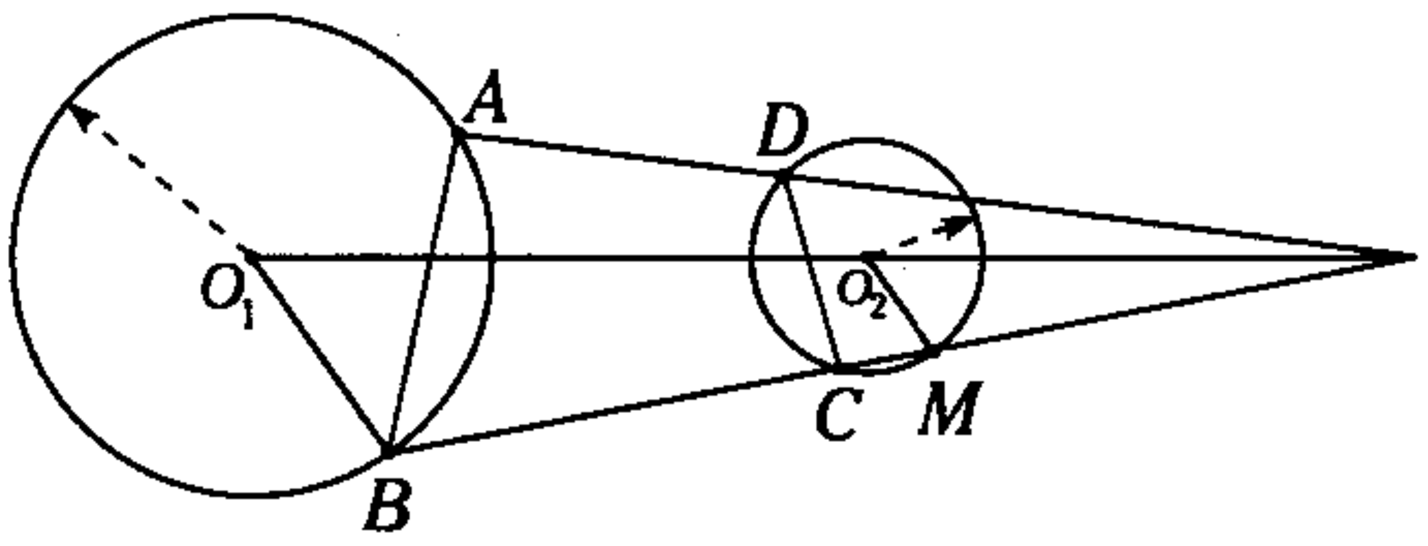
9. Dado un triángulo acutángulo ABC cuyos lados reflejan la luz, indique dónde debería estar situada exactamente sobre el lado AB una fuente luminosa, de forma que el rayo emitido después de reflejarse sucesivamente en los otros dos lados retornará a la fuente.

A) En el punto medio de $\overline{AB}$.
B) En el pie de la bisectriz interior trazada desde C.
C) En el pie de la altura trazada desde C.
D) En el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con $\overline{AB}$.
E) En el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{AB}$ con dicho lado.

10. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de un segmento, tal que uno de los extremos permanece fijo mientras el otro recorre una circunferencia dada?

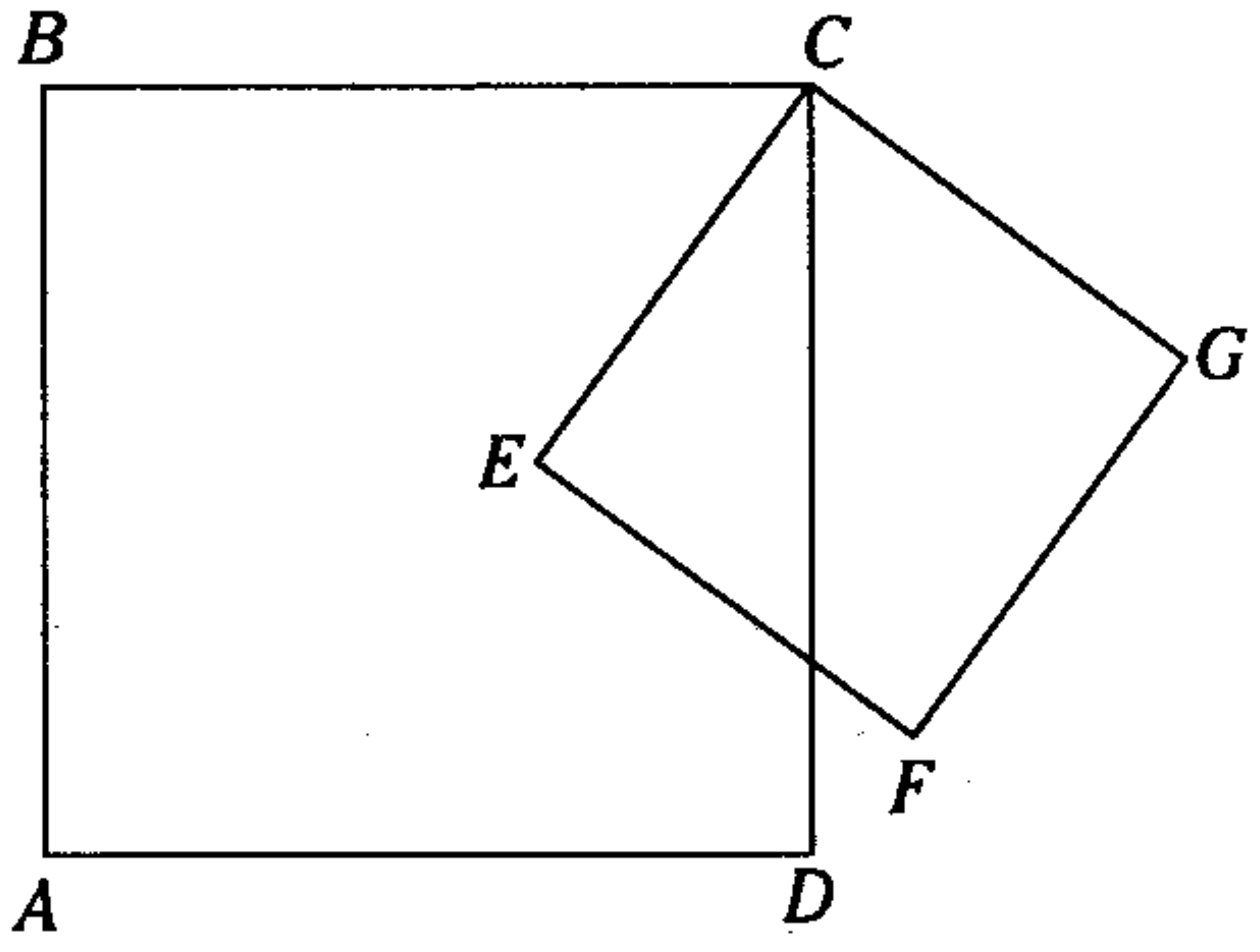
A) Un segmento
B) Un punto
C) Una elipse
D) Una circunferencia
E) Un círculo

11. En la figura mostrada, m∢ABC = 80°. Calcule m∢ADC, si $\overline{O_1B} \parallel \overline{O_2M}$.



A) 80° B) 100° C) 90°
D) 130° E) 140°

12. En la figura, se muestran los cuadrados $ABCD$ y $CEFG$. Si m∢ECD = 40°, calcule la medida del ángulo que determinan $\overline{EG}$ y $\overline{BD}$.



A) 40° B) 50° C) 60°
D) 45° E) 65°

13. Sea ABC un triángulo acutángulo y D un punto en su interior, tal que $(AC)(BD) = (AD)(BC)$ y m∢ADB = 90° + m∢ACB,

determine $\dfrac{(AB)(CD)}{(AC)(BD)}$

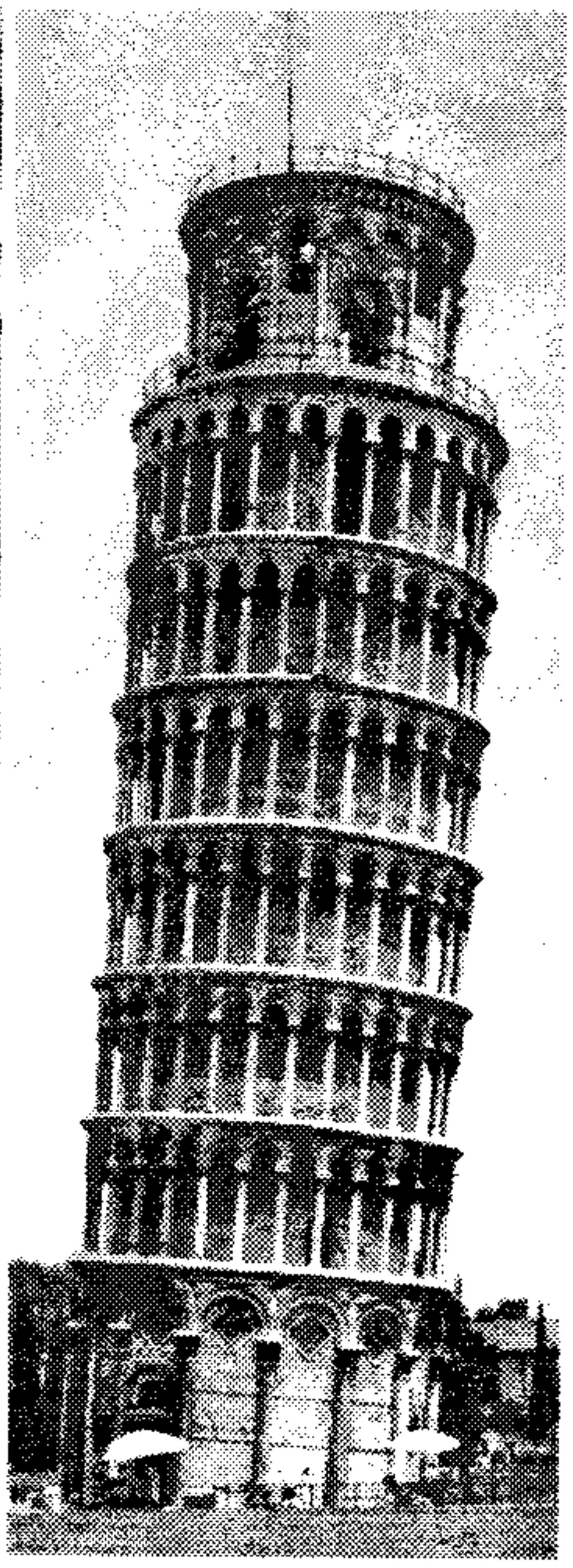
A) 1 B) 2 C) 4
D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

1	D
2	B
3	B
4	C
5	C
6	C
7	D
8	E
9	C
10	D
11	B
12	D
13	D
14	D
15	C
16	A
17	E
18	A
19	C
20	E
21	D
22	A

Claves

Capítulo XIV

Semejanza de figuras



Las maquetas son réplicas en tamaño reducido de un monumento, edificio, etc, que sirven para estudiar las fuerzas del viento o fuerzas sísmicas a escala, y conocer, así, los efectos que en la realidad se podrían generar. Podemos comprobar, así, la importancia del tema de semejanza de figuras.

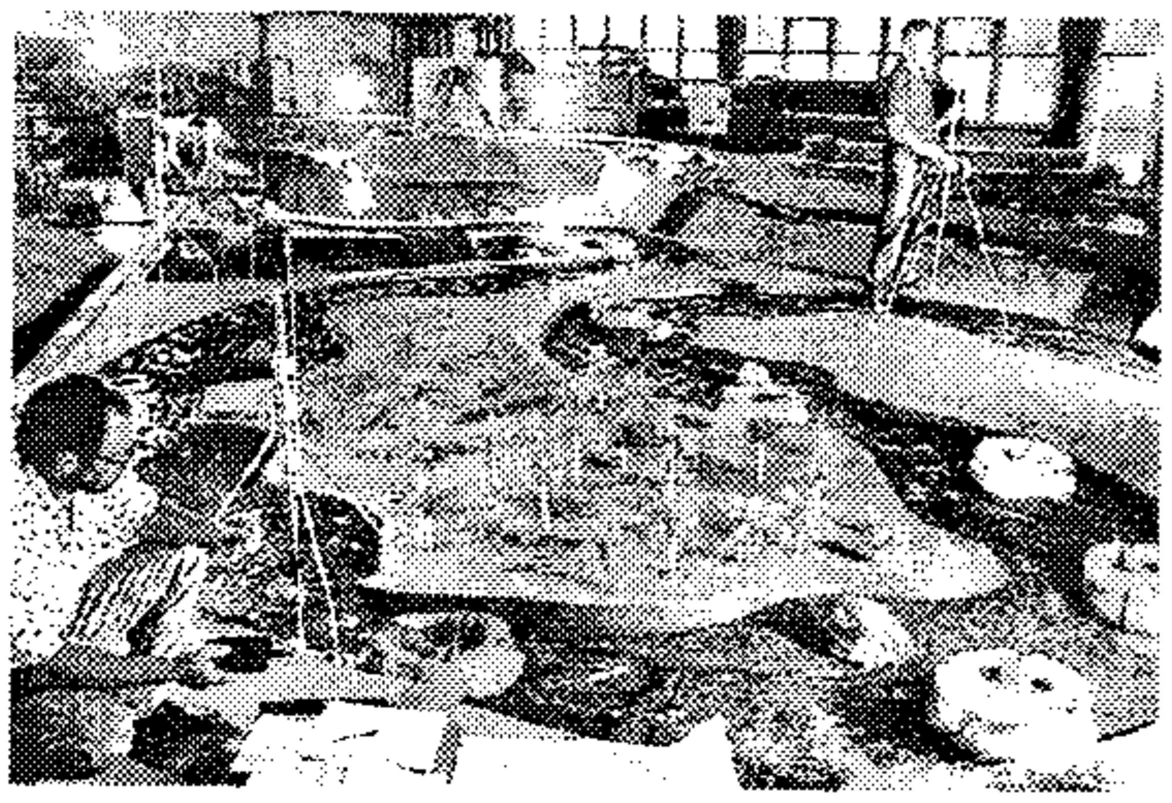
Semejanza de figuras

OBJETIVOS

- Conocer el concepto de figuras semejantes.
- Reconocer los triángulos semejantes.
- Aplicar la semejanza de triángulos para calcular las longitudes de los lados y medidas angulares de un polígono.

INTRODUCCIÓN

Desde tiempos inmemorables, el hombre observó en la naturaleza cambios de tamaños que mantenían cierta proporción. En la mayoría de los seres vivos, por ejemplo, los animales y seres humanos mostraban crecimiento de sus extremidades y otras partes de su fisonomía, de manera proporcional. En algunas plantas como la coliflor, sus partes son réplicas de sí mismas, pero de tamaño diferente. Las figuras semejantes tienen gran aplicación en los diversos fenómenos que estudiaban otras ramas de la ciencia como la Física y la Química; esto puede observarse en la óptica física, en los compuestos de una mezcla, en la geodesia astronómica, en el arte, etc. Comprobamos así que no solo hay semejanza entre un plano de fachada de un edificio y la fachada real, sino también que resulta aplicable en la construcción de maquetas o simuladores que permiten estudiar las causas de los fenómenos, pero en escala diferente.



Para que los rápidos de un parque de atracciones no revistan el menor peligro, en este modelo, construido a escala, van modificando el relieve del suelo y estudiando cómo se transforman las corrientes de agua y el movimiento de las bolsas.

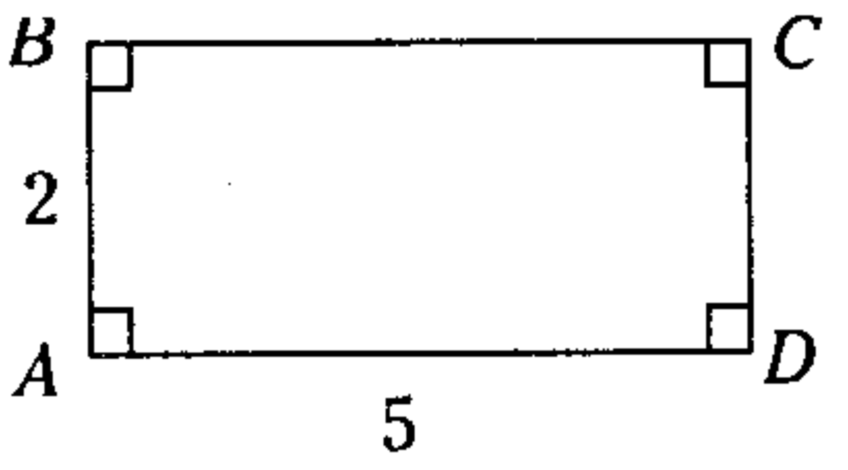
En el laboratorio de Grenoble (Francia) estudian la difusión de los gases contaminantes de un centro térmico urbano en una población cercana. Así, se conocen las dimensiones que debe tener la chimenea.

FIGURAS SEMEJANTES

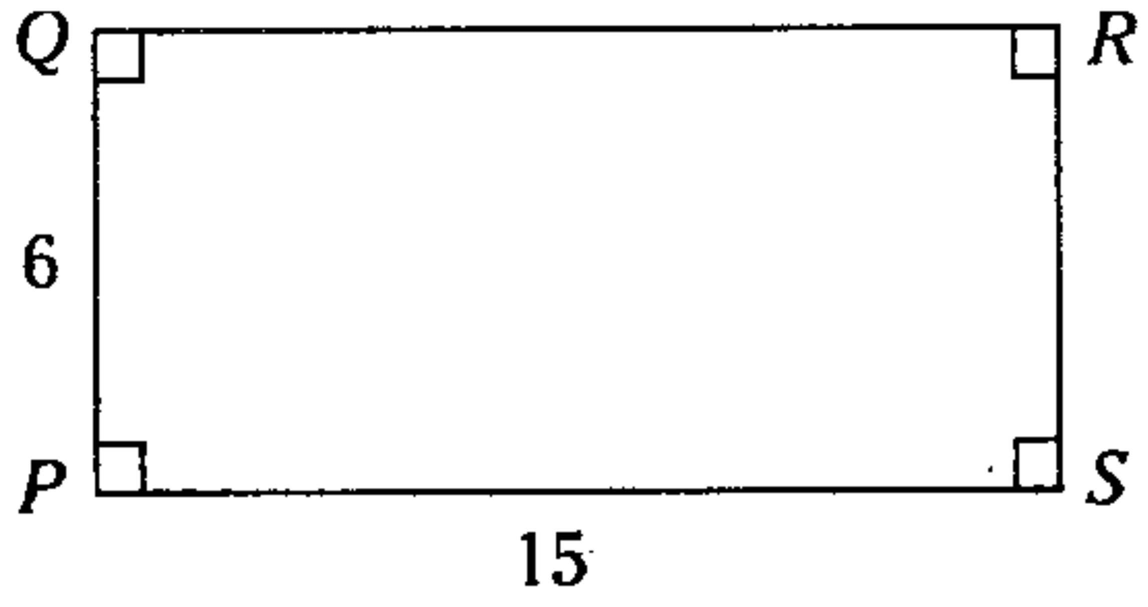
Dos figuras geométricas son semejantes cuando ambas presentan la misma forma y exista una transformación simple o un producto de transformaciones que al ser aplicada a una de ellas y al superponerlas sus puntos coincidan respectivamente (figuras congruentes).

Ejemplo

Al aplicar una transformación de homotecia de razón 3 a la figura 14.1(a) (ampliación), se obtendría la figura 14.2(a).

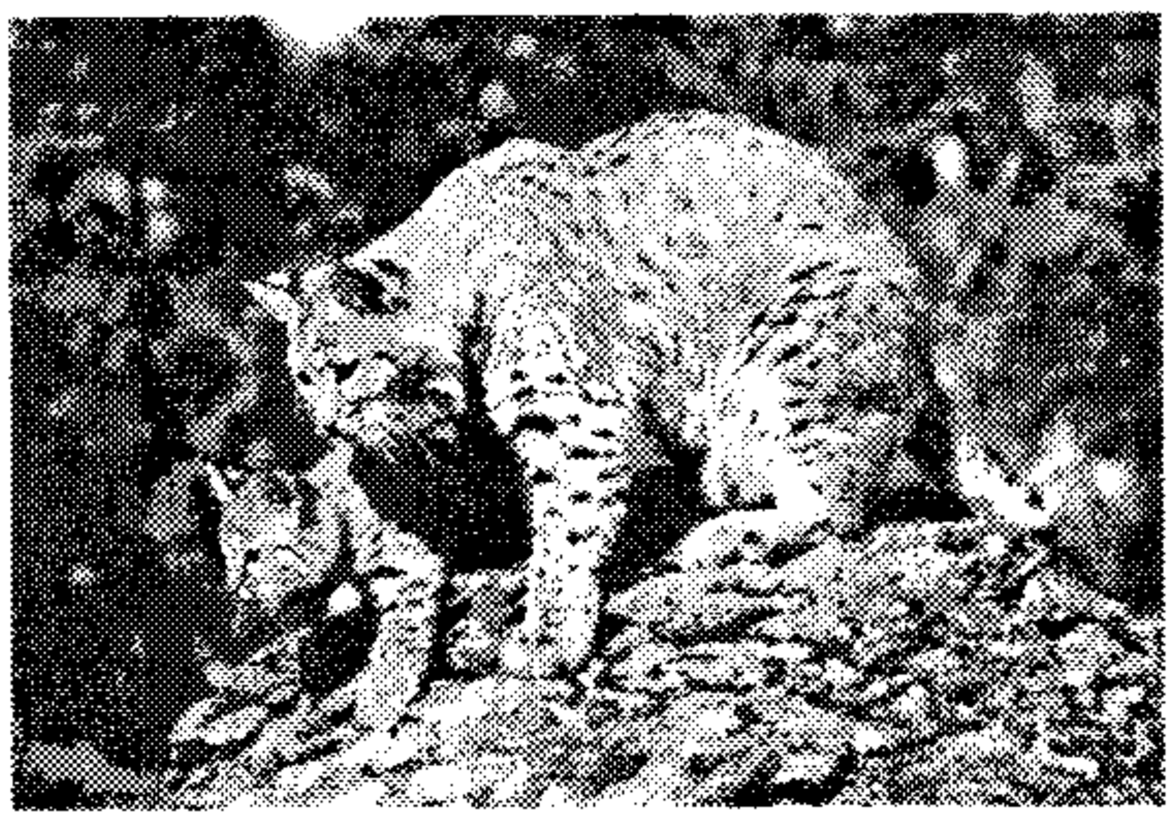


(a)



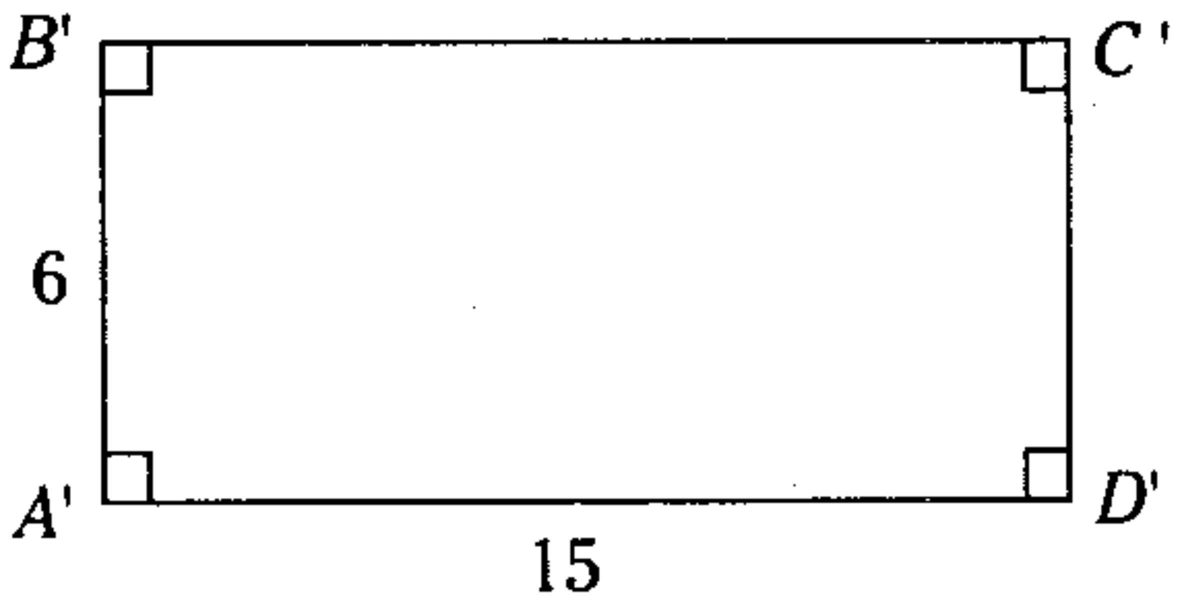
(b)

Figura 14.1

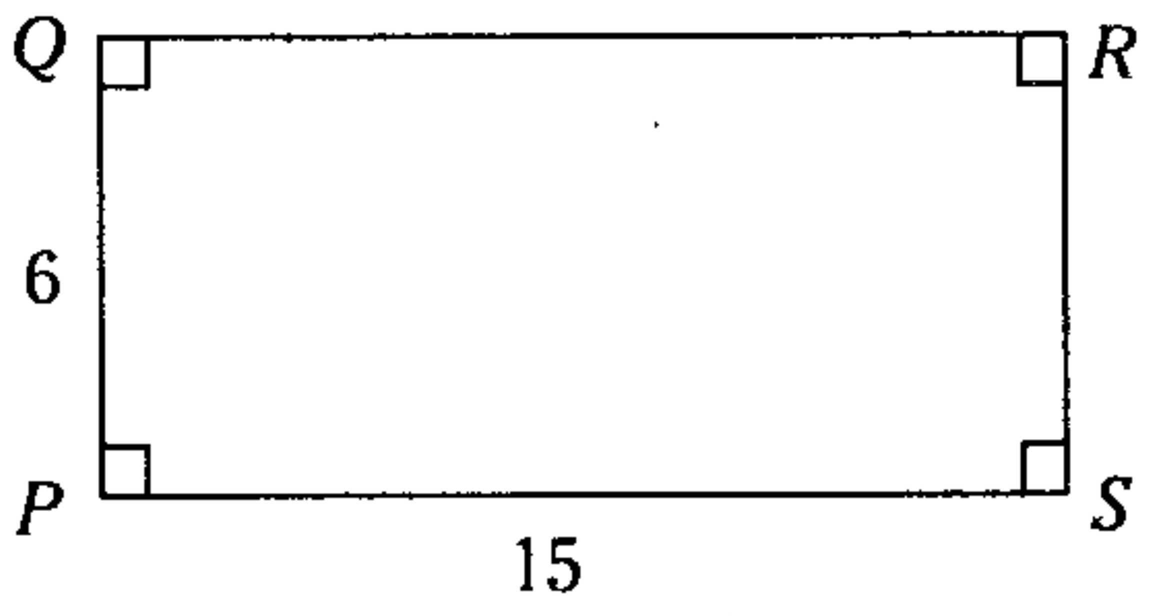


La naturaleza nos muestra imágenes que presentan semejanza. Podríamos decir, a simple vista, que el lince y su cachorro tienen la misma forma pero diferente tamaño.

Al aplicar una transformación de traslación a la figura resultante (superposición).



(a)



(b)

Figura 14.2

Observamos que sus puntos coinciden (figura 14.3).

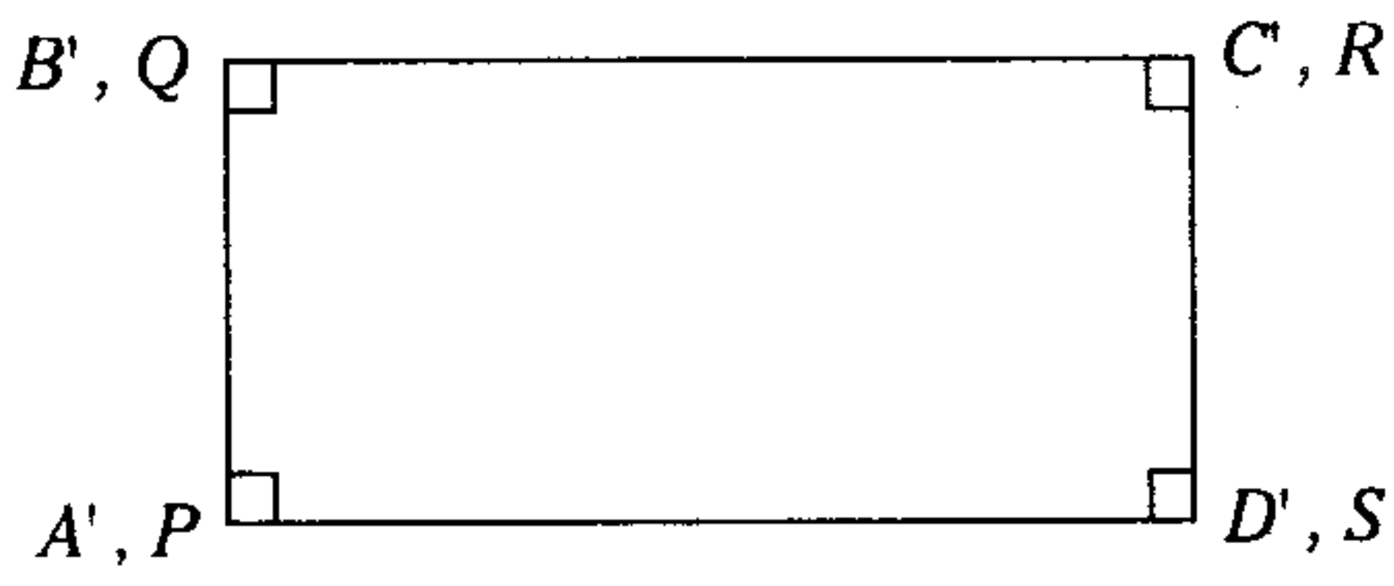


Figura 14.3

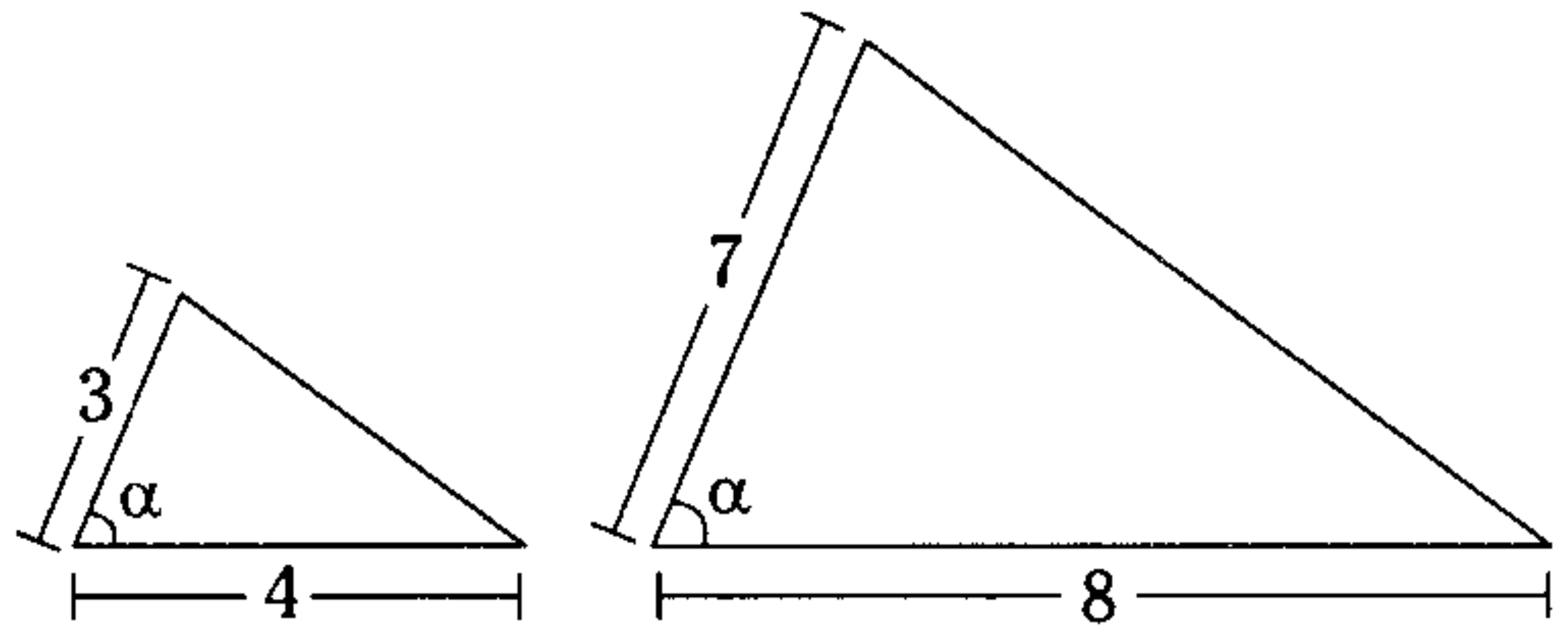
Se concluye que las figuras 14.1(a) y 14.1(b) iniciales son semejantes, además en estas figuras semejantes los lados son, respectivamente, proporcionales y los ángulos que determinan sus lados son, respectivamente, de igual medida.

Nota

A' es el transformado de A (homotecia) mientras que P es el transformado de A' (traslación). A partir de esto, afirmaremos que un punto y su transformado son puntos homólogos (A, A' y P).

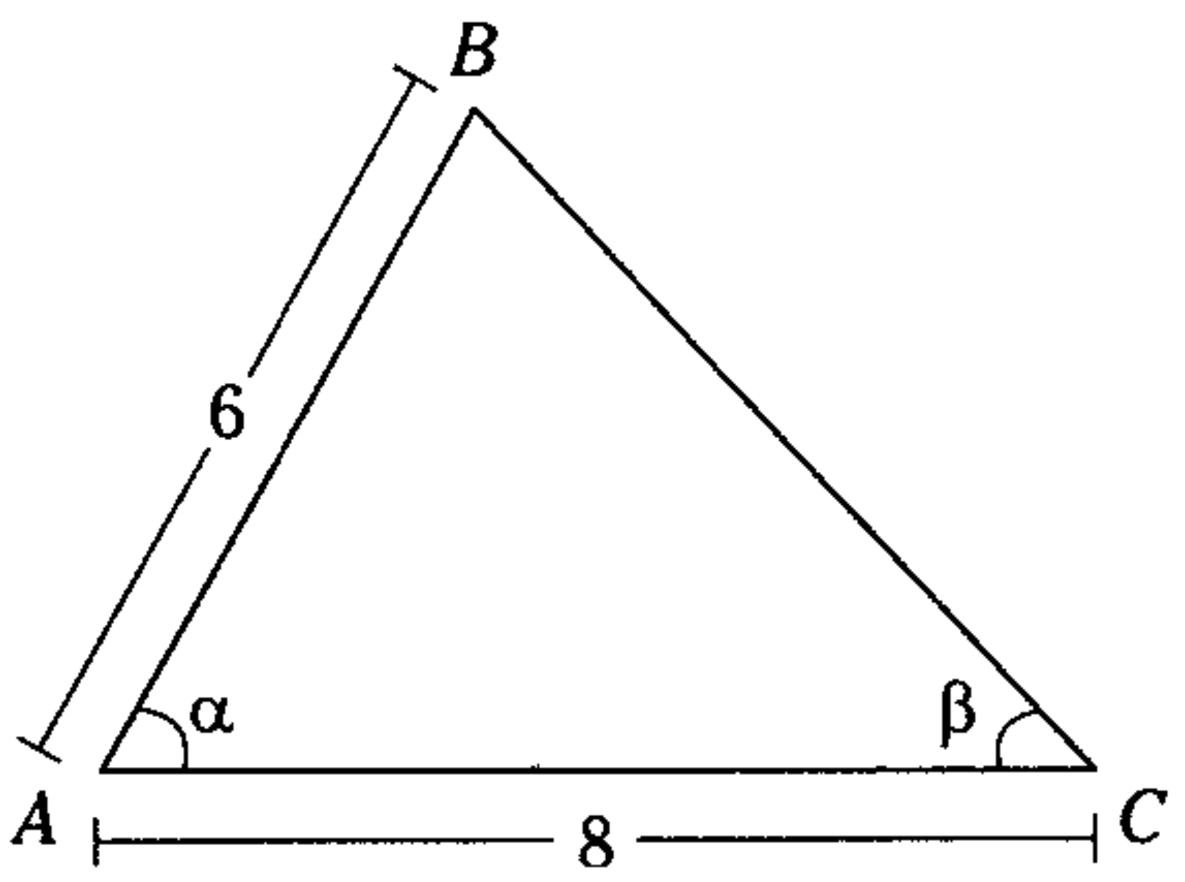
Ejemplo

Al aplicar una transformación de homotecia de razón 2 a la figura 14.4(a) (ampliación).

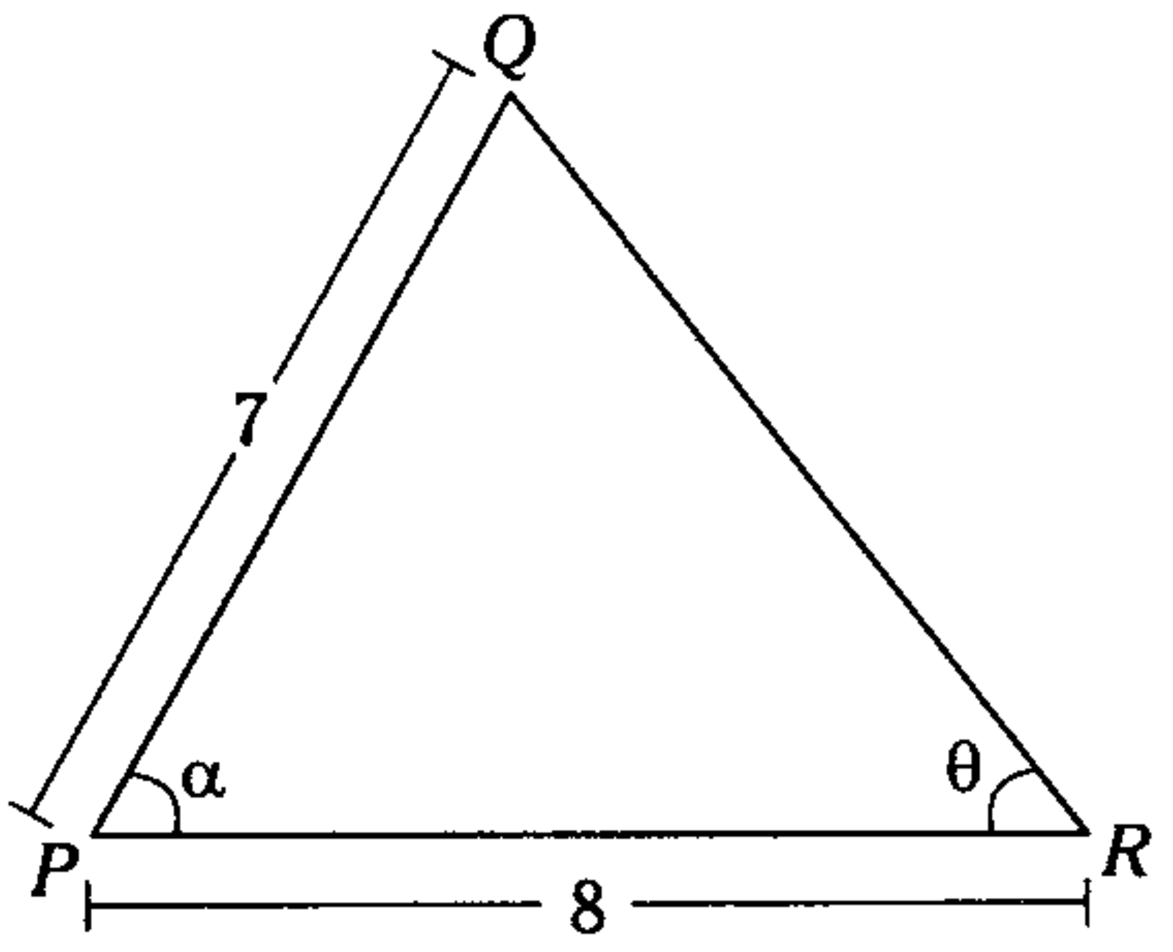


(a) *(b)*

Y a la figura resultante de la transformación anterior (figura 14.4(c)) se le aplica una transformación de traslación (superposición).



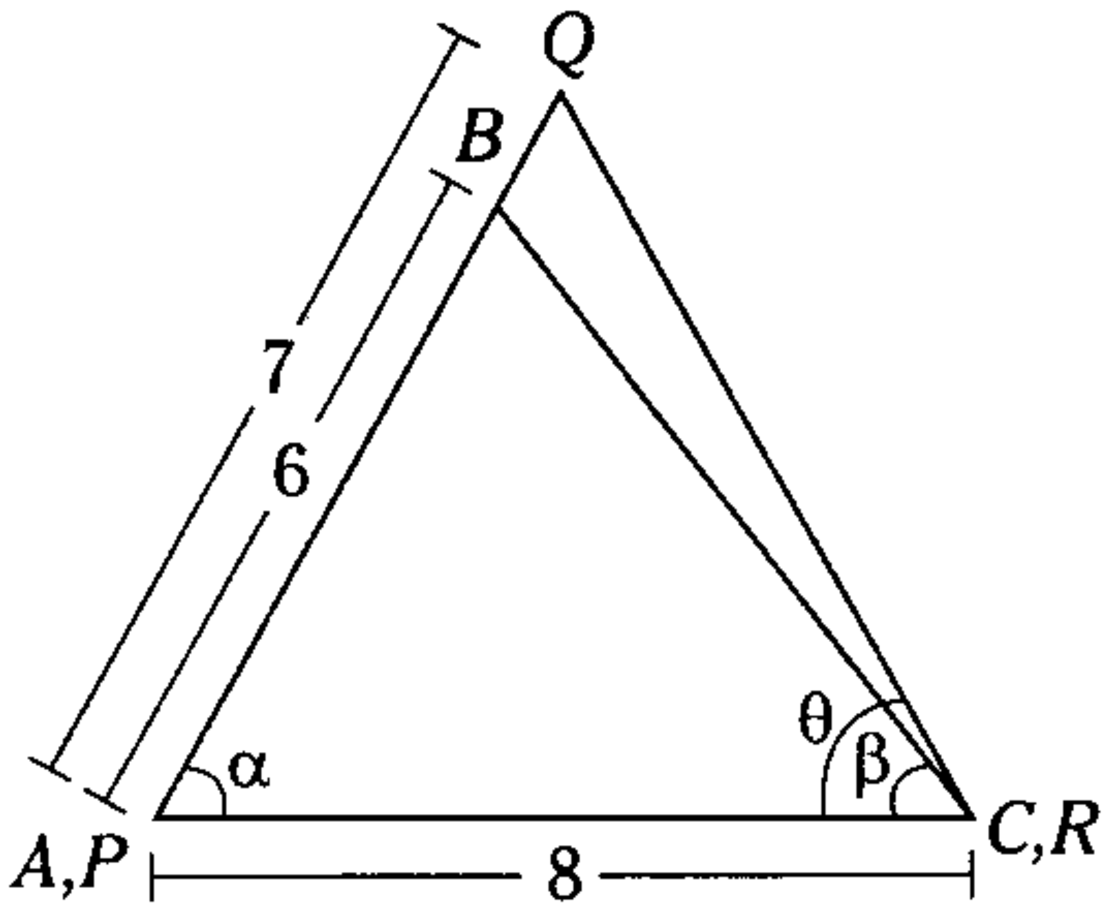
(c)



(d)

Observamos que todos sus puntos no coinciden respectivamente (figura 14.4(e)).

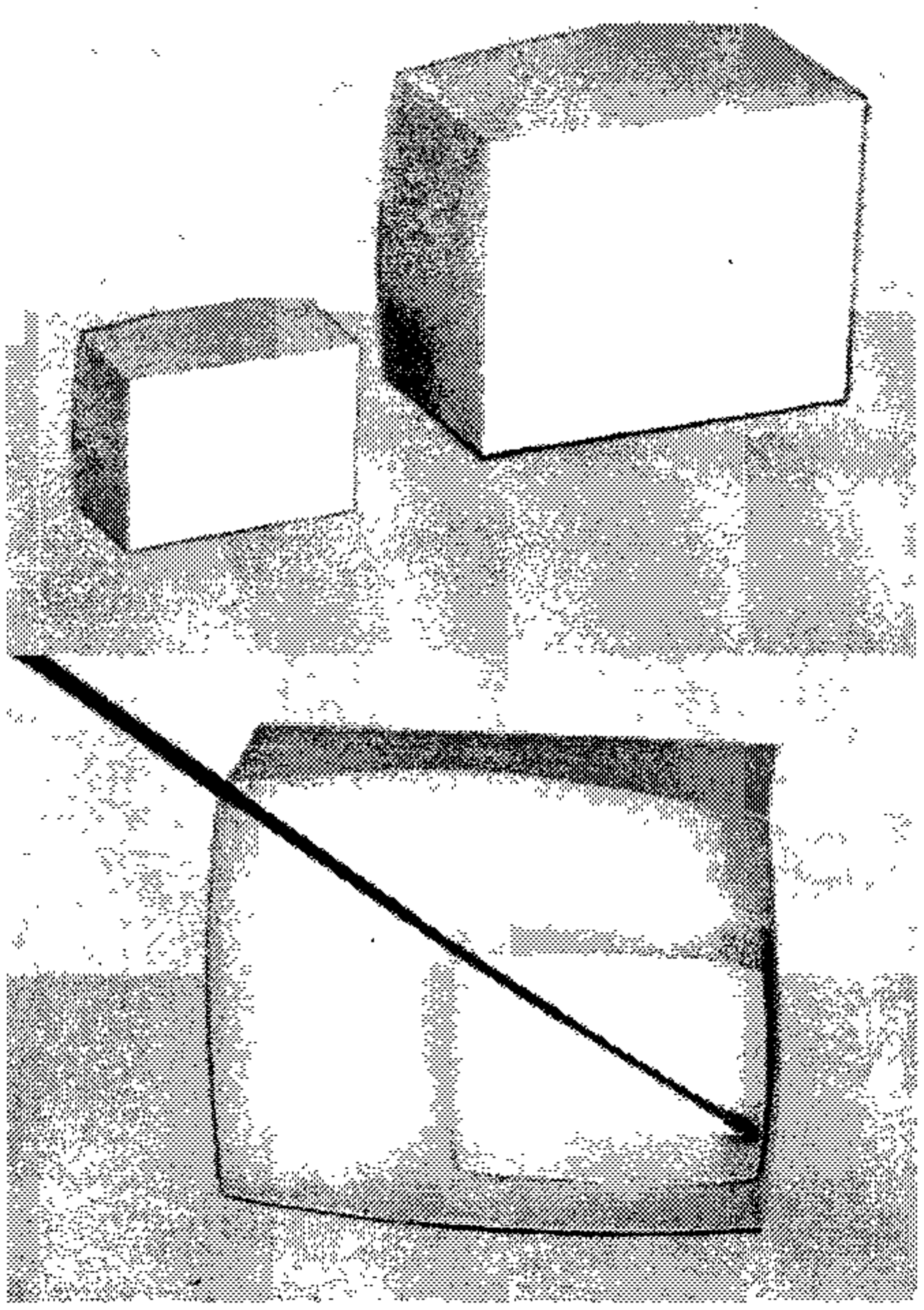
Se concluye que las figuras 14.4(a) y 14.4(b) iniciales no son semejantes.



(e)

Figura 14.4

Además, en estas figuras, los lados no son proporcionales y sus medidas internas angulares no son, respectivamente, iguales.



Para las figuras que no son triángulos, no es suficiente que sus medidas regulares sean, respectivamente, iguales para que sean semejantes. En el caso de los rectángulos, es necesario verificar la posición de sus diagonales, como muestra la foto anterior.

GENERALIZACIÓN

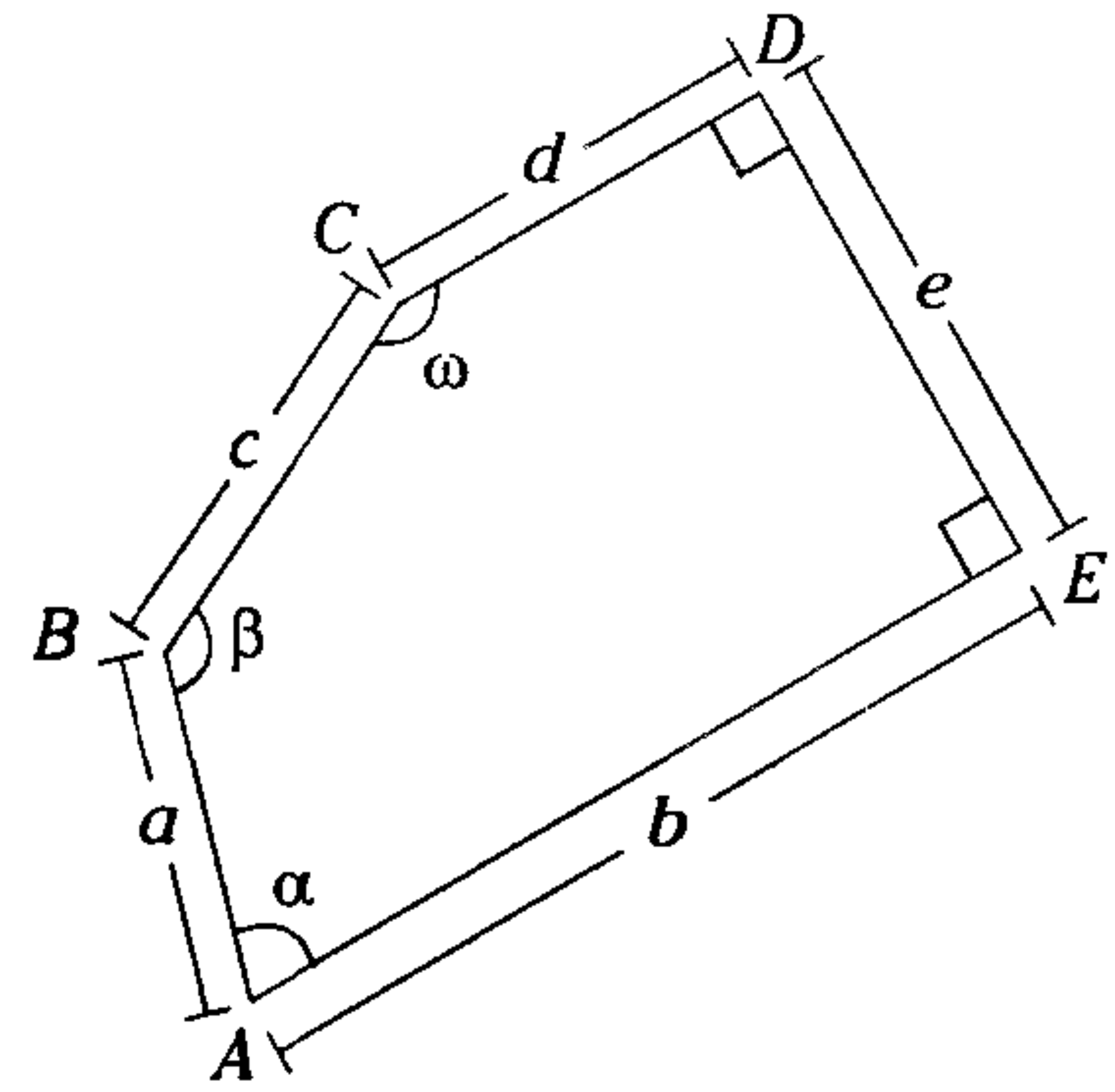


Figura 14.5

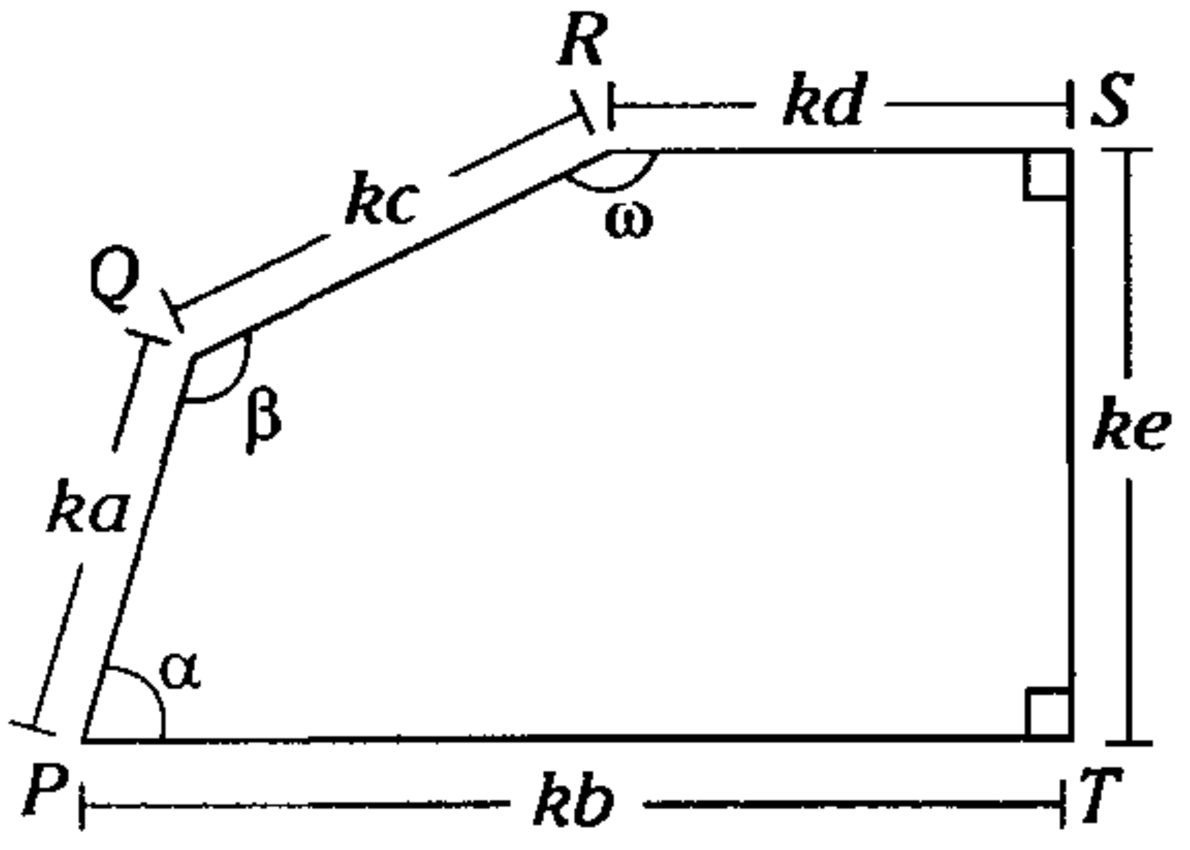


Figura 14.6

Al aplicar una transformación de homotecia de razón k, de traslación y de giro a la figura 14.5, tal que los puntos de la figura de la resultante coinciden respectivamente con los puntos de la figura 14.6.

Entonces el punto A de la figura 14.5, es el punto A' de la figura resultante y estos con el punto P de la figura 14.6 son correspondientes (puntos transformados), a estos puntos se denominan puntos homólogos.

Por lo tanto, para cada punto de la figura 14.5 le corresponde un único punto de la figura 14.6.

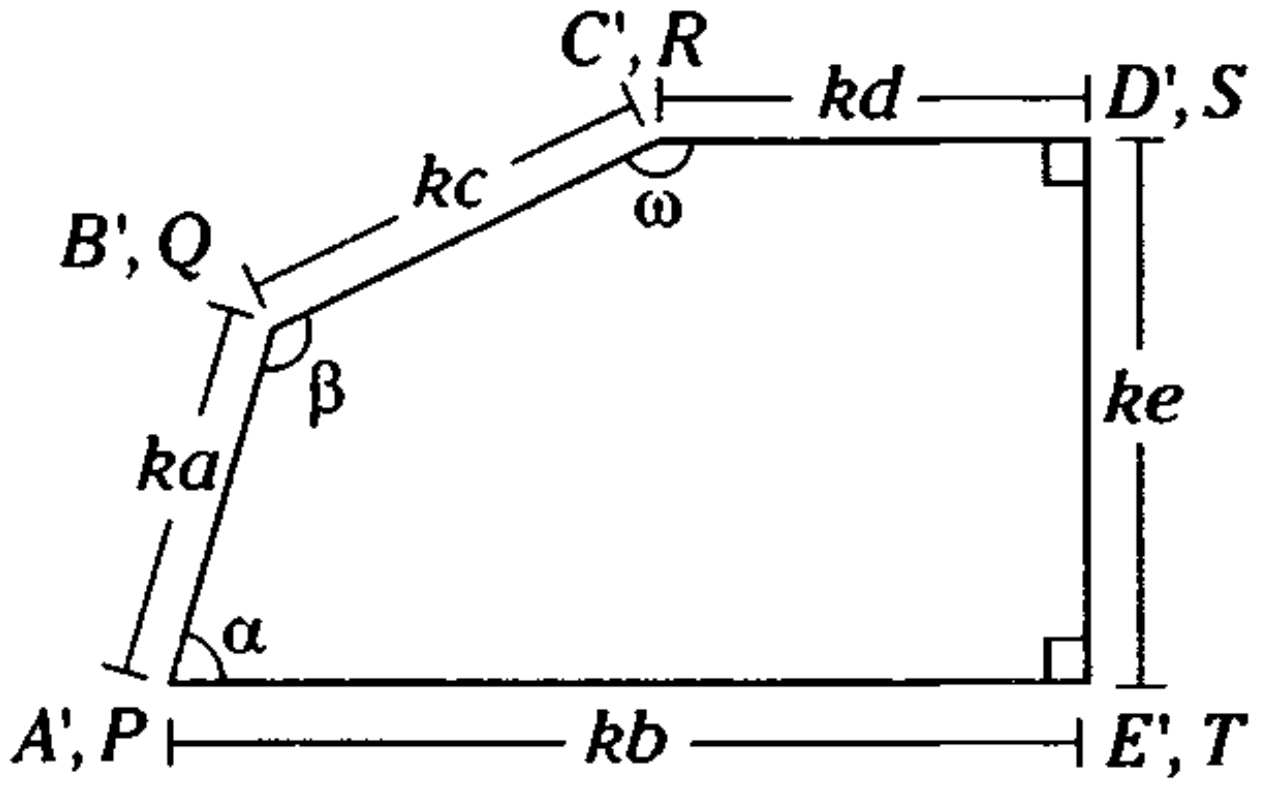


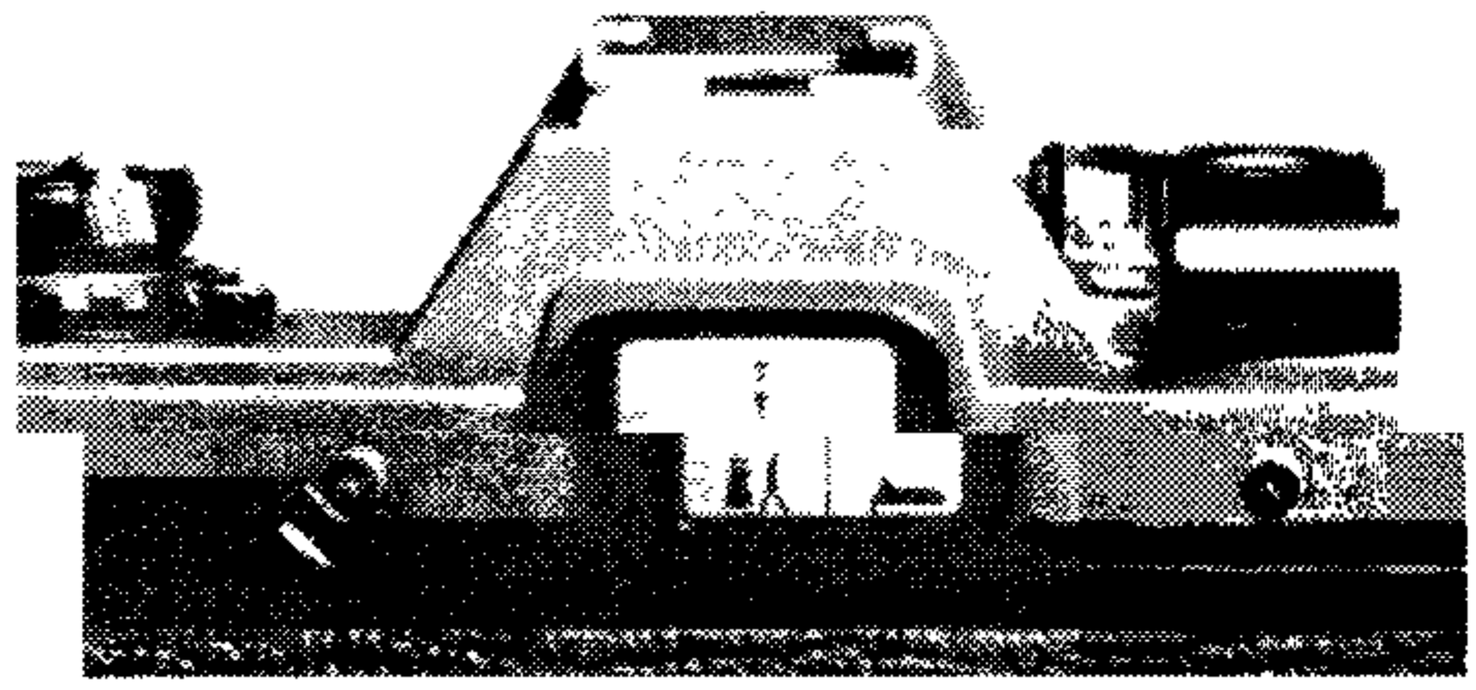
Figura 14.7

También el lado AB de la figura 14.5 y el lado PQ de la figura 14.6 son correspondientes, es decir, a uno de ellos le corresponde al otro; a estos lados se denominan lados homólogos. De igual modo, los lados BC y QR, CD y RS, DE y ST, AE y PT son homólogos. Por lo tanto, podemos establecer que la figura 14.5 es semejante a la figura 14.6, por lo tanto los polígonos son semejantes cuando tienen la misma forma, sus lados homólogos son proporcionales y los ángulos que estos determinan sean respectivamente de igual medida.

Nota

A la constante de proporcionalidad de la transformación en las figuras semejantes se le denominará razón de semejanza.

En el desarrollo del texto, se estudiará generalmente triángulos semejantes; por lo cual trataremos de establecer las diferentes características de los triángulos semejantes.



Una cámara fotográfica permite obtener fotografías semejantes a una imagen real.

TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Dos triángulos son semejantes cuando existe una transformación simple o un producto de transformaciones, que al aplicarse a uno de ellos, la transformación resulta congruente a la otra. Por lo tanto, dos triángulos son semejantes cuando sus lados homólogos son proporcionales y los ángulos que estos determinan sean, respectivamente, de igual medida. En la figura:

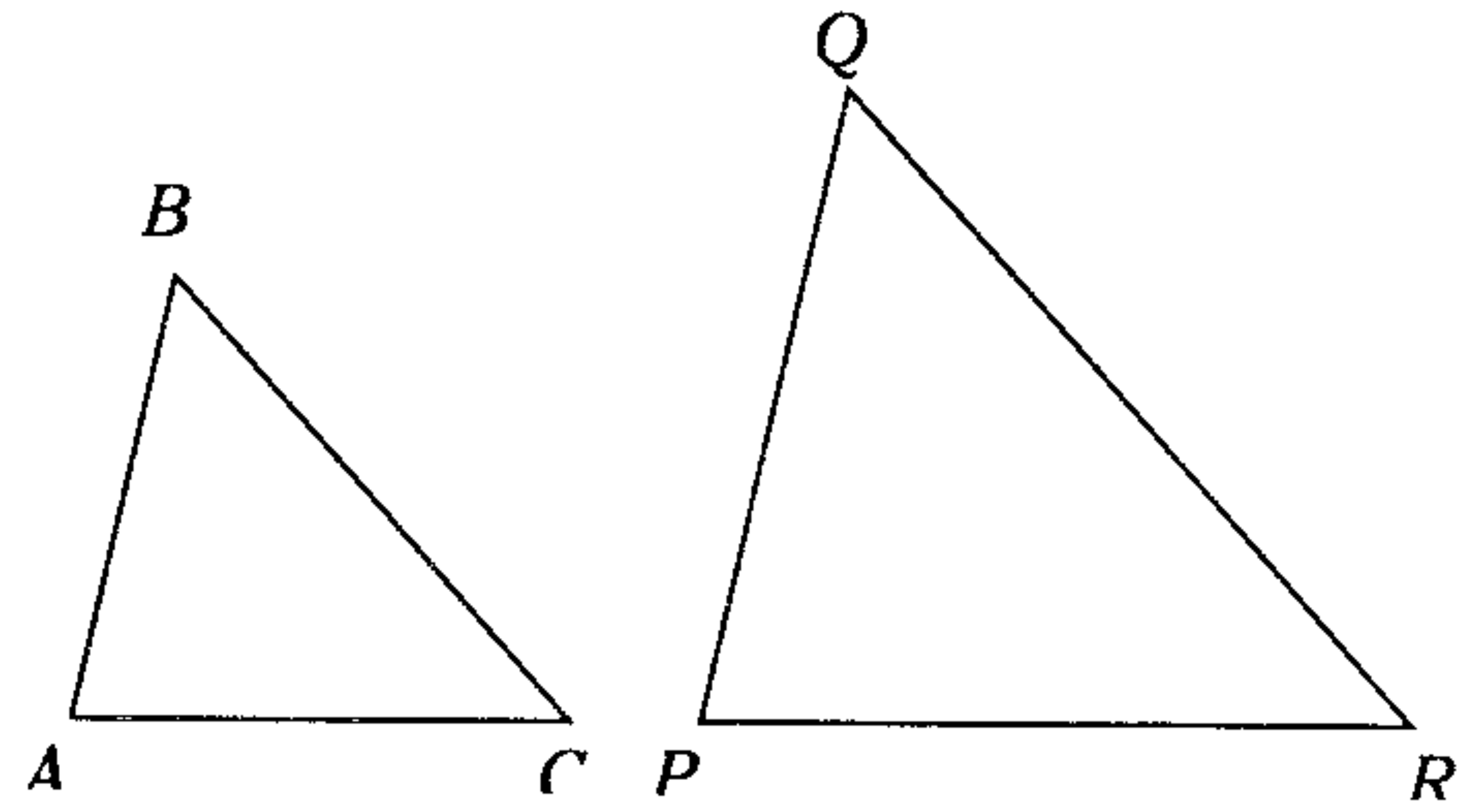


Figura 14.8

Si la transformación del triángulo *PQR* es congruente al triángulo *ABC*; entonces, el triángulo *PQR* es semejante al triángulo *ABC*.

Notación

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

Se lee: el triángulo *ABC* es semejante al triángulo *PQR*.

Los lados *AB* y *PQ*, *BC* y *QR*, *AC* y *PR* son lados homólogos, donde

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = K$$

K : razón de semejanza.

Toda transformación simple conserva sus medidas angulares, y al aplicar una transformación simple o un producto de transformaciones a la semejanza, se demuestra que los ángulos internos son respectivamente de igual medida.

En la siguiente figura, las medidas angulares internas son iguales para los triángulos semejantes *ABC* y *PQR*.

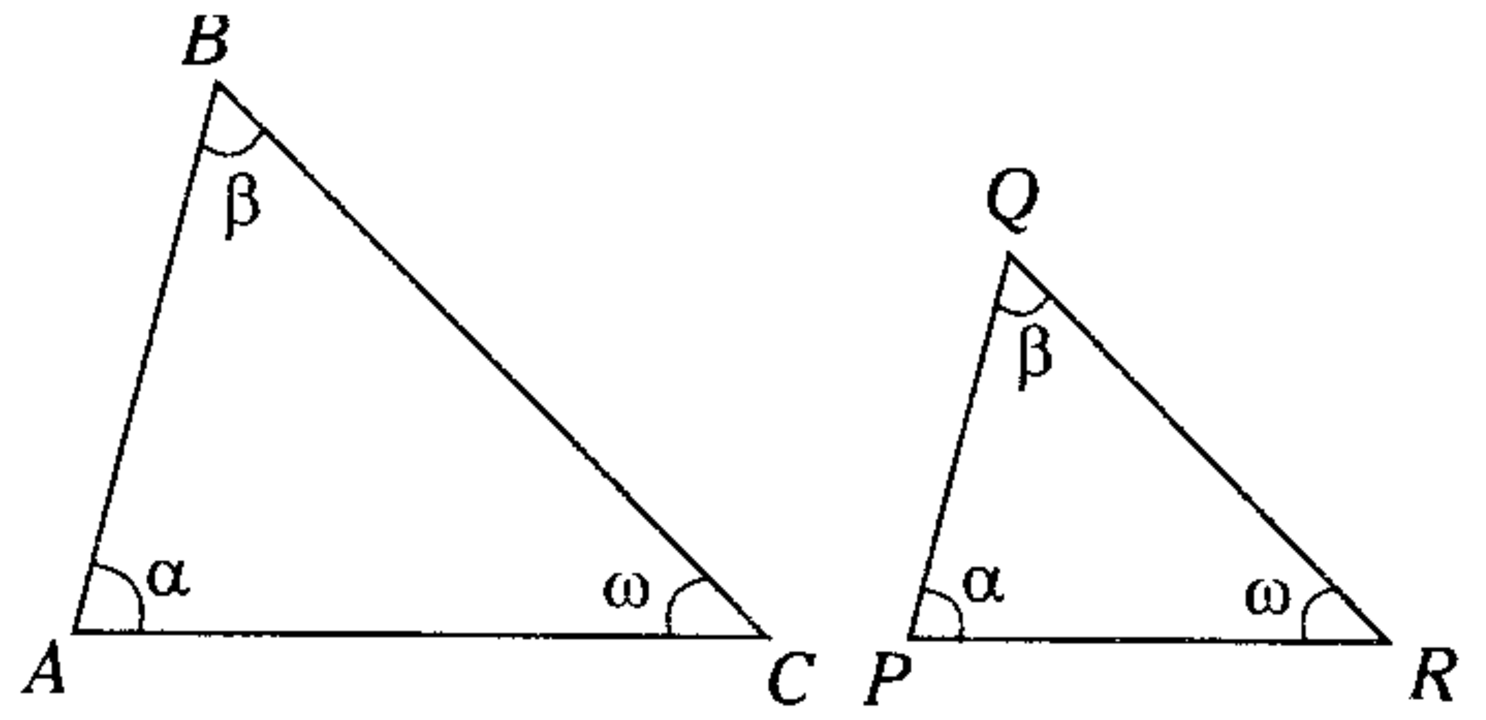
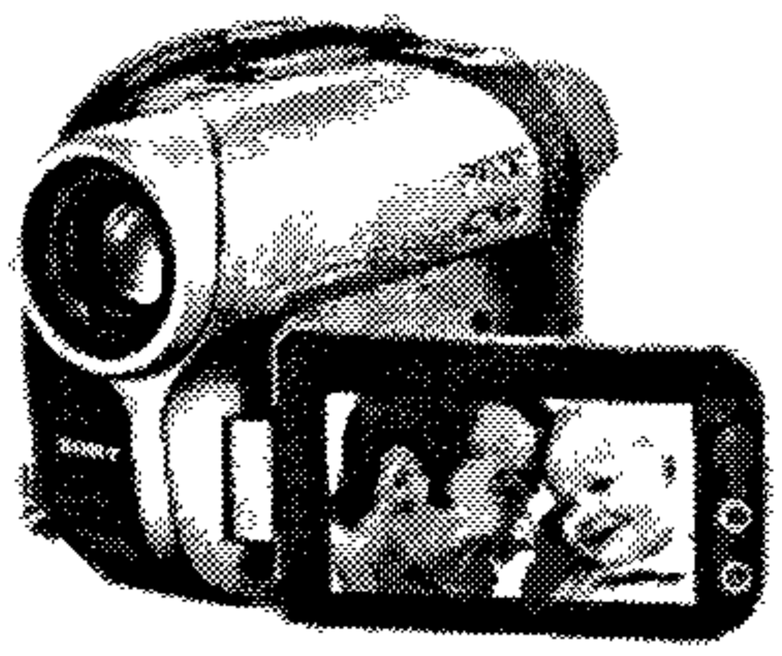
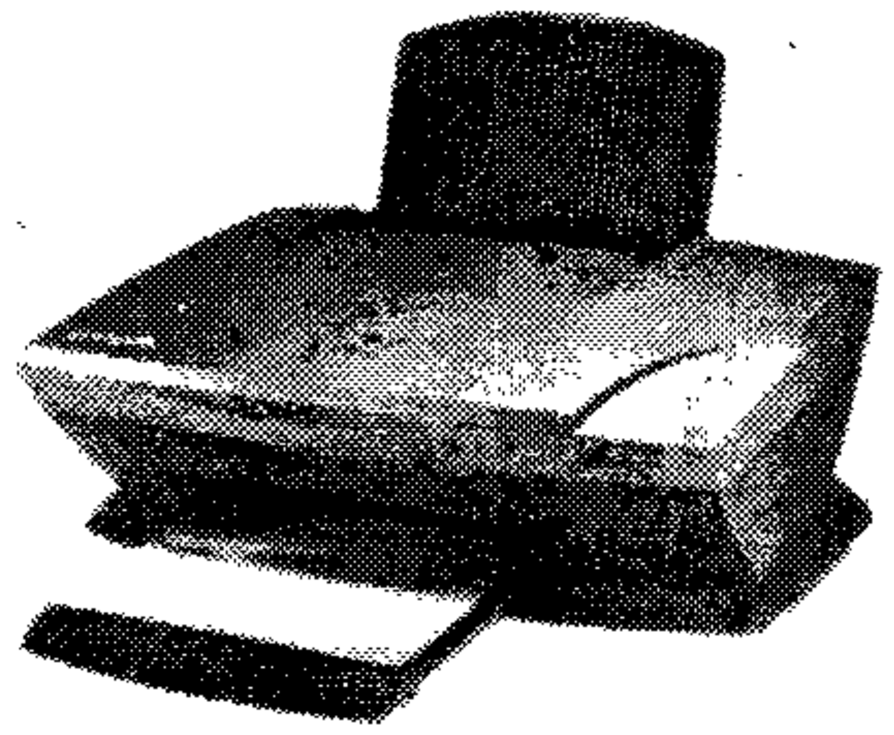


Figura 14.9

Dado que a los lados homólogos se oponen medidas angulares internas respectivamente iguales; entonces, cuando dos triángulos son semejantes, sus lados son respectivamente proporcionales y sus medidas angulares respectivamente iguales.



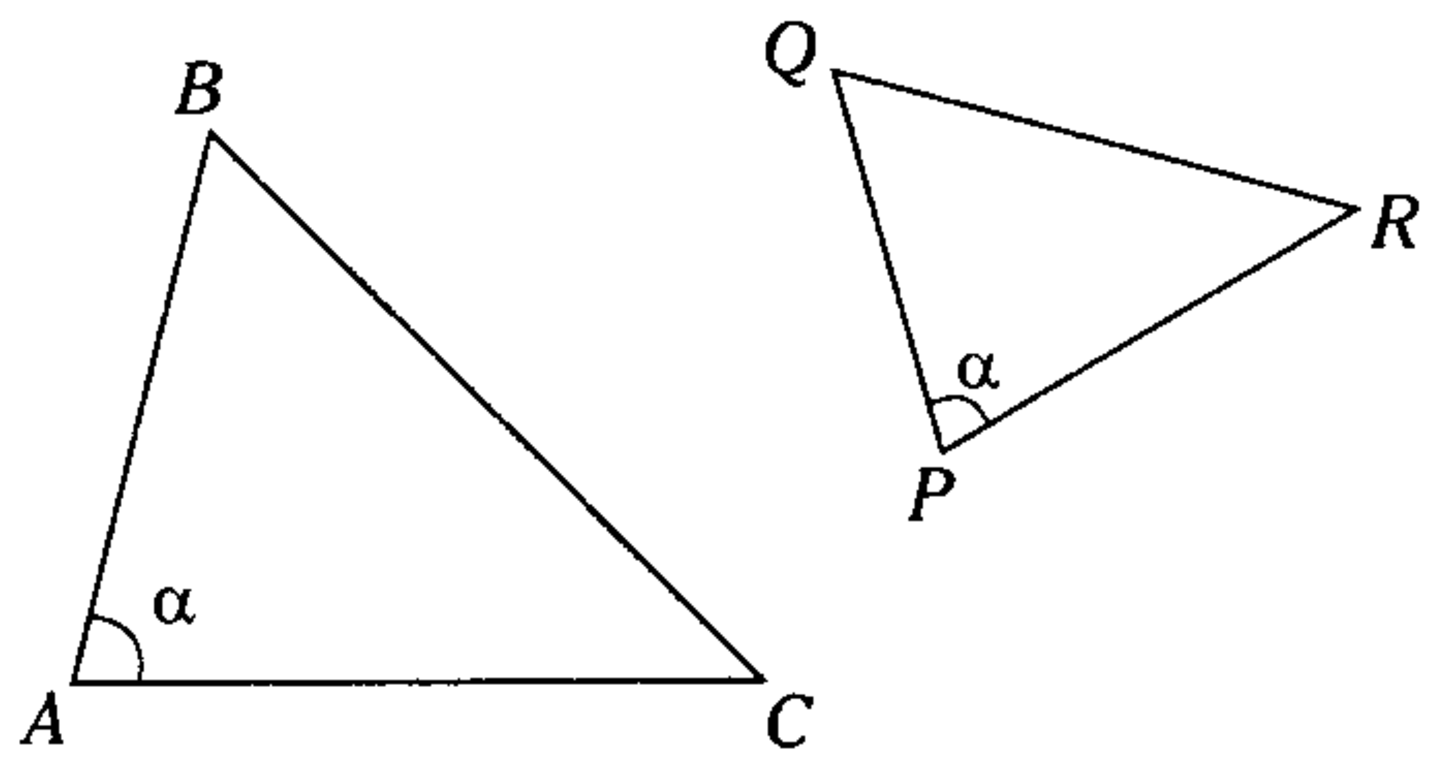


Hoy en día, la tecnología utiliza los conceptos de semejanza y nos muestra imágenes de diferente tamaño, pero manteniendo su proporción. Esto lo apreciamos en las cámaras filmadoras, los televisores, las fotocopiadoras, las impresoras, etc.

Teorema

Dos triángulos serán semejantes cuando tienen dos pares de lados respectivamente proporcionales y los ángulos determinados por dichos pares de lados resulten de igual medida.

Es decir



(a)

En la figura, si se cumple que

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{AC}{PR}=K$$

entonces

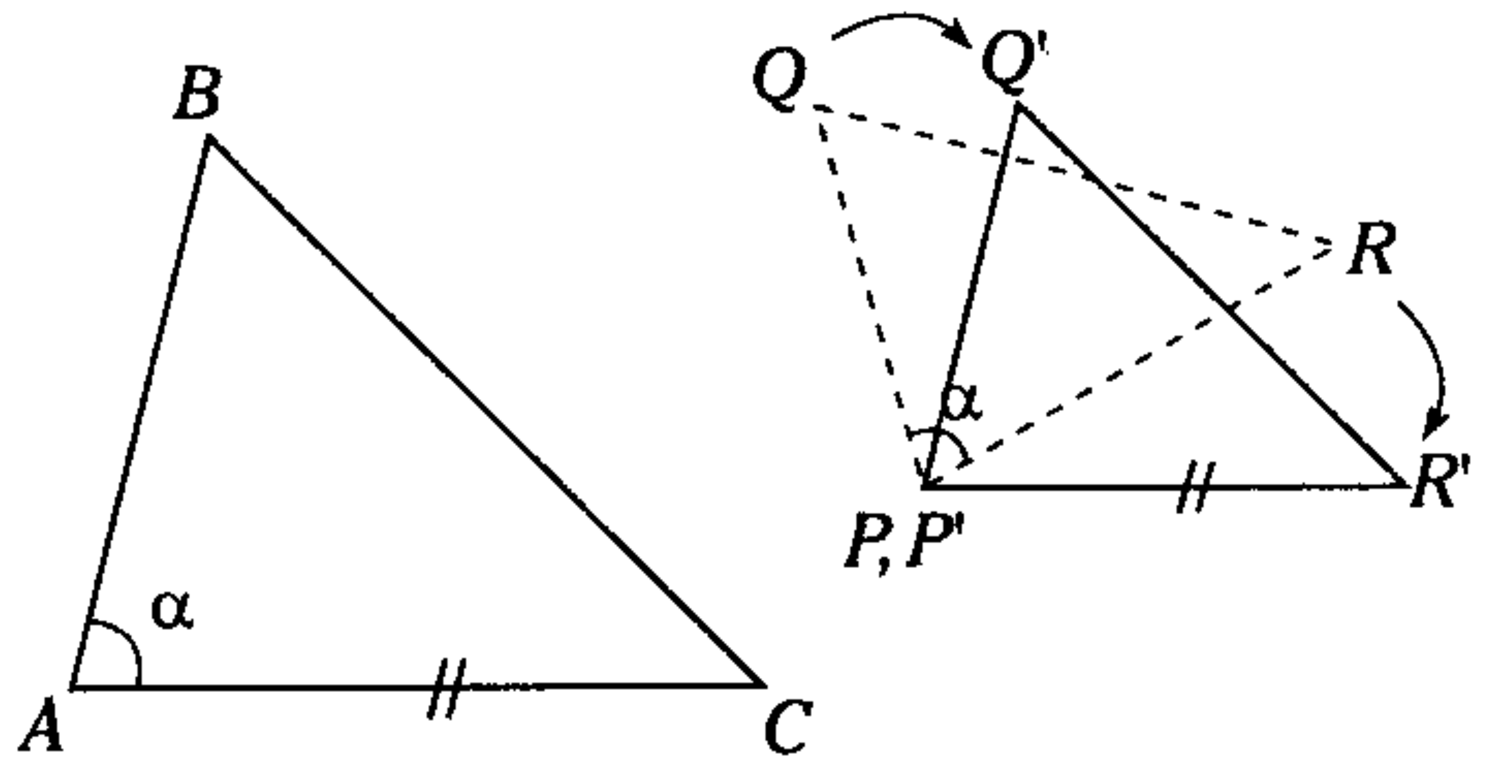
$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

Demostración

Sea

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{AC}{PR}=K \qquad \text{(I)}$$

Bastará probar que $\frac{BC}{QR}=K$, para encontrar la semejanza entre los triángulos ABC y PQR.



(b)

Con centro en P, rotamos el $\triangle PQR$ hasta que las transformadas de $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ sean paralelas a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.

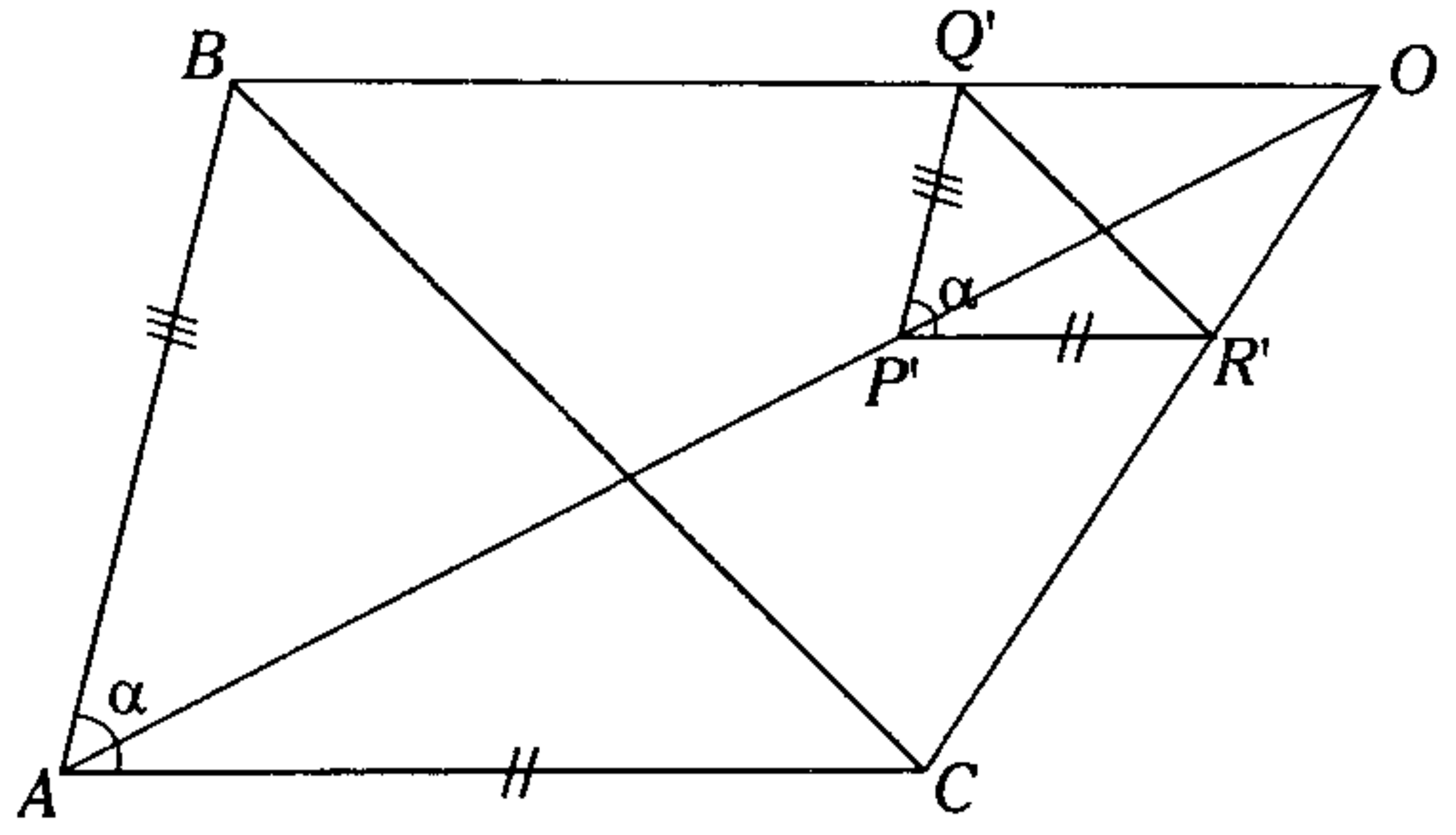
$$\overline{P'Q'}=\text{Rot. } \overline{PQ}\ (P)$$

$$\overline{P'R'}=\text{Rot. } \overline{PR}\ (P)$$

tal que

$$\overline{P'Q'} \parallel \overline{AB} \text{ y } \overline{P'R'} \parallel \overline{AC}$$

Luego, como $\angle Q'P'R'$ es homotésico con $\angle BAC$, ubicamos el centro de homotecia. Para ello, trazamos las rectas BQ', AP' y CR', las cuales serán concurrentes en O (O es centro de homotecia).



(c)

Como $\overline{P'R'} \parallel \overline{AC}$

$$\rightarrow \frac{OR'}{OC}=\frac{OP'}{OA}$$

Igualmente, $\overline{P'Q'} \parallel \overline{AB}$

$$\rightarrow \frac{OQ'}{OB}=\frac{OP'}{OA}$$

$$\therefore \frac{OR'}{OC}=\frac{OQ'}{OB}=\frac{Q'R'}{BC}$$

(propiedad de homotecia)

Aunque también

$$\frac{P'R'}{AC}=\frac{OR'}{OC} \text{ y } \frac{P'Q'}{AB}=\frac{OQ'}{OB}$$

$$\therefore \frac{Q'R'}{BC}=\frac{P'Q'}{AB}=\frac{P'R'}{AC}$$

pero, $Q'R'=QR$, $P'Q'=PQ$ y $P'R'=PR$

$$\rightarrow \frac{QR}{BC}=\frac{PQ}{AB}=\frac{PR}{AC}$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle PQR$$

Nota

Si dos triángulos son homotéticos, entonces son semejantes.

De todo lo visto anteriormente, podemos concluir que dos triángulos son semejantes cuando:

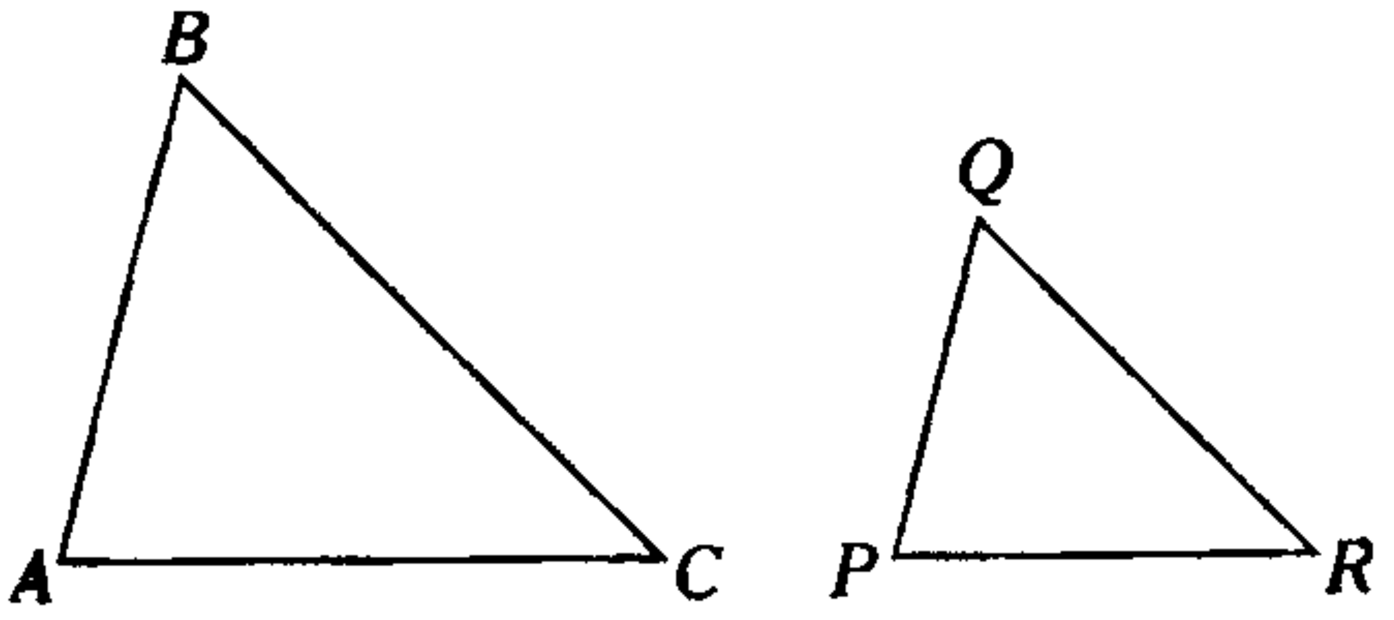
I. Sus tres lados son respectivamente proporcionales.

II. Dos pares de lados son, respectivamente, proporcionales y el ángulo determinado por dichos lados son de igual medida, respectivamente.

III. Dos pares de ángulos internos tienen igual medida, respectivamente.

Es decir

I.

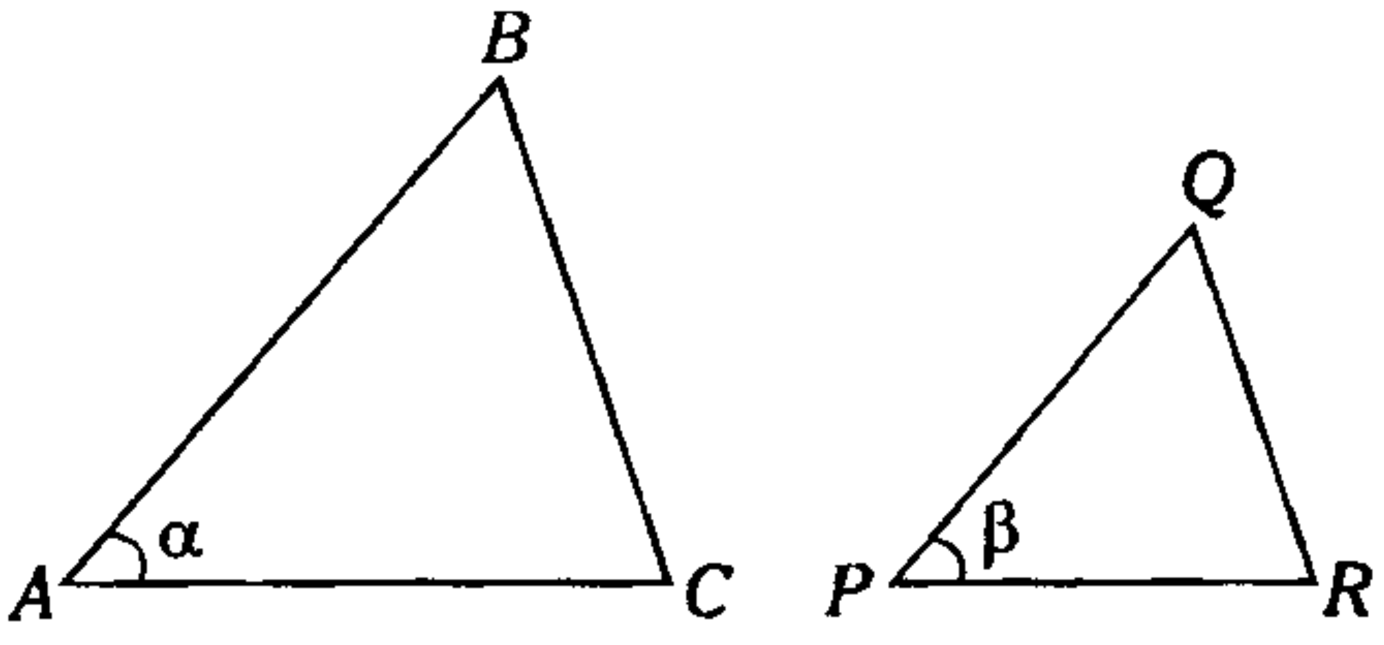


(*d*)

$$\text{Si } \frac{AB}{PQ}=\frac{AC}{PR}=\frac{BC}{QR}=K$$

$$\rightarrow \boxed{\triangle ABC \sim \triangle PQR}$$

II.

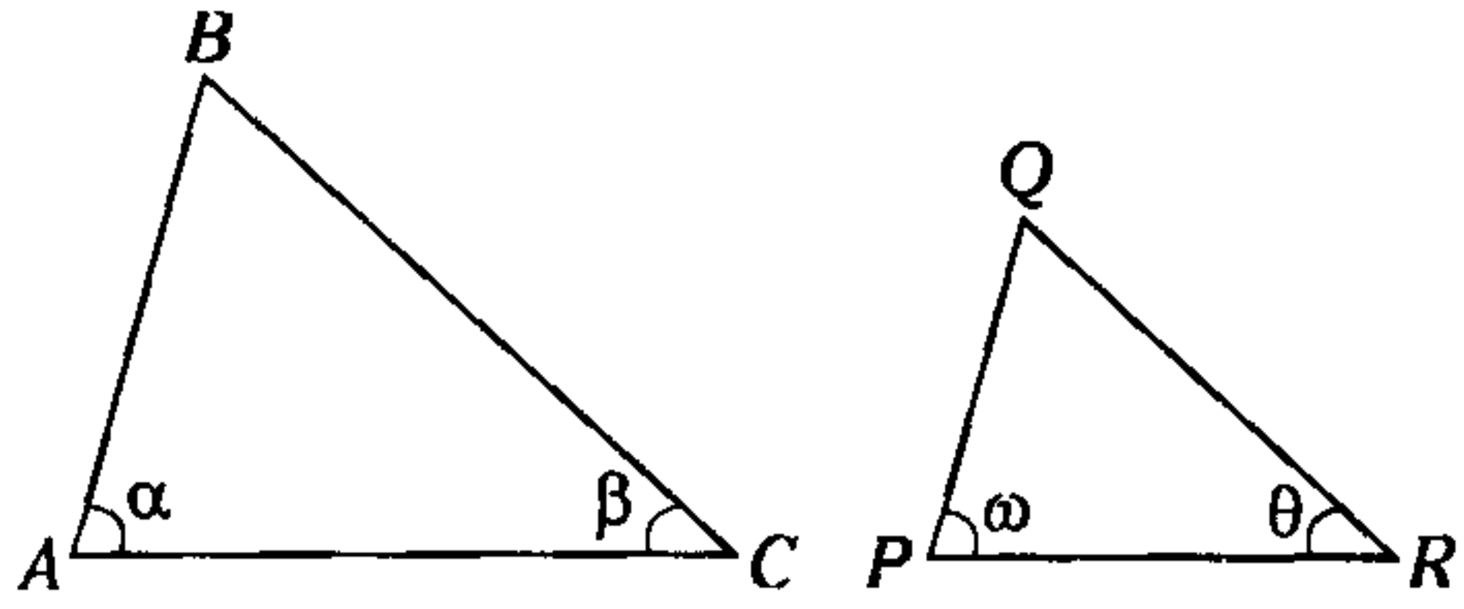


(*e*)

$$\text{Si } \frac{AB}{PQ}=\frac{AC}{PR}=K \text{ y } \alpha=\beta$$

$$\rightarrow \boxed{\triangle ABC \sim \triangle PQR}$$

III.



(*f*)

Figura 14.10

Si $\alpha=\omega$ y $\beta=\theta$

$$\rightarrow \boxed{\triangle ABC \sim \triangle PQR}$$

Teorema

Toda recta paralela a un lado de un triángulo, secante a los otros dos o a sus prolongaciones, determina un triángulo semejante al triángulo dado.

Caso I

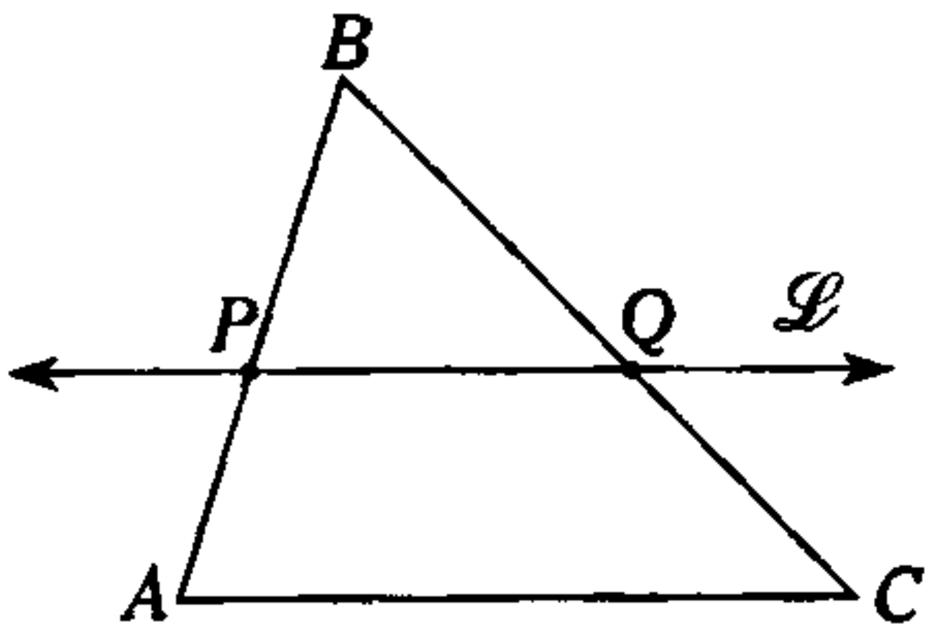


Figura 14.11

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

$\rightarrow$ $\boxed{\triangle PBQ \sim \triangle ABC}$

y $\dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{BP}{AB} = \dfrac{BQ}{BC}$

Caso II

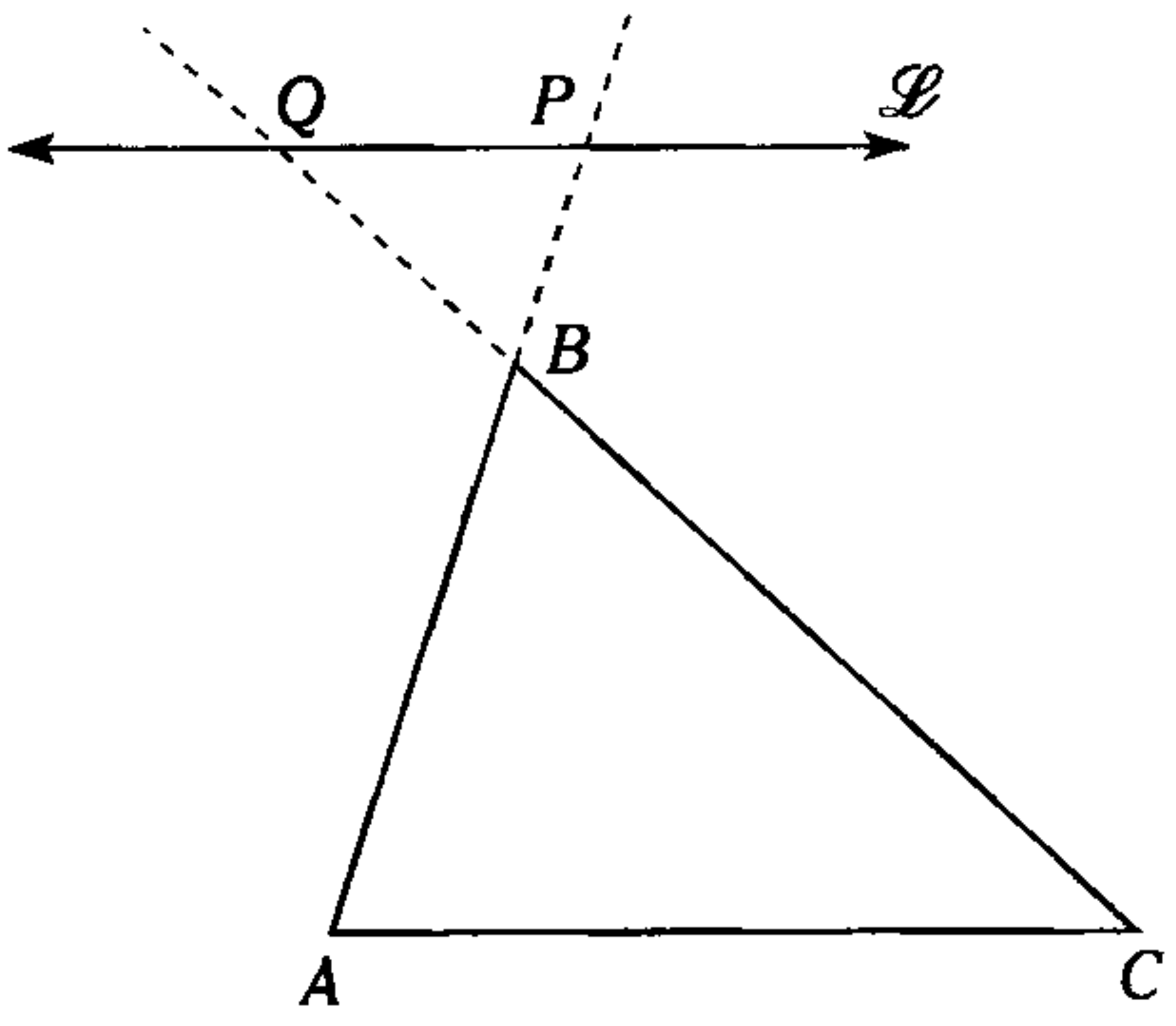


Figura 14.12

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

$\rightarrow$ $\boxed{\triangle PBQ \sim \triangle ABC}$

y $\dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{PB}{AB} = \dfrac{QB}{CB}$

Demostración

Caso I

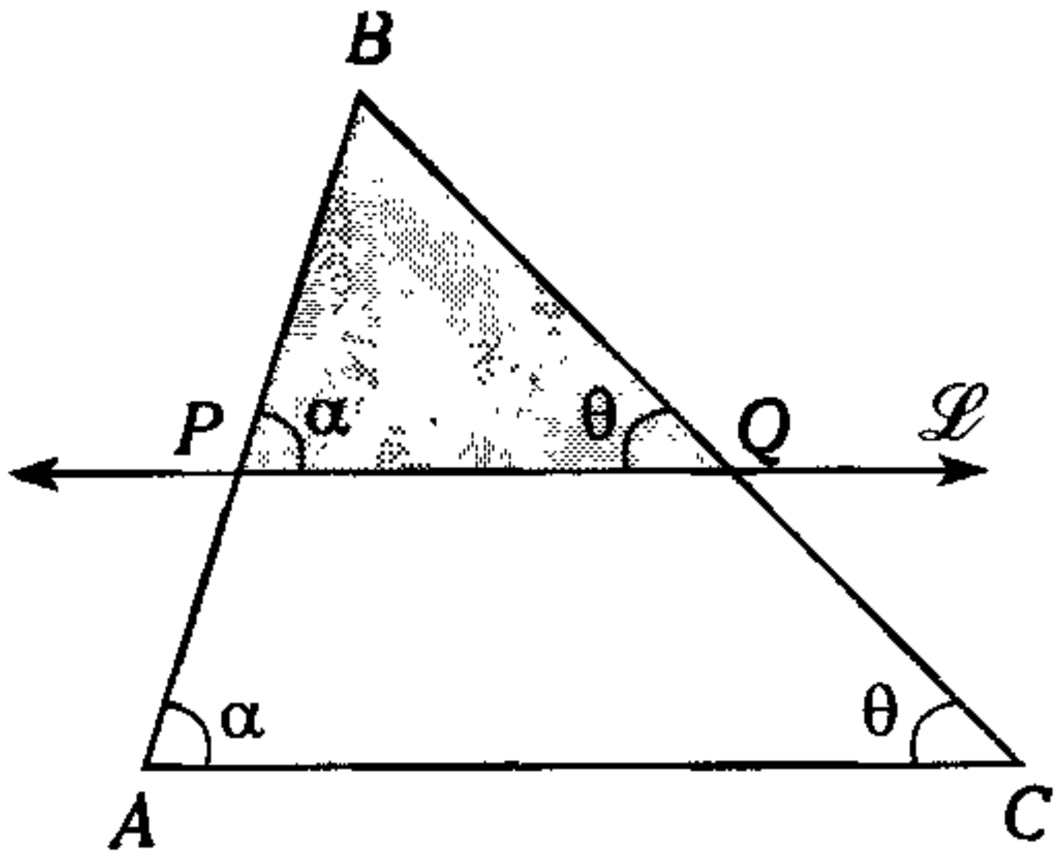


Figura 14.13

Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

$m\measuredangle BPQ = m\measuredangle BAC = \alpha$ (ángulos correspondientes)

$m\measuredangle BQP = m\measuredangle BCA = \theta$ (ángulos correspondientes)

$\therefore\ \triangle ABC \sim \triangle BPQ$

Caso II

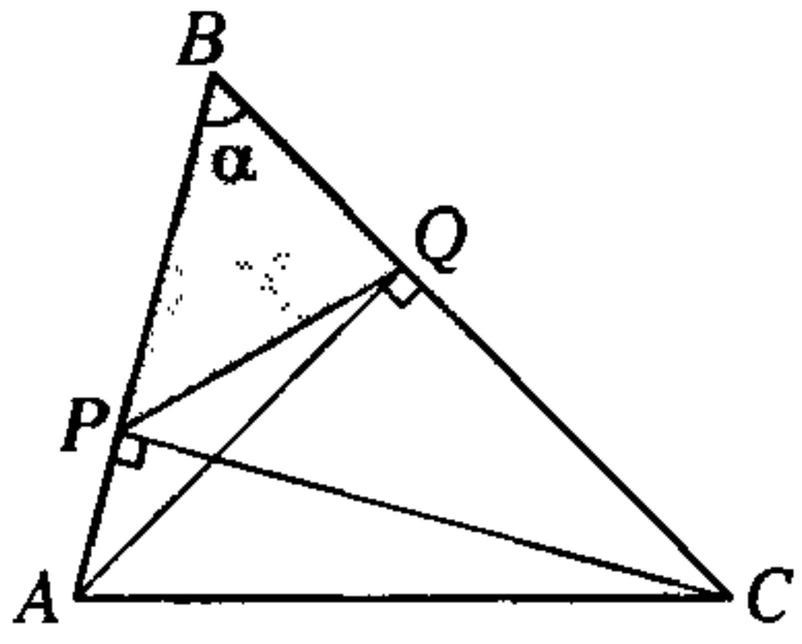
De manera análoga y de ángulos alternos internos, $\triangle PBQ \sim \triangle ABC$.

Teorema

En todo triángulo oblicuángulo, al trazar las alturas de dos de sus vértices, los pies de dichas alturas y el tercer vértice son vértices de un triángulo semejante al triángulo dado.

Esto significa

I. Si $\alpha < 90°$



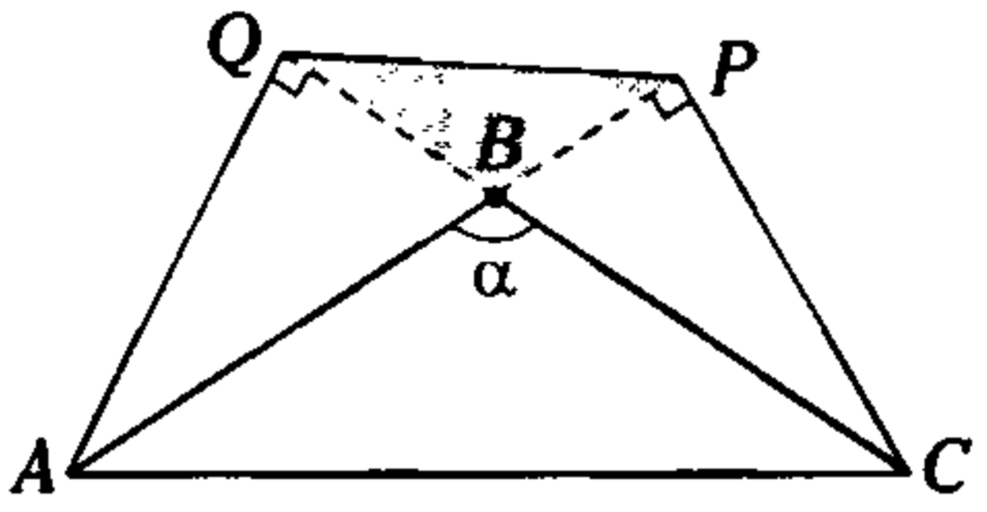
(a)

Si $\overline{AQ}$ y $\overline{CP}$ son alturas del $\triangle ABC$.

$\rightarrow$ $\boxed{\triangle QBP \sim \triangle ABC}$

y $\dfrac{QB}{BA} = \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{PQ}{CA}$

II. Si $\alpha > 90°$



(b)

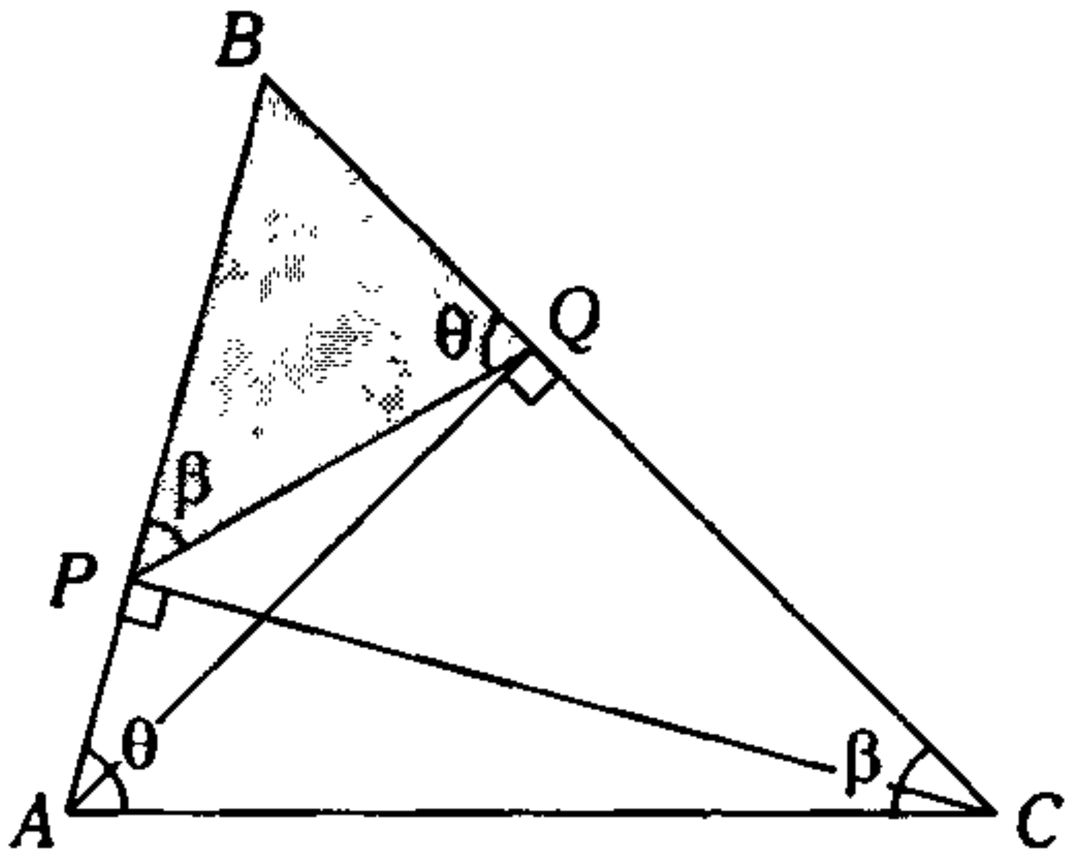
Si $\overline{AQ}$ y $\overline{CP}$ son alturas del $\triangle ABC$

$\rightarrow$ $\boxed{\triangle QBP \sim \triangle ABC}$

y $\dfrac{QB}{AB} = \dfrac{PB}{CB} = \dfrac{QP}{AC}$

Demostración

Si $\overline{AQ}$ y $\overline{CP}$ son alturas del $\triangle ABC$.



(*c*)

Figura 14.14

$\square APQC$ es inscriptible.

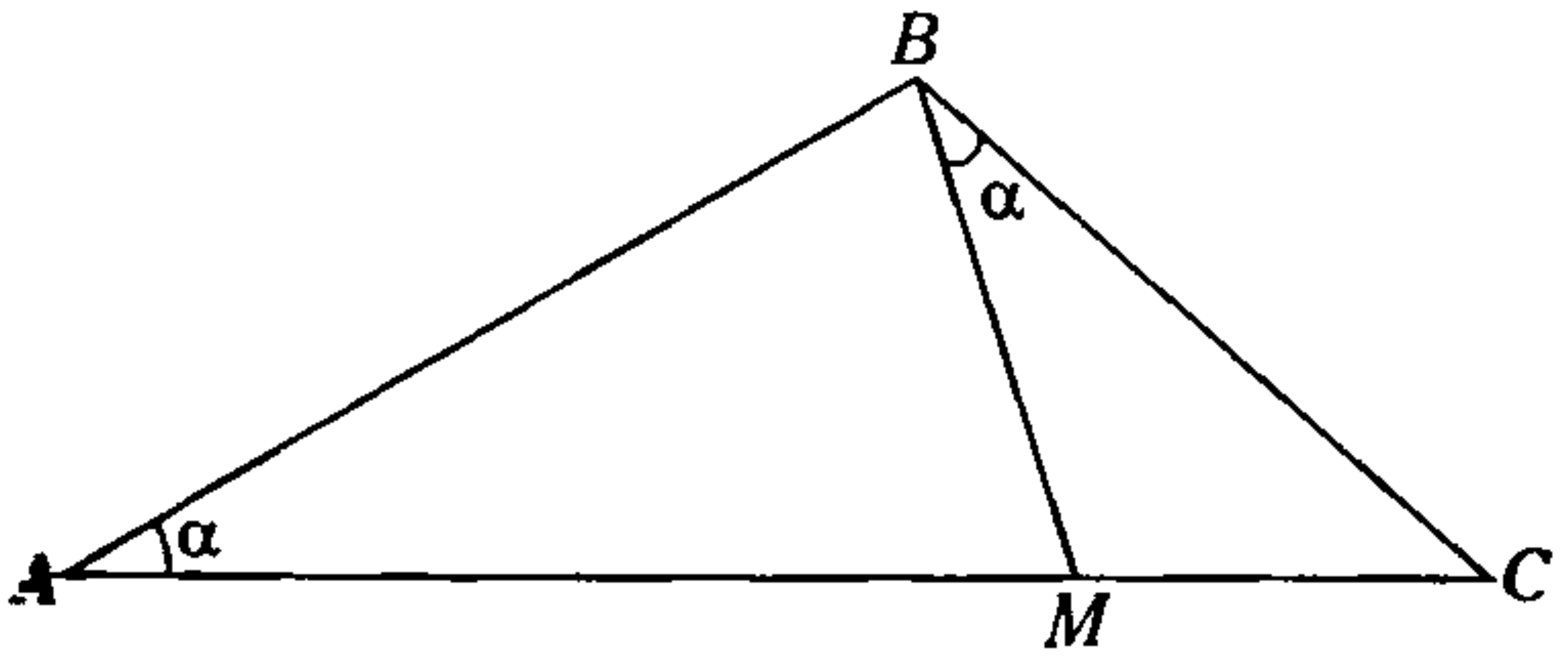
$\rightarrow$ $m\sphericalangle BQP = m\sphericalangle BAC = \theta$ y

$m\sphericalangle BPQ = m\sphericalangle BCA = \beta$

$\therefore$ $\triangle QBP \sim \triangle ABC$

Teorema

Si en un triángulo *ABC* trazamos la ceviana **interior** *BM*, tal que $m\sphericalangle MBC = m\sphericalangle BAC$, entonces **BC** es media proporcional entre *AC* y *MC*.



(*a*)

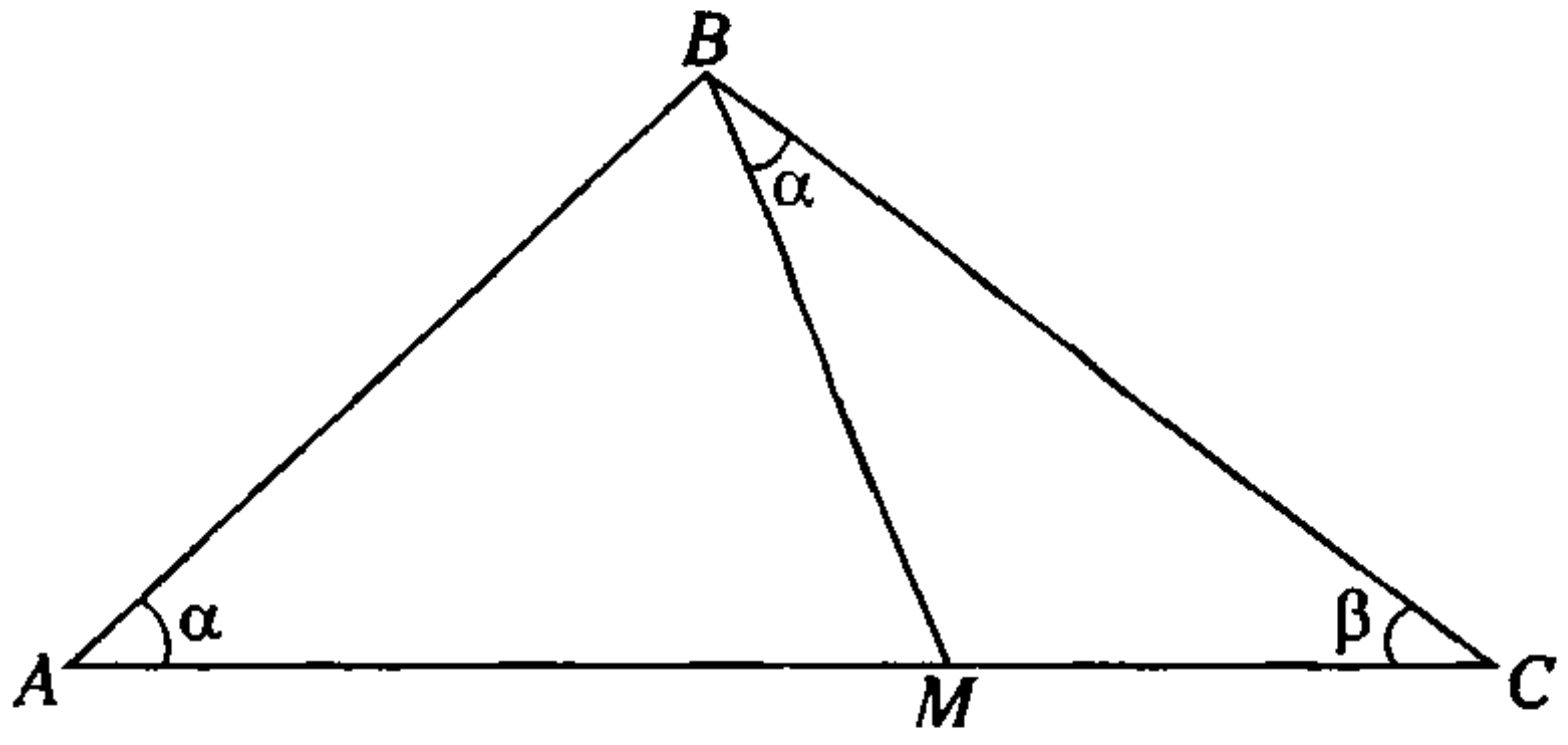
En el $\triangle ABC$, si *BM* es ceviana interior y

$= m\sphericalangle BAC = \alpha$

$\rightarrow$ $\boxed{(BC)^2 = (AC)(MC)}$

Demostración

Como $m\sphericalangle MBC = m\sphericalangle BAC = \alpha$



(*b*)

Figura 14.15

Sea $m\sphericalangle BCA = \beta$

$\rightarrow$ $\triangle MBC \sim \triangle BAC$

$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{MC}{BC}$

$\therefore$ $(BC)^2 = (AC)(MC)$

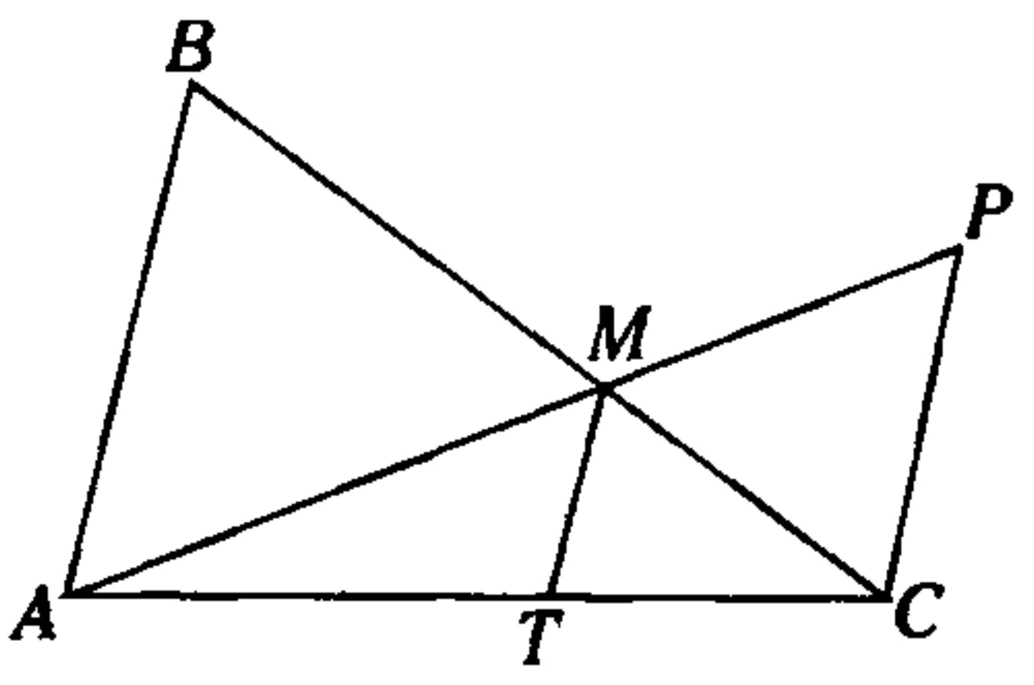
Se presenta un segundo caso cuando la ceviana $\overline{BM}$ es exterior.

Si $\overline{BM}$, la ceviana exterior

$\rightarrow$ $0 < \alpha < 180°$

Teorema

Dados los triángulos *ABC* y *APC*, tal que $\overline{AB} // \overline{PC}$ y $\overline{AP} \cap \overline{BC} = \{M\}$; si $T \in \overline{AC}$ y $\overline{MT} // \overline{BA}$, entonces *MT* es igual al producto de *AB* y *PC* dividido entre la suma de las mismas.

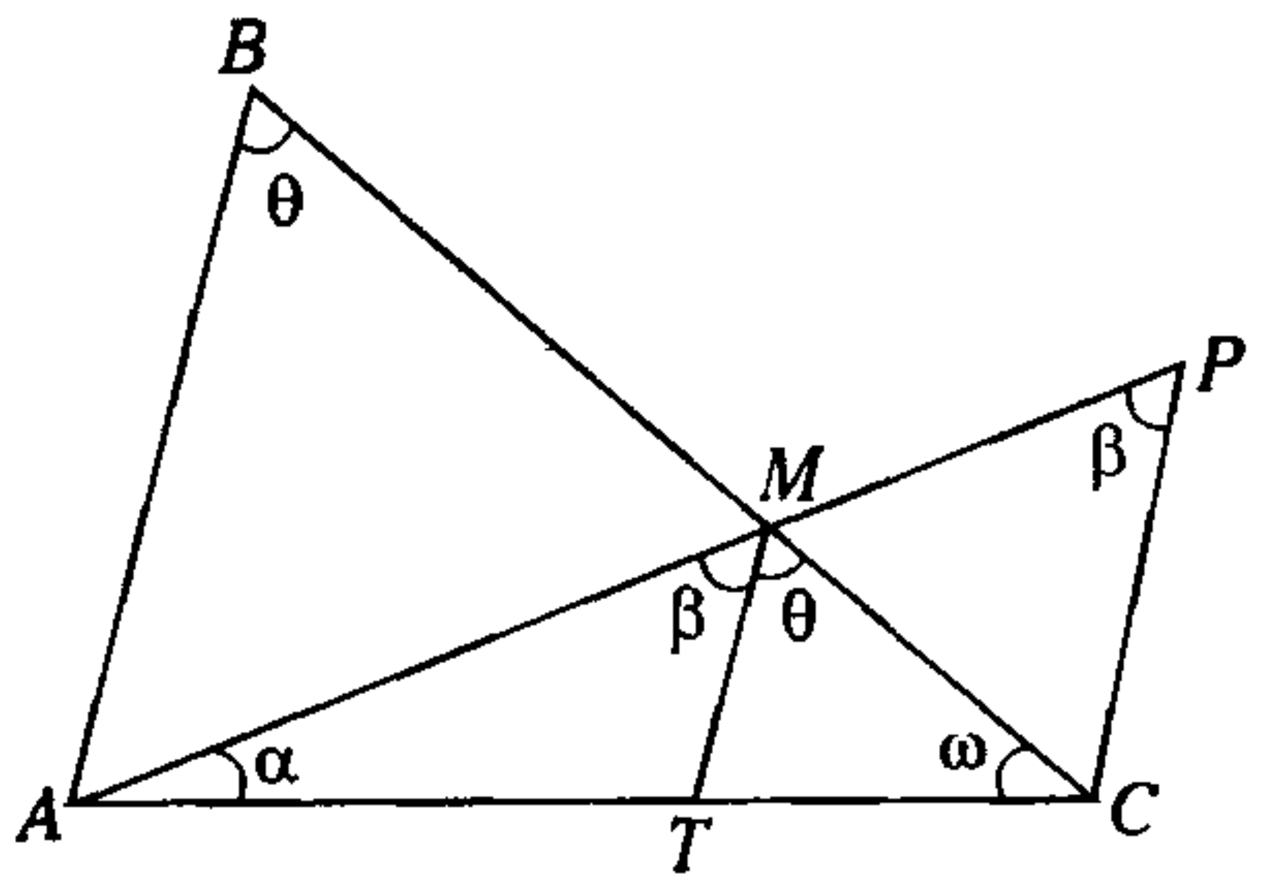


(*a*)

Si $\overline{AB} \parallel \overline{MT} \parallel \overline{PC}$

$$\rightarrow \boxed{MT = \frac{(AB)(PC)}{(AB) + (PC)}}$$

Demostración



(*b*)

Figura 14.16

Dato: $\overline{AB} \parallel \overline{MT} \parallel \overline{PC}$

Entonces $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle TMC = \theta$ y

$m\sphericalangle AMT = m\sphericalangle APC = \beta$

$\triangle ABC \sim \triangle TMC$

$$\rightarrow \frac{MT}{AB} = \frac{TC}{AC} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle AMT \sim \triangle APC$

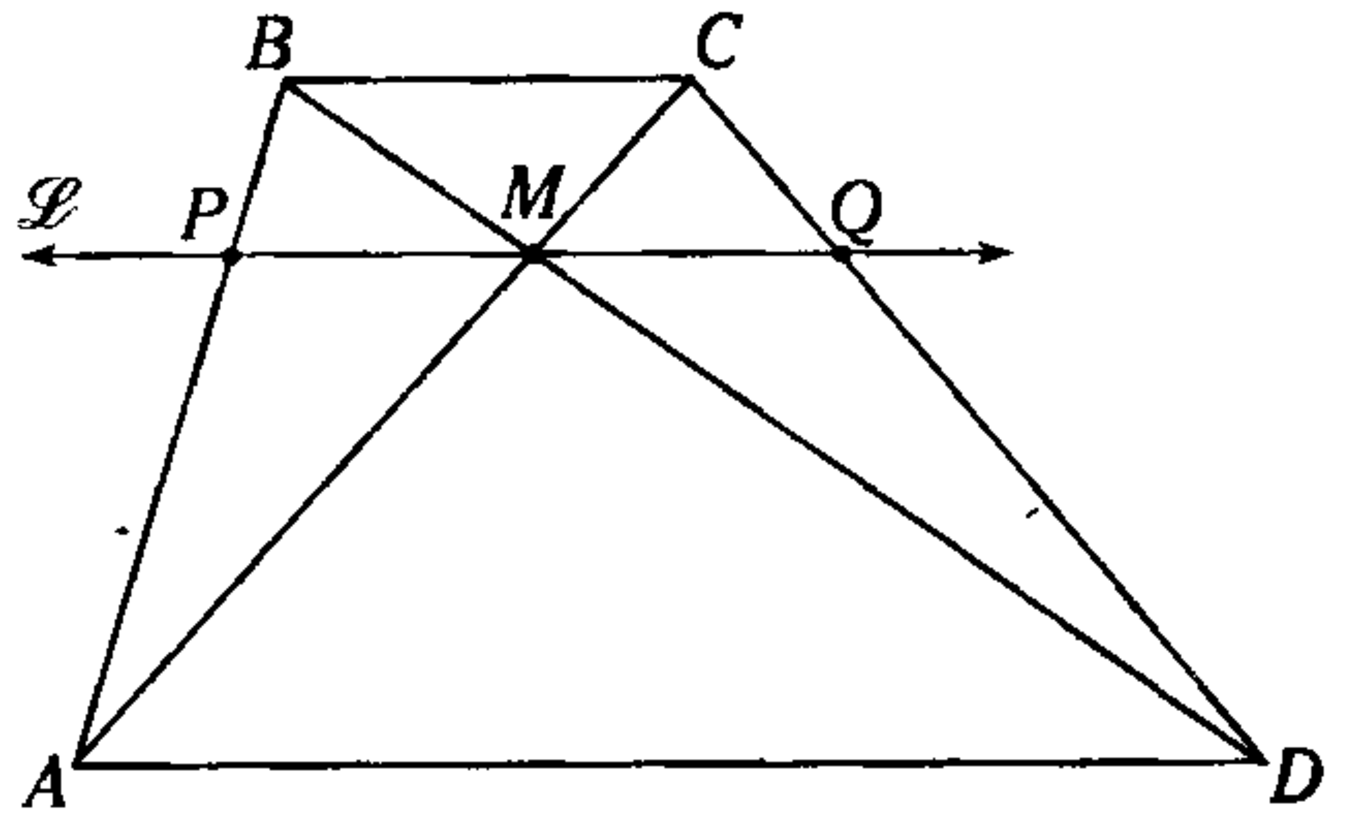
$$\rightarrow \frac{MT}{PC} = \frac{AT}{AC} \qquad \text{(II)}$$

(I) + (II)

$$\rightarrow MT\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{PC}\right) = \frac{AT + TC}{AC} = 1$$

$$\therefore\ MT = \frac{(AB)(PC)}{(AB) + (PC)}$$

Según el teorema anterior, podemos obtener una característica para cualquier tipo de trapecio: si por el punto de intersección de las diagonales de un trapecio se traza una recta paralela a las bases, entonces los segmentos determinados en dicha recta por los lados laterales, que tienen como extremo común el punto de intersección de las diagonales, son de igual longitud.

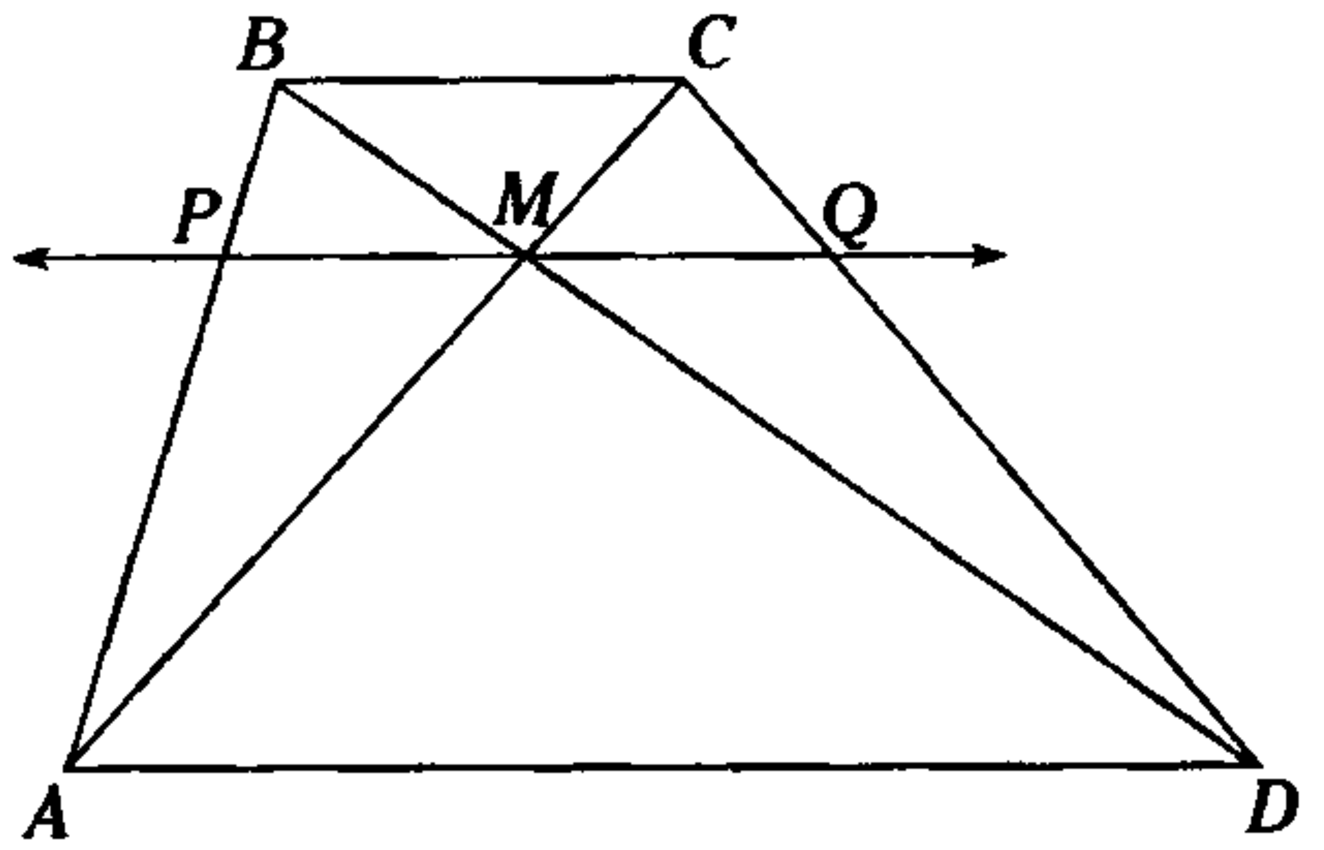


(*a*)

$\square ABCD$ trapecio y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$

$$\rightarrow \boxed{PM = MQ}$$

Demostración



(*b*)

Figura 14.17

Por el teorema anterior

$$PM = \frac{(BC)(AD)}{(BC) + (AD)} \qquad \text{(I)}$$

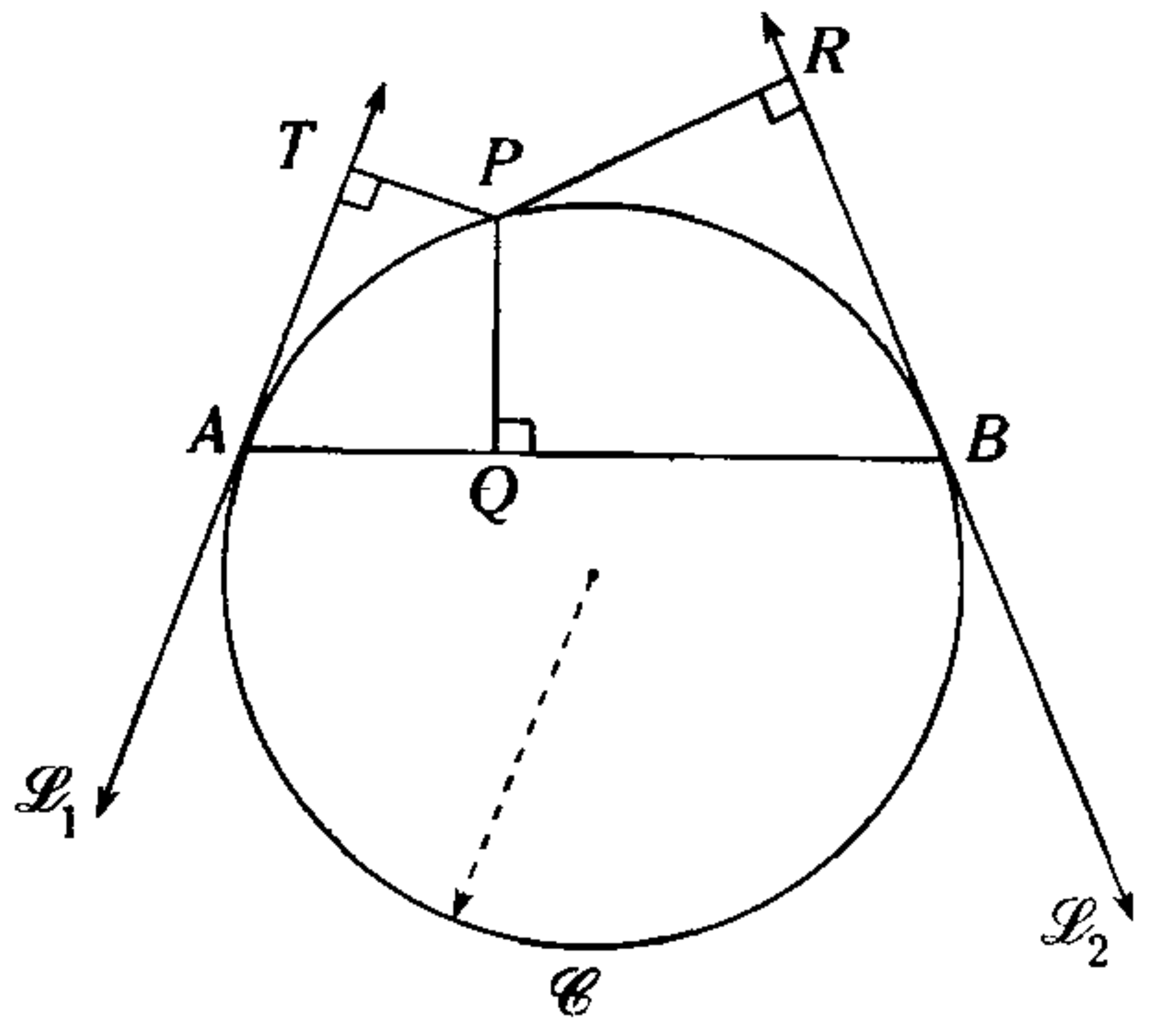
$$MQ = \frac{(BC)(AD)}{(BC) + (AD)} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\therefore\ PM = MQ$$

Teorema

Si por lo extremos de una cuerda se trazan tangentes a la circunferencia correspondiente a dicha cuerda, entonces la distancia de cualquier punto de la circunferencia a dicha cuerda es media proporcional entre las distancias de dicho punto a las tangentes.



(*a*)

Si $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son tangentes a $\mathscr{C}$

$$\rightarrow \boxed{(PQ)^2=(TP)(PR)}$$

Demostración

Sean $m\measuredangle PBA=\beta$ y $m\measuredangle PAB=\alpha$

$$\rightarrow m\widehat{PB}=2\alpha \text{ y } m\widehat{AP}=2\beta$$

Por ángulo semiinscrito

$$m\measuredangle PBR=\frac{m\widehat{PB}}{2}=\alpha,\quad m\measuredangle TAP=\frac{m\widehat{AP}}{2}=\beta$$

$\sqsubset QPRB$ inscriptible

$$\rightarrow m\measuredangle PRQ=\beta \quad \text{y} \quad m\measuredangle PQR=\alpha$$

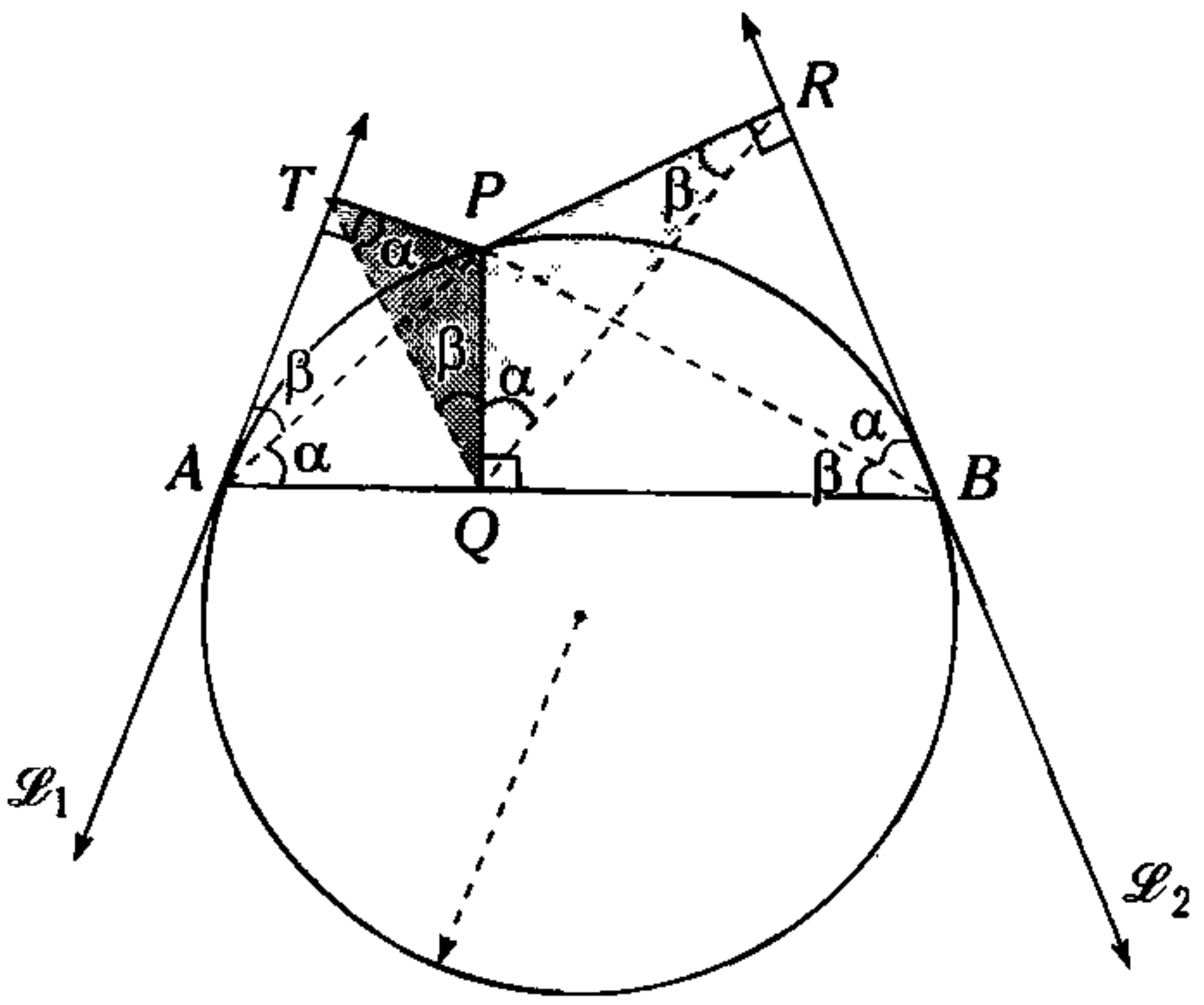
$\sqsubset ATPQ$ inscriptible

$$\rightarrow m\measuredangle PTQ=\alpha \quad \text{y} \quad m\measuredangle PQT=\beta$$

$$\triangle TPQ \sim \triangle QPR$$

$$\frac{TP}{PQ}=\frac{PQ}{PR}$$

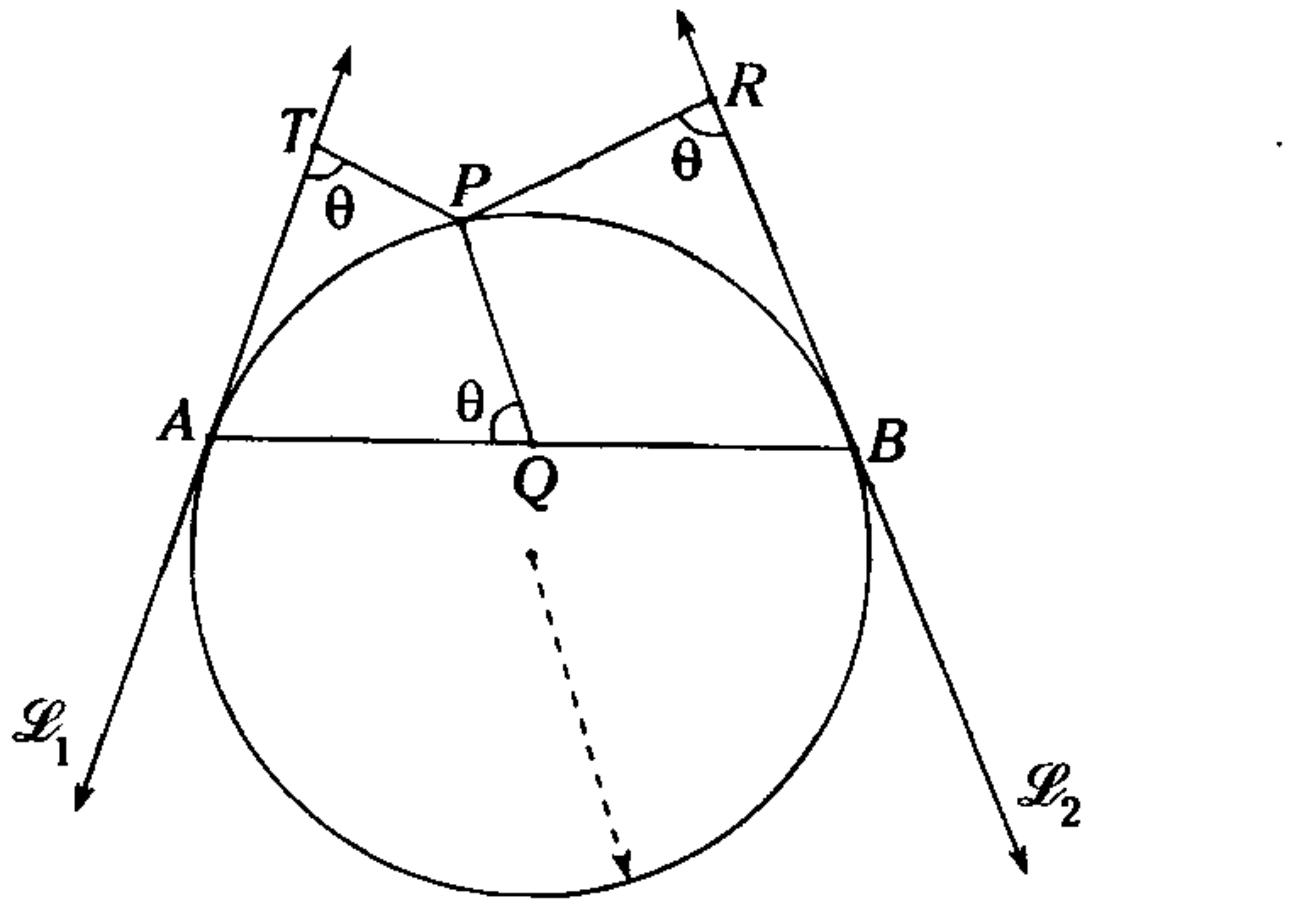
$$\therefore \quad (PQ)^2=(TP)(PR)$$



(*b*)

Figura 14.18

De este teorema se puede obtener una característica general mostrada en la siguiente figura



(*a*)

Si *A* y *B* son puntos de tangencia

$$\rightarrow \boxed{(PQ)^2=(TP)(PR)}$$

Demostración

Desde P trazamos $\overline{PH}, \overline{PD}$ y $\overline{PC}$ perpendiculares a $\overline{AB}, \overline{BR}$ y $\overline{AT}$, respectivamente.

Por el teorema anterior sabemos

$$(PH)^2 = (PC)(PD) \qquad \text{(I)}$$

pero

$$\overline{PC} = (PT)\text{sen}\theta,$$

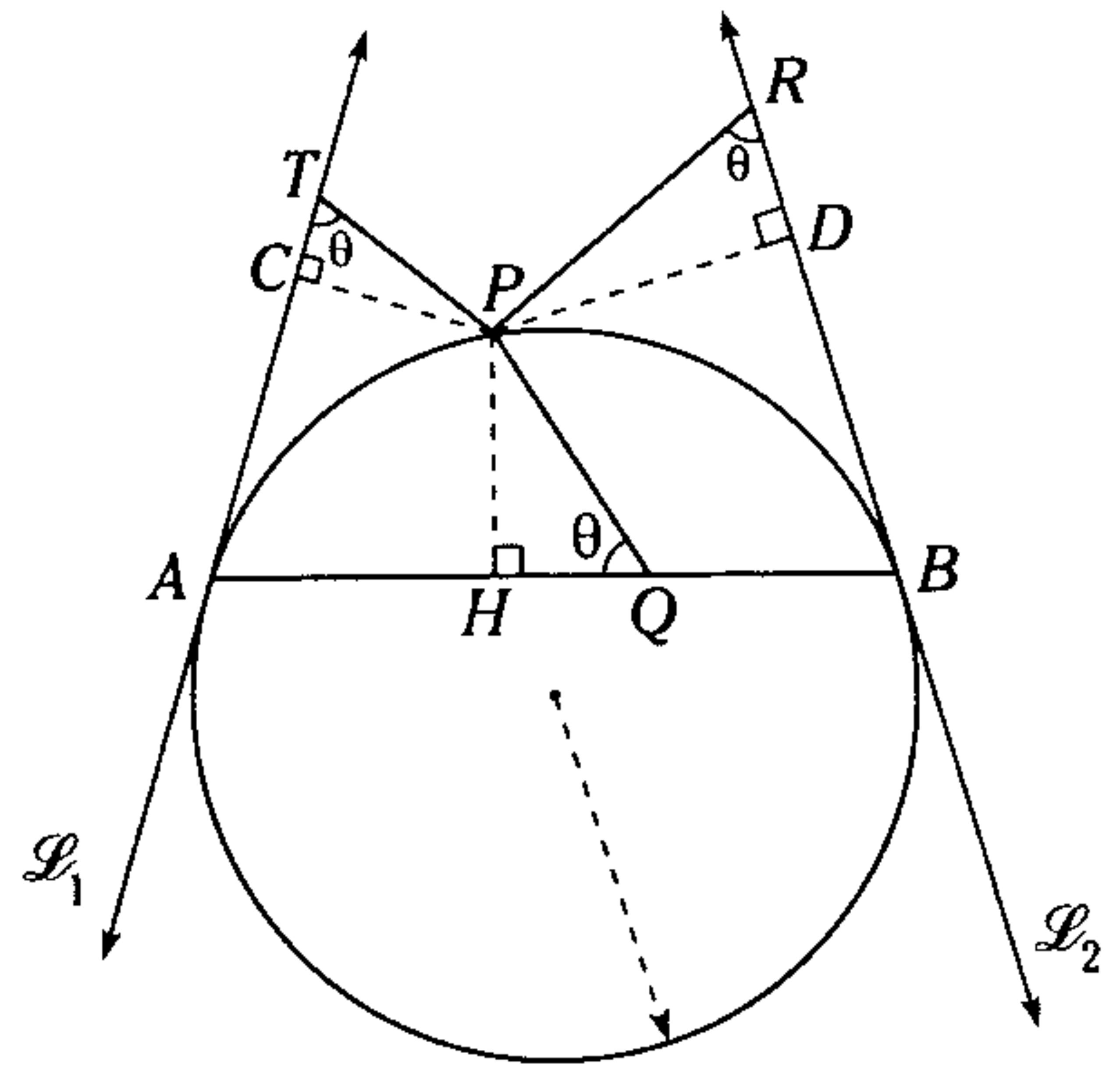
$$\overline{PD} = (PR)\text{sen}\theta \;\; \text{y}$$

$$\overline{PH} = (PQ)\text{sen}\theta$$

Reemplazando en (I)

$$[(PQ)\text{sen}\theta]^2 = [(PT)\text{sen}\theta]\,[(PR)\text{sen}\theta]$$

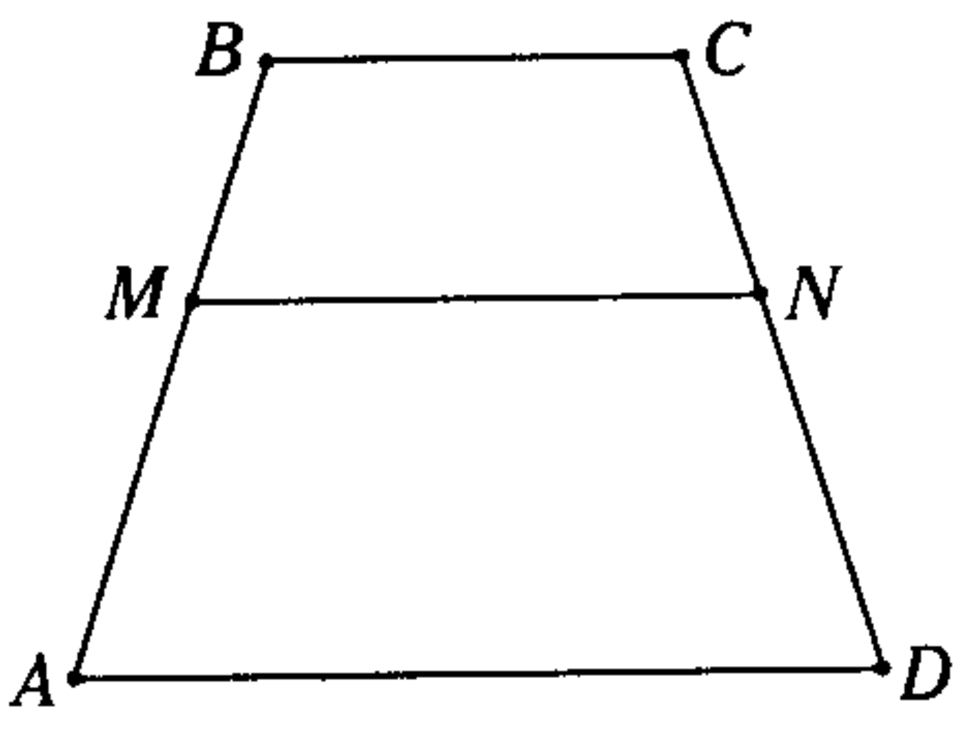
$$\therefore \;\; (PQ)^2 = (PT)(PR)$$



(*b*)

Figura 14.19

Propiedad



(*a*)

Según la figura, $\overline{BC} \,//\, \overline{MN} \,//\, \overline{AD}$; además,

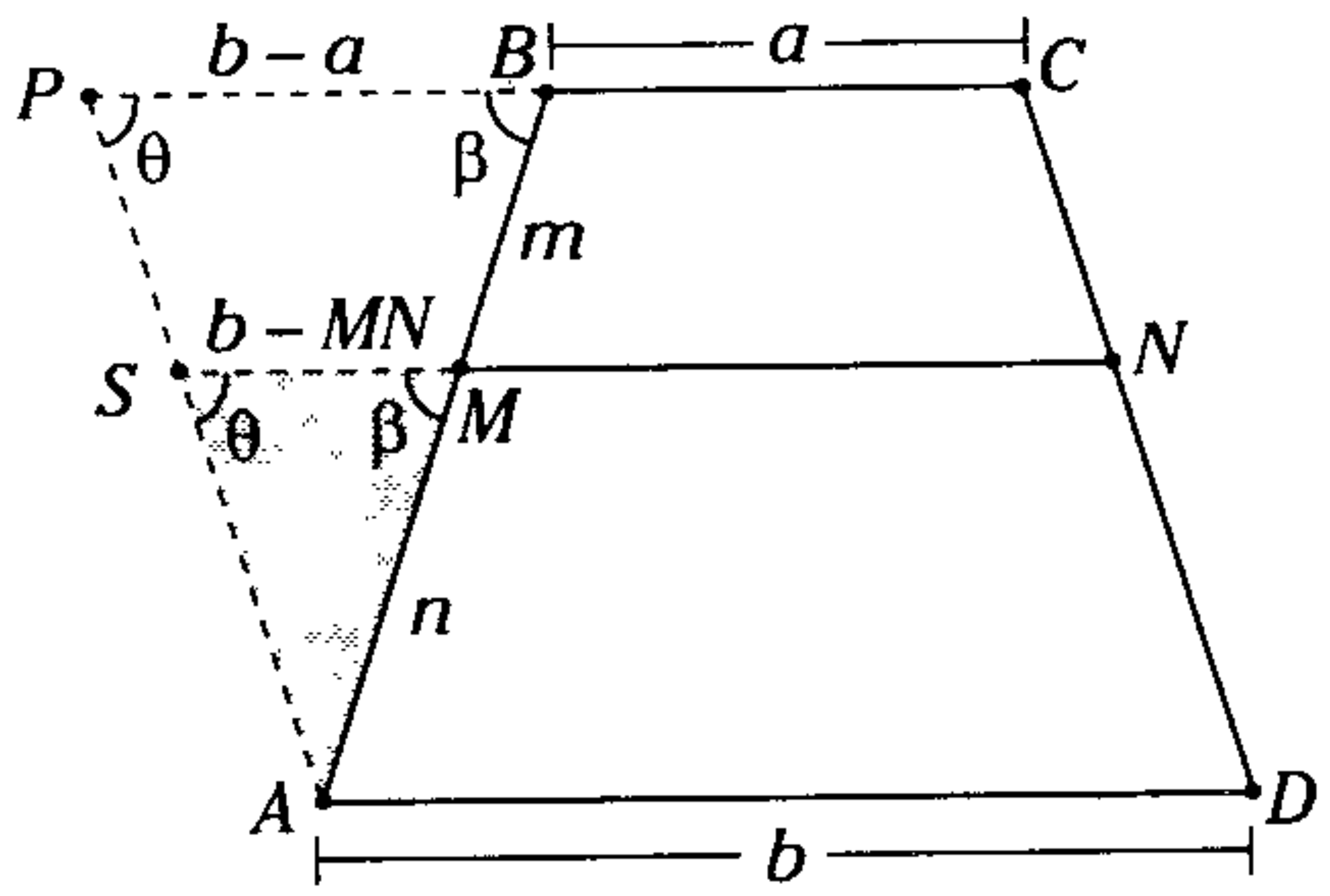
$$BC = a,\; AD = b,\; BM = m \;\text{ y }\; MA = n$$

$$\rightarrow \boxed{MN = \frac{a\,.\,n + b\,.\,m}{m + n}}$$

Demostración

Sea $\square APCD$: romboide

$\rightarrow \;\; \square ASND$: romboide



(*b*)

Figura 14.20

De ahí, $PB = b - a$ y $SM = b - MN$;

además, $\triangle SMA \sim \triangle PBA$

$$\frac{b - MN}{b - a} = \frac{n}{m + n}$$

$$(m+n)(b-MN) = n(b-a)$$

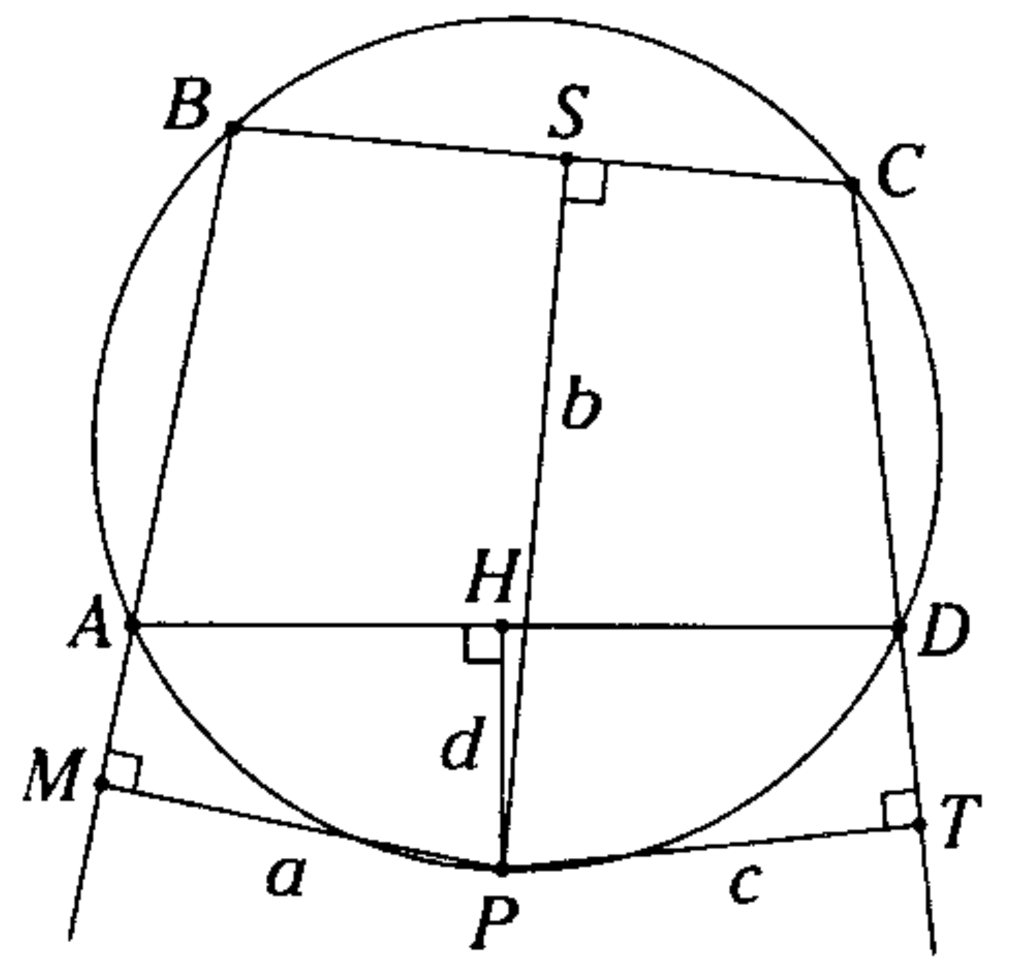
$$(m+n)b-(m+n)MN = n(b-a)$$

$$(m+n)b-n(b-a) = (m+n)MN$$

$$bm + an = (m+n)MN$$

$$\therefore \;\; MN = \frac{a.n + b.m}{m + n}$$

Propiedad



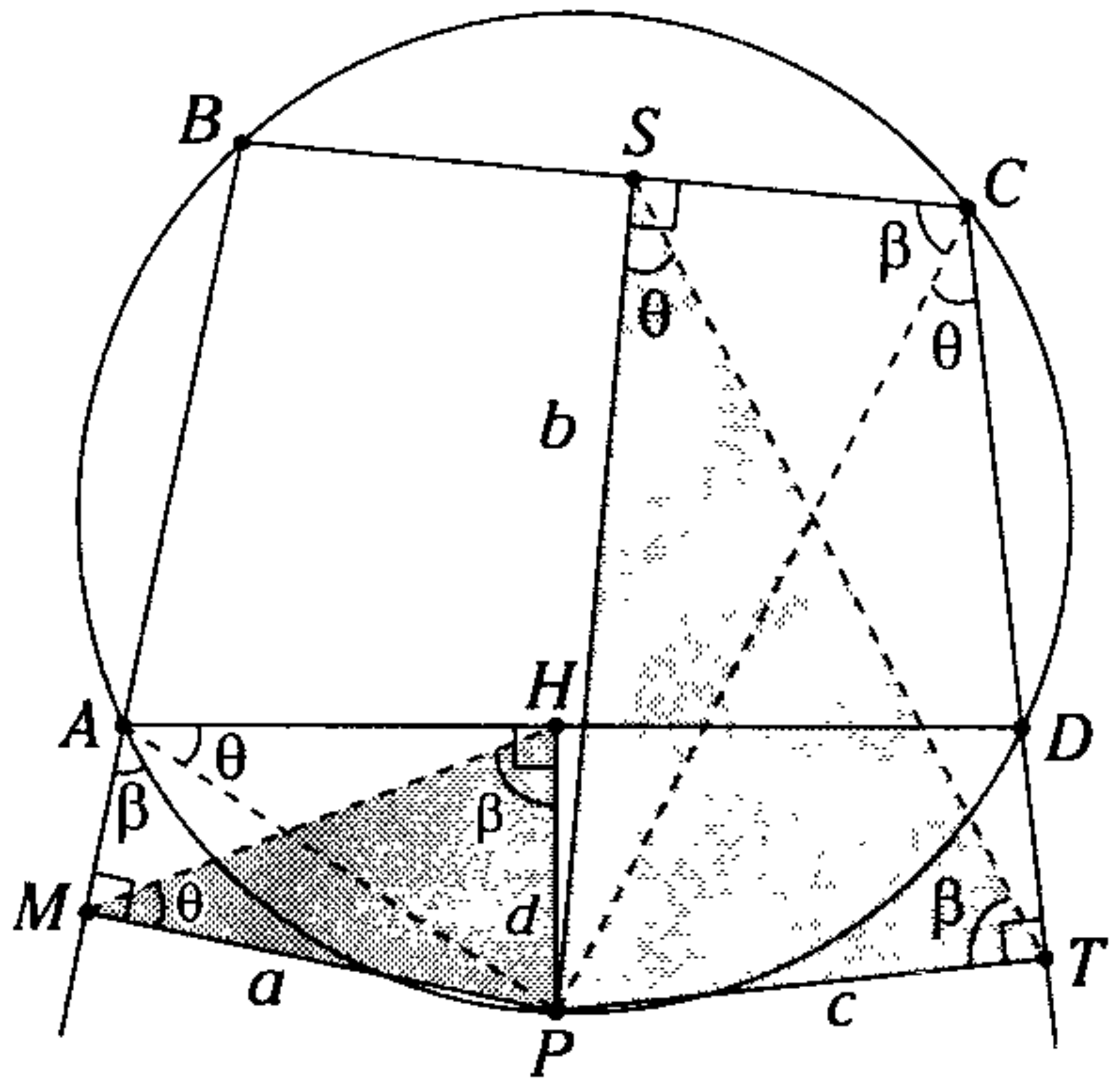
(*a*)

Según la figura,

$PM = a$, $PS = b$, $PT = c$ y $PH = d$

$\rightarrow$ $a.c = b.d$

Demostración



(*b*)

Figura 14.21

Según la figura,

$\square AMPH$ y $\square PSCT$: inscriptible

$\square ABCD$: inscrito

$\rightarrow$ $m\measuredangle HMP = m\measuredangle PST = \theta$;

además,

$m\measuredangle MHP = m\measuredangle PTS = \beta$

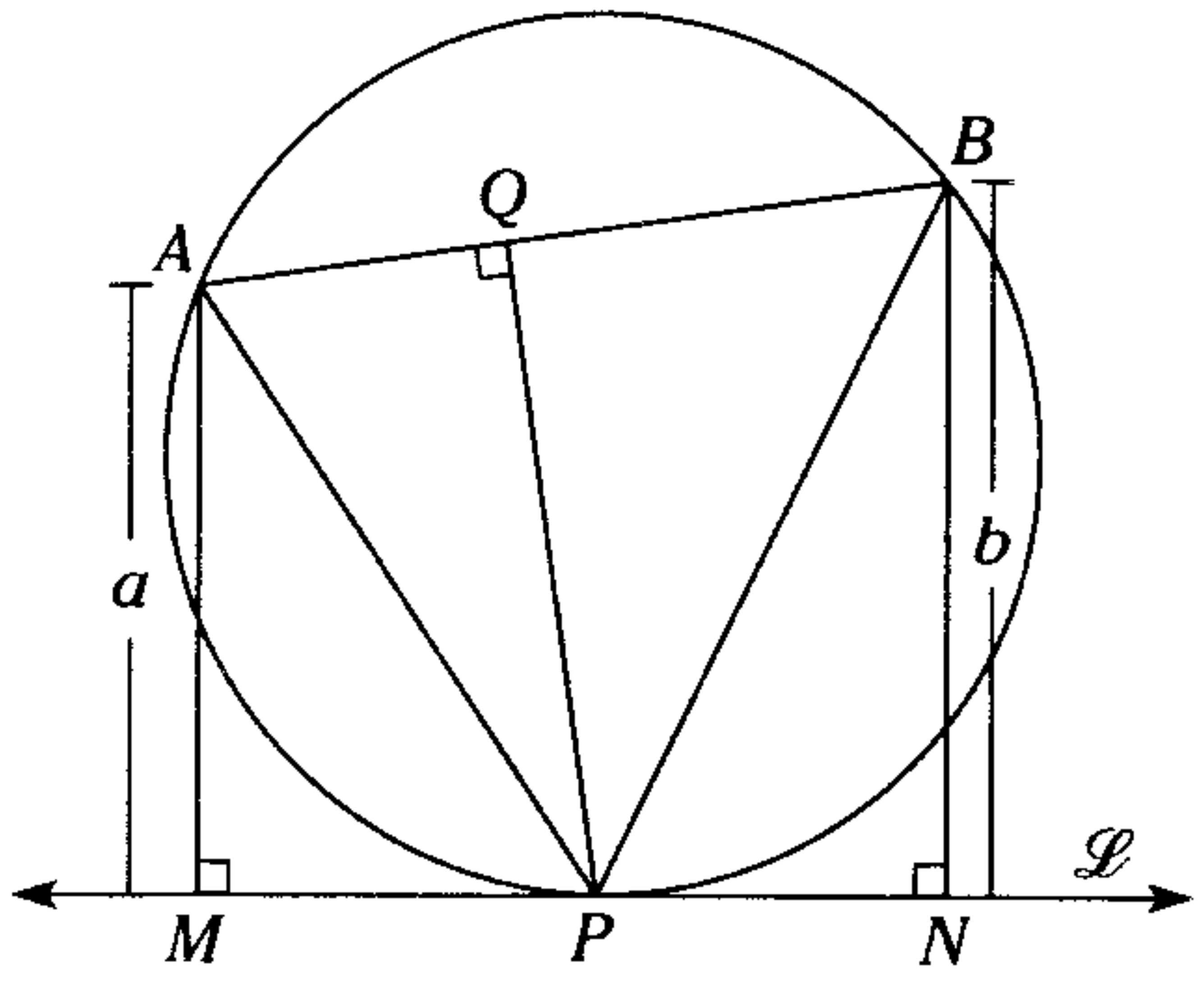
De ahí,

$\triangle MPH \sim \triangle SPT$

$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$

$\therefore\ a.c = b.d$

Propiedad

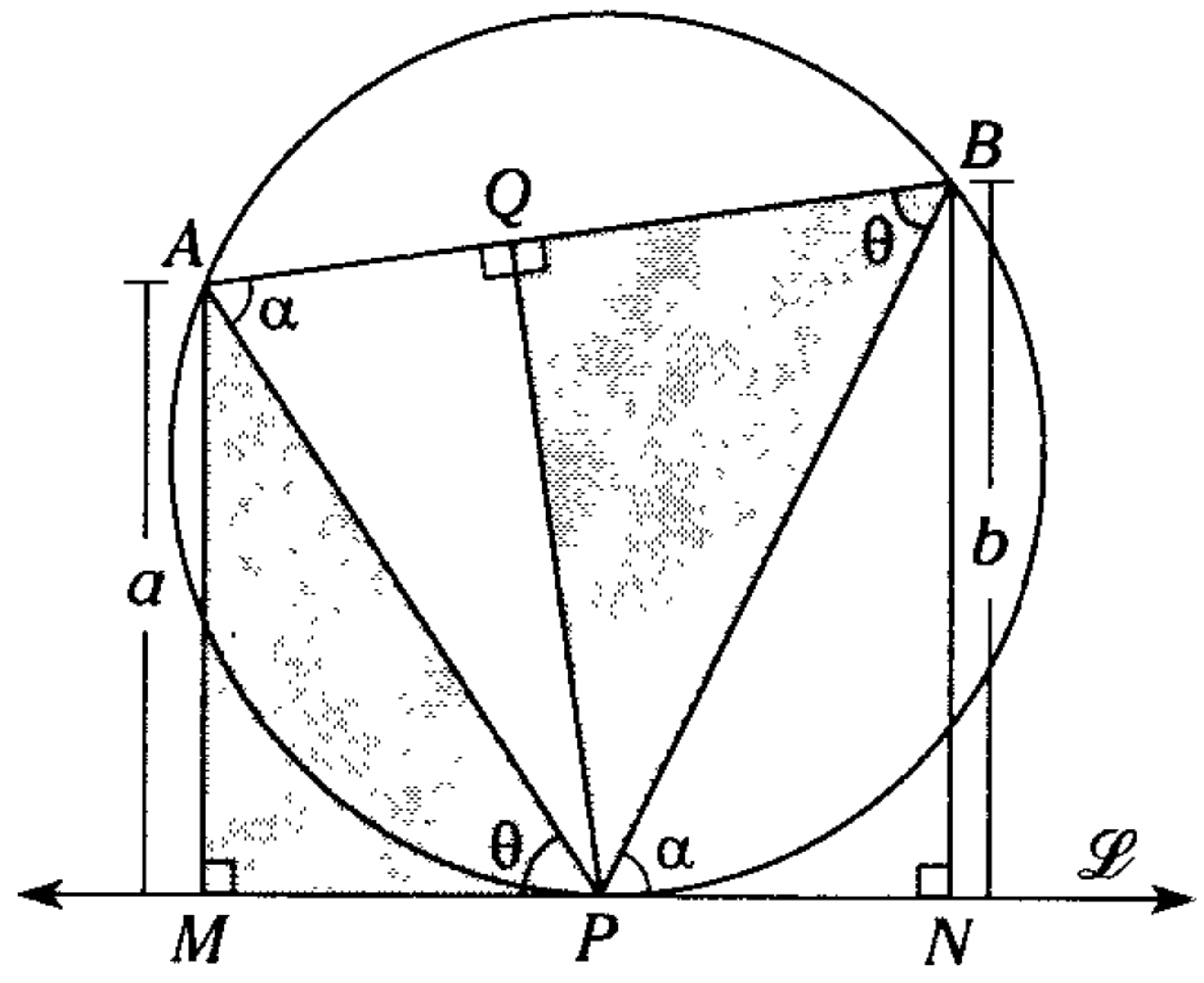


(*a*)

Según la figura, $AM = a$, $BN = b$ y P es punto de tangencia.

$\rightarrow$ $(PQ)^2 = a\,.\,b$

Demostración



(*b*)

Figura 14.22

De la figura

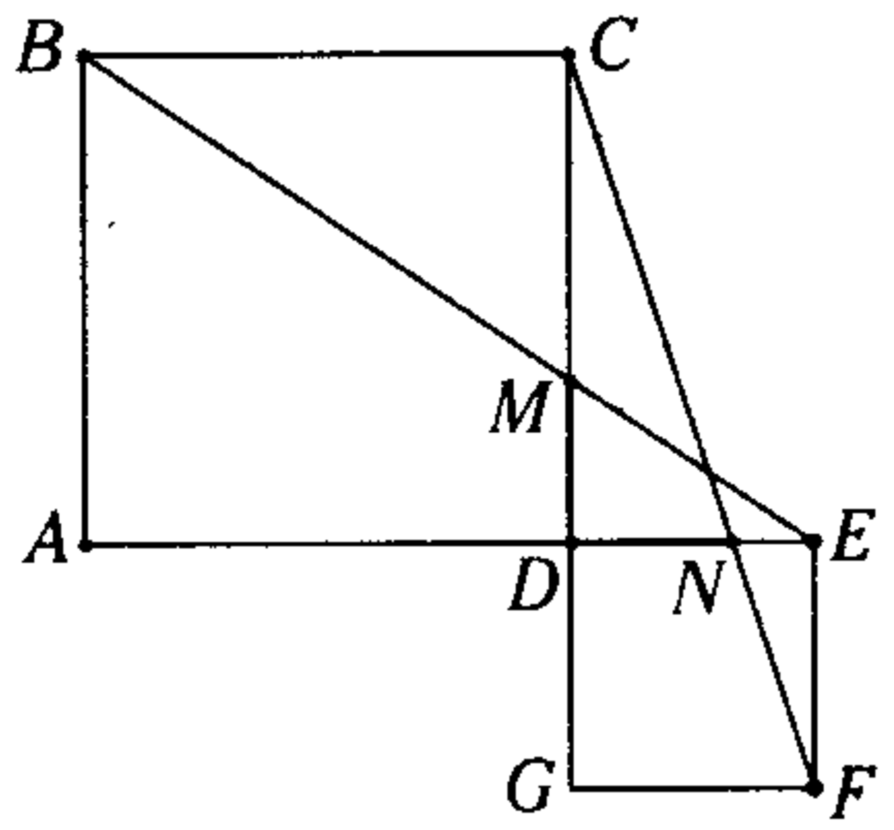
$\triangle AMP \sim \triangle PQB$: $\dfrac{a}{PQ}=\dfrac{AP}{PB}$ (I)

$\triangle PQA \sim \triangle BNP$: $\dfrac{PQ}{b}=\dfrac{AP}{PB}$ (II)

(I) = (II) $\rightarrow$ $\dfrac{a}{PQ}=\dfrac{PQ}{b}$

$\therefore$ $(PQ)^2=a.b$

Propiedad



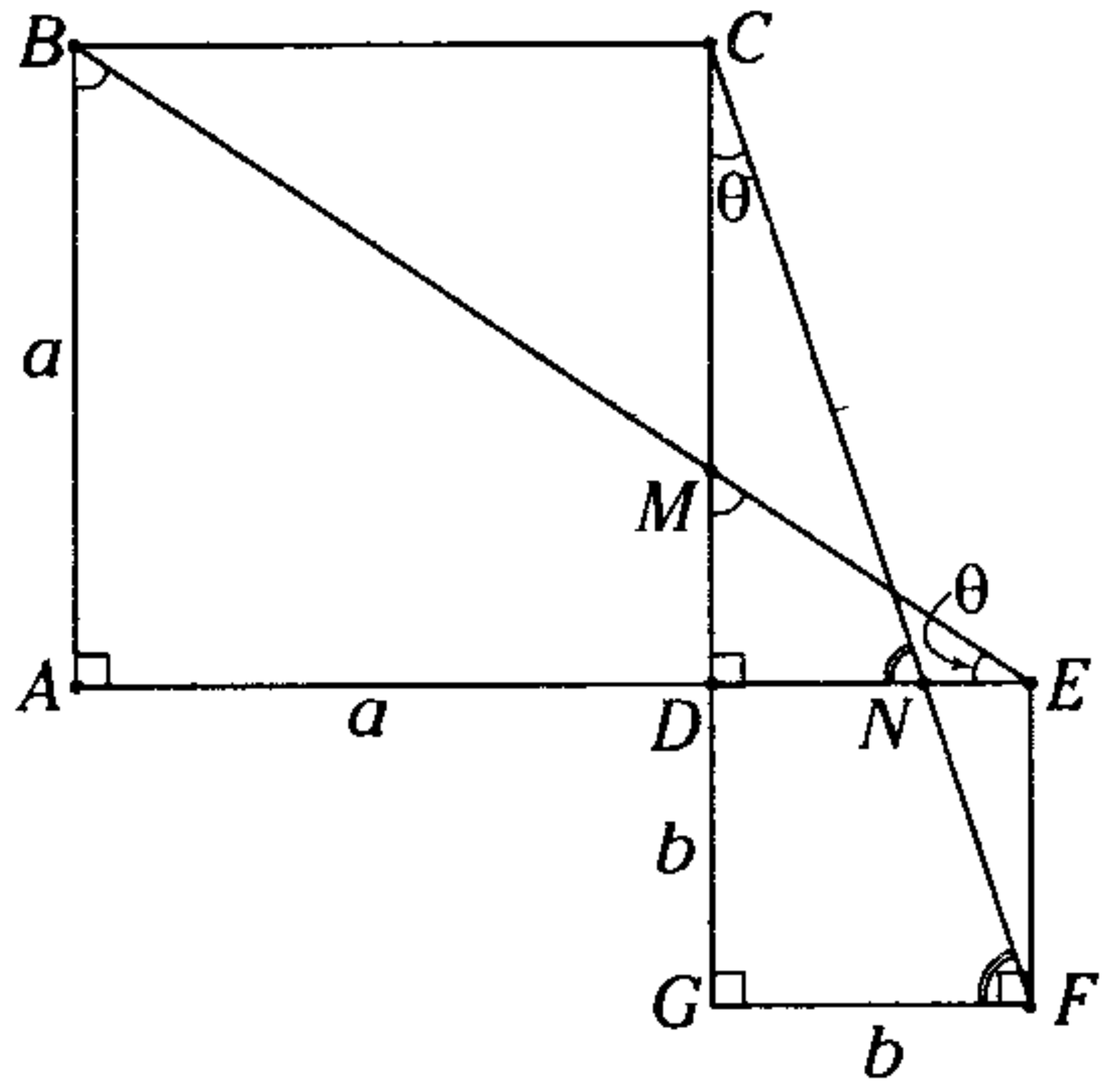
(a)

Según la figura, los cuadriláteros *ABCD* y *DEFG* son cuadrados.

$\rightarrow$ $\boxed{MD=DN}$

Demostración

En la figura, $AB=AD=a$ y $DG=GF=b$



(b)

Figura 14.23

$\triangle MDE \sim \triangle BAE$

$$\frac{MD}{a}=\frac{b}{a+b} \quad \text{(I)}$$

$\triangle CDN \sim \triangle CGF$

$$\frac{DN}{b}=\frac{a}{a+b} \quad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

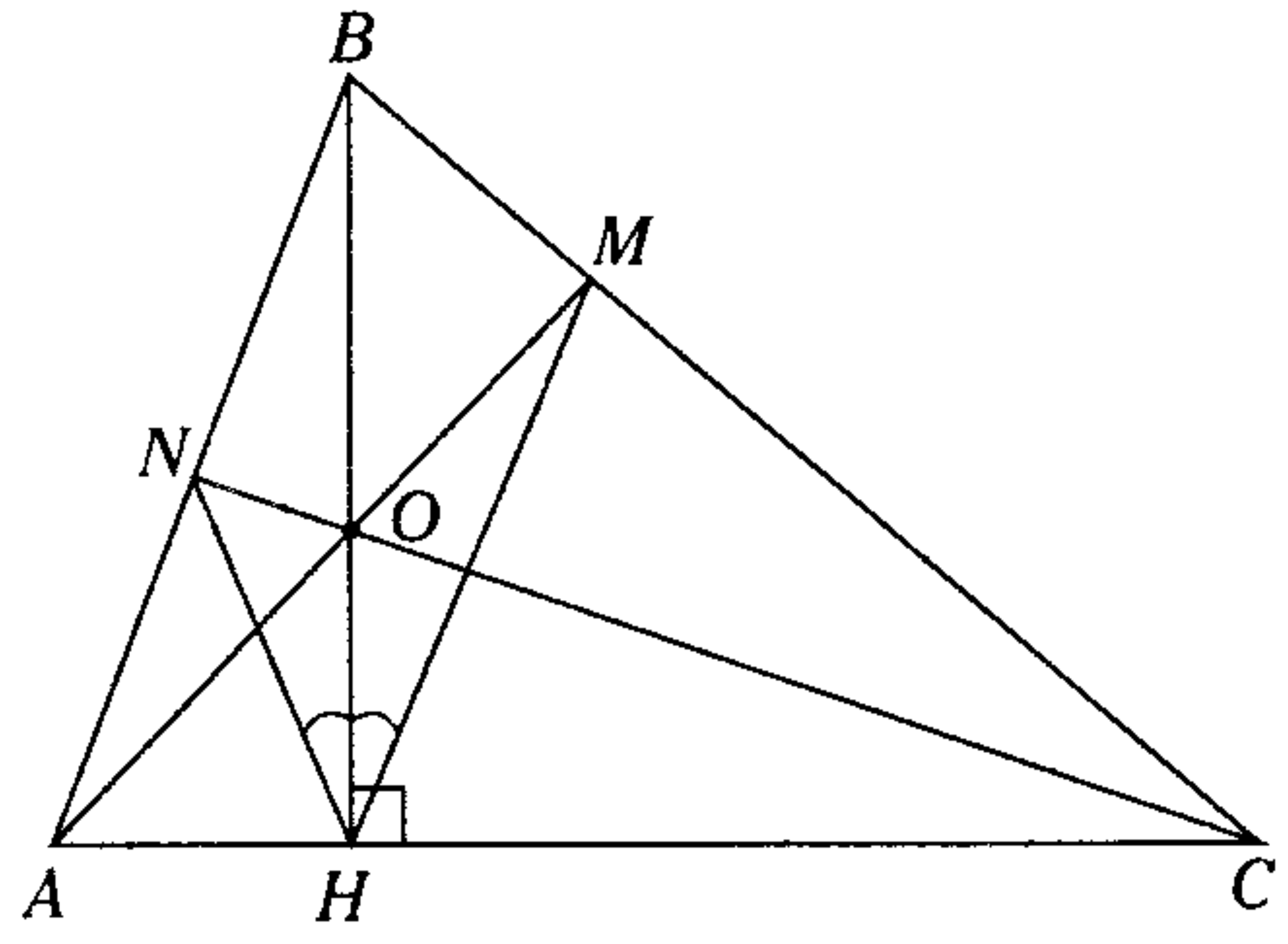
$\rightarrow$ $MD=\dfrac{ab}{a+b}$

$\rightarrow$ $DN=\dfrac{ab}{a+b}$

$\therefore$ $MD=DN$

TEOREMA DE BLANCHET

En todo triángulo, los pares angulares formados por una altura y los segmentos que resultan al unir el pie de dicha altura con los pies de dos cevianas concurrentes con ella tienen igual medida. Dicho punto de concurrencia es distinto a un vértice.



(a)

Si $\overline{BH}$ altura, $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ cevianas

y $\overline{BH}$, $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ son concurrentes en O,

$\rightarrow$ $\boxed{m\sphericalangle BHN = m\sphericalangle BHM}$

Demostración

Por B trazamos la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, así resulta que $\overleftrightarrow{HB} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$. Posteriormente, prolongamos $\overline{HN}$ y $\overline{HM}$ que intersecan a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en Q y P, respectivamente.

Los triángulos QBN y HAN son semejantes y

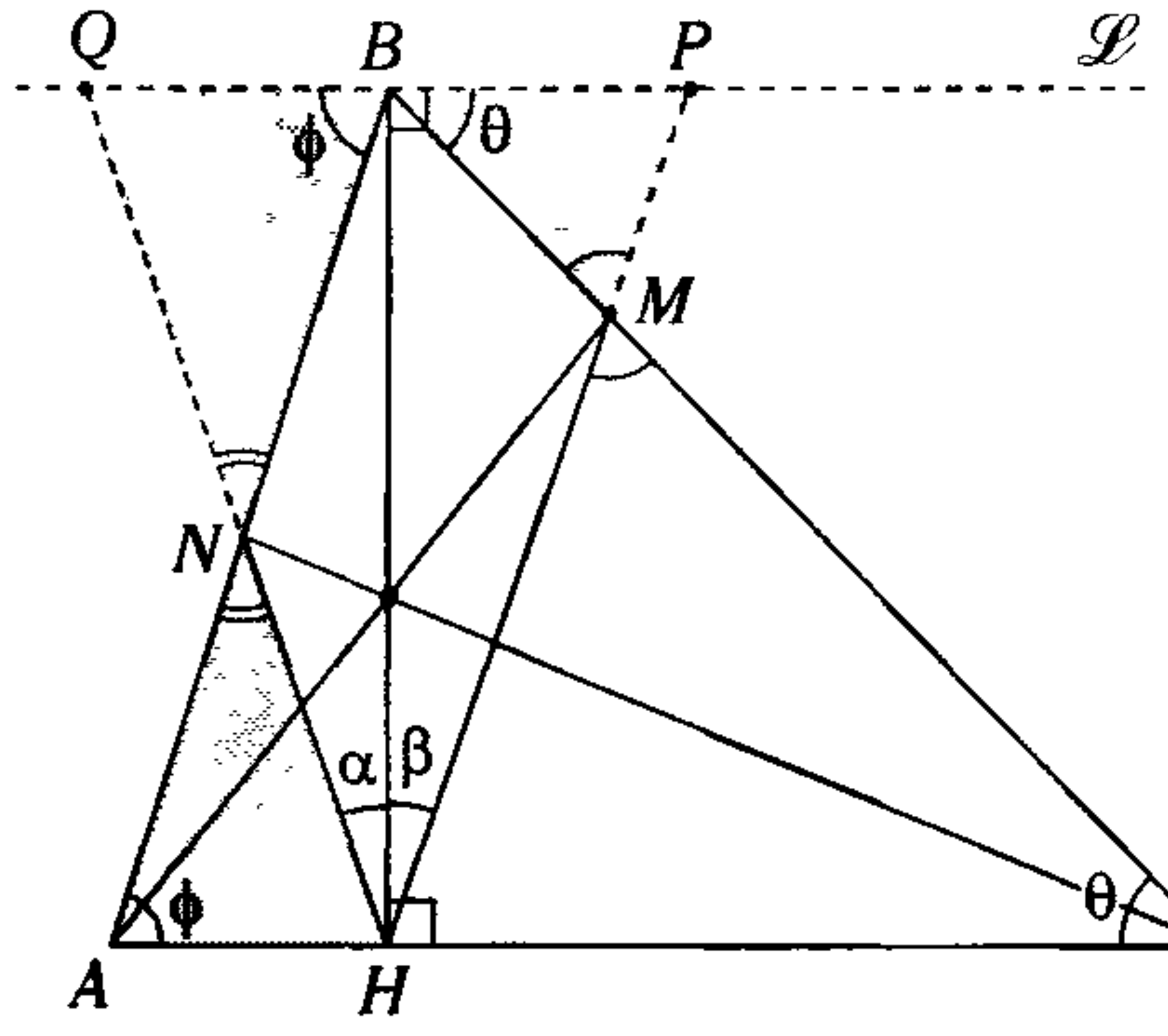
$$\frac{QB}{AH} = \frac{NB}{NA} \qquad \text{(I)}$$

Así también, los triángulos PBM y HCM son semejantes, por lo que

$$\frac{PB}{CH} = \frac{BM}{MC} \qquad \text{(II)}$$

Del teorema de Ceva para las cevianas $\overline{AM}$, $\overline{BH}$ y $\overline{CN}$

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CH}{HA} = 1 \qquad \text{(III)}$$



(*b*)

Figura 14.24

Reemplazando (I) y (II) en (III) tenemos

$$\frac{AH}{QB} \cdot \frac{PB}{CH} \cdot \frac{CH}{HA} = 1 \rightarrow PB = QB$$

Como en el triángulo PQH ($\overline{HB}$ es altura y $PB = QB$), resulta que

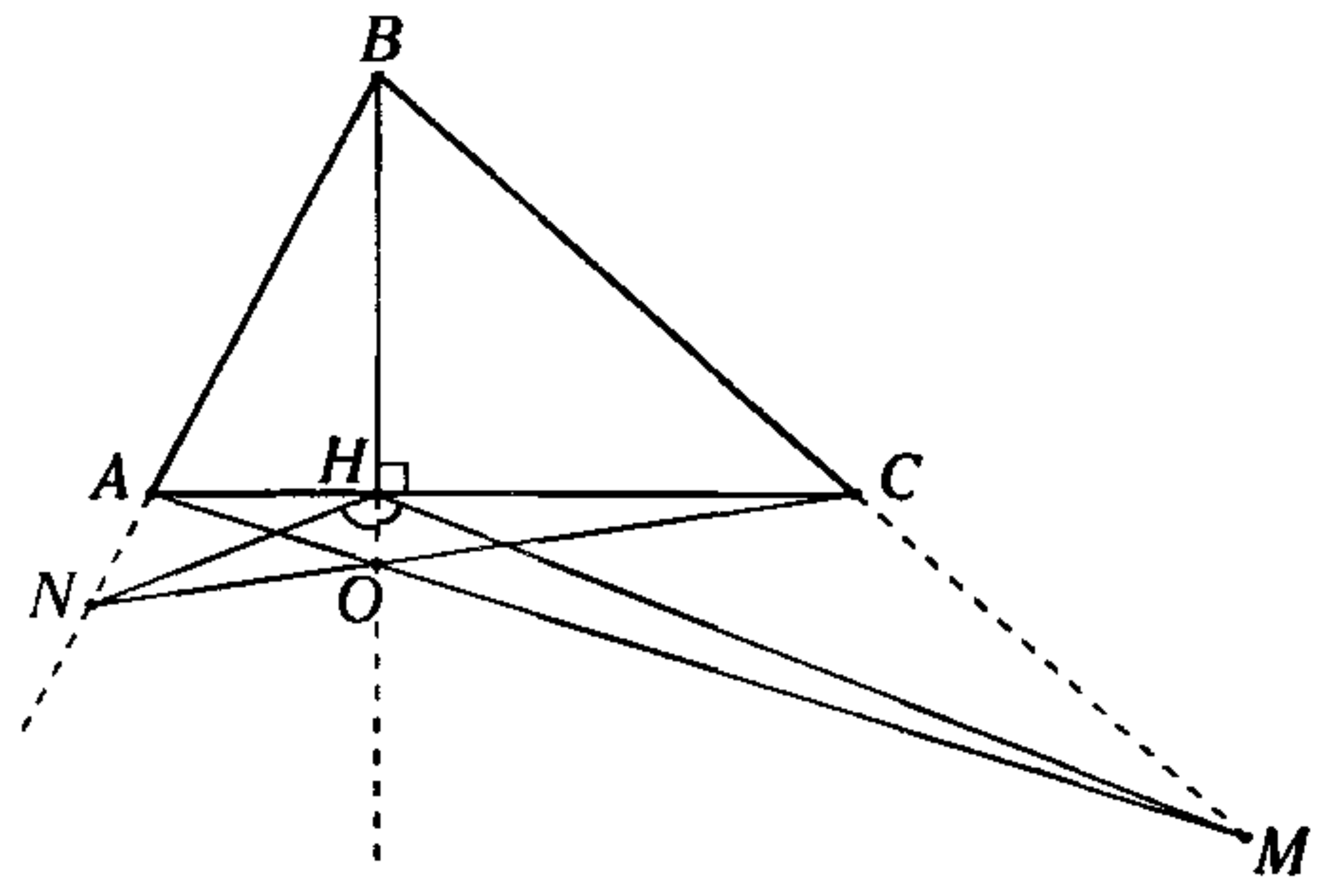
$\triangle QHP$ es isósceles y $\alpha = \beta$

$$\therefore \boxed{m\sphericalangle QHB = m\sphericalangle BHP}$$

Observación

El teorema de Blanchet también se cumple cuando las cevianas AM y CN son exteriores; en este caso, el punto de concurrencia O está en la prolongación de $\overline{BH}$. Se cumple, así, que

$$\boxed{m\sphericalangle OHN = m\sphericalangle OHM}$$



LECTURA

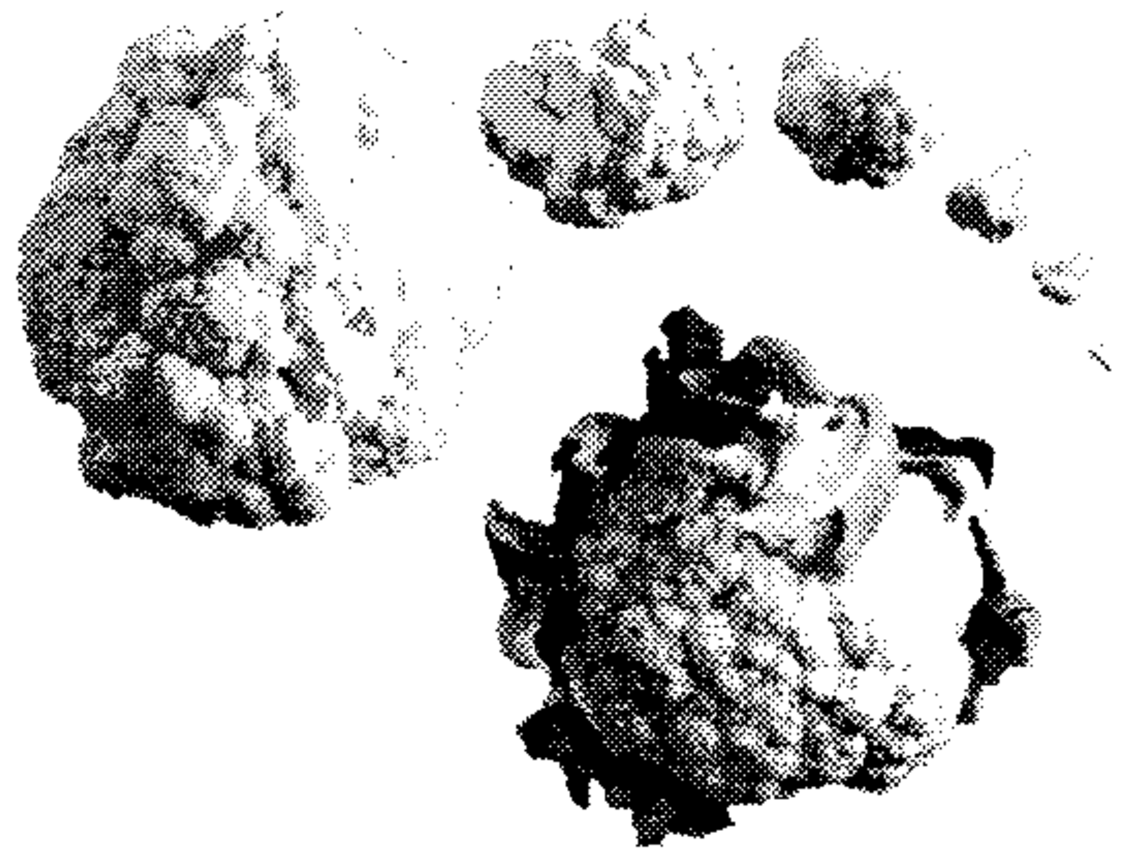
GEOMETRÍA FRACTAL

Hace unos 20 años, el término fractal era empleado para describir ciertas formas geométricas cuya estructura se repetía en cada una de sus partes, y en las partes de sus partes. Hoy en día aparece en la distribución de las estrellas de nuestra galaxia, en las irregularidades de una costa y en el latir de un corazón.

Una marca fractal señala la distribución de los epicentros de los temblores, la repetición de las palabras de un texto e incluso las fluctuaciones de precios de un mercado. Las reglas de la Geometría fractal se emplean para crear, reproducir, almacenar y transmitir imágenes: Así, han revolucionado, en todos los sentidos, la manera en que captamos la imagen del universo.

Nuevas reglas, nuevas geometrías

Nuestro mundo está constituido por montañas, costas, mares, nubes, plantas, animales, etc; sin duda alguna es el reino de la forma. Si quisiéramos describirlo, un vistazo rápido podría desalentar todo intento de realizar simplificaciones; más que el reflejo de la perfecta armonía de un mundo sencillo, parece ser el dominio de la irregularidad y el caos. Cuerpos amorfos desde rocas hasta planetas, flujos turbulentos desde ríos a tornados, patrones asimétricos que sobrepasan con mucho el número de cuerpos regulares con los que el hombre se ha obsesionado desde el inicio de los tiempos. Azar y desorden en un universo aparentemente estructurado.



El brócoli presenta una distribución a escala de sus partes.

Sin embargo, en este mar de caos, una observación más cuidadosa de la naturaleza muestra que aún dentro de su enorme complejidad existen ciertos patrones que la caracterizan.

Una roca es similar a la montaña de la que forma parte; una rama tiene la misma estructura que la del tronco del que nace. Es como si la decisión hubiera sido repetir la misma forma a diferentes escalas dentro de un mismo objeto, asegurando la preservación de una copia original a cualquier nivel de amplificación; como si se pensara en generar el máximo nivel de detalle con el mínimo costo en el diseño.

También el helecho de cuervo está compuesto de partes semejantes a las partes y a las partes de las partes.

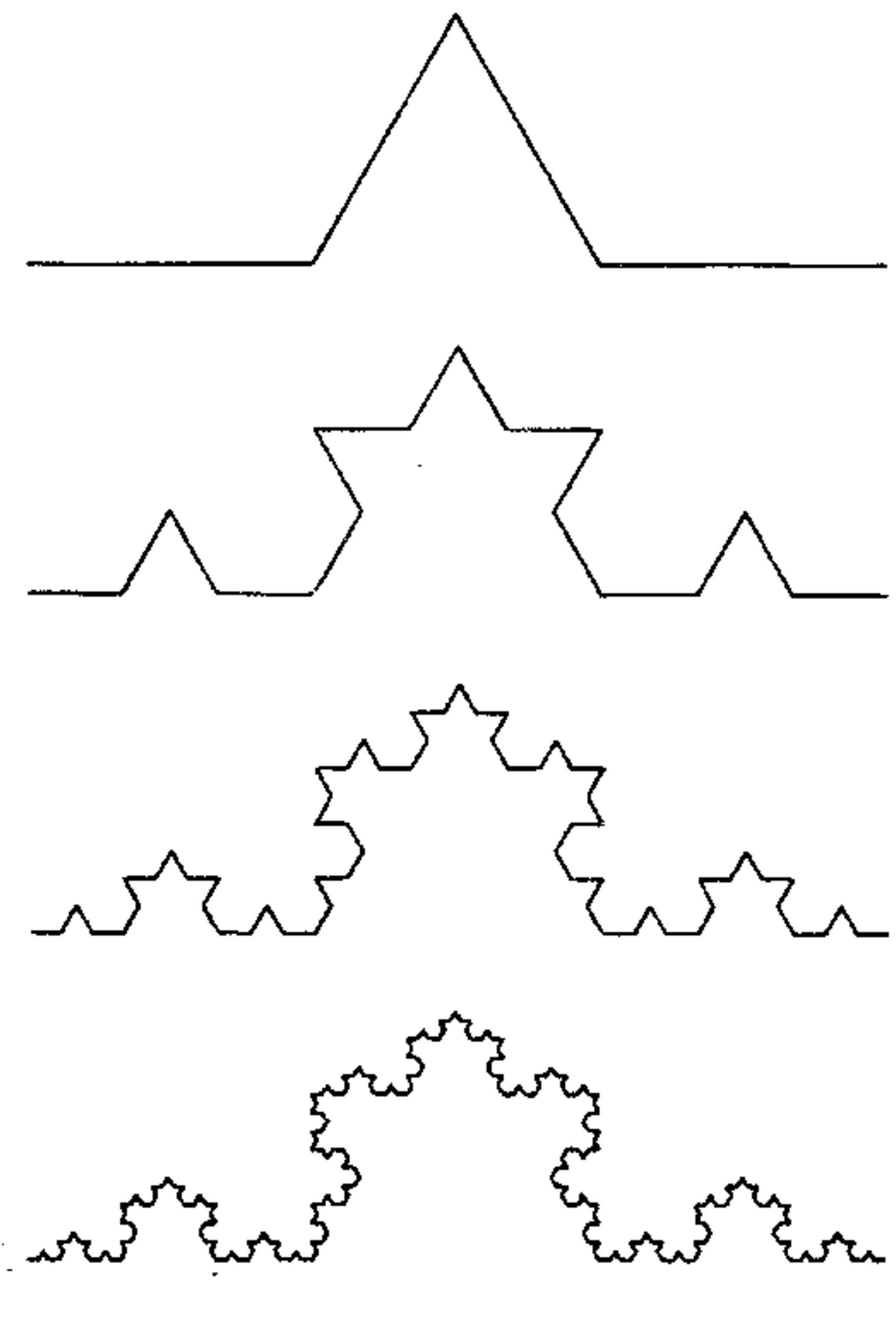
Un brócoli o una coliflor (figura 1), un helecho de cuervo (figura 2) son muestra vivas de este juego de la naturaleza en el que el mismo patrón de crecimiento se manifiesta a diferentes escalas. Aunque es verdad que la realidad coloca límites a la imaginación, nada nos impide especular sobre las propiedades de helechos "imaginarios" que a un nivel microscópico exhiban características geométricas semejantes a las de la planta completa.

Estructuras como estas se conocen desde hace mucho tiempo en el campo de las matemáticas. Quizás uno de los ejemplos más representativos sea la curva construida en 1904 por el matemático sueco Helge von Koch (nació, 25 de enero 1870 - murió, 11 marzo 1924). Para dibujarla, basta tomar un triángulo equilátero como figura inicial y añadir en el centro de cada uno de sus lados un nuevo triángulo equilátero tres veces más pequeño que el original. Repitiendo indefinidamente este proceso, se obtiene la curva o copo de nieve de Koch.

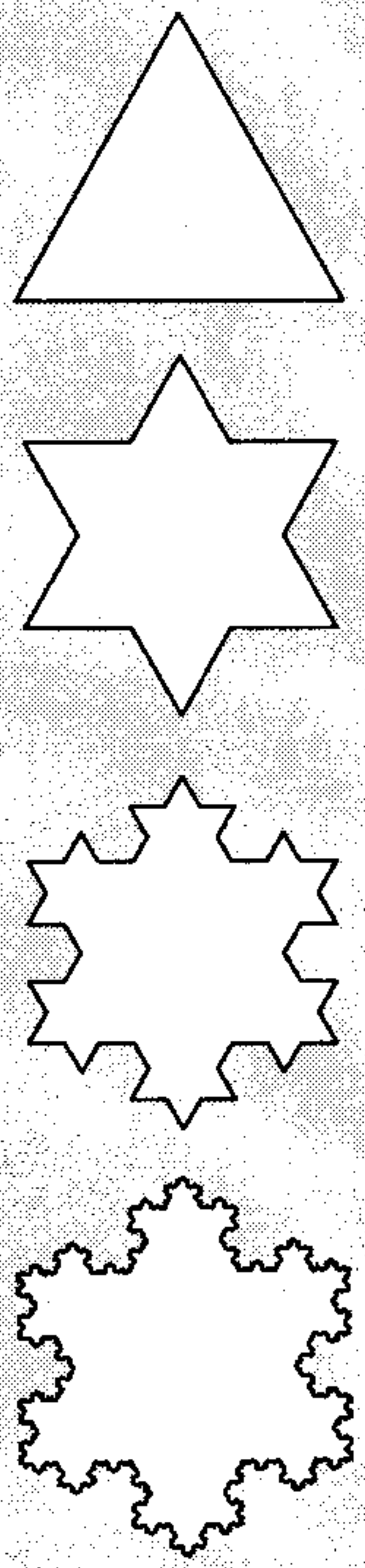
Helge von Koch

Triángulo sobre triángulo hasta el límite de cualquier imaginación, pues la forma del contorno se repite a todos los niveles. Cada punto sobre ella, si lo exploramos con una lupa, nos revelaría siempre los mismos secretos; triángulo sobre triángulo, indefinidamente.

A entidades como esta se les denomina autosimilares; pues, cada una de sus partes es igual al total (su apariencia es la misma a cualquier escala) y desde el punto de vista matemático poseen ciertas propiedades peculiares que las distinguen (Briggs, 1990).



Triángulo sobre triángulo hasta el límite de cualquier imaginación, pues la forma del contorno se repite a todos los niveles.



El copo de nieve de Koch.

BIOGRAFÍA

KARL FRIEDERICH GAUSS (Brunswick 1777 - Göttingen 1885)

Nació en Brunswick, Alemania, en 1977. Ingresó a la universidad de Göttingen en 1795. A los 18 años inventó el método de los cuadrados mínimos.

A los 19 años demostró la constructibilidad del polígono regular de 17 lados usando solo regla y compás; este último éxito lo decidió a preferir la matemática sobre la filosofía, hasta entonces otra de sus más fuertes inclinaciones.

Su tesis doctoral fue la demostración del teorema fundamental del álgebra y dos años después publicó su libro más conocido *Disquisitiones mathematicae*, un tratado de teoría de números. Allí desarrolla la teoría de congruencia, tal como la conocemos hoy; incluye una demostración del teorema fundamental de la aritmética, de la ley de reciprocidad cuadrática y los temas generales sobre el número de lados de los polígonos regulares construibles con regla y compás, así como numerosos resultados y conjeturas sobre números primos.

Su contribución al desarrollo de la matemática es notable: teoría de funciones de variable compleja, funciones, funciones elípticas, topología, geometría no euclidiana.

Su interés por la cartografía y la agrimensura permitió desarrollar su trabajo *Investigaciones generales sobre superficies curvas*.

En 1818, como consecuencia de un estudio geodésico del reino de Hannover creó la teoría de superficies.

Gauss falleció en Göttingen en 1855, siendo director del observatorio de la universidad y profesor de matemáticas.

FUENTE: ARAUJO, José, *Área y volumen en la geometría elemental*. Buenos Aires - Argentina. Red Olímpica. 2000. p. 198

Problemas Resueltos

Problema 1

Se tienen dos circunferencias tangentes interiores en P, en la circunferencia mayor se traza la cuerda $\overline{AB}$ tangente a la circunferencia en Q.

Si $\dfrac{(AQ)\times(PS)}{AP} = 6$ cm, calcule AS.

A) 4 cm B) 2 cm C) 6 cm
D) 3 cm E) 1/6 cm

Resolución

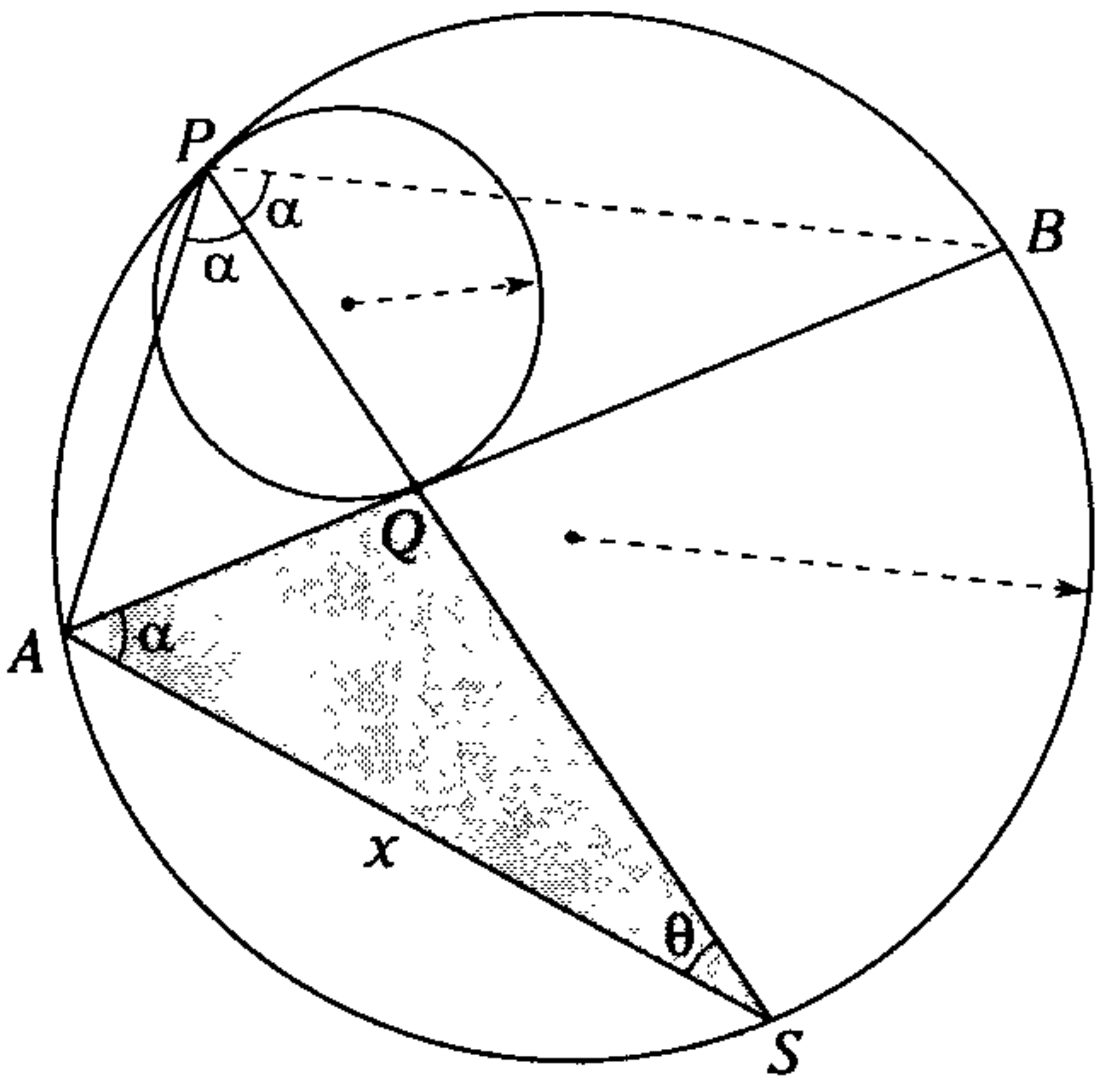


Figura 14.25

Piden $AS = x$

Se sabe que $m\sphericalangle APQ = m\sphericalangle BPQ = \alpha$

$\triangle AQS \sim \triangle PAS$

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{x}{PS}$$

$$\rightarrow \quad \frac{(AQ)\times(PS)}{AP} = x$$

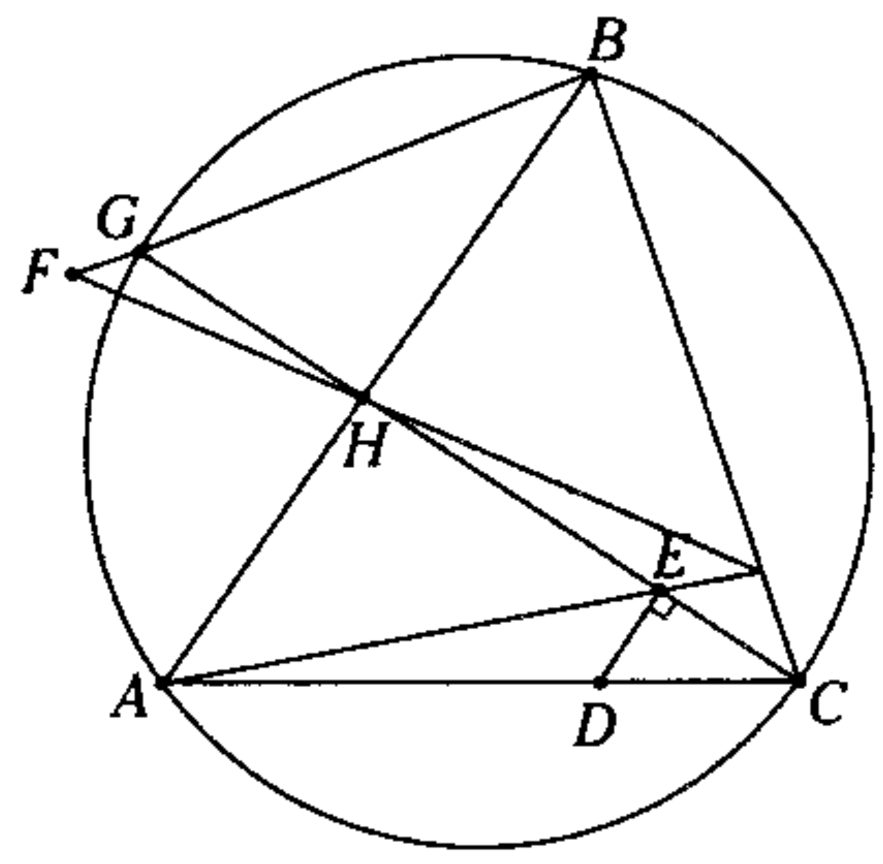
$\therefore \quad x = 6\,\text{cm}$

CLAVE C

Problema 2

En la figura, E es ortocentro del triángulo ABC, $GH = ED = 3$ y $FG = 1$. Calcule AD.

A) 2
B) 9
C) 3
D) 4
E) 2,5



Resolución

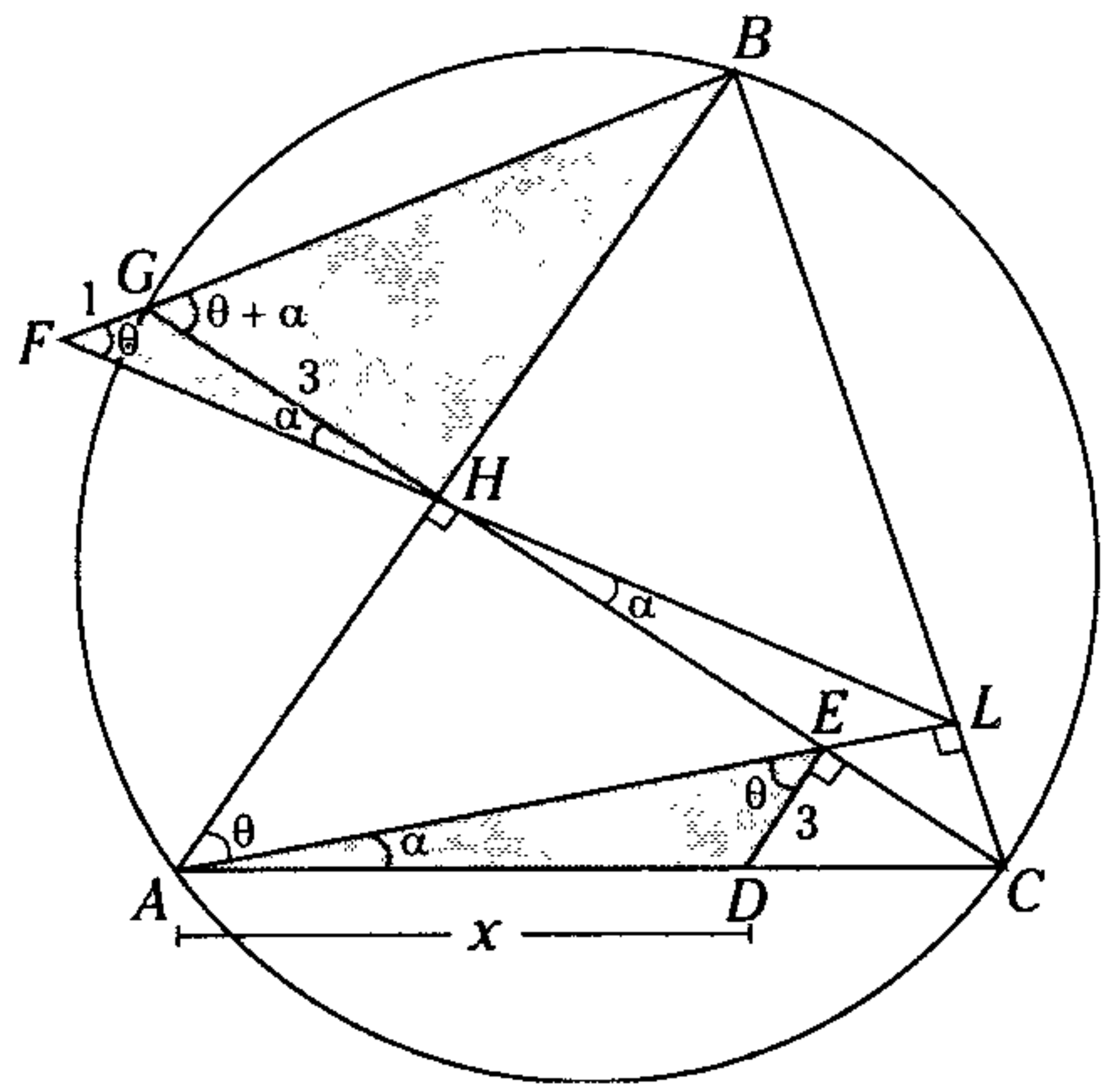


Figura 14.26

Piden $AD = x$

$AHLC$, ⌂ inscriptible: $m\sphericalangle LHC = m\sphericalangle LAC = \alpha$

luego $m\sphericalangle HAE = m\sphericalangle AED = \theta$

En la circunferencia, $m\sphericalangle BGC = m\sphericalangle BAC = \theta + \alpha$

$\rightarrow \quad \triangle ADE \sim \triangle HGF$

$$\frac{x}{3} = \frac{3}{1}$$

$\therefore \quad x = 9$

CLAVE B

Problema 3

En un triángulo isósceles ABC ($AB = AC$), se traza una circunferencia que interseca a los lados $\overline{AB}$ en A y M, $\overline{BC}$ en P y L ($L \in \overline{PC}$) y $\overline{AC}$ en A y Q, tal que $m\widehat{MP} = m\widehat{QL}$. Calcule $\dfrac{(AC)\times(QC)}{(BP)\times(PC)}$.

A) 1/2 B) $\sqrt{2}$ C) 1
D) 1/3 E) $\sqrt{2}/2$

Resolución

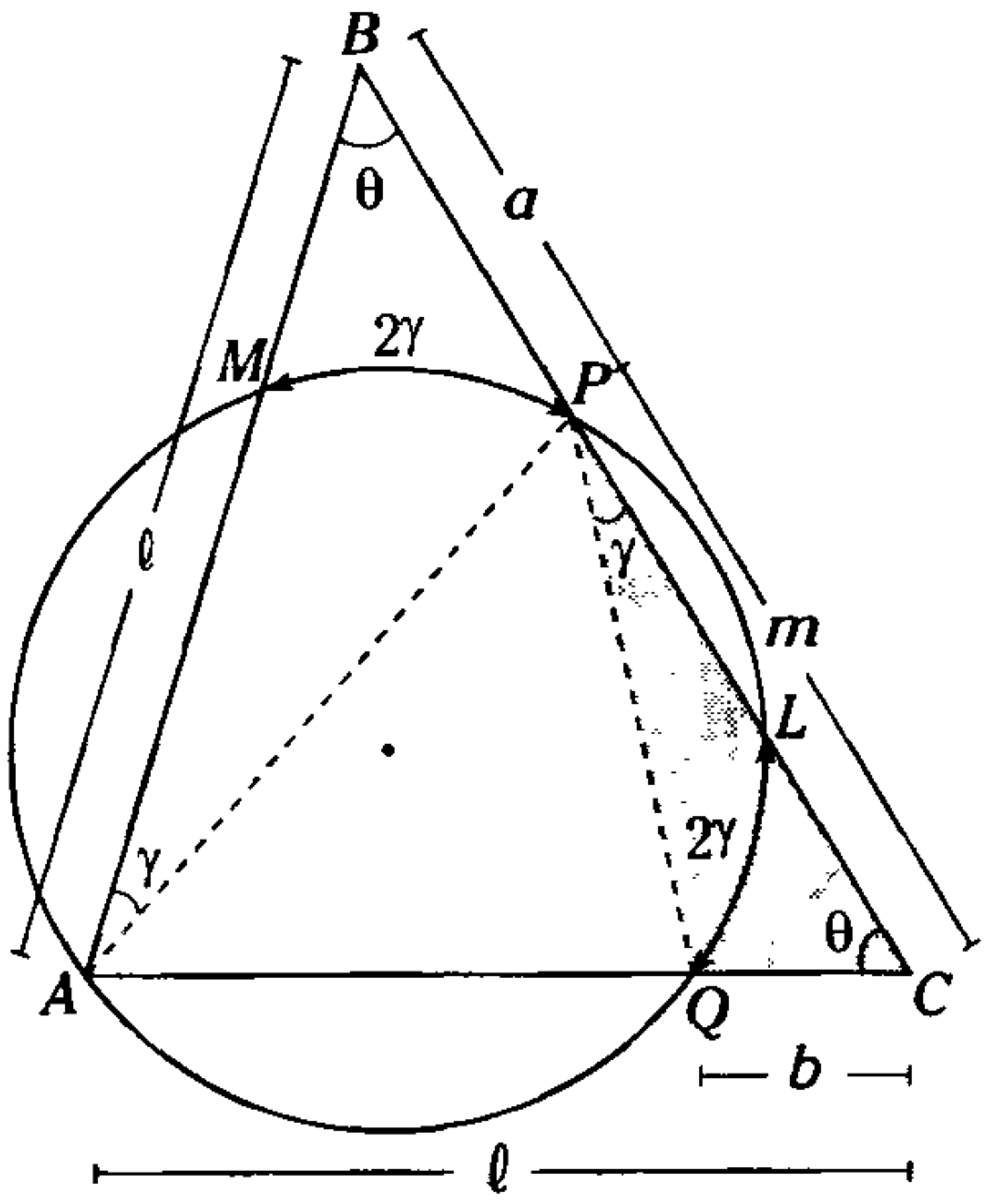


Figura 14.27

Piden $\dfrac{\ell\times b}{a\times m}$

Del dato, $AB = AC$

$\rightarrow$ m∢ABC = m∢$ACB = \theta$

y de $m\widehat{MP} = m\widehat{QL} = 2\gamma$

$\rightarrow \triangle ABP \sim \triangle PCQ$

$$\frac{a}{b}=\frac{\ell}{m}$$

$$\therefore\ \frac{\ell\times a}{a\times m}=1$$

CLAVE C

Problema 4

Dado un romboide $ABCD$, en las prolongaciones de $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{DA}$ y $\overline{BA}$ se ubican los puntos F, M, E y N, respectivamente, tal que $B \in \overline{EM}$ y $D \in \overline{NF}$.

Calcule $\dfrac{(AE)\times(MC)}{(CF)\times(AN)}$.

A) 1/2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) 1 E) 2/3

Resolución

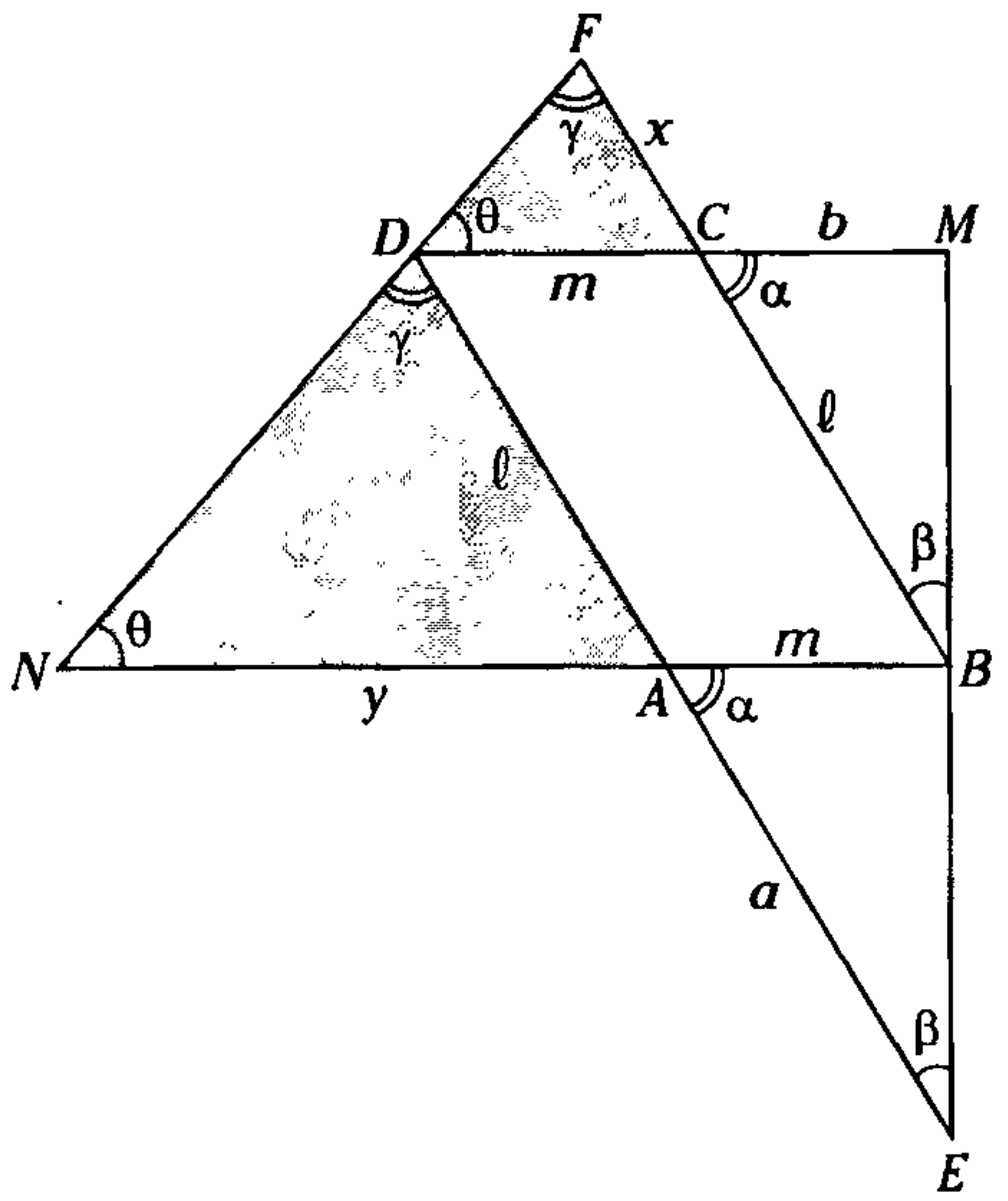


Figura 14.28

Piden $\dfrac{ab}{xy}$

$\triangle DFC \sim \triangle NDA$

$$\frac{x}{\ell}=\frac{m}{y}\ \rightarrow\ xy=m\ell \qquad \text{(I)}$$

$\triangle CMB \sim \triangle ABE$

$$\frac{b}{m}=\frac{\ell}{a}\ \rightarrow\ ab=m\ell \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

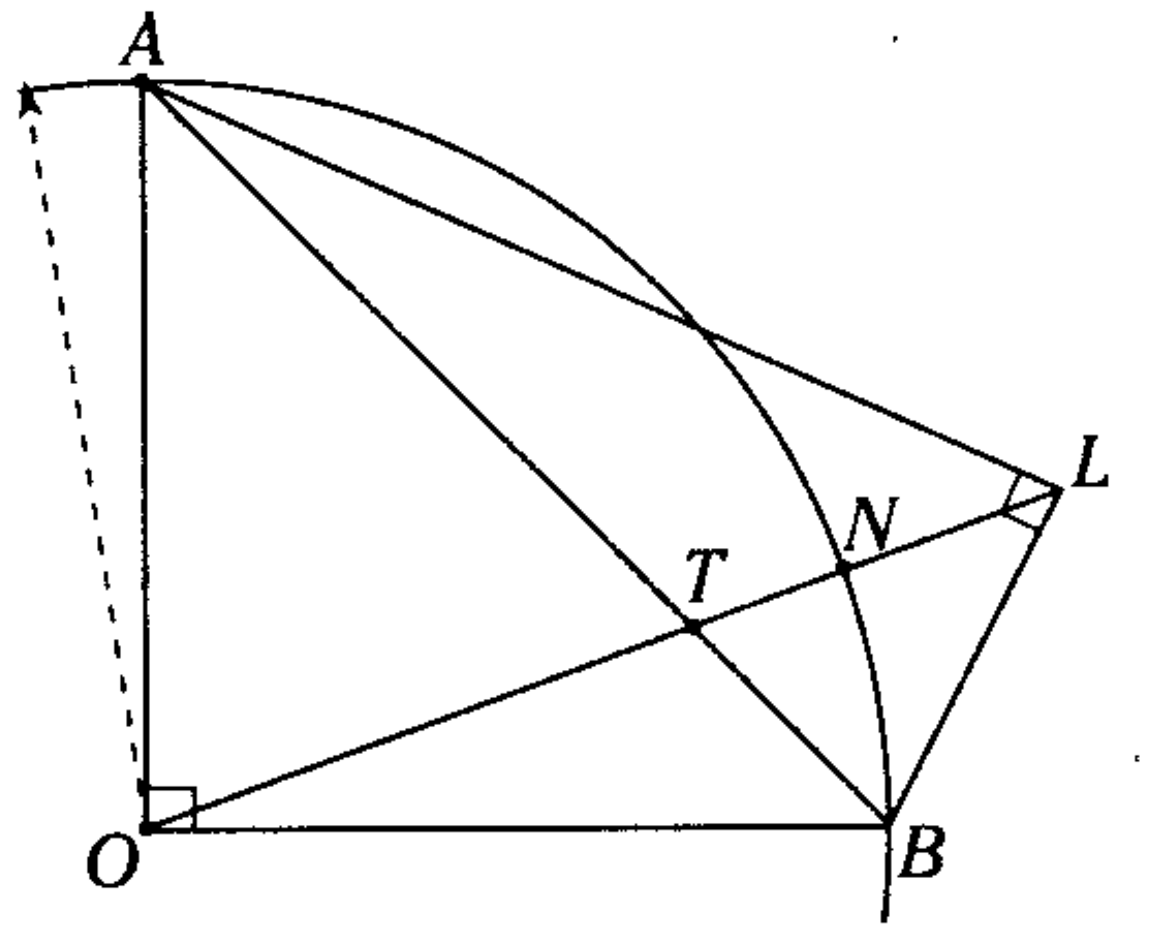
$\rightarrow\ ab = xy$

$\therefore\ \dfrac{ab}{xy} = 1$

CLAVE D

Problema 5

De la figura, $2(AL + LB) = 3(AB)$. Calcule $\dfrac{OT}{TN}$.



A) 1/2 B) 2/3 C) 2
D) 3/2 E) 5/2

Resolución

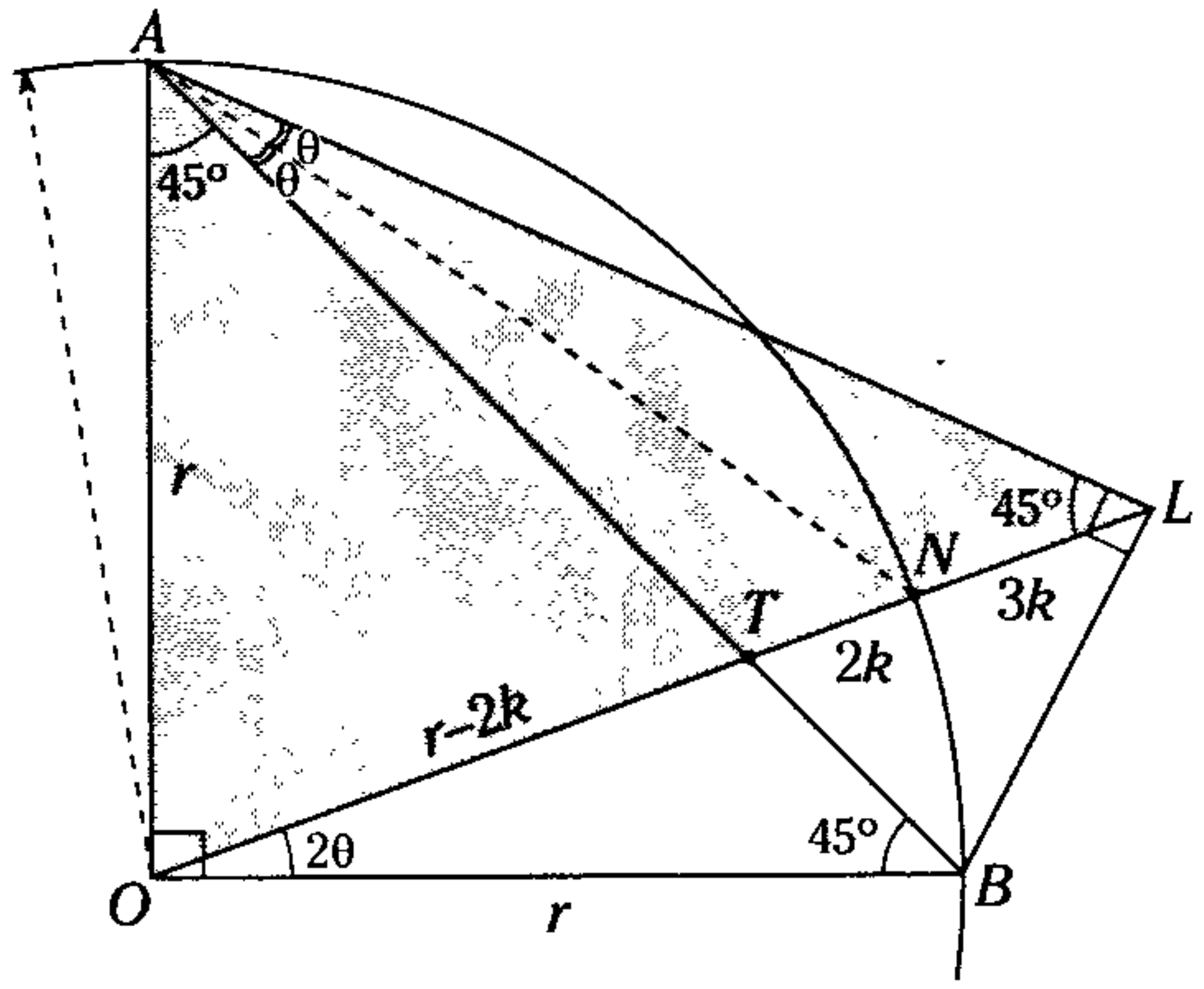


Figura 14.29

Piden $\dfrac{OT}{TN}$ (I)

Del dato $\dfrac{AL + LB}{AB} = \dfrac{3}{2}$

$ALBO$ es ⏢ inscriptible, entonces

$m\measuredangle LAB = m\measuredangle LOB = 2\theta$

Por ángulo inscrito: $m\measuredangle NAB = \theta$

Se deduce que N es incentro del $\triangle ALB$

Por teorema del incentro en el $\triangle ALB$

$\rightarrow\ \dfrac{LN}{NT} = \dfrac{AL + LB}{AB} = \dfrac{3}{2}$

Sea $OA = r\ \rightarrow\ OT = r - 2k$

$\triangle AOL$: $m\measuredangle OAT = m\measuredangle ALO = 45°$

Por semejanza de triángulos

$\rightarrow\ r^2 = (r + 3k)(r - 2k)$

$r^2 = r^2 - 6k^2 + rk$

$6k^2 = rk$

$6k = r$

En (I)

$\dfrac{OT}{TN} = \dfrac{r - 2k}{2k} = \dfrac{4k}{2k}$

$\therefore\ \dfrac{OT}{TN} = 2$

CLAVE C

Problema 6

En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior $\overline{BP}$ y en el triángulo ABP, se traza la bisectriz interior $\overline{AQ}$, tal que $m\measuredangle QCP = 2(m\measuredangle QAC)$, posteriormente se ubica R en $\overline{BC}$ tal que la $m\measuredangle QRC = m\measuredangle BQC$, $AB = 6$, $AP = 3$ y $RC = 1$, calcule BR.

A) 1,5 B) 2 C) 3
D) 3,5 E) 4

Resolución

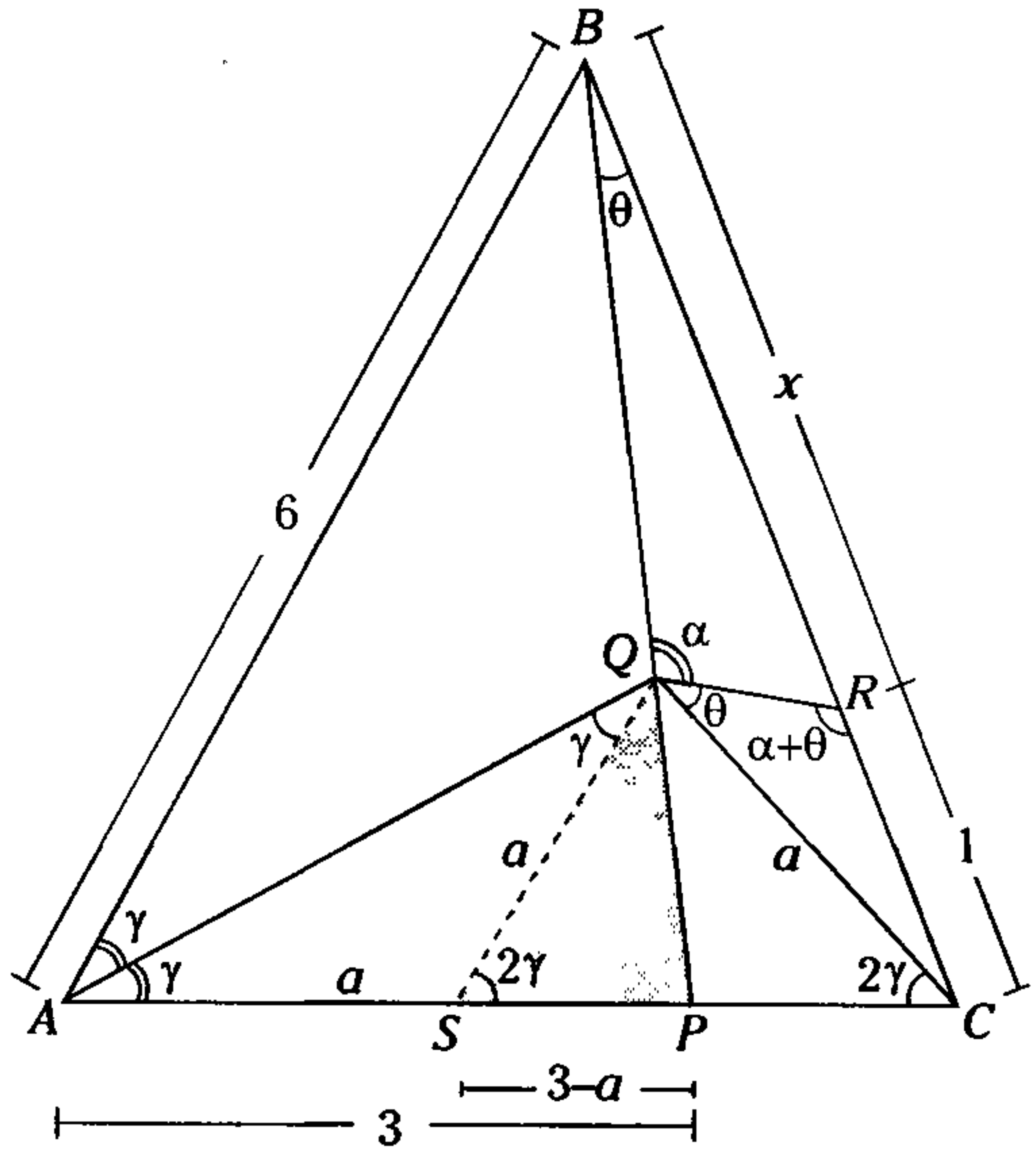


Figura 14.30

Piden $BR = x$

Se traza $\overline{QS} // \overline{AB}$

Se observa que $QS = QC = a$

$\triangle BQC$: propiedad de semejanza

$$a^2 = (x+1)(1) \qquad \text{(I)}$$

$\triangle QSP \sim \triangle BAP$

$$\frac{a}{6} = \frac{3-a}{3}$$

$$a = 6 - 2a \rightarrow a = 2$$

Reemplazando en (I)

$$2^2 = (x+1)1$$

$$\therefore\ x = 3$$

CLAVE C

Problema 7

En un triángulo ABC se encuentra una circunferencia exinscrita relativa a $\overline{BA}$, que es tangente a $\overline{BA}$, a las prolongaciones de $\overline{CB}$ y $\overline{CA}$ en los puntos L, S y T respectivamente, luego se ubican el incentro I y los excentros E_1 y E_2 relativos a $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$ de dicho triángulo. Si la razón de perímetros de las regiones IE_1E_2 y LST es de 2 a 1, respectivamente, calcule la razón de las longitudes de sus inradios.

A) 1 B) 2 C) 0,25
D) 3 E) 2,5

Resolución

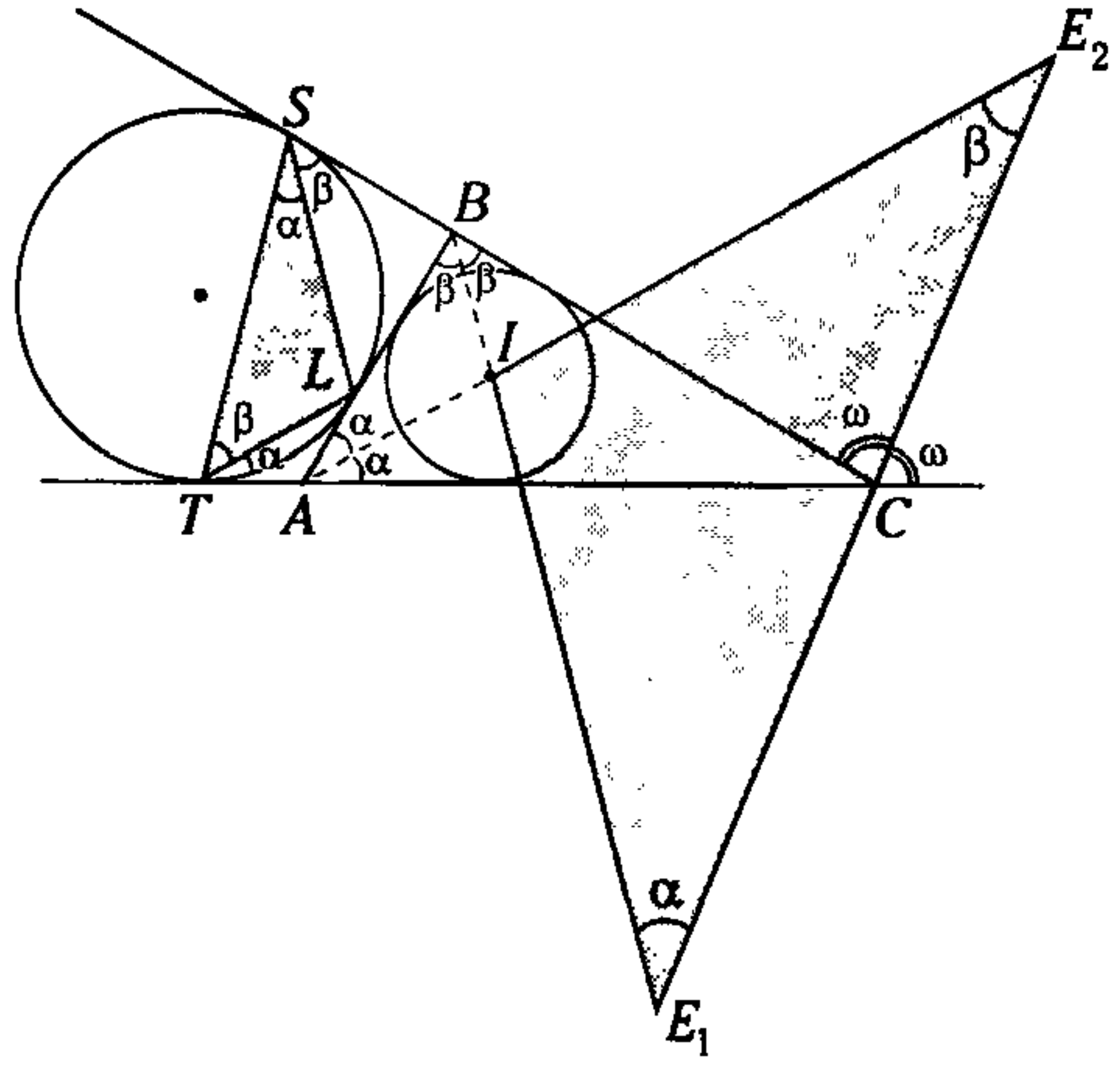


Figura 14.31

Piden $\dfrac{r_{IE_1E_2}}{r_{LST}}$

$r_{IE_1E_2}$: inradio $\triangle IE_1E_2$; r_{LST}: inradio $\triangle LST$

Dato: $\dfrac{2p(\triangle IE_1E_2)}{2p(\triangle LST)} = 2$

Propiedad

$$m\sphericalangle AE_2C = \frac{m\sphericalangle ABC}{2} = \beta$$

$$m\sphericalangle BE_1C = \frac{m\sphericalangle BAC}{2} = \alpha$$

$\triangle IE_2E_1 \sim \triangle LTS$, razón de líneas homólogas

$$\rightarrow \frac{r_{IE_1E_2}}{r_{LST}} = \frac{2p(\triangle IE_1E_2)}{2p(\triangle LST)}$$

$$\therefore \quad \frac{r_{IE_1E_2}}{r_{LST}} = 2$$

CLAVE B

Problema 8

Se tiene un triángulo rectángulo ACB, recto en C, y un cuadrado $CEPQ$, tal que P es excentro del triángulo ACB. Al trazar $\overline{AP}$ interseca a $\overline{BC}$ en N. Si la prolongación de $\overline{AQ}$ es hasta L, de modo que $m\measuredangle APL = 90°$ y $\frac{BN \times CP}{PL} = \sqrt{2}$; calcule BP.

A) $\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}/2$

Resolución

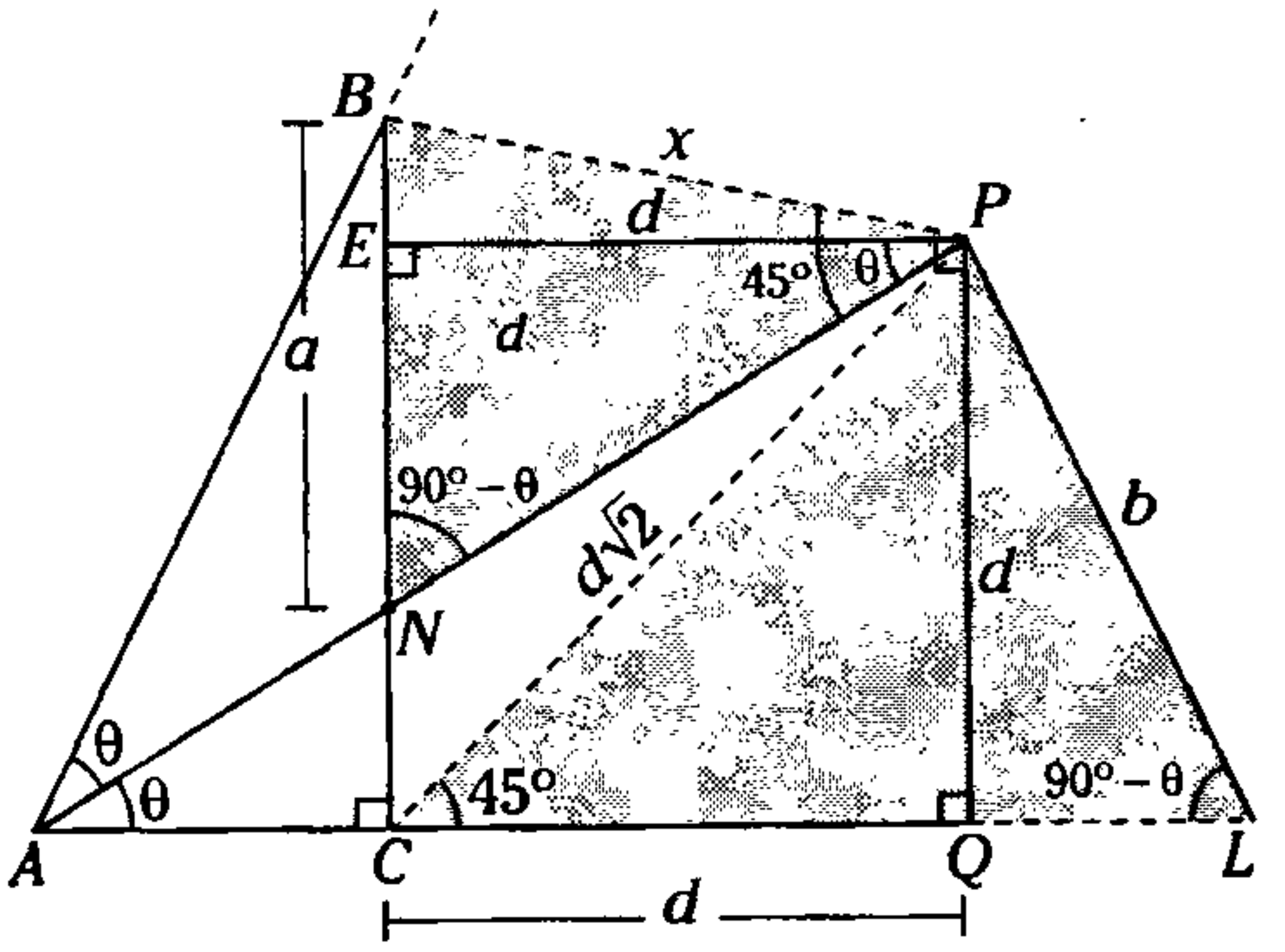


Figura 14.32

Piden $BP=x$

Dato: $\frac{a \times d\sqrt{2}}{b} = 2\sqrt{2}$

$$\frac{ad}{b} = 2 \qquad \text{(I)}$$

Como P es excentro del ⊾ABC, $m\measuredangle BPA = 45°$ y como $m\measuredangle ALP = m\measuredangle BNP = 90° - \theta$

$\rightarrow \triangle BPN \sim \triangle PCL$

$$\frac{x}{d\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$$

$$\rightarrow x = \frac{ad}{b}\sqrt{2} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II)

$$\therefore \quad x = 2\sqrt{2}$$

CLAVE C

Problema 9

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, ($AB = BC$), se ubican los puntos M y N en la región interior y en la región exterior relativa al lado $\overline{BA}$ respectivamente, tal que la $m\measuredangle NMB = 90°$, $NM = MB$ y $NA = 6\sqrt{2}$. Calcule la distancia de M al punto medio de $\overline{AC}$.

A) 3 B) $\sqrt{3}/2$ C) 2
D) $\sqrt{2}/3$ E) 6

Resolución

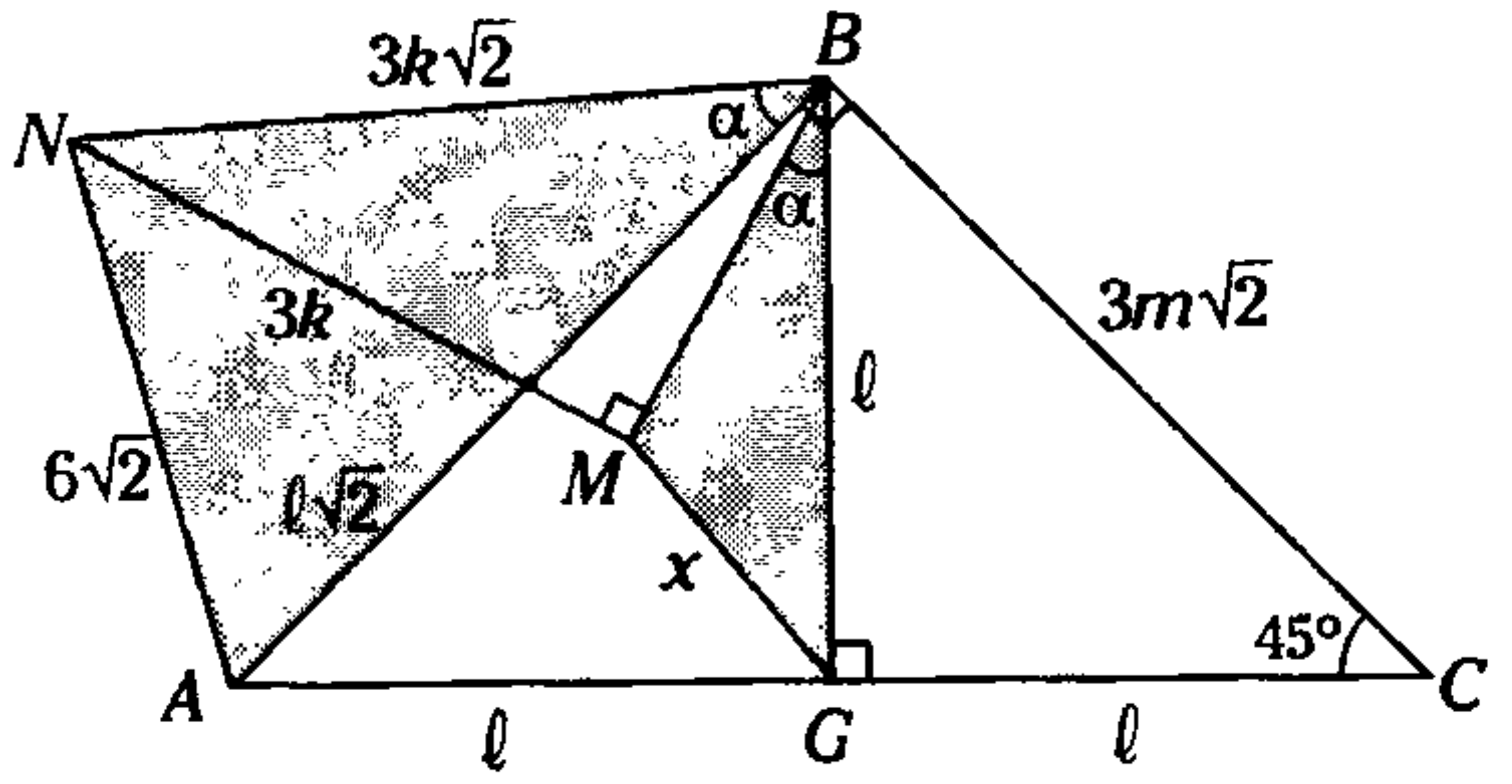


Figura 14.33

Piden $MG = x$

Sea $NM = MB = 3k \rightarrow NB = 3k\sqrt{2}$

$\triangle MBG \sim \triangle NBA$

$$\frac{x}{6\sqrt{2}} = \frac{3k}{3k\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad x = 6$$

CLAVE E

Problema 10

En un trapecio rectángulo $ABCD$, recto en A y B, se traza $\overline{PQ}$ paralela a $\overline{BC}$ ($P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{CD}$). Si $m\measuredangle AQD = 90°$; $\frac{BP}{2} = \frac{PA}{3} = \frac{QD}{4}$ y $AD = 8$, calcule BC.

A) 5/2 B) 2 C) 13/6
D) 17/6 E) 11/3

Resolución

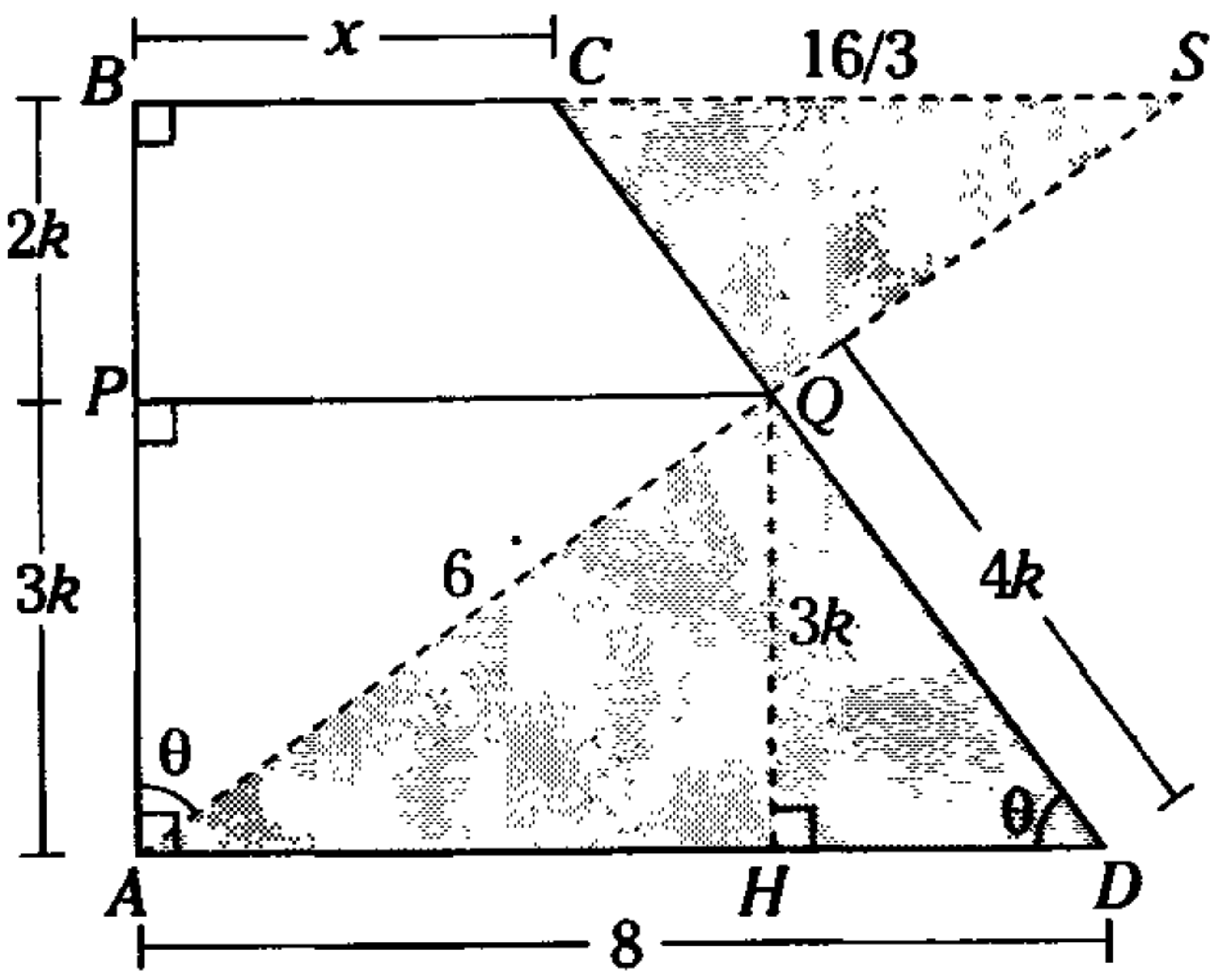


Figura 14.34

Piden $BC = x$

Se traza $\overline{QH} \perp \overline{AD}$: $QH = 3k$

$⊿AQD \sim ⊿QHD$

$$\frac{AQ}{3k} = \frac{8}{4k} \rightarrow AQ = 6$$

$\triangle CSQ \sim \triangle AQD$

$$\frac{CS}{8} = \frac{2k}{6k} \rightarrow CS = \frac{16}{3}$$

$⊿ABS \sim ⊿AQD$

$$\frac{x + 16/3}{6} = \frac{5k}{4k}$$

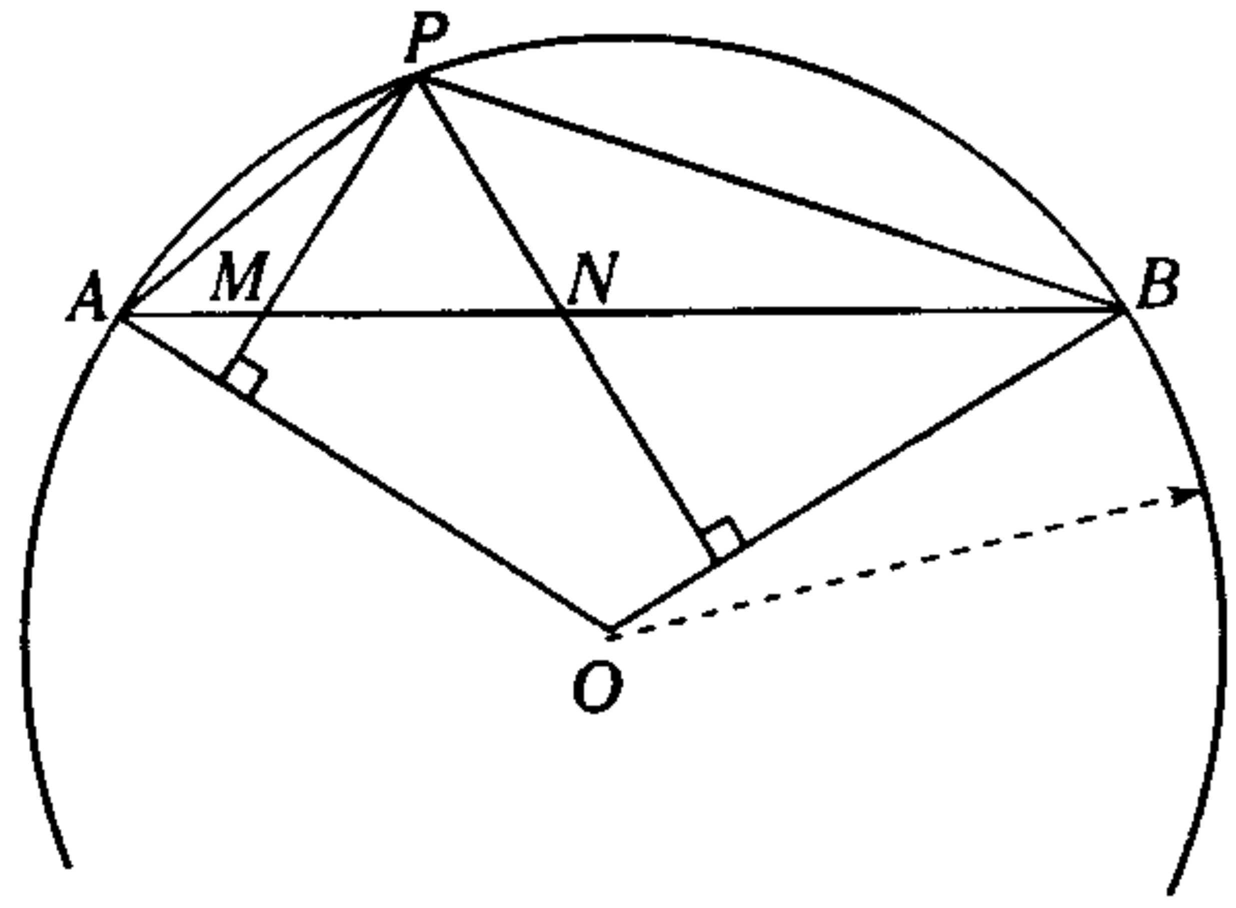
$$x + \frac{16}{3} = \frac{15}{2}$$

$$\therefore\ x = \frac{13}{6}$$

CLAVE C

Problema 11

En la figura mostrado, $NB = 4(AM)$. Calcule AP/PB.



A) 2/3 B) 4/5 C) 7/8
D) $\sqrt{2}/5$ E) 1/2

Resolución

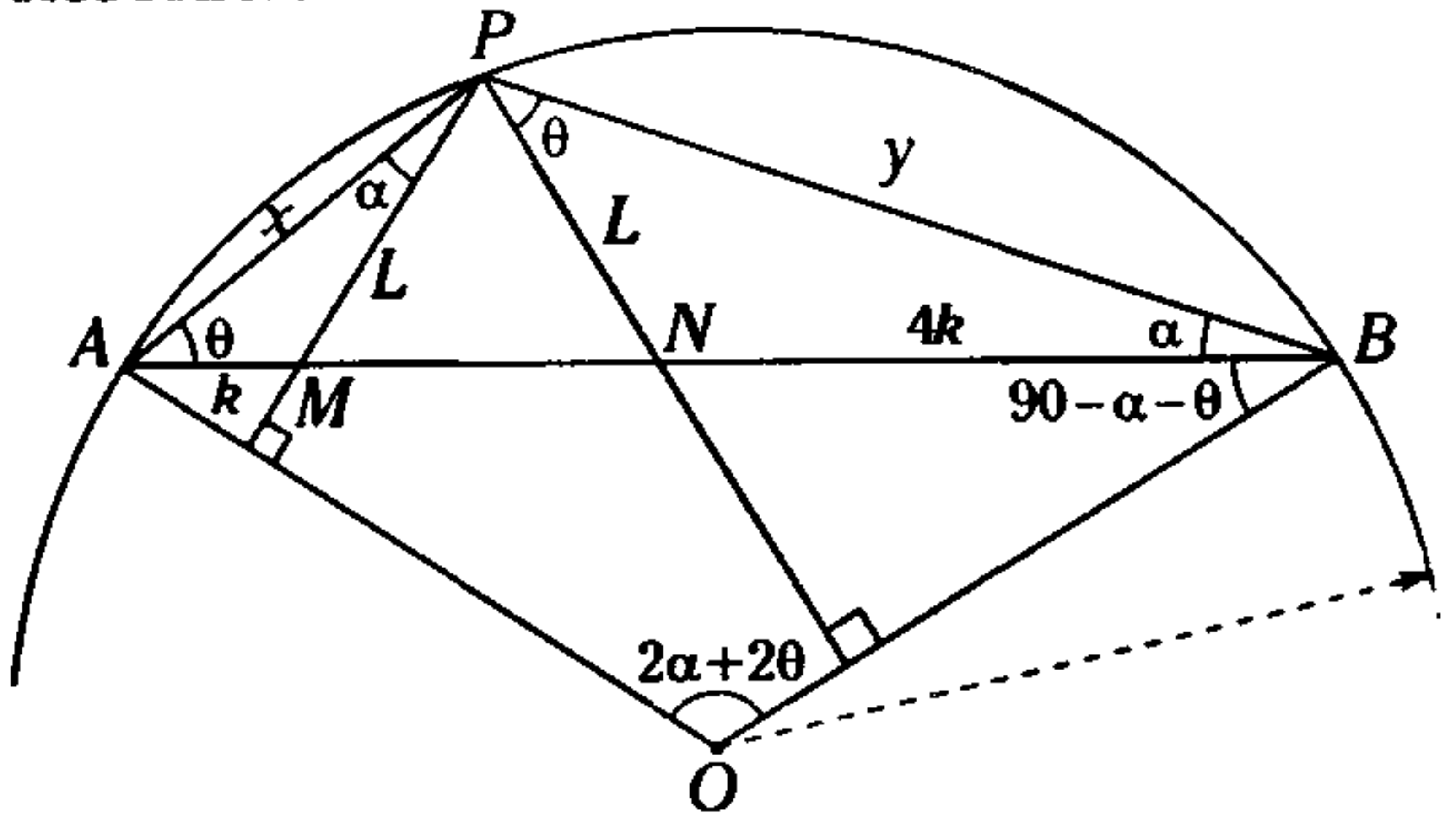


Figura 14.35

Piden $\frac{AP}{PB} = \frac{x}{y}$

Sea $AM = k$

$\rightarrow$ del dato $NB = 4k$

Si $m\measuredangle PBA = \alpha$ y $m\measuredangle PAB = \theta$

$\rightarrow$ $m\measuredangle AOB = 2\alpha + 2\theta$

$\triangle AOB$: $m\sphericalangle ABO = m\sphericalangle BAO = 90 - \alpha - \theta$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle APM = \alpha$ y $m\sphericalangle BPN = \theta$

$\triangle AMP \sim \triangle PNB$

$$\rightarrow \frac{K}{L} = \frac{L}{4K} \rightarrow L = 2K$$

$\triangle AMP \sim \triangle PNB$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AM}{PN} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{K}{2K} = \frac{1}{2}$$

CLAVE E

Problema 12

En un cuadrilátero bicéntrico $ABCD$, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AD}$ en el punto M. Si $\frac{AM}{MD} = k$, calcule $\frac{AB}{CD}$.

A) $\sqrt{2}k$ B) $2k$ C) $k/3$

D) k E) $k/2$

Resolución

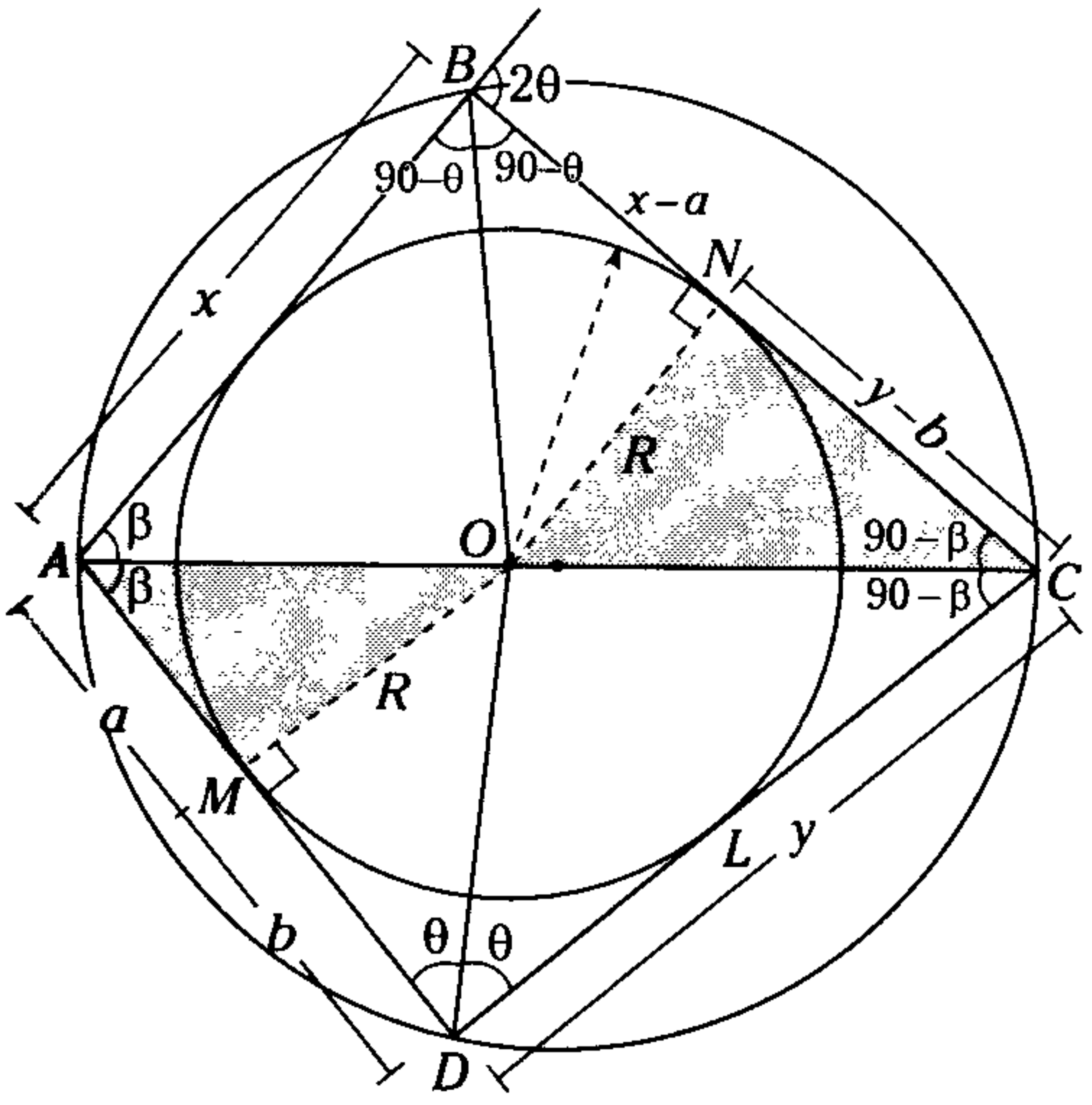


Figura 14.36

Piden $\frac{AB}{CD} = \frac{x}{y}$

Dato: $\frac{AM}{MD} = \frac{a}{b} = k$

$⊾OMD \sim ⊾BNO$

$$\frac{R}{x-a} = \frac{b}{R} \quad \text{(I)}$$

$⊾OMA \sim ⊾CNO$

$$\frac{R}{y-b} = \frac{a}{R} \quad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\rightarrow \frac{y-b}{x-a} = \frac{b}{a}$$

$$ya - ab = xb - ab$$

$$ya = xb$$

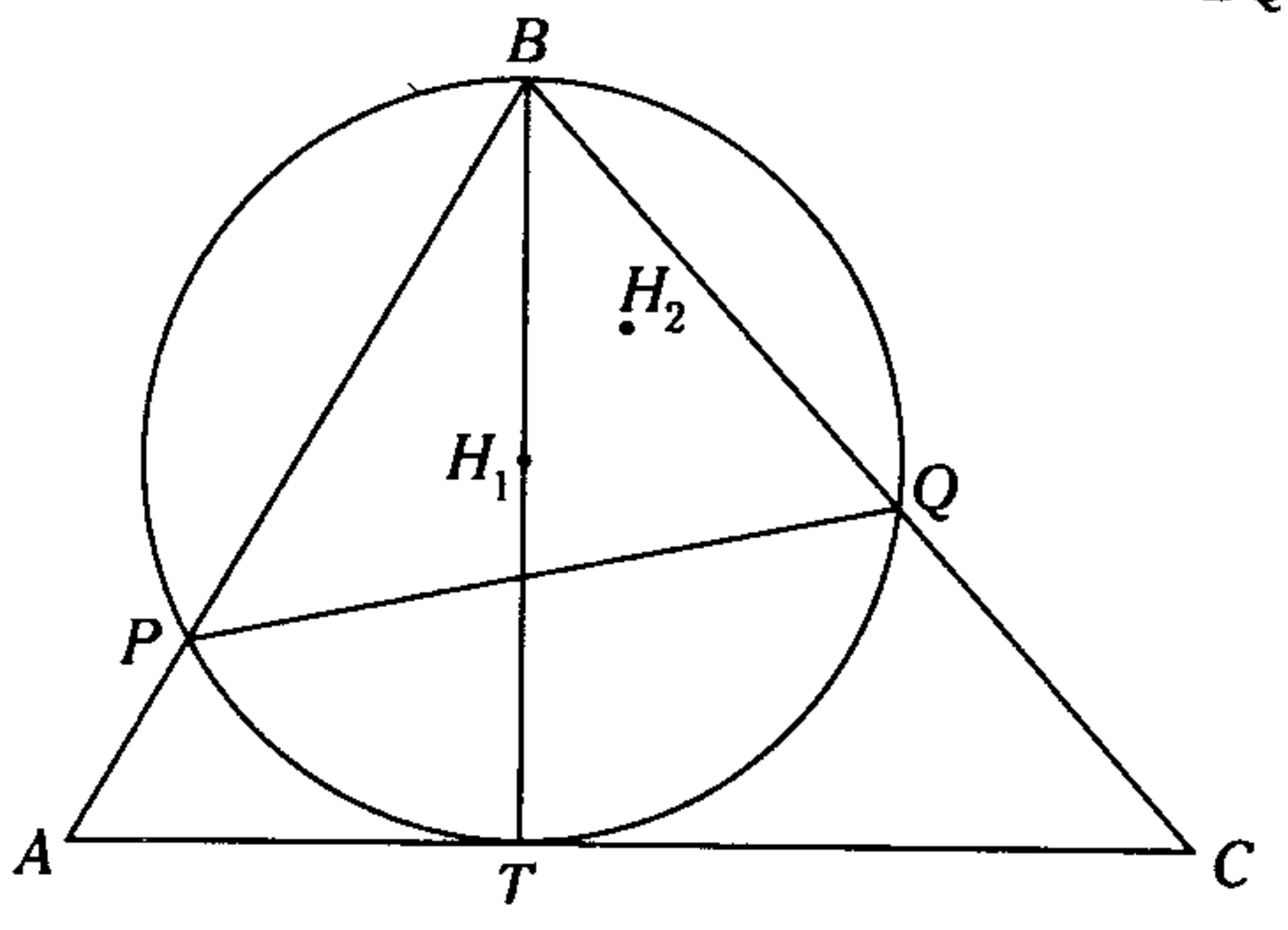
$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = k$$

CLAVE D

Problema 13

Según la figura, T es punto de tangencia. Si H_1 y H_2 son ortocentros de los triángulos ABC y PBQ, respectivamente; además $BH_2 = k(BH_1)$. Calcule $\frac{AB}{BQ}$.



A) $2k$ B) $k/2$ C) $k+1$

D) k E) $1/k$

Resolución

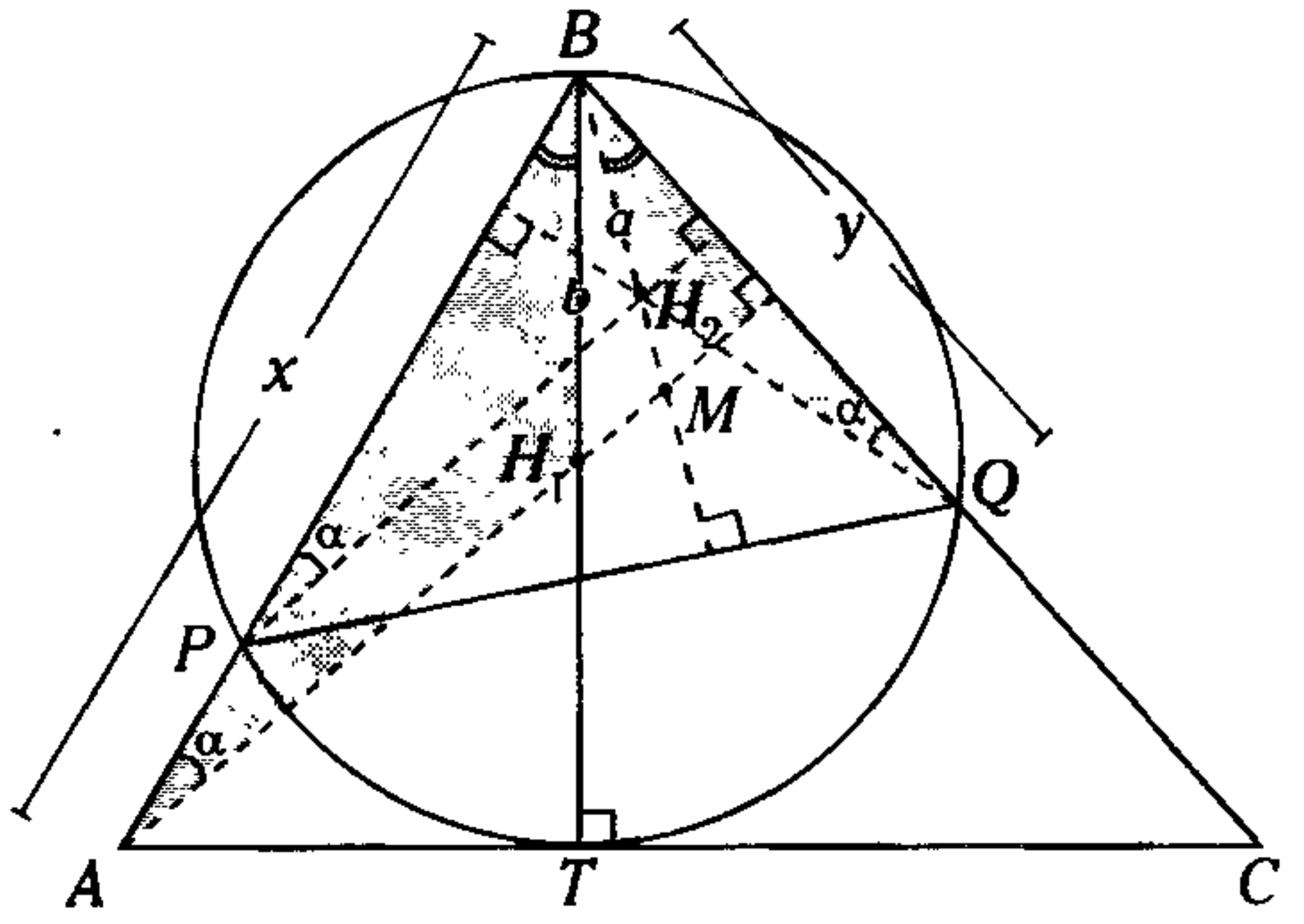


Figura 14.37

Piden $\frac{AB}{BQ}=\frac{x}{y}$

Se nota $\overline{PH_2}$ // $\overline{AM}$, m∢BPH_2 = m∢BAM = α y m∢ABH_1 = m∢QBH_2.

$\triangle ABH_1 \sim \triangle QBH_2$

$\rightarrow \frac{x}{y}=\frac{b}{a}$

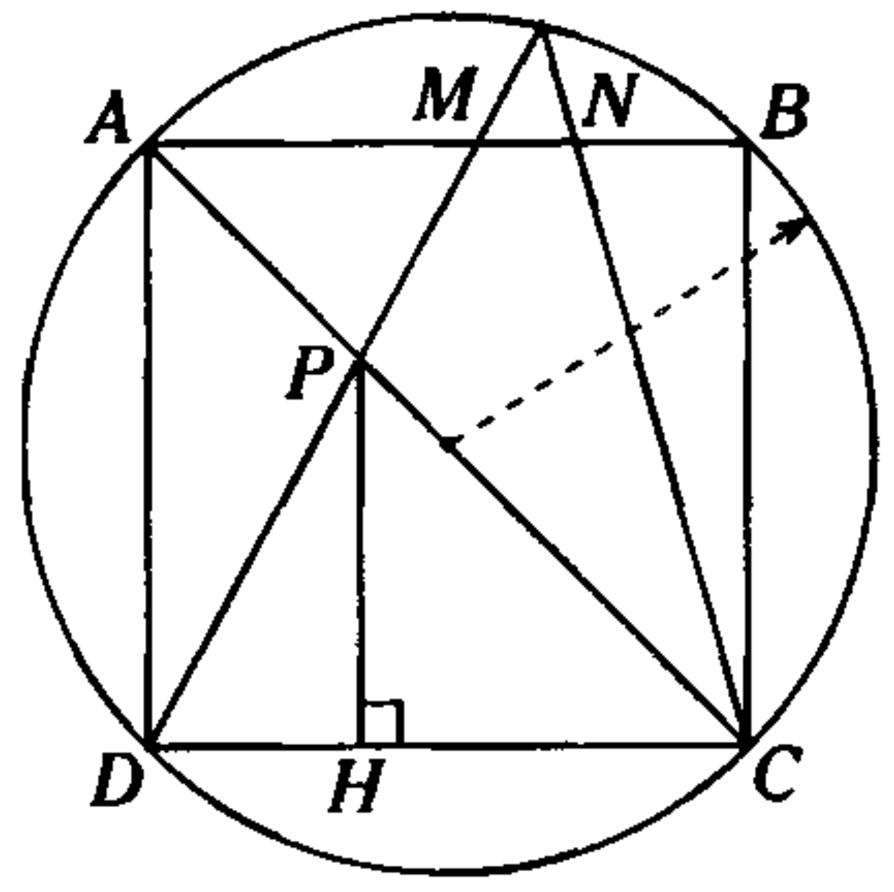
Por dato: $a=kb$

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{1}{k}$

CLAVE E

Problema 14

Según la figura, $ABCD$ es un cuadrado. Si $DC=6(MN)$ y $MN \neq \frac{AM}{3}$, calcule $\frac{DH}{HC}$.



A) 1/2 B) 2/3 C) 3/5
D) 1/3 E) 3/4

Resolución

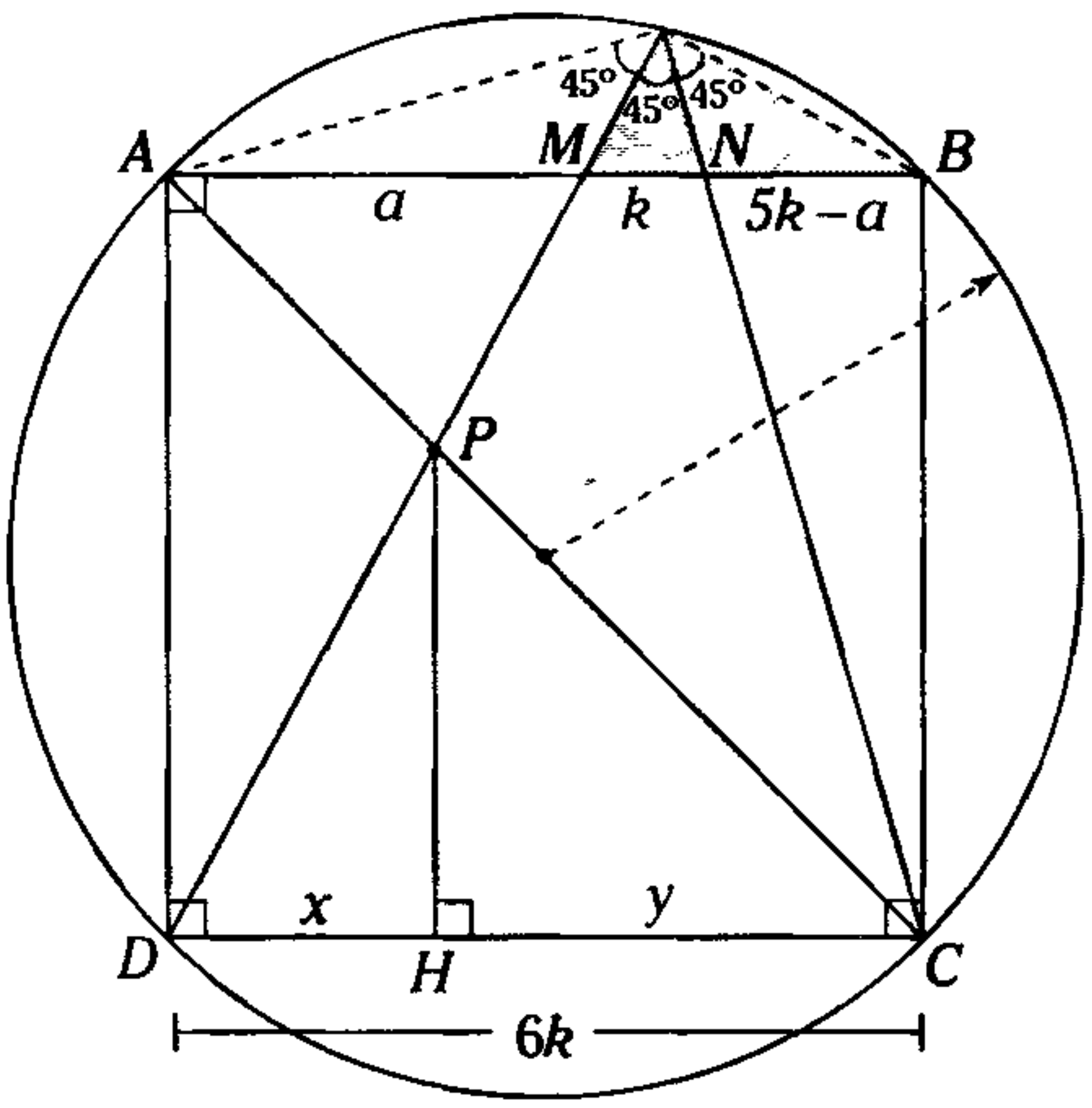


Figura 14.38

Piden $\frac{DH}{HC}=\frac{x}{y}$

Como $\overline{AD}$ // $\overline{PH}$ en el ⊿ADC

$\frac{x}{y}=\frac{AP}{PC}$ (I)

Sean $AM=a$ y $k \neq \frac{a}{3}$

$\triangle APM \sim \triangle CPD$

$\frac{AP}{PC}=\frac{a}{6k}$ (II)

De la figura, A, M, N y B forman la cuaterna armónica.

$a \times (5k-a)=k(6k)$

$6k^2-5ka+a^2=0$

$3k \qquad -a$

$2k \qquad -a$

Descartando la primera posibilidad por el dato entonces

$k=a/2 \rightarrow \frac{a}{k}=2$

En (II): $\frac{AP}{PC}=\frac{1}{3}$

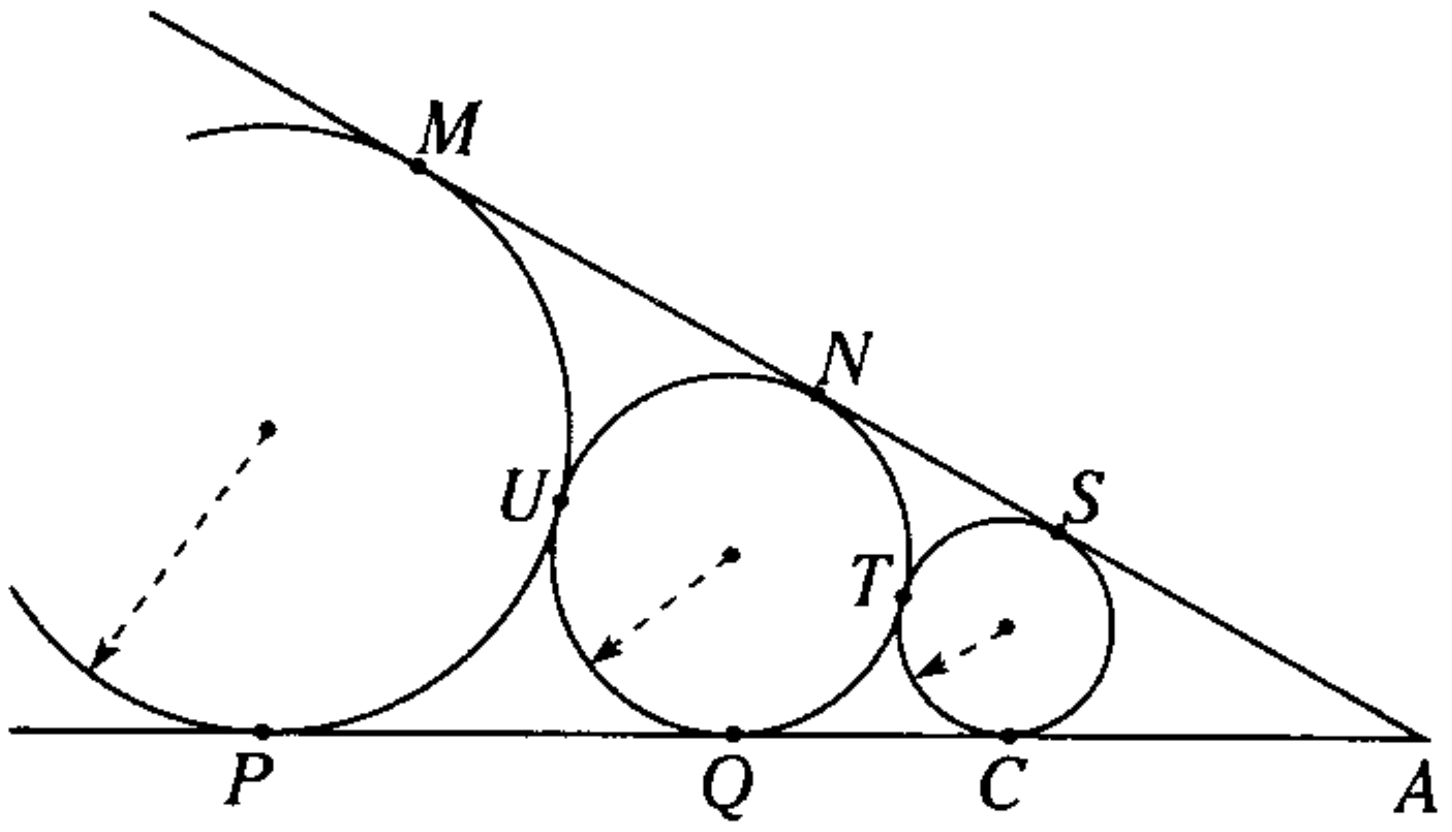
En (I)

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{1}{3}$

CLAVE D

Problema 15

Según la figura, M, N, S, U, T, P, Q y C son puntos de tangencia. Si $2(MN)=AN=2a$, calcule AC.



A) $a/2$ B) $a/3$ C) a

D) $4a/3$ E) $5a/3$

Resolución

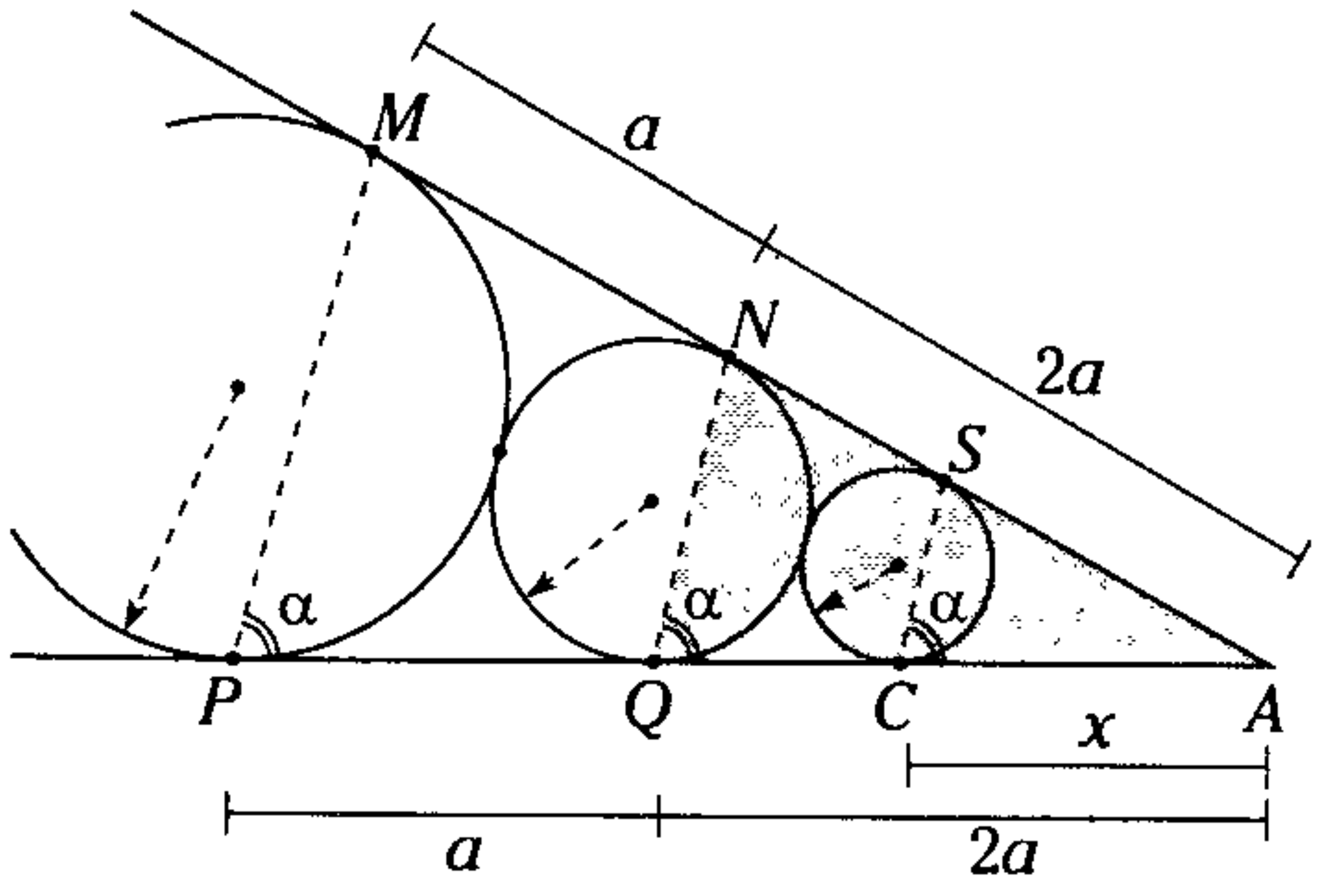


Figura 14.39

Piden $AC=x$

$\triangle PMA \sim \triangle QNA$

$$\rightarrow \ \frac{PQ}{QC}=\frac{QA}{CA}$$

$$\frac{a}{2a-x}=\frac{2a}{x}$$

$$\rightarrow \ x=2(2a-x)$$

$$x=4a-2x$$

$$\therefore \ x=\frac{4a}{3}$$

CLAVE D

Problema 16

De la figura, A y D son puntos de tangencia. Si $AN=2(NF)$ y $NT=6$, calcule NB.

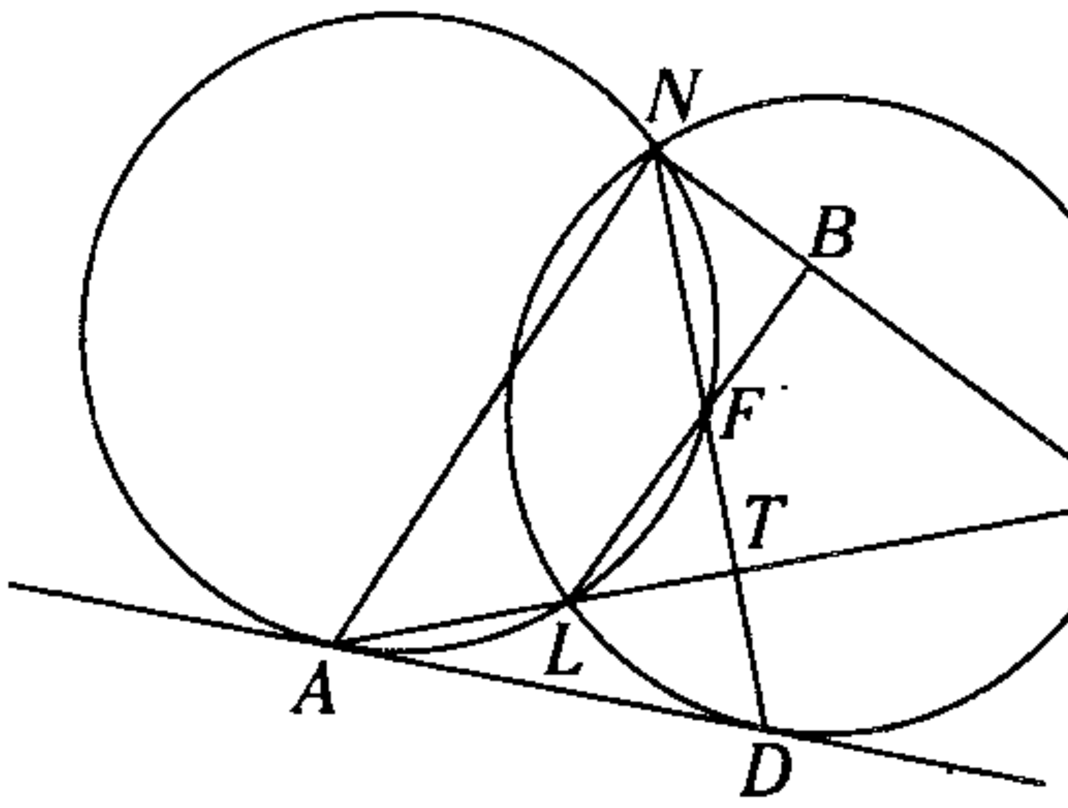
A) 1

B) 1,5

C) 2

D) 2,5

E) 3



Resolución

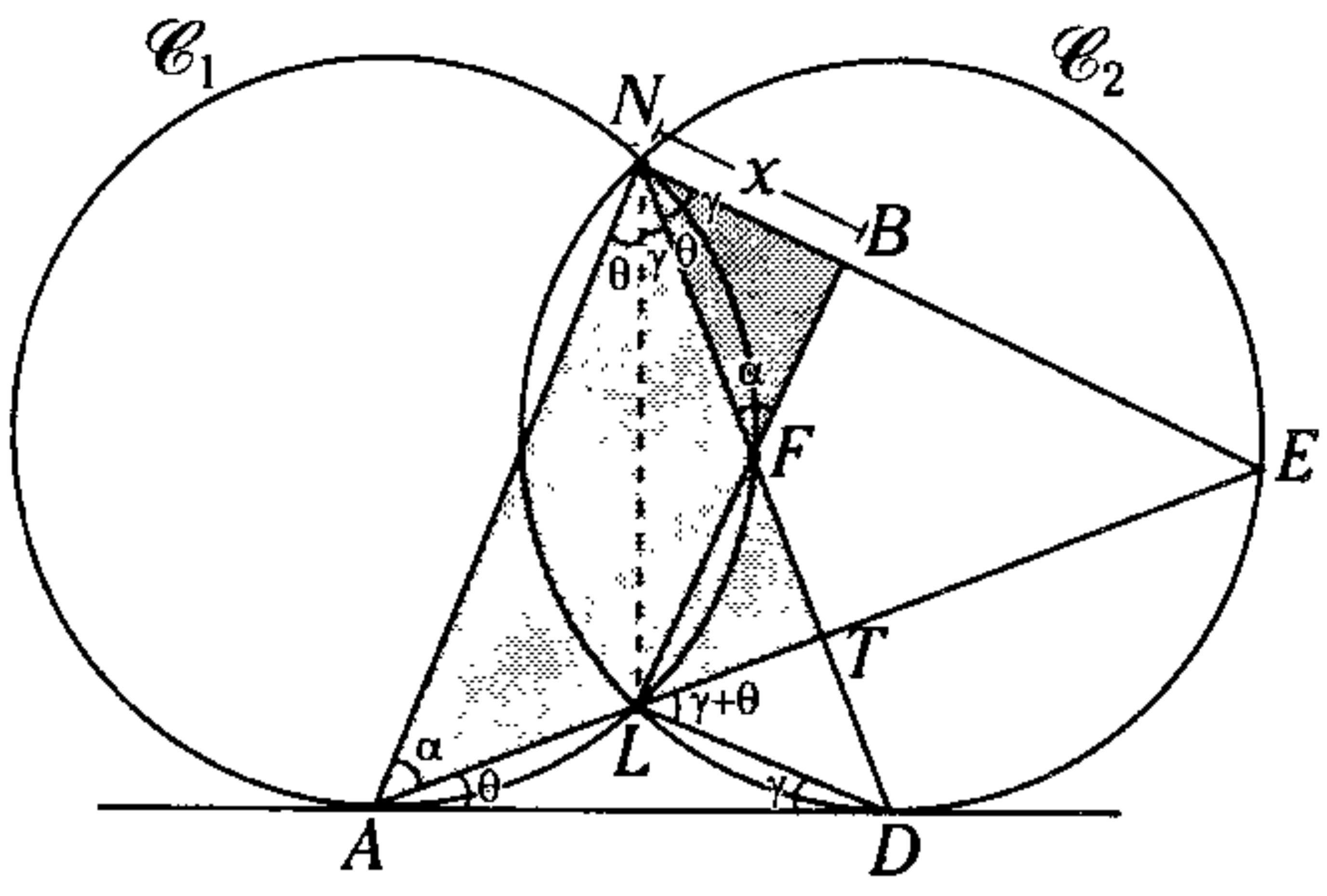


Figura 14.40

Piden $BN=x$

Dato: $AN=2(NF)$

Sea $m\sphericalangle ANL=\theta=m\sphericalangle LAD$

$m\sphericalangle LND=\gamma=m\sphericalangle LDA$

$\mathscr{C}_2$: $m\sphericalangle END=m\sphericalangle ELD=\theta+\gamma$

$\mathscr{C}_1$: $ANFL$: $\square$inscrito

$m\sphericalangle NAL=\alpha=m\sphericalangle NFB$

$\triangle NBF \sim \triangle NAT$

$$\frac{x}{NT}=\frac{NF}{AN}$$

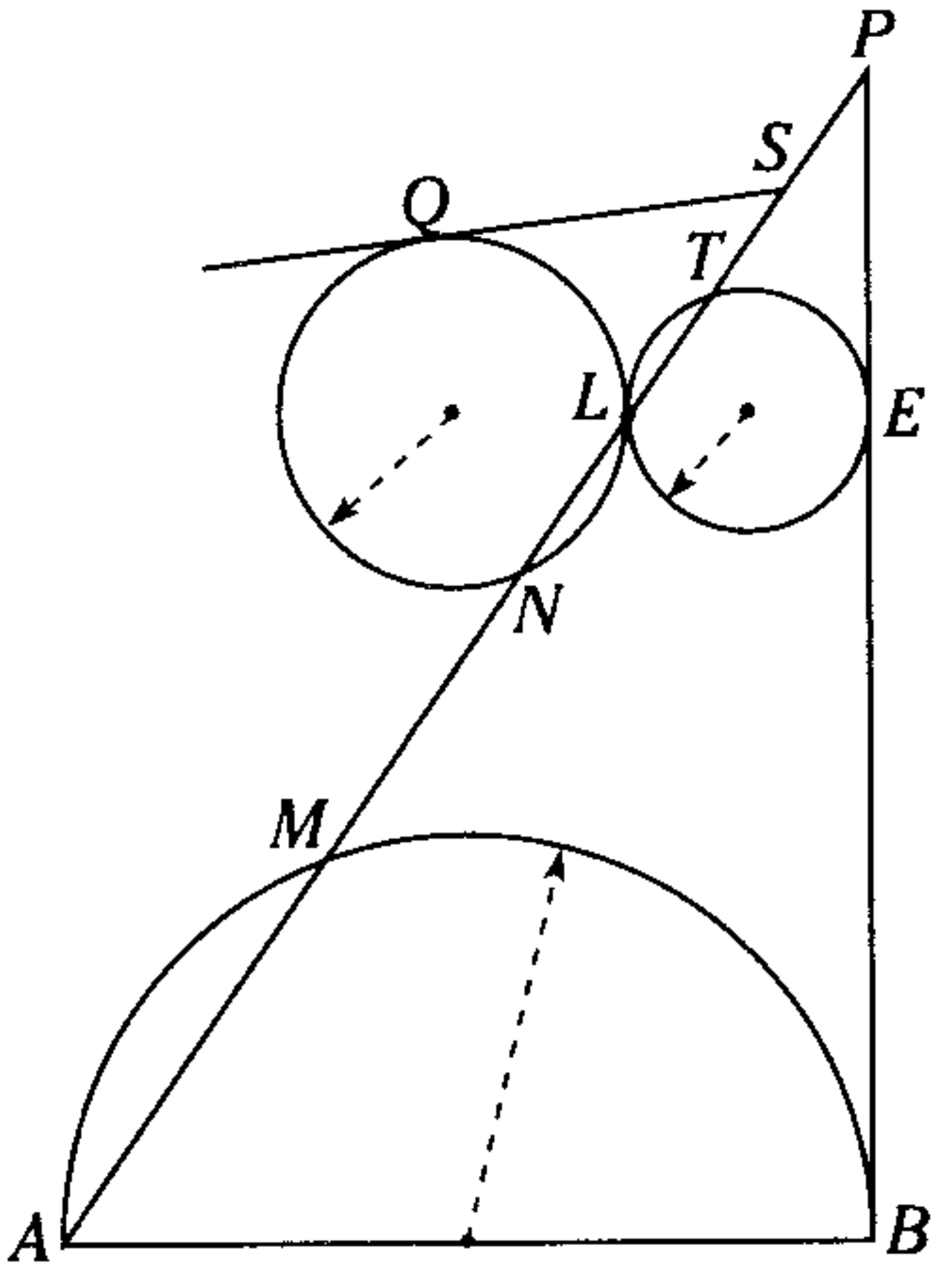
$$x=6\left(\frac{NF}{AN}\right)=6\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \ x=3$$

CLAVE E

Problema 17

De la figura, $m\widehat{AM} = 2(m\measuredangle QSN)$, $2(QS) = 3(PE)$ y $LN = 6$. Si B, L, Q y E son puntos de tangencia, calcule TL.



A) 9　　B) 5　　C) 4
D) 6　　E) 3

Resolución

Piden $TL = x$

Dato: $m\widehat{AM} = 2(m\measuredangle QSN)$

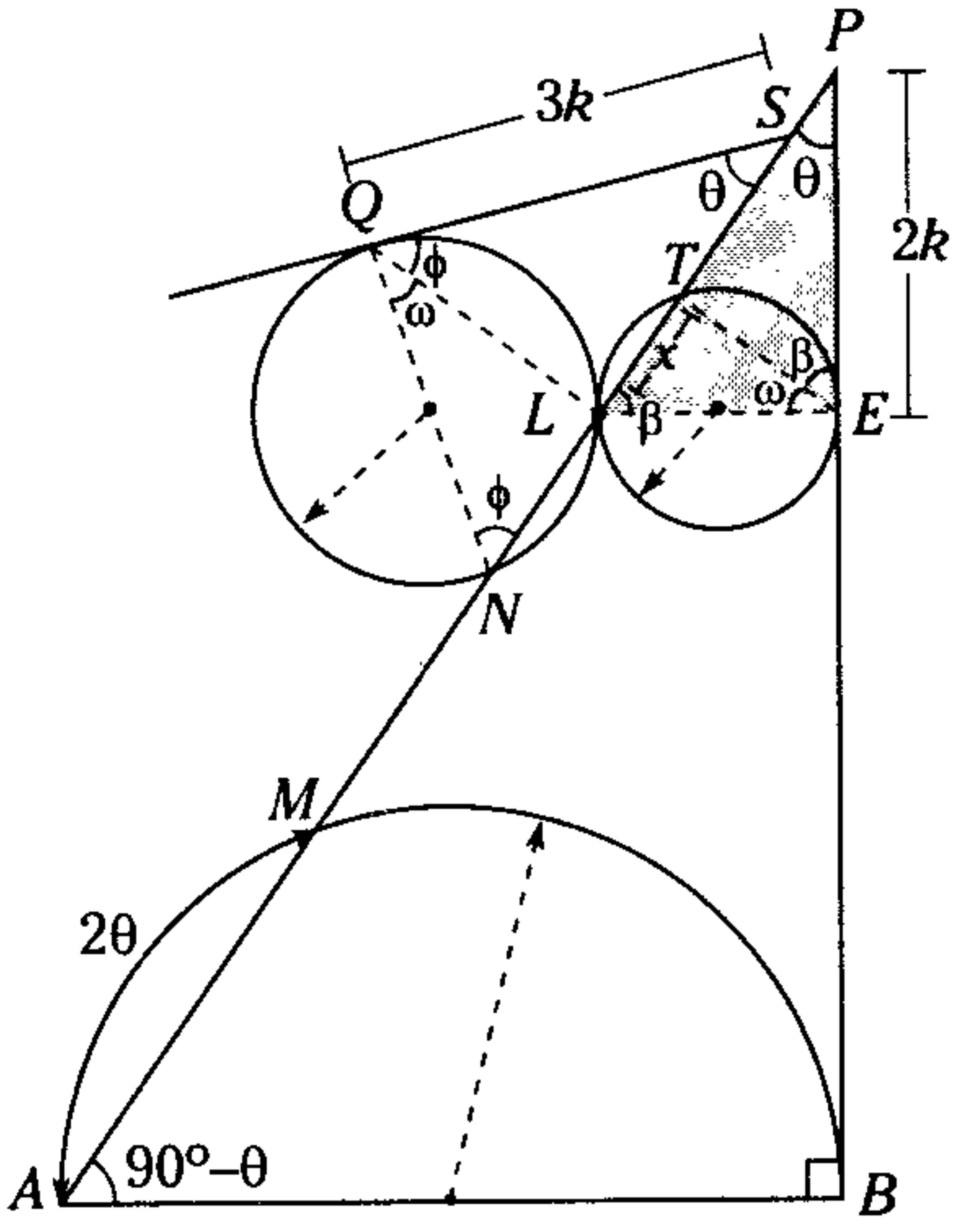


Figura 14.41

Sea

$m\measuredangle QSN = \theta \rightarrow m\widehat{AM} = 2\theta$

Propiedad

$m\widehat{LN} = m\widehat{TL} \rightarrow m\measuredangle LQN = m\measuredangle TEL = \omega$

Por suma de las medidas de los ángulos internos en los triángulos QSN y PLE, se demuestra que $\beta = \phi$ y $\triangle LEP \sim \triangle NQS$ (cevianas homólogas).

$$\frac{x}{6} = \frac{2k}{3k}$$

$$\therefore\ x = 4$$

CLAVE C

Problema 18

Según la figura, $AB = a$ y $CD = b$. ¿Cuánto dista P de $\overline{AD}$?

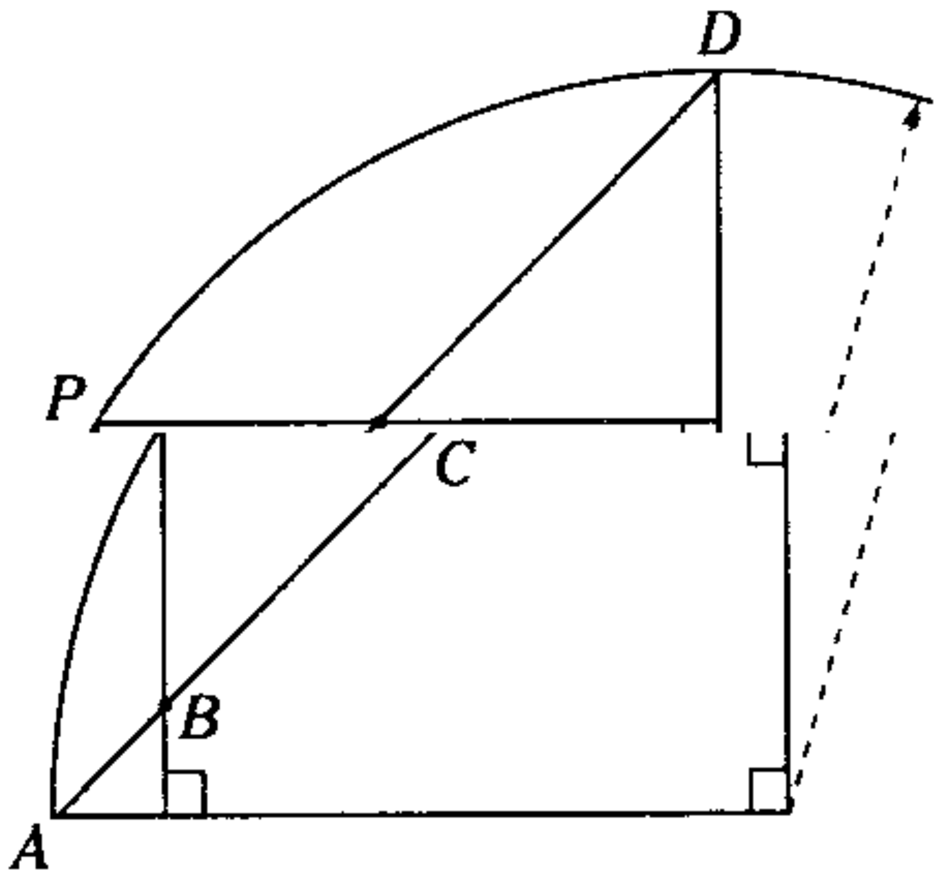
A) $\sqrt{ab}$

B) $\sqrt{2ab}$

C) $\sqrt{3ab}$

D) $\sqrt{2ab}/2$

E) $\sqrt{ab}/2$



Resolución

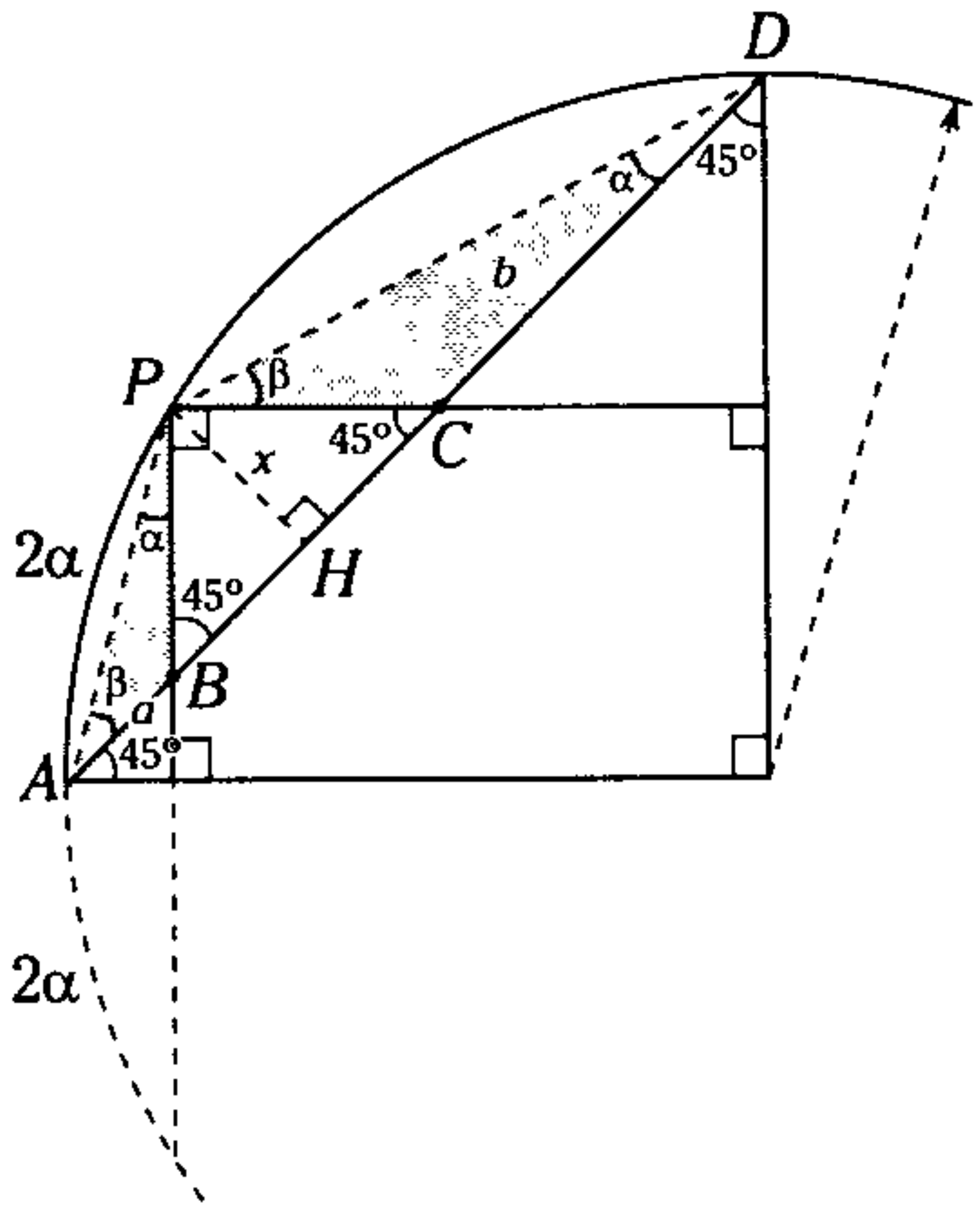


Figura 14.42

Piden $PH = x$

Se observa que $x = \dfrac{BC}{2}$ (I)

(Sea $BC = m$)

$\triangle BPC$; not. 45°

$\rightarrow BP = CP = m\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\alpha + \beta = 45°$

$\triangle ABP \sim \triangle PCD$

$$\frac{m\sqrt{2}/2}{b} = \frac{a}{m\sqrt{2}/2}$$

$$ab = \frac{m^2}{2} \rightarrow m = \sqrt{2ab}$$

En (I)

$$\therefore\ x = \frac{\sqrt{2ab}}{2}$$

CLAVE D

Problema 19

En un cuadrilátero *ABCD*, se ubican los baricentros G_1, G_2, G_3, G_4 de las regiones triangulares *ABC*, *BCD*, *CDA* y *DAB*. Calcule la razón de los perímetros de las regiones cuadrangulares *ABCD* y $G_1G_2G_3G_4$.

A) 5/3 B) 1 C) 2

D) 3 E) 3/2

Resolución

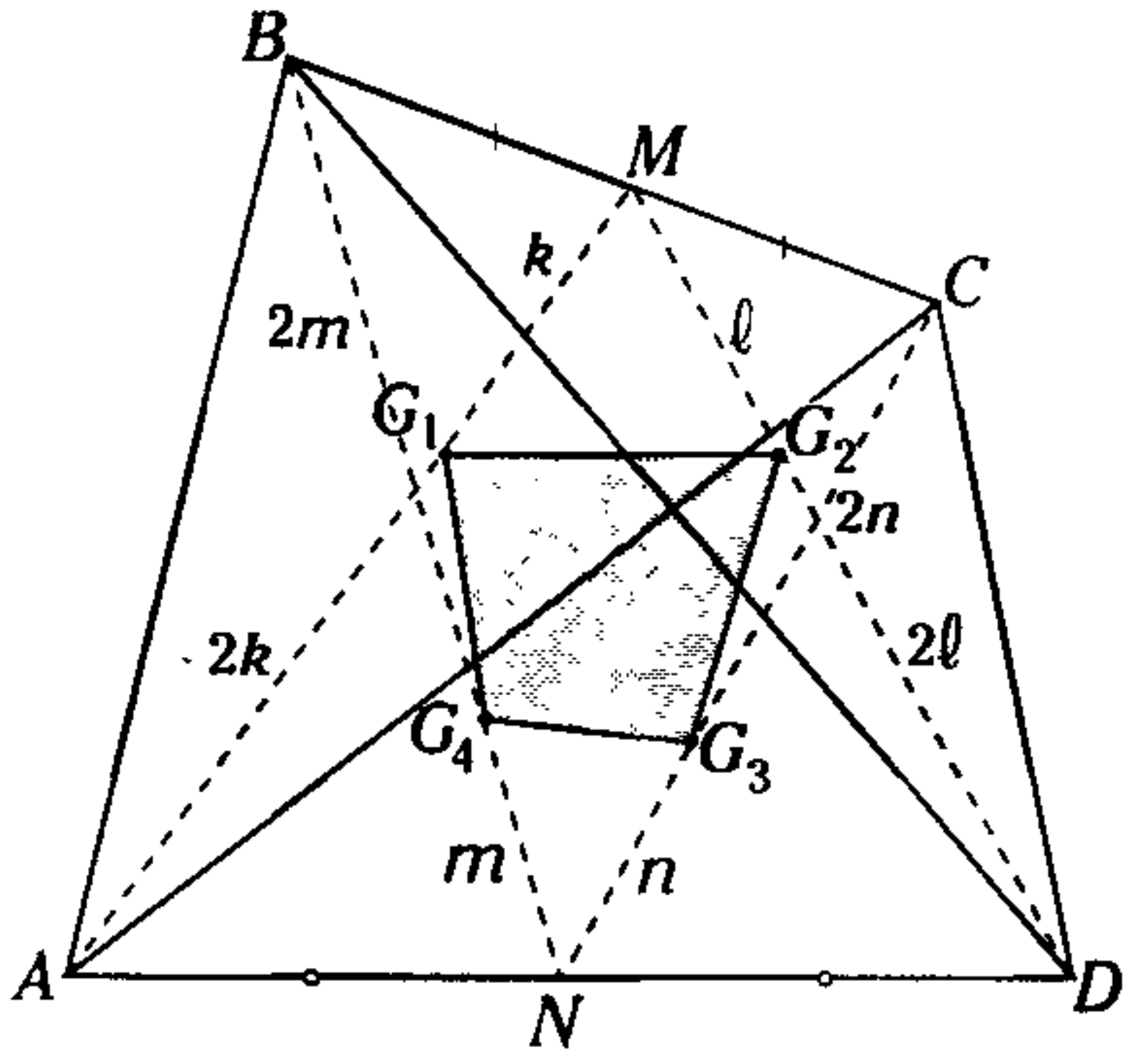


Figura 14.43

Piden $\dfrac{2p(\square ABCD)}{2p(\square G_1G_2G_3G_4)}$

$\triangle ABC$: G_1 es baricentro $\rightarrow AG_1 = 2(G_1M)$

$\triangle BDC$: G_2 es baricentro $\rightarrow DG_2 = 2(G_2M)$

$\triangle AMD$: Por teorema de Tales

$\overline{G_1G_2} \,//\, \overline{AD}$ y $\triangle G_1MG_2 \sim \triangle AMD$

$\rightarrow G_1G_2 = \dfrac{AD}{3}$

$\triangle ACD$: G_3 es baricentro $\rightarrow CG_3 = 2\,(G_3N)$

$\triangle ABD$: G_4 es baricentro $\rightarrow BG_4 = 2\,(G_4N)$

$\triangle BNC$: Por Teorema de Tales $G_3G_4 = \dfrac{BC}{3}$

Análogamente se encuentra que

$\overline{G_2G_3} \,//\, \overline{AB}$ y $G_2G_3 = \dfrac{BA}{3}$

$\overline{G_4G_1} \,//\, \overline{DC}$ y $G_4G_1 = \dfrac{DC}{3}$

Como podemos notar

$\overline{G_1G_2} \,//\, \overline{AD}$, $\overline{G_3G_4} \,//\, \overline{BC}$, $\overline{G_2G_3} \,//\, \overline{AB}$ y $\overline{G_4G_1} \,//\, \overline{DC}$

Entonces $\square ABCD \sim \square G_1G_2G_3G_4$

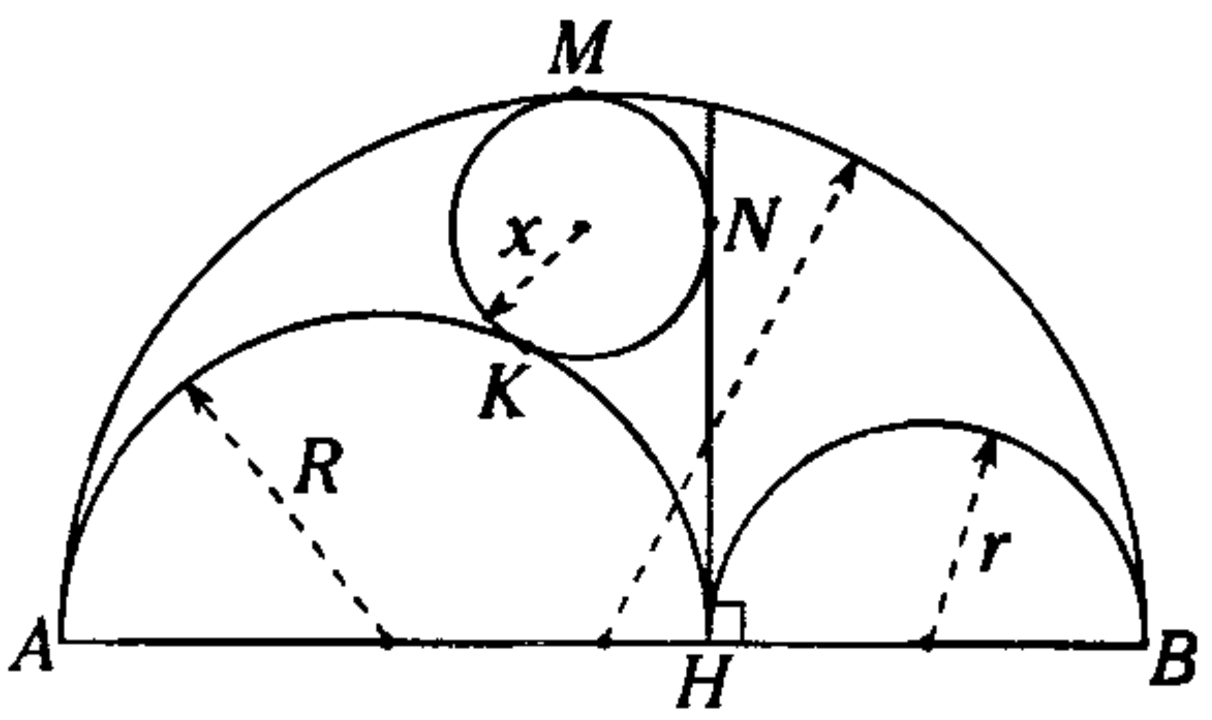
$$\rightarrow \frac{2p(\square ABCD)}{2p(\square G_1G_2G_3G_4)} = \frac{AD}{G_1G_2} = \frac{3G_1G_2}{G_1G_2}$$

$$\therefore\ \frac{2p(\square ABCD)}{2p(\square G_1G_2G_3G_4)} = 3$$

CLAVE D

Problema 20

Según la figura, *M*, *N* y *K* son puntos de tangencia. Calcule *x* en función de *R* y *r*.



A) $R-r$ B) $2Rr/(R-r)$

C) $Rr/(R+r)$

D) $Rr/(R-r)$ E) $Rr/2(R+r)$

Resolución

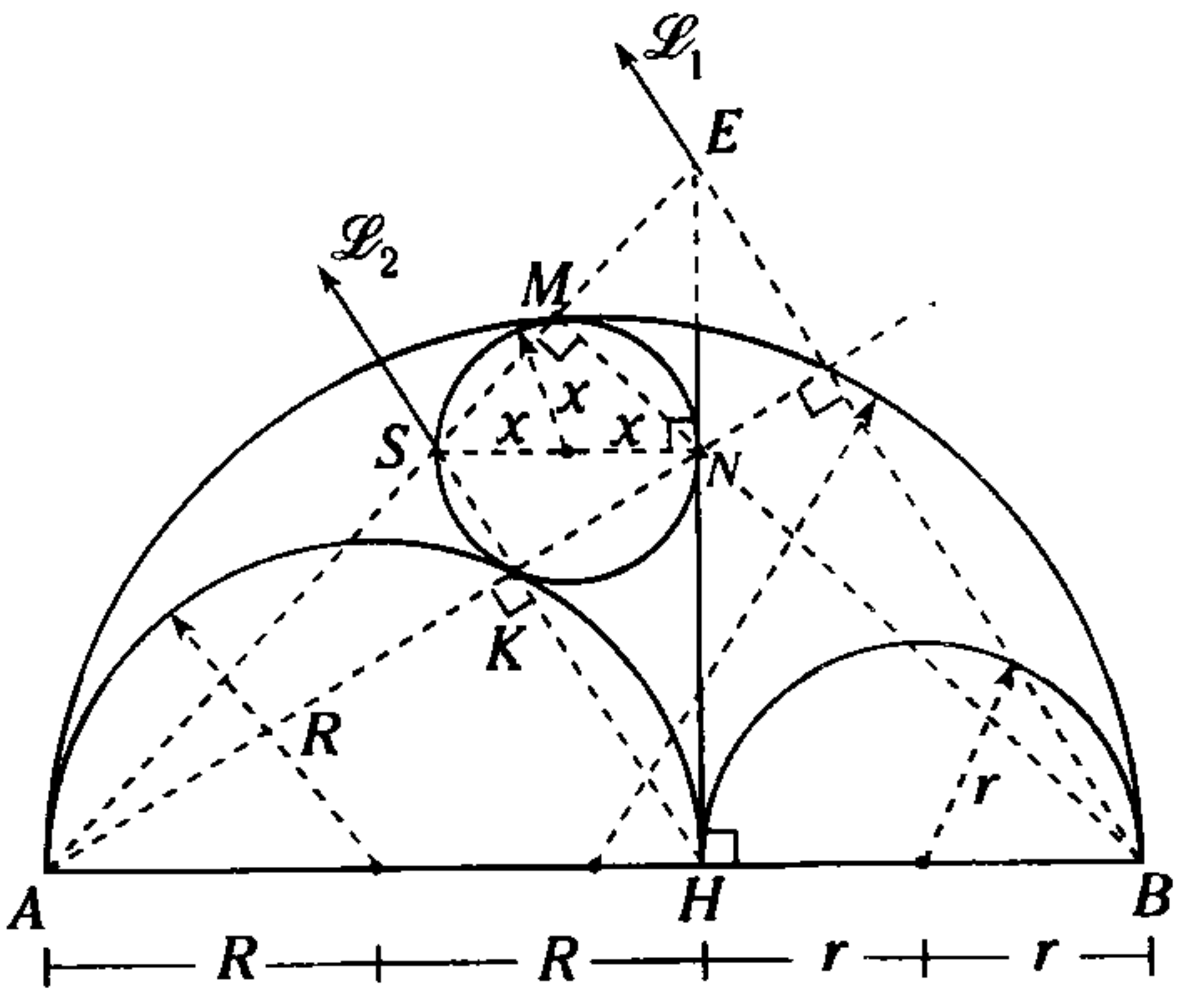


Figura 14.44

Piden x.

Después de realizar los trazos que se han indicado, podemos ver que

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overline{NS} // \overline{AB}$

$\triangle SNE \sim \triangle AHE$ (A.A.A.)

$$\frac{2x}{2R}=\frac{SE}{AE} \qquad \text{(I)}$$

Por teorema de Tales $(\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2})$

$$\frac{SE}{AE}=\frac{2r}{2(R+r)} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\frac{x}{R}=\frac{r}{R+r}$$

$$\therefore\ x=\frac{Rr}{R+r}$$

CLAVE C

Problema 21

Dados los cuadrados $ABCD$ y $BEFG$, tal que E se encuentra en la región exterior a $\overline{BC}$, si $AM = 15$ y M es punto medio de $\overline{BG}$, calcule DO (O: centro del cuadrado $BEFG$).

A) $7{,}5\sqrt{2}$ B) $15\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$

D) $25\sqrt{2}$ E) 30

Resolución

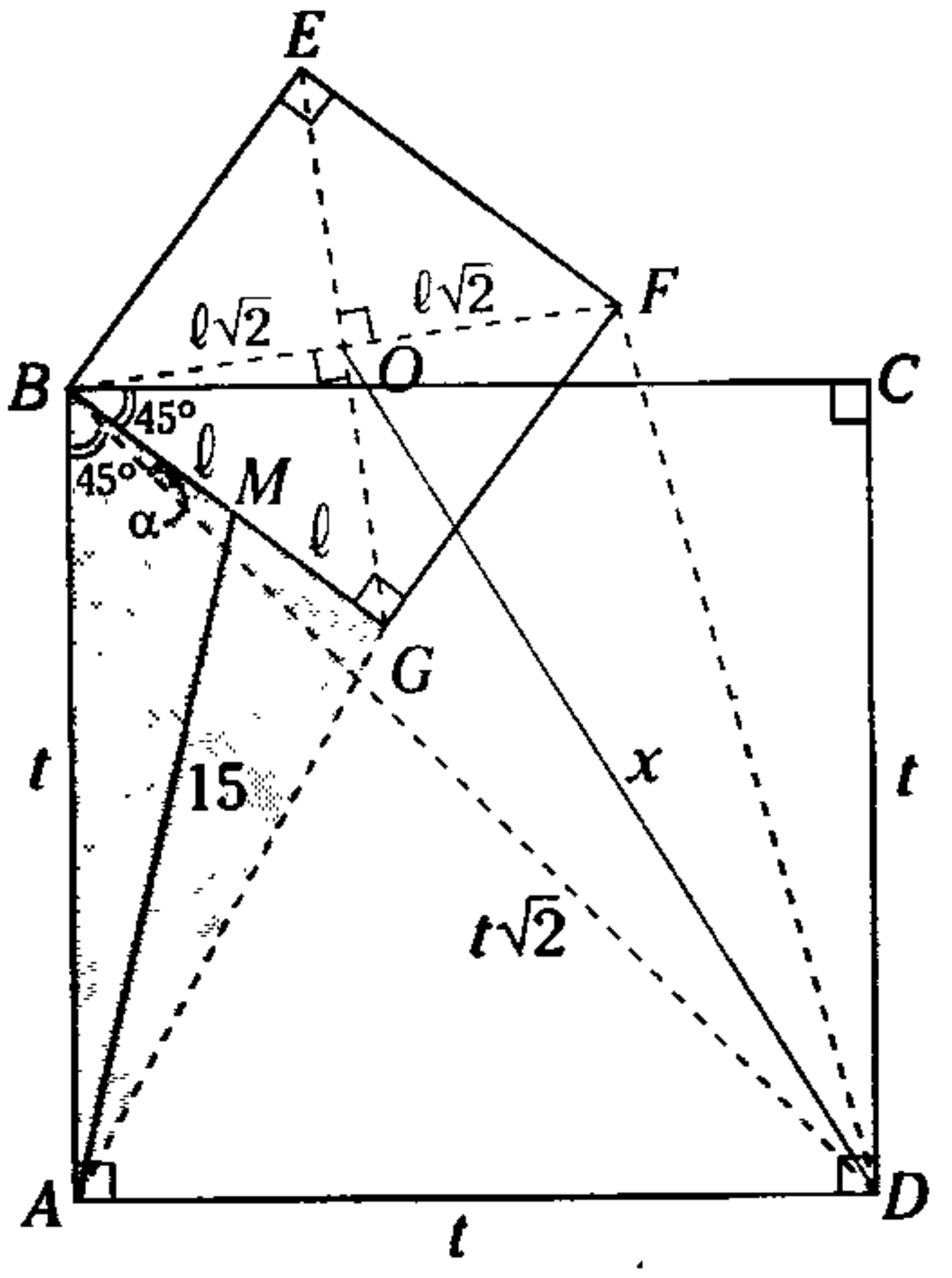


Figura 14.45

Piden $DO=x$

Se sabe

$BF=BG\sqrt{2}$

$BD=BA\sqrt{2}$

$\triangle BOD \sim \triangle BGA$ (L.A.L.)

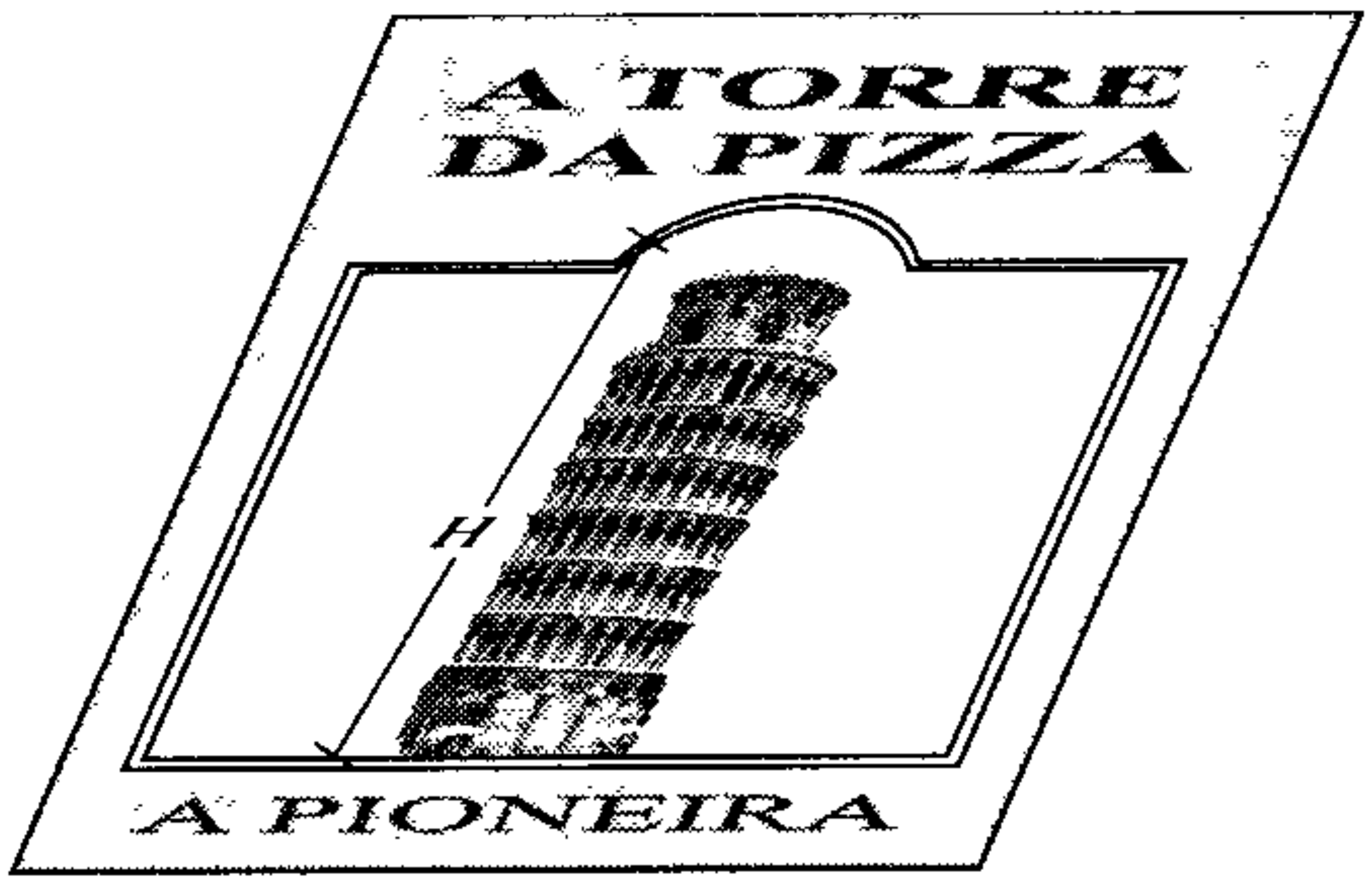
$$\frac{x}{15}=\frac{\ell\sqrt{2}}{\ell}$$

$$\therefore\ x=15\sqrt{2}$$

CLAVE B

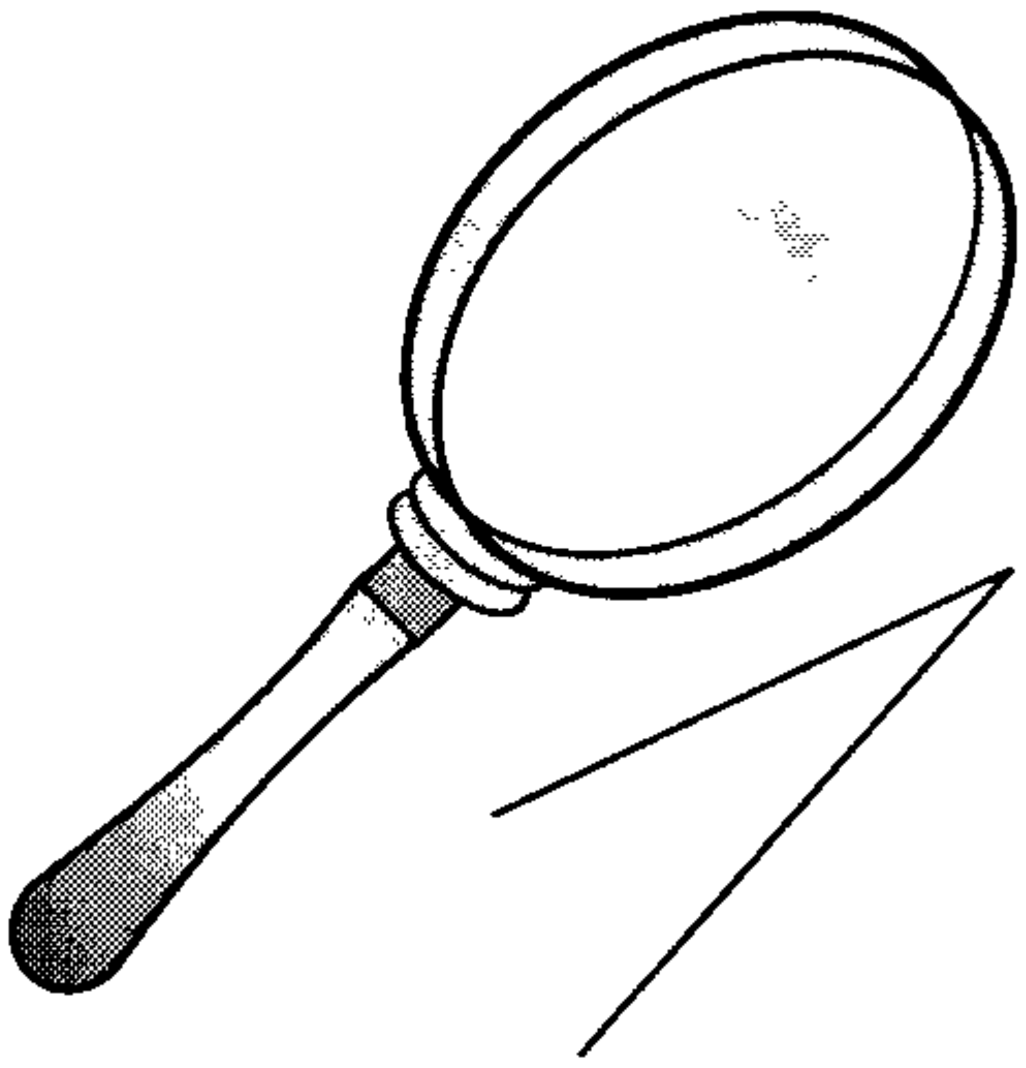
1. **La altura de la torre**

En una ciudad hay una torre cuya altura desconoce. Si se tiene una tarjeta postal con la fotografía de dicha torre, ¿cómo esta puede ser utilizada para determinar la altura de la torre?



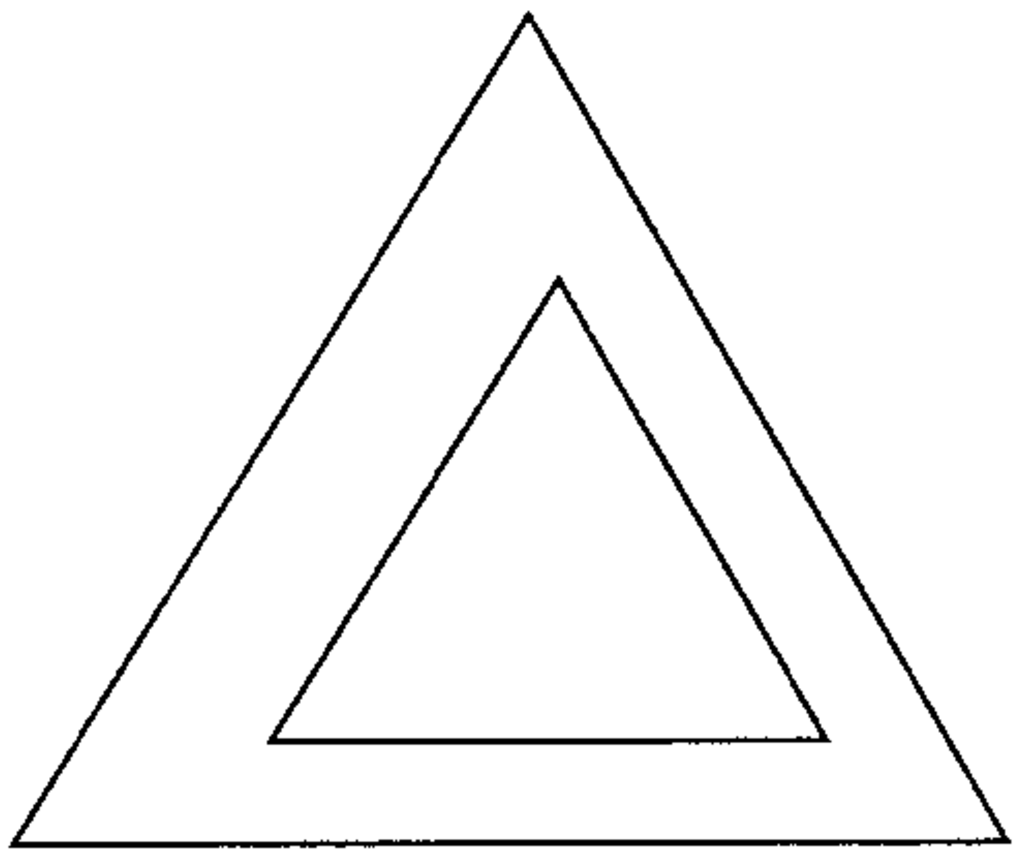
2. **Visto con lupa**

Si un ángulo de medida 15° se mira con una lupa de cuatro aumentos, qué sucede.



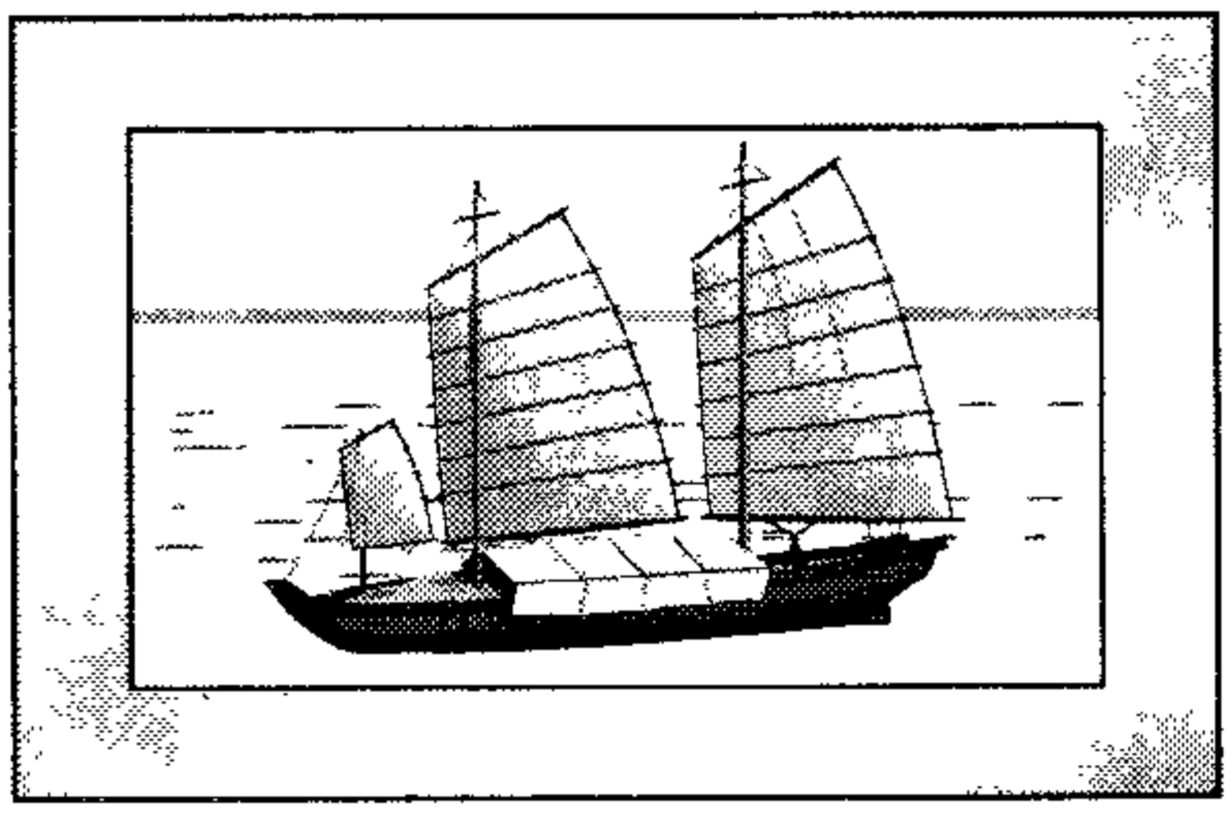
3. **Figuras semejantes**

3.1. ¿Son semejantes los triángulos interno y externo de la figura (a)?



(a)

3.2. ¿Son semejantes los cuadriláteros externo e interno del marco del cuadro (figura b)?



(b)

Resolución 1

Para poder determinar por medio de la fotografía la altura de la torre, es necesario, en primer lugar medir lo más exactamente posible la altura y la longitud de la base de su imagen fotográfica. Luego se mide la longitud de la base de la torre real. Después de esto razonaremos así:

La fotografía de la torre y la configuración de su original son semejantes geométricamente; por consiguiente, la altura de la torre real es tantas veces la altura de la imagen como la longitud de su base real es tantas veces la base en la fotografía.

Problema 22

Un triángulo equilátero ABC se encuentra inscrito en una circunferencia, donde se ubica P en $\overset{\frown}{BC}$. Si $\overline{AP} \cap \overline{BC} = \{L\}$, $BP = a$ y $PC = b$, calcule PL.

A) $a + b$ B) $\dfrac{ab}{a+b}$ C) $\dfrac{a-b}{4}$

D) $\dfrac{2ab}{a+b}$ E) $\dfrac{ab}{b-a}$

Resolución

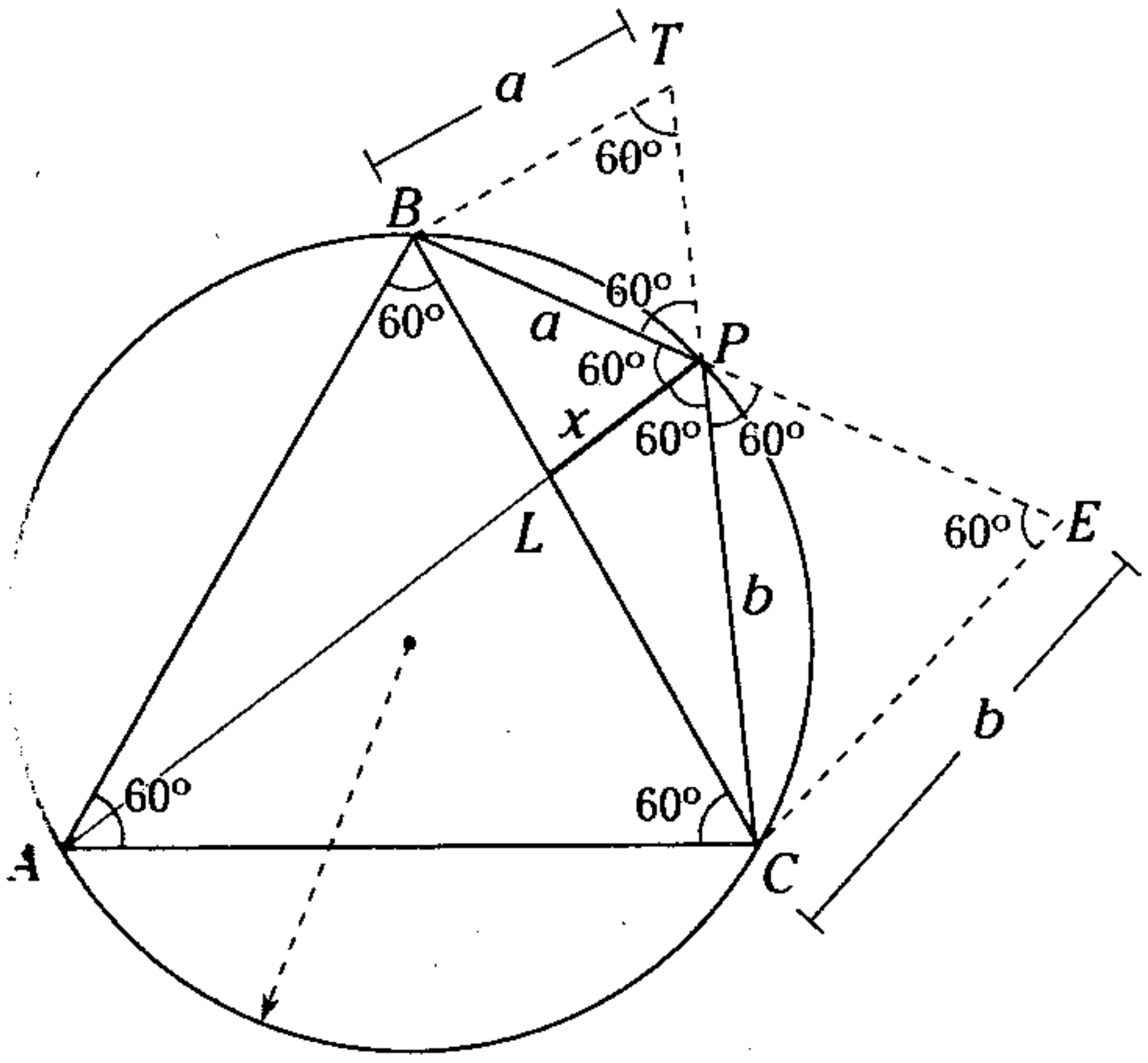


Figura 14.46

Piden $PL = x$

Se trazan $\overline{BT} \,//\, \overline{PL} \,//\, \overline{CE}$ (T en la prolongación $\overline{CP}$ y E en la prolongación $\overline{BP}$).

Por propiedad de semejanza

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\therefore\ x = \frac{ab}{a+b}$$

CLAVE B

Problema 23

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, se ubican los puntos M y N, tal que $\dfrac{AM}{NC} = \dfrac{MB}{ND} = 2$.

Si las rectas AD y BC se intersecan en P y la bisectriz del $\measuredangle APB$ interseca a $\overline{MN}$ en Q, calcule $\dfrac{MQ}{NQ}$.

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) 2

D) 0,5 E) $\sqrt{2}/2$

Resolución

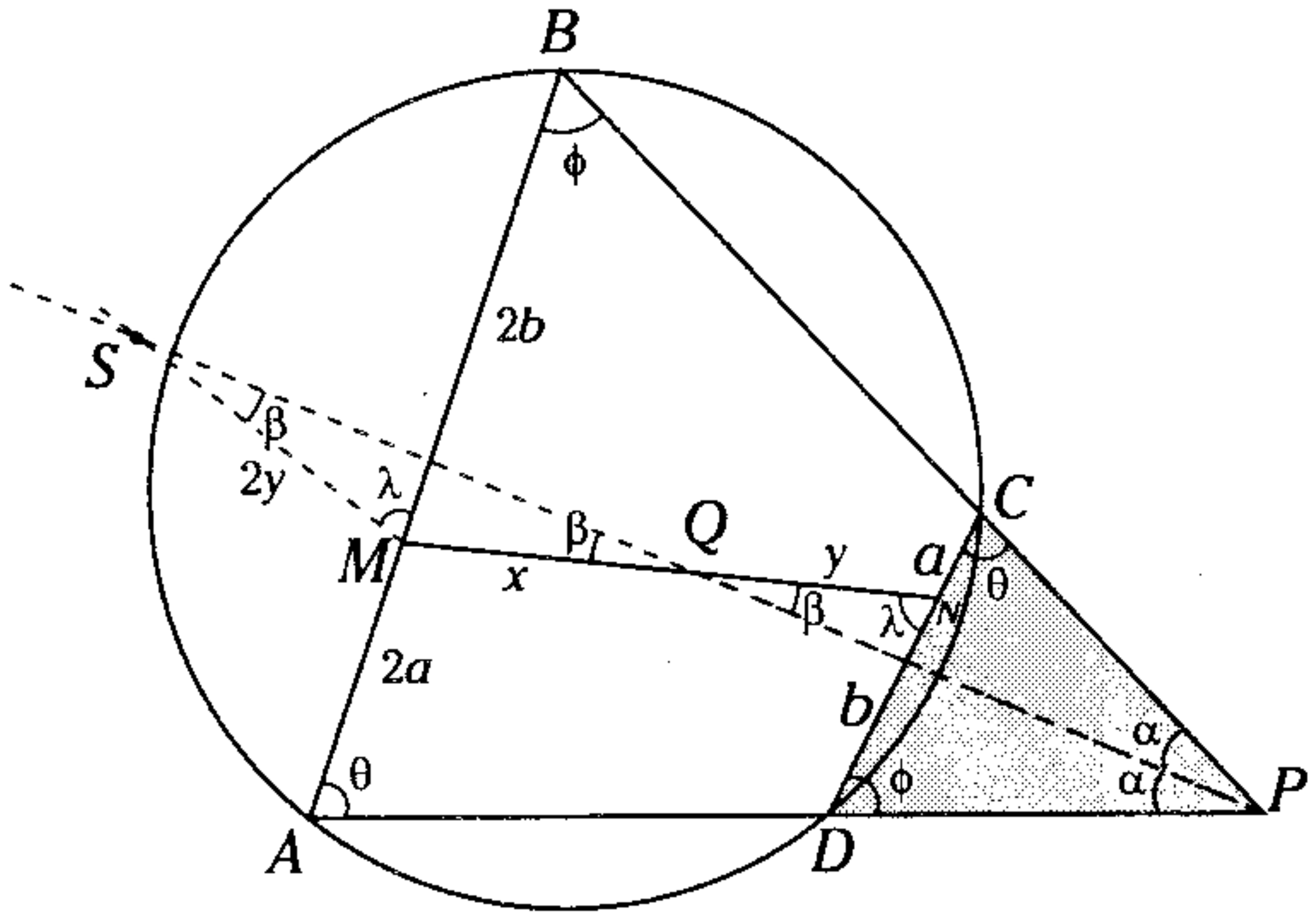


Figura 14.47

Piden $\dfrac{MQ}{NQ} = \dfrac{x}{y}$

En el cuadrilátero $ABCD$

$m\measuredangle BAP = m\measuredangle DCP = \theta$

$m\measuredangle ABP = m\measuredangle CDP = \phi$

$\rightarrow\ \triangle DCP \sim \triangle BAP$

cuya razón de semejanza es $\dfrac{1}{2}$,

como $AM = 2(CN)$ y $BM = 2(DN)$

entonces M y N son puntos homólogos.

Si trazamos $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{MS}$, tal que

$m\measuredangle SMB = m\measuredangle QND = \lambda$

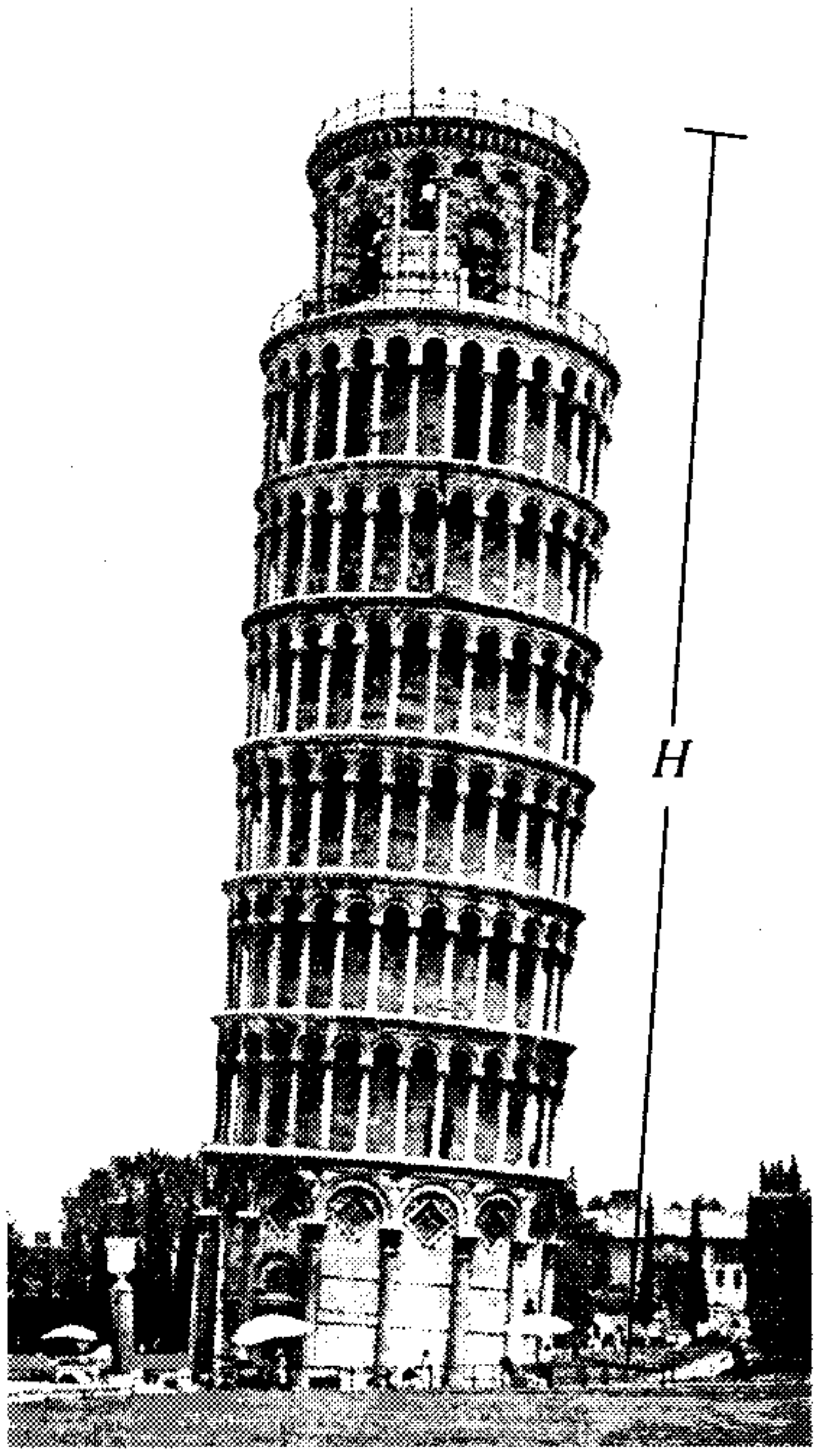
$\rightarrow\ \overline{MS}$ y $\overline{NQ}$ son homólogos.

$\therefore\ MS = 2(NQ)$ y la $m\measuredangle MSP = m\measuredangle NQP = \beta$

En el $\triangle QMS$: $2y = x$

$$\therefore\ \frac{x}{y} = 2$$

CLAVE C

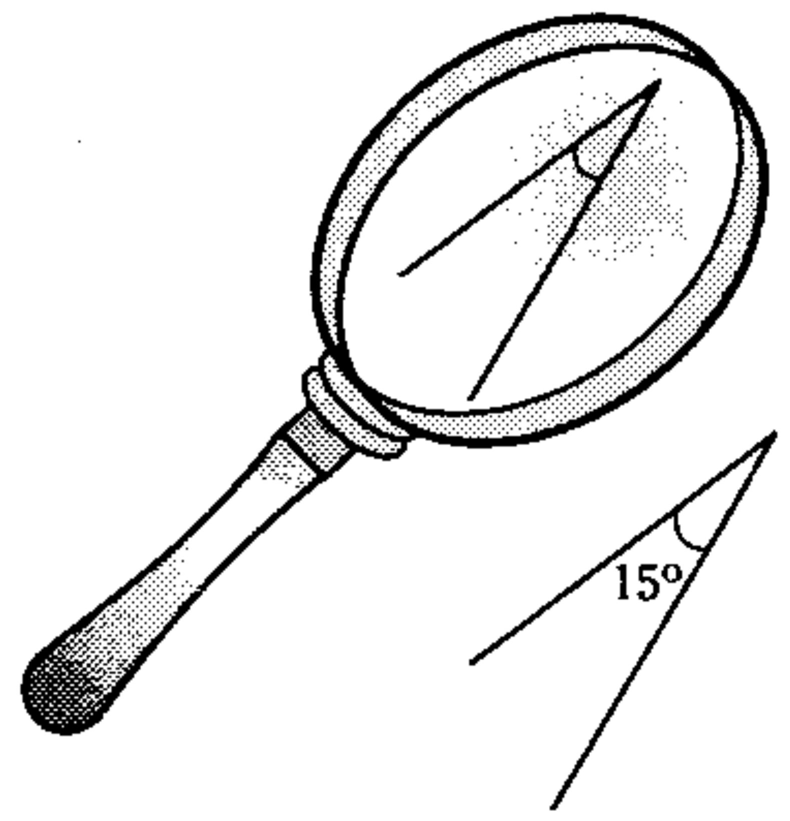


$$\frac{H}{h}=\frac{B}{b} \rightarrow H=\frac{B}{b}.h$$

Conviene advertir, no obstante, que para determinar la altura de una torre no sirve cualquier fotografía, sino aquellas en las cuales no se hayan alterado las proporciones de la original.

Resolución 2

Si se cree que nuestro ángulo visto con lupa mide 15°×4=60°, es un error. El valor de la medida del ángulo no aumenta cuando se mira con lupa.



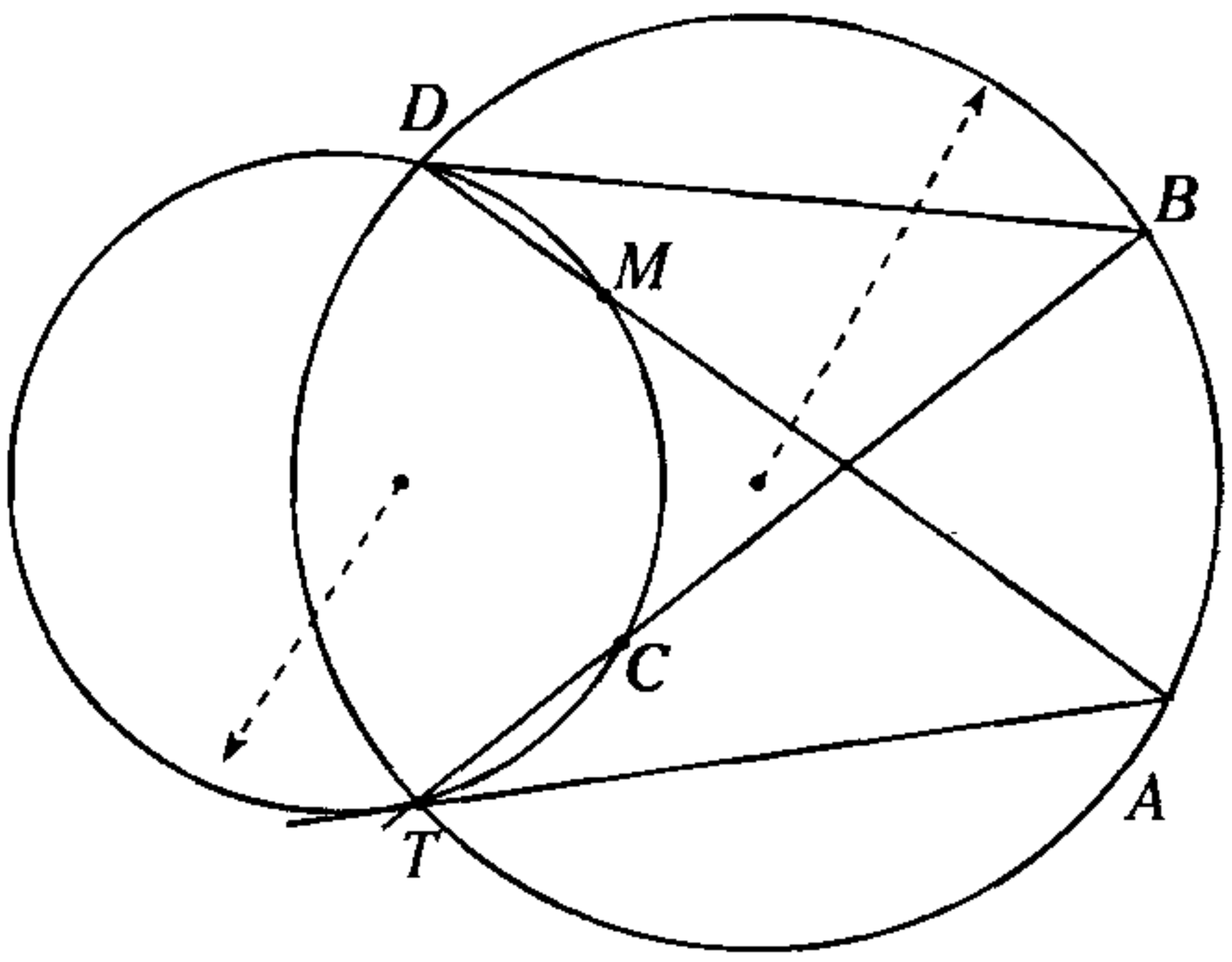
Es verdad que el arco que mide dicho ángulo aumenta indudablemente; pero, el radio de este arco aumenta la misma cantidad de veces que él, de modo que la medida del ángulo central permanece invariable.

Resolución 3

De las dos preguntas planteadas en el problema solo son semejantes los triángulos; en cambio, los cuadriláteros exterior e interior del marco, en general, no son semejantes. Para que dos triángulos sean semejantes basta que sus medidas angulares sean iguales y como los lados del triángulo interior son paralelos a los del exterior, estas figuras son semejantes; pero, para que los demás polígonos sean semejantes no basta la igualdad de sus medidas angulares (o lo que es lo mismo, el paralelismo de sus lados), es necesario, además, que los lados de los polígonos sean proporcionales. En el caso de los cuadriláteros exterior e interior de un marco, solo se da esta condición si son cuadrados (o, en general rombos); en todos los demás casos, los lados del cuadrilátero exterior no son proporcionales a los lados del cuadrilátero interior y, por consiguiente, las figuras no son semejantes.

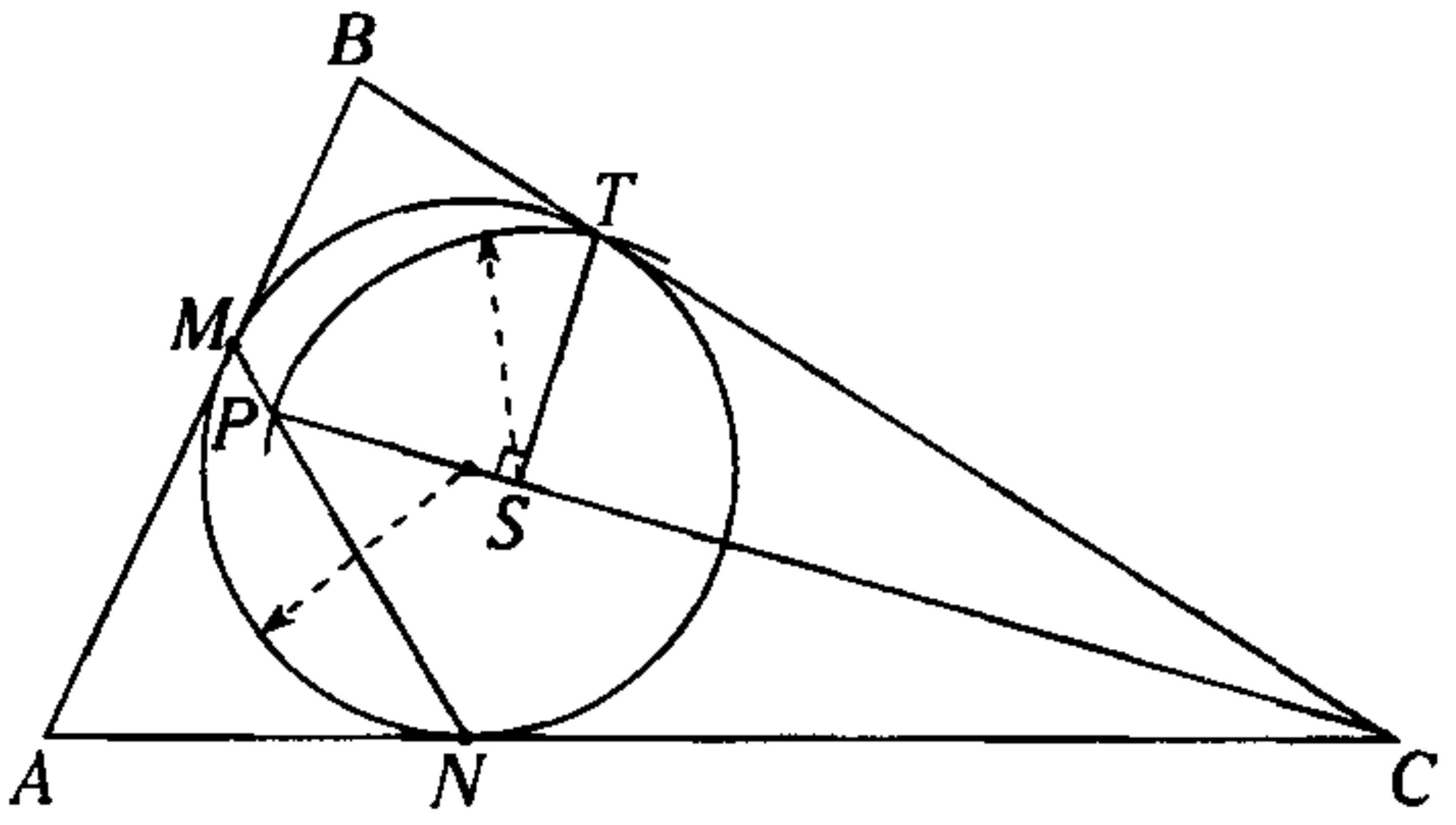
Problemas Propuestos

1. Según la figura, $AM = a$, $BD = b$ y $BC = d$. Calcule AT, si T es punto de tangencia.



A) ad/b B) bd/a C) $(a+d)/b$
D) $(a+b)/d$ E) ab/d

2. Según la figura, M, T y N son puntos de tangencia. Si $\frac{(AB)(TC)}{AC} = K$, ¿cuánto dista T de $\overline{AC}$?



A) $K/2$ B) $K/3$ C) $2K/3$
D) K E) $2K$

3. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior $\overline{CN}$; luego, se traza $\overline{NH} \perp \overline{AC}$. Si en $\overline{NH}$ se ubica el punto T, tal que $\overline{TI} // \overline{HC}$ (I es incentro del triángulo ABC); $\frac{AB}{BC} = \frac{5}{12}$ y $TI = 6$, halle HC.

A) 30 B) 34 C) 36
D) 42 E) 46

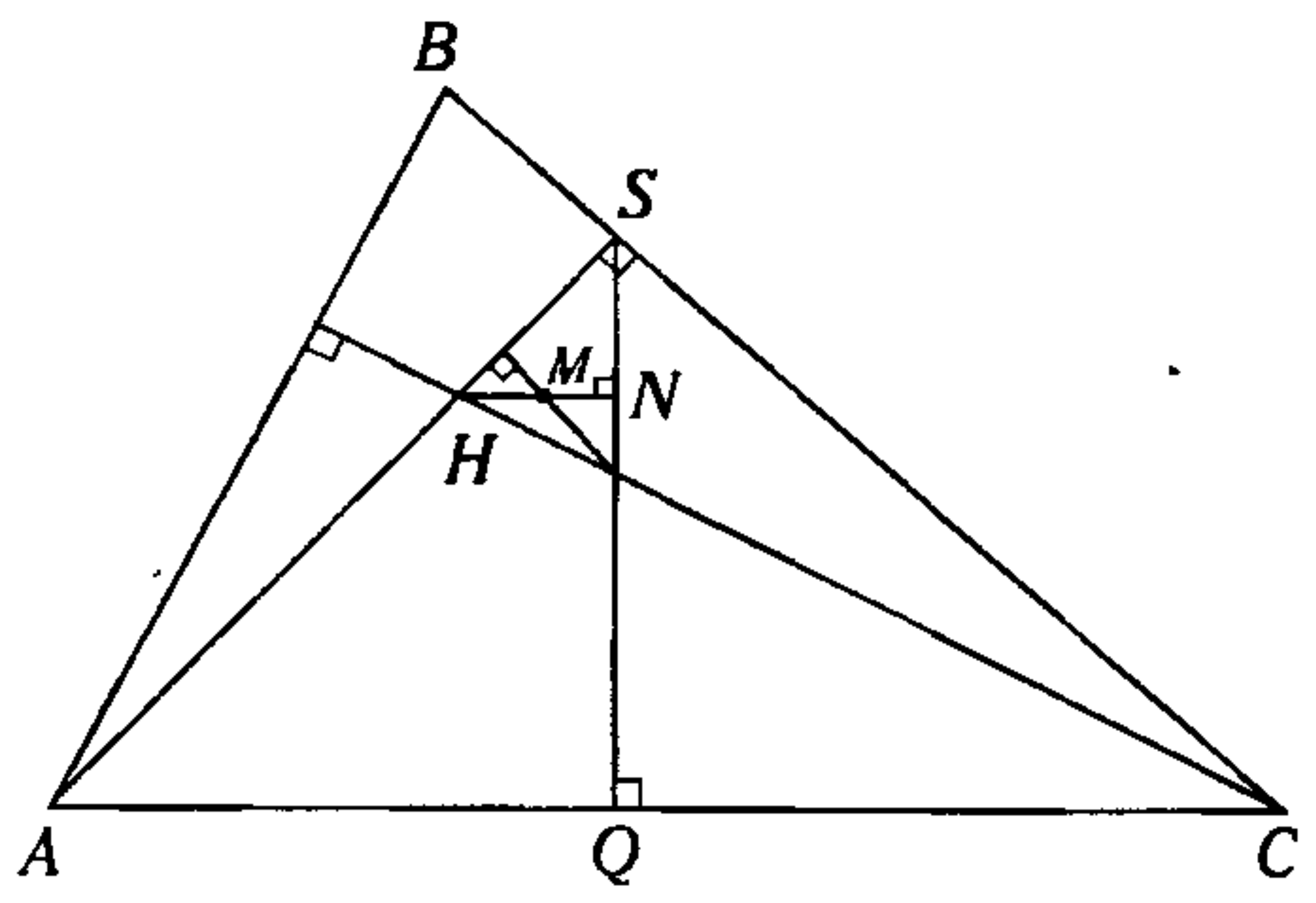
4. En una circunferencia se ubican los puntos A, B, C y E, tal que $\overline{AC}$ sea diámetro, $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{BCE}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AE} = \{D\}$ y $CD = 3(BC)$. Señale $m\measuredangle ADB$.

A) 37° B) 37°/2 C) 22°30'
D) 30° E) 53°/2

5. En una circunferencia de centro O, se ubican los puntos A, B, C y D. Considerando que $B \in \overset{\frown}{AC}$ y $C \in \overset{\frown}{BD}$, con centro en C y radio $\overline{CD}$ se traza el arco de circunferencia $\mathscr{C}$, de modo que $\overline{BD} \cap \mathscr{C} = \{P\}$, además D es el simétrico de P respecto de $\overline{AC}$, $BP = a$ y $m\measuredangle BCP = \theta$. Calcule OC.

A) $a\operatorname{sen}\theta$ B) $\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta$ C) $a\tan\theta$
D) $\frac{a}{2}\csc\theta$ E) $a\cot\theta$

6. De la figura, $\frac{HS}{BC} = \ell$. Calcule $\frac{MN}{NQ}$.

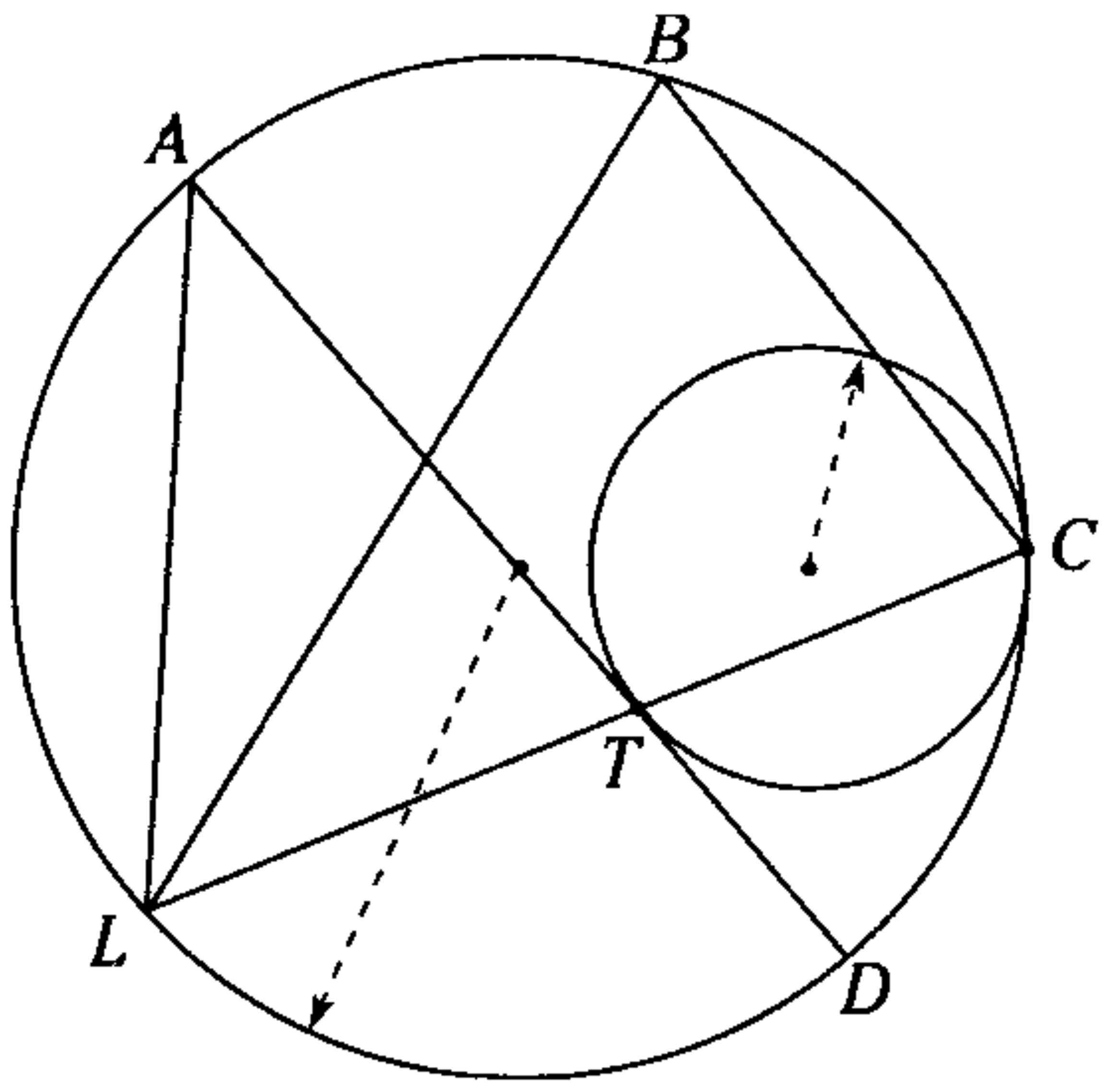


A) ℓ B) $\ell/2$ C) 2ℓ
D) 2/3 E) $3\ell/2$

7. En un triángulo ABC, se traza el triángulo rectángulo BCD recto en C, donde $8(AB) = 3(BD)$. Si E es el punto de intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ y $\frac{AE}{3} = \frac{EC}{2}$, calcule el menor valor que toma $m\measuredangle CDB$.

A) 75° B) 60° C) 45°
D) 15° E) 37°

8. De la figura, C y T son puntos de tangencia. Si $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $CT = TL$ y $AL = n$, señale LB.



A) $n\sqrt{3}$ B) $n/2$ C) $2n$
D) $n\sqrt{2}$ E) n

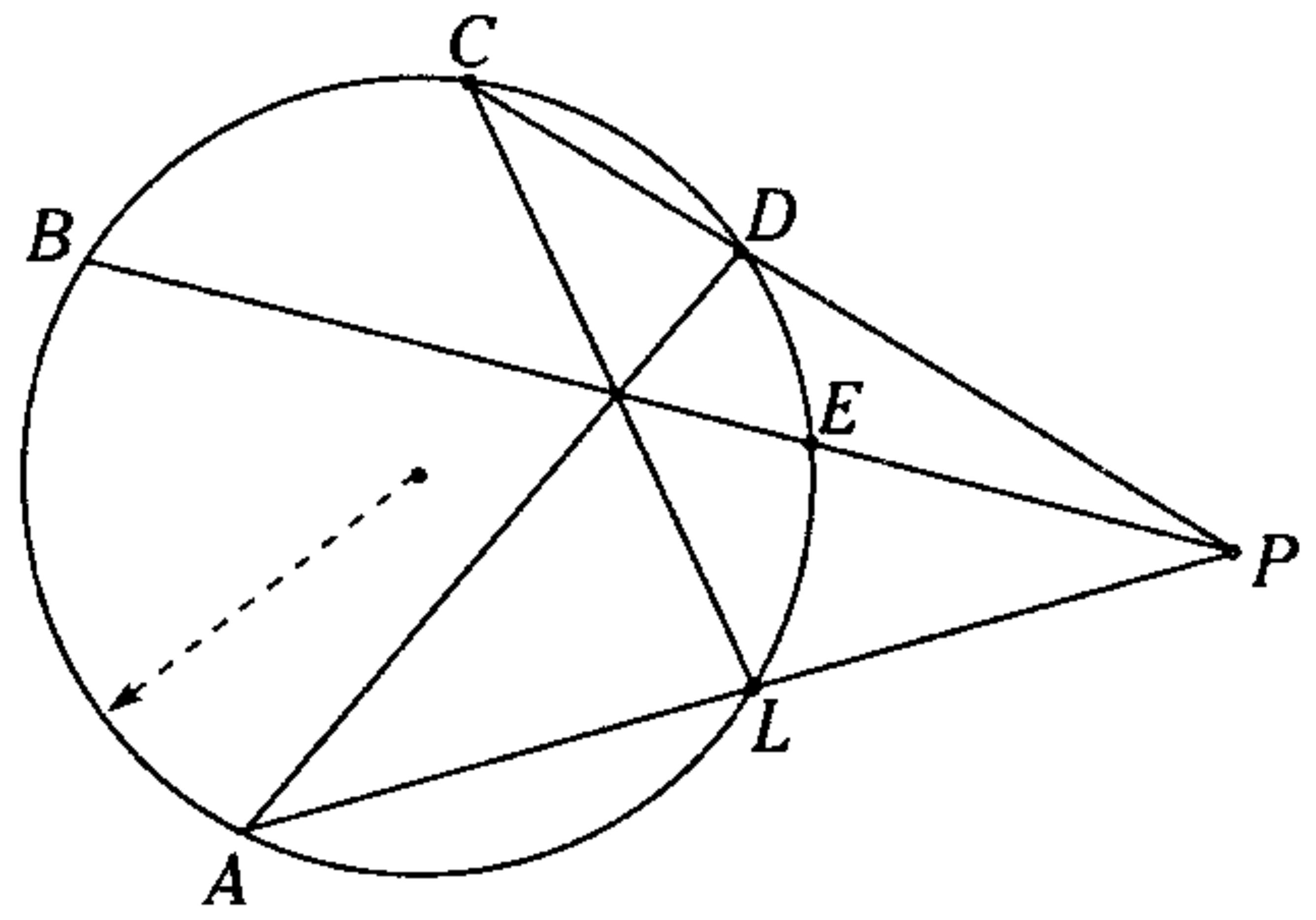
9. En un cuadrado $ABCD$, se ubica el punto P exterior relativo a BC, de tal manera que $m\measuredangle BPC = 90°$. Si luego se ubica un punto M en $\overline{AD}$, de manera que $\overline{PM}$ interseca a $\overline{BC}$ en S, $BS = MD = 3$ cm y $AB = 2(PC)$, calcule PS.

A) 3 cm B) 2 cm C) 6 cm
D) $3\sqrt{2}$ cm E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

10. En un triángulo ABC, se trazan la altura $\overline{BH}$ y la ceviana interior $\overline{AM}$, las cuales se intersecan en P. Si $m\measuredangle BAP = m\measuredangle MCP$, $BP = BM$, $2(AB) = 3(PC)$ y $AP = 9\sqrt{5}$, señale PM.

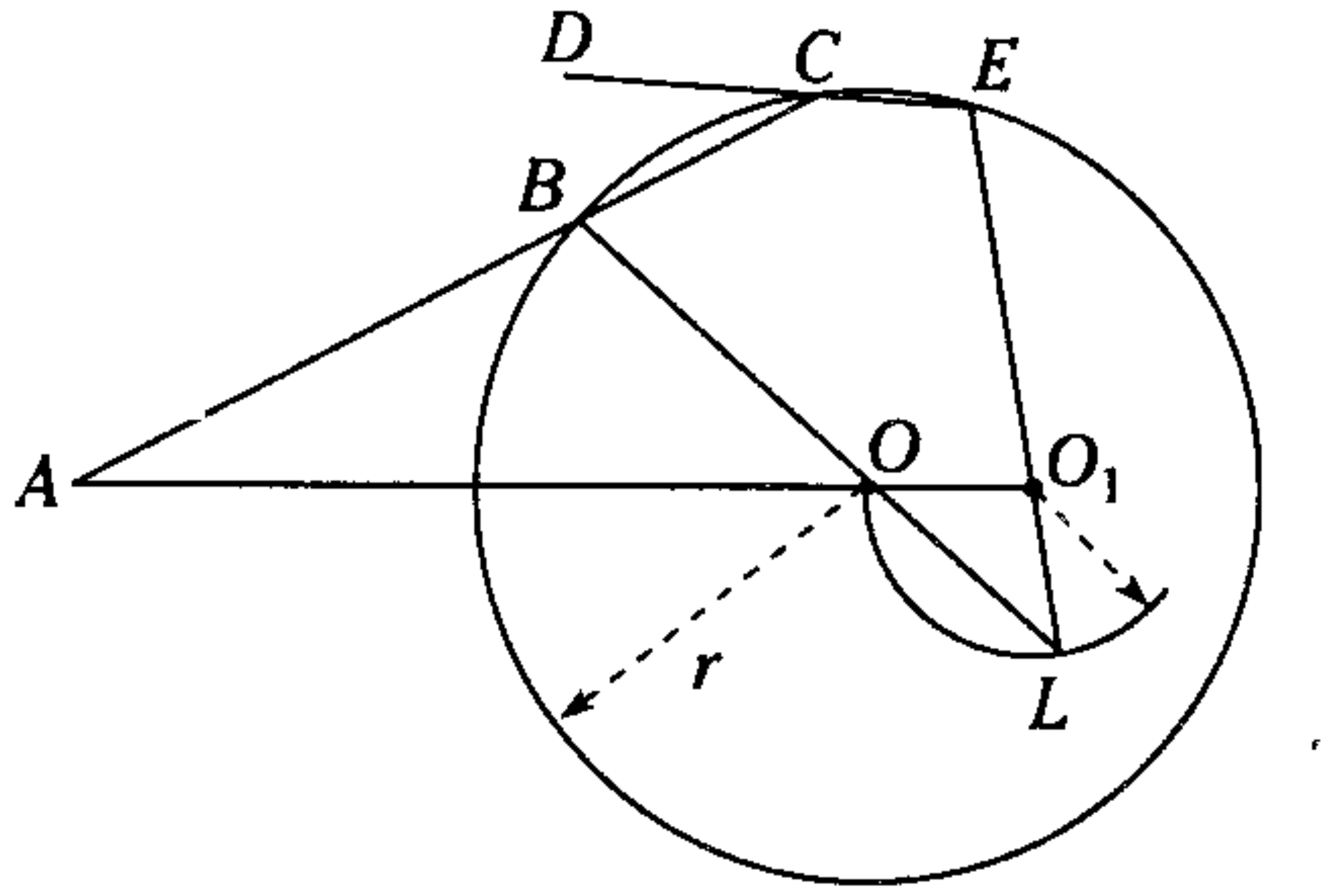
A) 3 B) 6 C) 9
D) $3\sqrt{5}$ E) $6\sqrt{5}$

11. De la figura, $m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{CE}$ y $m\overset{\frown}{DLA} = 140°$. Indique $m\overset{\frown}{CD}$.



A) 80° B) 70° C) 40°
D) 30° E) 20°

12. De la figura, $m\measuredangle DCB = \frac{m\measuredangle CBO}{2}$, $OL = 3$ y $AB = 5$. Indique r.

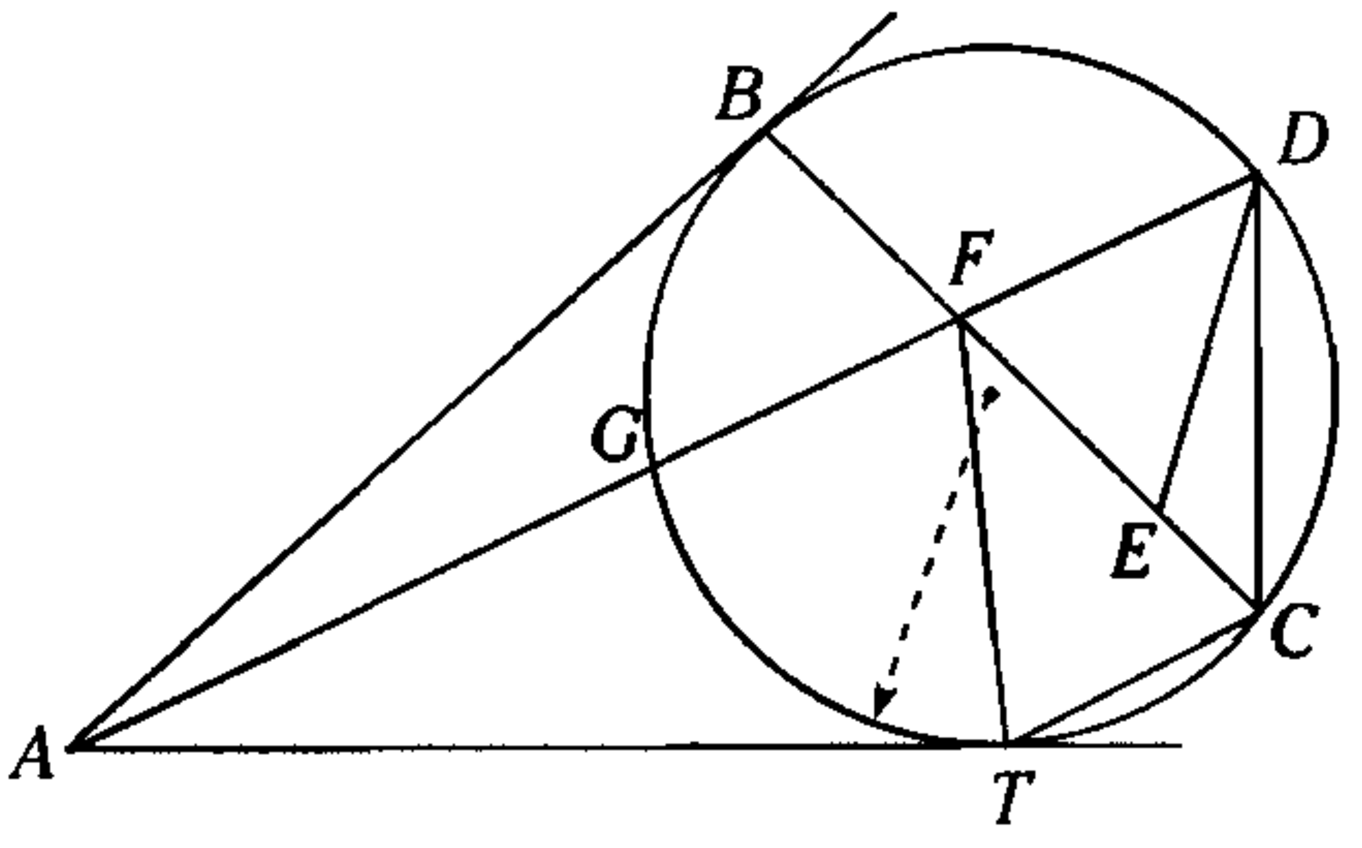


A) $\sqrt{15}/3$ B) 4 C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{15}$ E) $\sqrt{17}$

13. Dado un triángulo isósceles ABC ($AB = BC$), en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, en la prolongación de $\overline{AC}$ y en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubican los puntos M, N, T y F respectivamente, tal que $\overline{MT} \cap \overline{AF} = \{N\}$. Si $m\sphericalangle FTC + m\sphericalangle BAC = 180°$, $BN - MB = 9$ y $FT = 4$, indique NC.

A) 2 B) 4 C) 3
D) 5 E) 6

14. En la figura, $\overline{DG} \parallel \overline{TC}$. Si B y T son puntos de tangencia, $2(DE) = 3(FE)$, $m\widehat{TG} = 2(m\sphericalangle EDC)$ y $AT = 9$, halle FC.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

15. En un triángulo equilátero ABC, se traza exteriormente la semicircunferencia de diámetro AB, donde se ubican los puntos L y T, tal que $m\widehat{AL} = m\widehat{LT} = m\widehat{TB}$, $\overline{AB} \cap \overline{LC} = \{E\}$, $\overline{AB} \cap \overline{TC} = \{F\}$ y $AB = 6$. Indique EF.

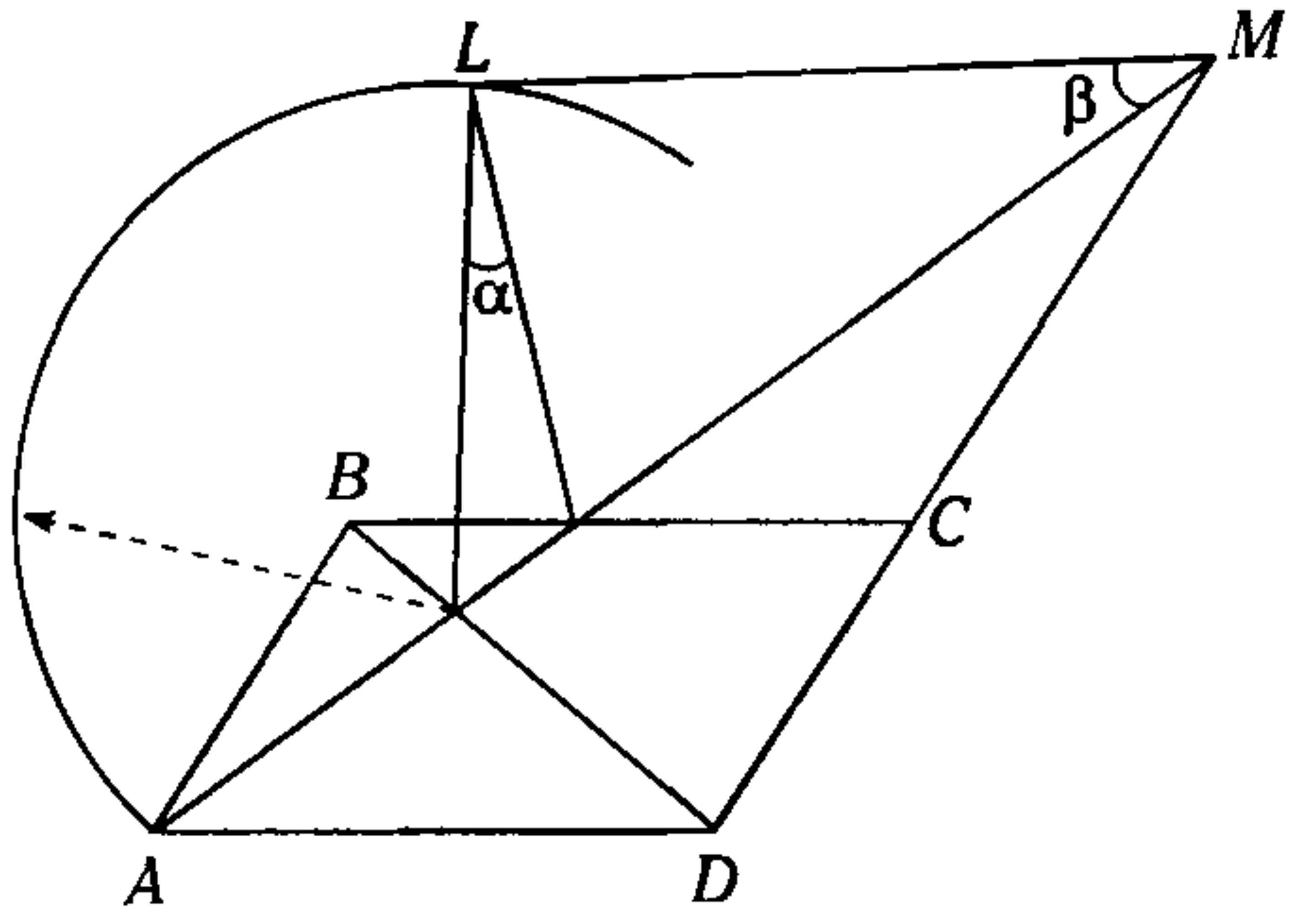
A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 3 E) 4

16. En un exágono $ABCDEF$, se ubican los baricentros G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 y G_6 de las regiones BCD, CDE, DEF, EFA y FAB, respectivamente.

Si $\overline{G_1G_4} \cap \overline{G_2G_5} = \{P\}$, calcule $\frac{G_6P}{G_3P}$.

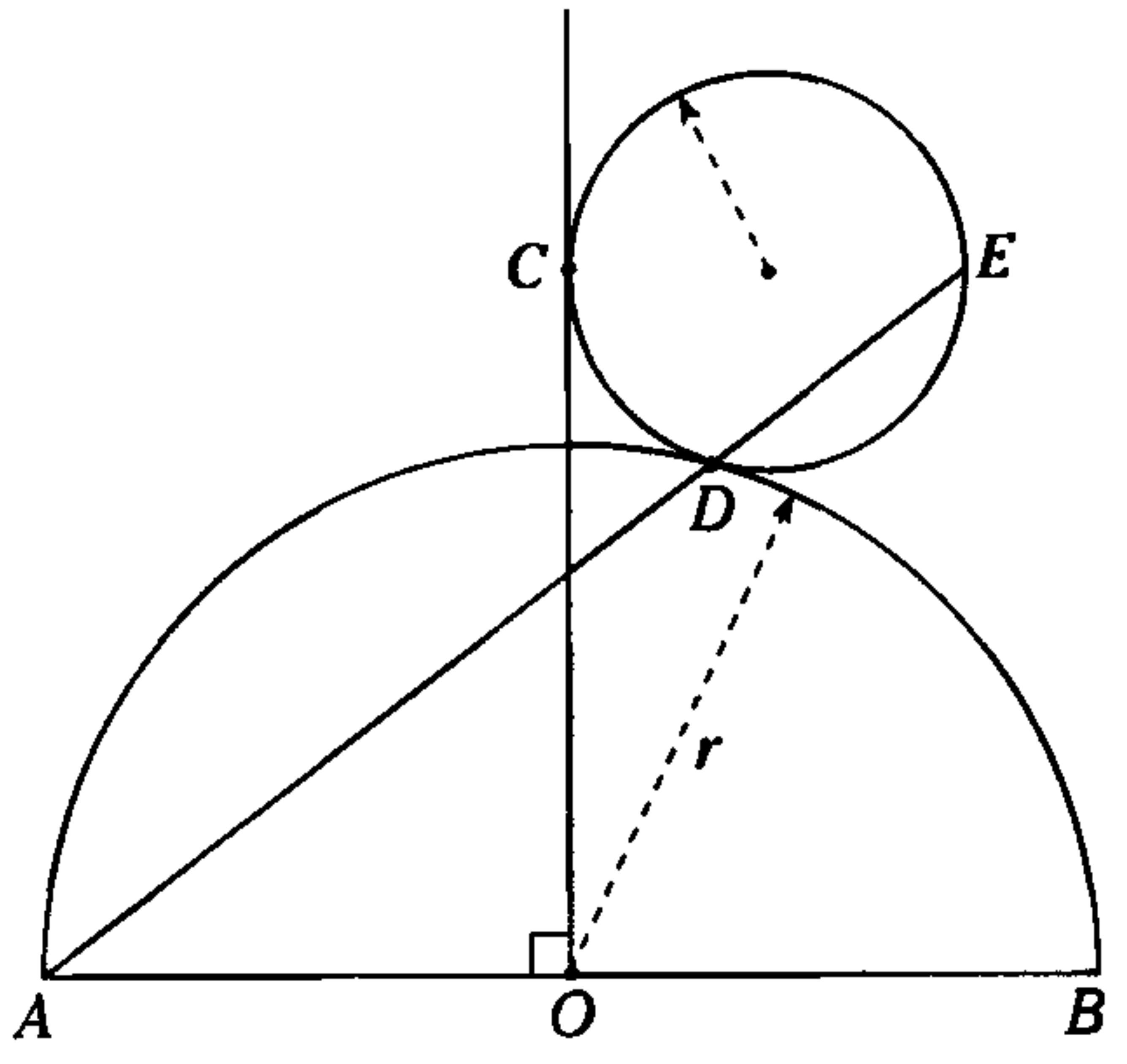
A) 2 B) 1 C) 3/2
D) 2/3 E) 4/3

17. De la figura, $ABCD$ es un romboide. Halle α/β.



A) 1/2 B) 2 C) 1
D) 3/2 E) 4/3

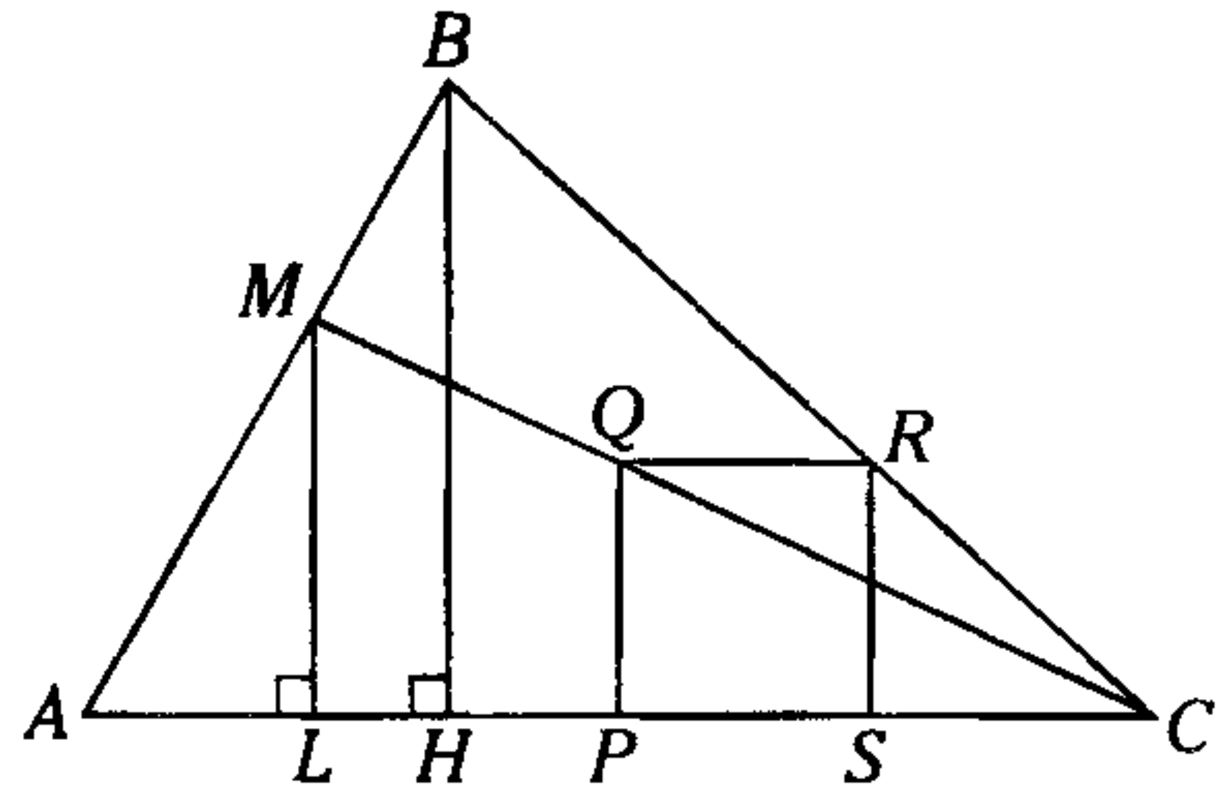
18. De la figura, C y D son puntos de tangencia. Si $AE = a$ y $CO = b$, calcule r.



A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\frac{a^2}{a-b}$ C) $\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

D) $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ E) $\sqrt{a^2-b^2}$

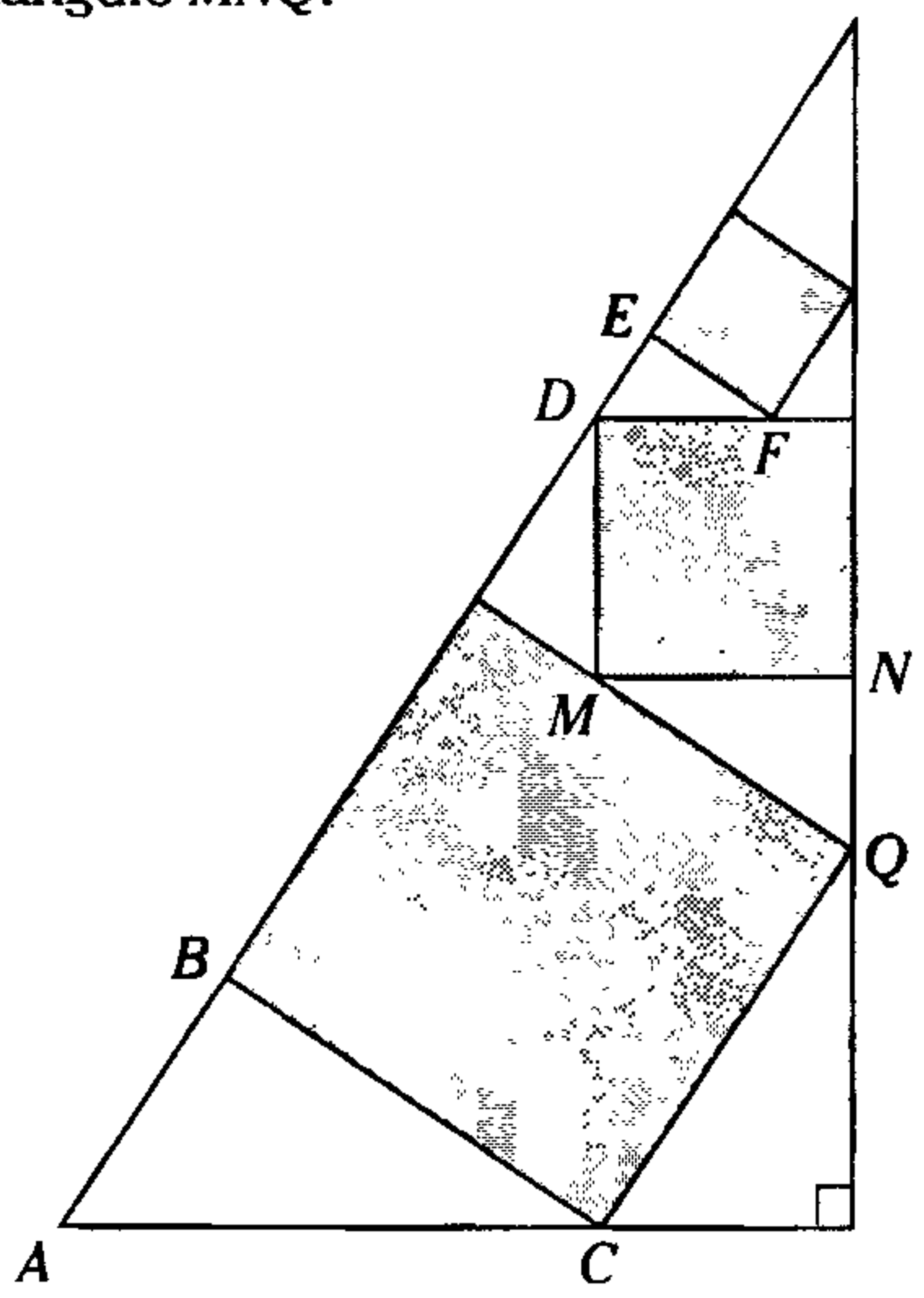
19. Según la figura, $PQRS$ es un cuadrado. Si $AC=a$ y $BH=b$, calcule ML.



A) $\sqrt{ab}$ B) $a-b$ C) $\dfrac{ab}{a+b}$

D) $\dfrac{(a+b)}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{ab}}{2}$

20. Según la figura, las regiones sombreadas están limitadas por cuadrados. Si los inradios de los triángulos ABC y DEF son R y r, respectivamente, señale el inradio del triángulo MNQ.



A) $\dfrac{\sqrt{Rr}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{Rr}}{3}$ C) $\dfrac{2\sqrt{Rr}}{3}$

D) $\sqrt{Rr}$ E) $2\sqrt{Rr}$

21. En un triángulo, las longitudes de los lados están en progresión aritmética. Calcule la razón entre el inradio y la longitud de la altura relativa al lado intermedio.

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4
D) 2/3 E) 1/5

22. En un triángulo acutángulo ABC, de ortocentro H, se trazan $\overline{HM} \parallel \overline{BA}$ y $\overline{HN} \parallel \overline{BC}$, tal que M y N pertenecen a $\overline{AC}$. Si $AM + NC = 2(MN)$ y $m\sphericalangle BCA=40°$, calcule la medida del ángulo formado por $\overline{BC}$ y la recta de Euler del triángulo $\overline{ABC}$.

A) 50° B) 80° C) 20°
D) 40° E) 100°

23. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, exteriormente y relativas a los catetos se trazan semicircunferencias, en las cuales se ubican los puntos M y N, respectivamente, tal que $m\overset{\frown}{MB} + m\overset{\frown}{BN} = 180°$. P y Q son los pies de las perpendiculares trazadas desde M y N a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente ($P \in \overline{AB}$ y $Q \in \overline{BC}$). Si H es el pie de la altura trazada desde B en el triángulo ABC, determine $m\sphericalangle PHQ$.

A) 90° B) 120° C) 135°
D) 45° E) 60°

24. En los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC, se ubican los puntos M y N, respectivamente, tal que los ángulos BAC y MNC son suplementarios. Si $3(AB) = 5(MN)$, $NC = 6$ y $AC = 16$, indique la longitud de la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) $\sqrt{3}$

1	E	9	E	17	C
2	D	10	D	18	E
3	C	11	C	19	C
4	E	12	D	20	D
5	D	13	C	21	B
6	A	14	C	22	D
7	D	15	C	23	A
8	D	16	B	24	B

Claves

Capítulo XV

Relaciones métricas

Definitivamente, el Teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo es uno de los más conocidos y utilizados. Su importancia radica no solo en que hay más de 300 maneras para demostrarlo, sino también, porque a partir de él, también, se pueden demostrar y desarrollar notables teorías.

Relaciones métricas

OBJETIVOS

- Relacionar longitudes de segmentos y medidas angulares a través de la semejanza de figuras.
- Conocer las principales relaciones de las longitudes de líneas asociadas a una circunferencia, a un triángulo rectángulo, a triángulos oblicuángulos y a los cuadriláteros.
- Calcular longitudes de segmentos o elementos relacionados a las figuras antes mecionadas.

INTRODUCCIÓN

Se sabe que en nuestro entorno los fenómenos o sucesos producidos están intimamente relacionados con las condiciones de los elementos.

Por ejemplo, en la naturaleza, la temperatura influye en los cambios de estado del agua; en la sociedad, lo político y lo económico tienen relación con los cambios sociales; de igual modo en las figuras, las líneas asociadas a ellas influyen en una relación determinada, en el caso del triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras es una relación entre las longitudes de sus catetos e hipotenusa; que por cierto es una relación que fué utilizado por los babilonios 2000 a.n.e.

En este capítulo, estudiaremos la proporcionalidad que existe entre las líneas asociadas a una circunferencia (cuerdas, tangente, etc) a partir de la cual conoceremos teoremas para relacionar las longitudes de dichas líneas.

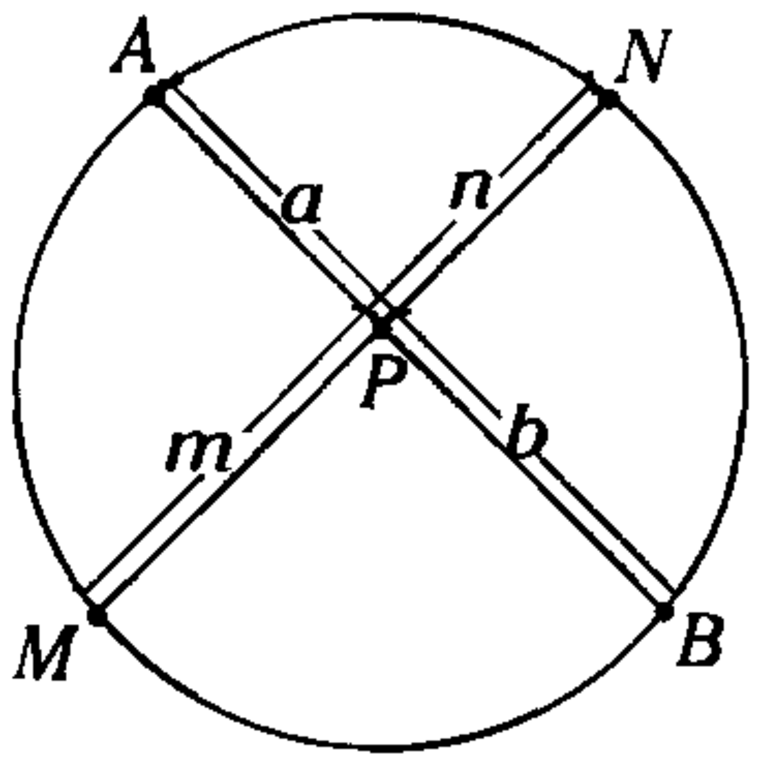
Conceptuaremos la proyección ortogonal sobre una recta y trataremos sobre la aplicación de las proyecciones de segmentos en un triángulo rectángulo, la cual nos permitirá reconocer los principales teoremas que relacionan las longitudes de las líneas de dicho triángulo.

En los triángulos oblicuángulos conoceremos las relaciones entre las longitudes de sus lados y las principales líneas notables asociadas (mediana, bisectriz, altura, etc); para esto nos apoyaremos en teoremas estudiados en el triángulo rectángulo.

En la última parte de este capítulo se analizará las relaciones entre las líneas de un cuadrilátero con ciertas condiciones como el inscrito en una circunferencia; debemos mencionar que en la resolución de los problemas se va tener cuidado en aplicar teoremas o definiciones estudiados en temas o capítulos anteriores.

TEOREMA DE LAS CUERDAS

Al trazar en una circunferencia dos cuerdas secantes en un punto interior, se cumple, que los productos de las longitudes de los segmentos determinados en cada cuerda es constante.



(a)

En la figura 15.1(a), $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ son cuerdas secantes en el punto interior P.

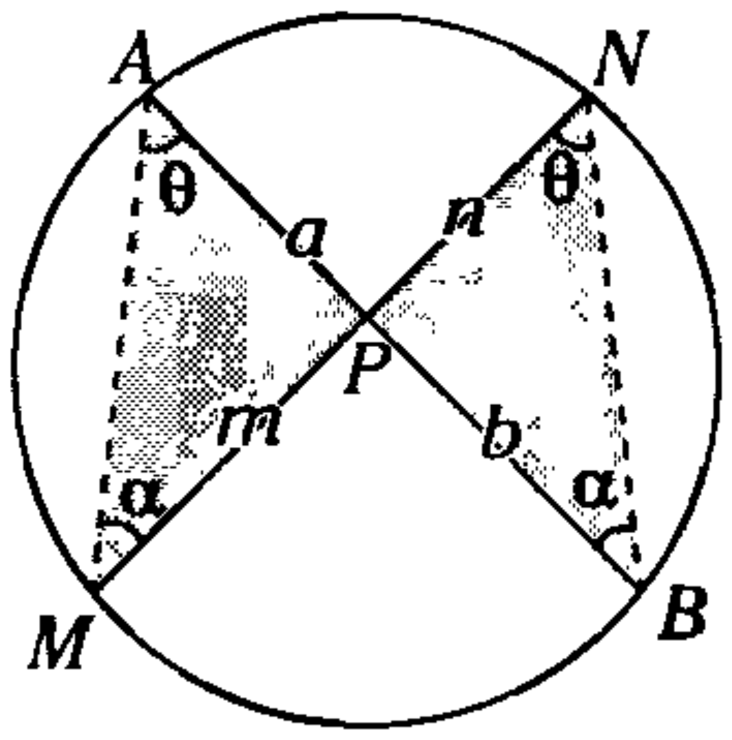
$\overline{AP}$ y $\overline{PB}$: segmentos determinados en la cuerda AB.

$\overline{MP}$ y $\overline{NP}$: segmentos determinados en la cuerda MN.

Se cumple

$$ab = mn$$

Demostración



(b)

Figura 15.1

Se trazan $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$

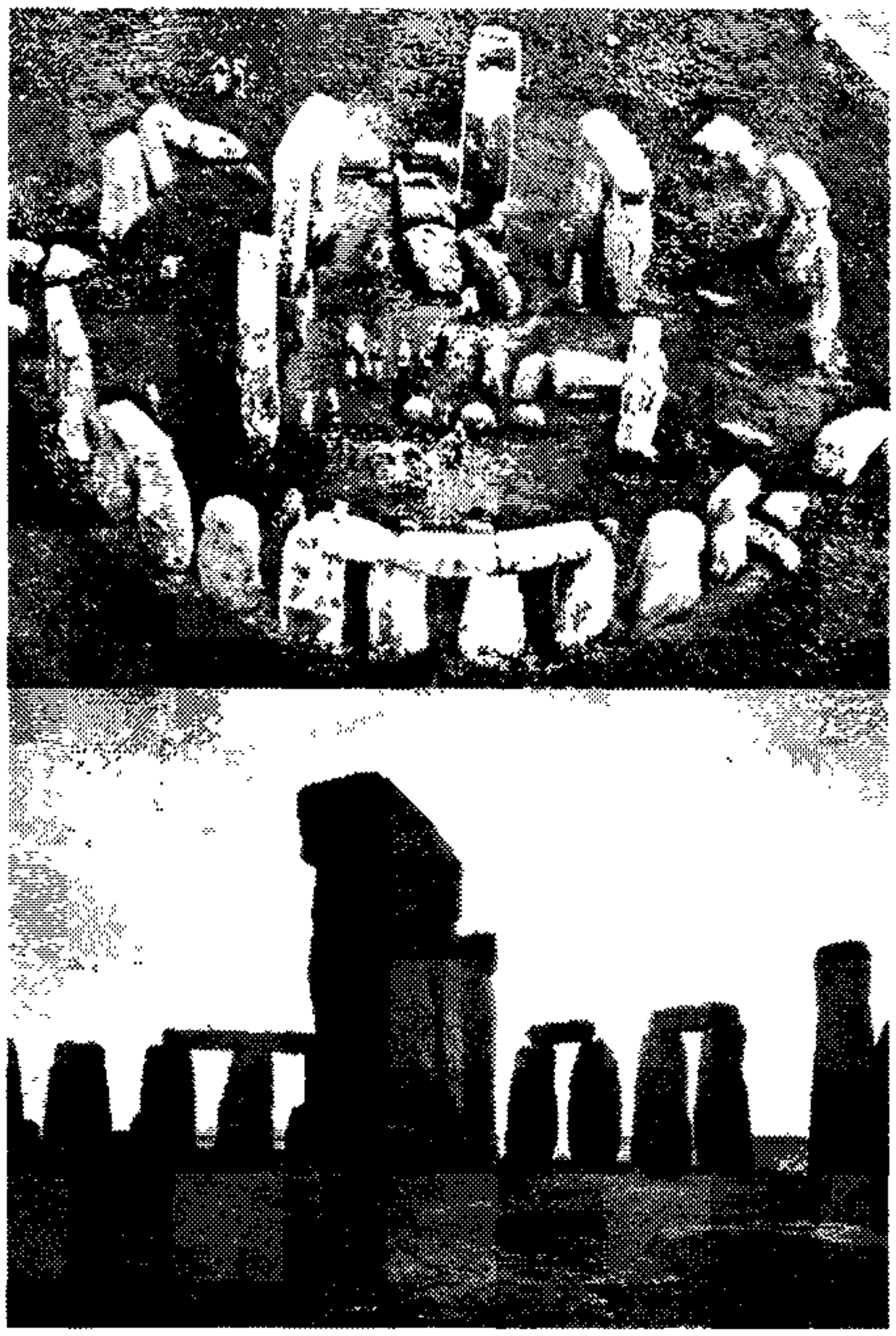
Se observa la figura 15.1(b)

$m\sphericalangle MAP = m\sphericalangle BNP$ y $m\sphericalangle AMP = m\sphericalangle NBP$,

$\triangle APM \sim \triangle NPB$ (A.A.A.)

$$\rightarrow \frac{a}{n} = \frac{m}{b}$$

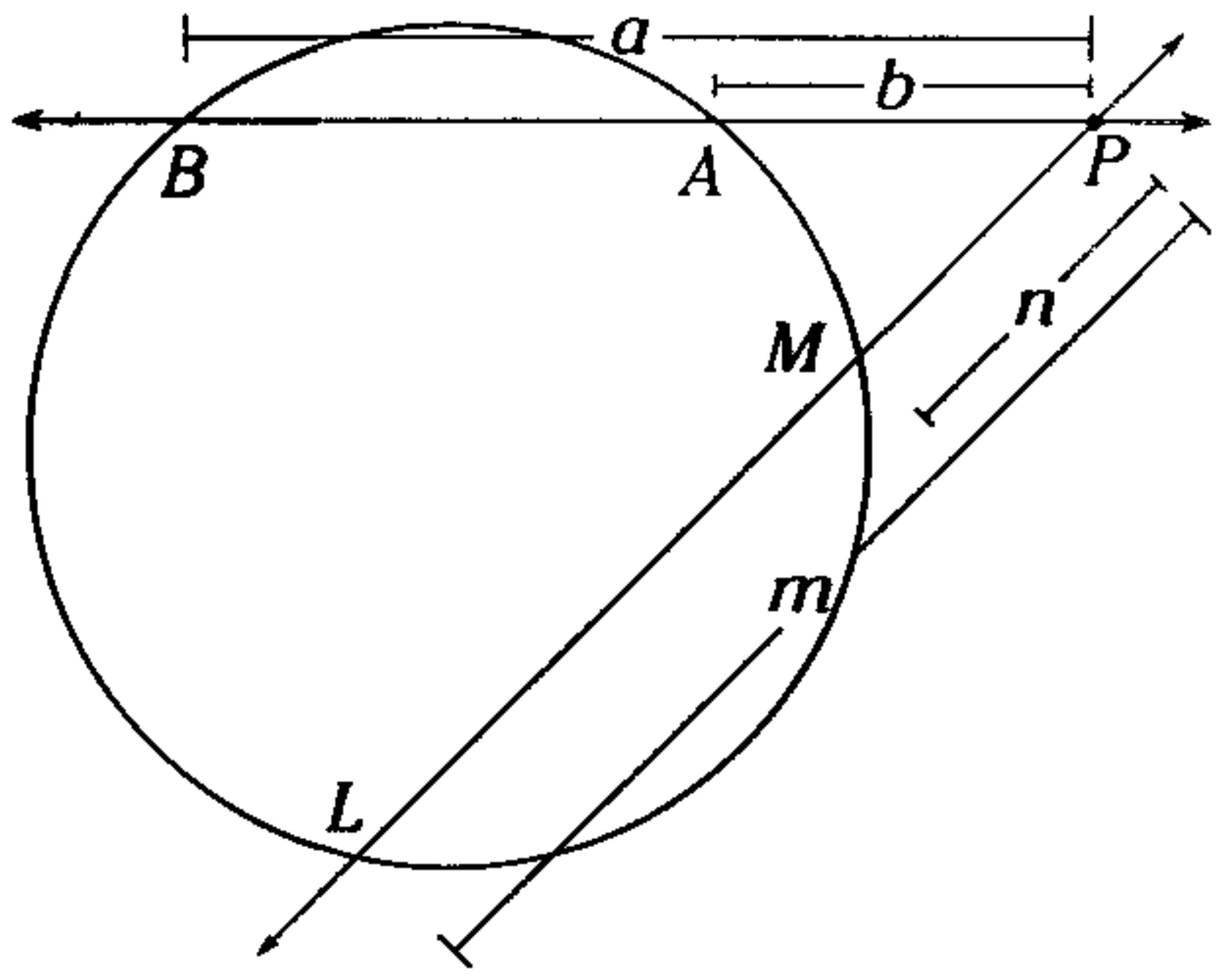
$$\therefore \quad ab = mn$$



Stonehenge (stone=piedra; henge=monumento con borde circular) monumento megalítico más extraordinario y enigmático del mundo construido 1700 a.n.e. Sus piedras y dinteles estaban colocados de manera que se pudiera seguir el curso del Sol en el cielo, también se podían conocer las fases de la luna y los eclipses del Sol. La relación entre Stonehenge (circunferencia) y el Sol considerado como un punto por la distancia de este a la Tierra permitía hacer los cálculos de las predicciones. Esto muestra la importancia de las relaciones métricas en la circunferencia.

TEOREMA DE LAS SECANTES

Al trazar desde un punto exterior a una circunferencia dos rectas secantes, se cumple, que el producto de las longitudes de un segmento secante y su parte externa es constante.



(a)

En la figura 15.2(a)

$\overleftrightarrow{PAB}$ y $\overleftrightarrow{PML}$: Son rectas secantes a la circunferencia trazadas por P.

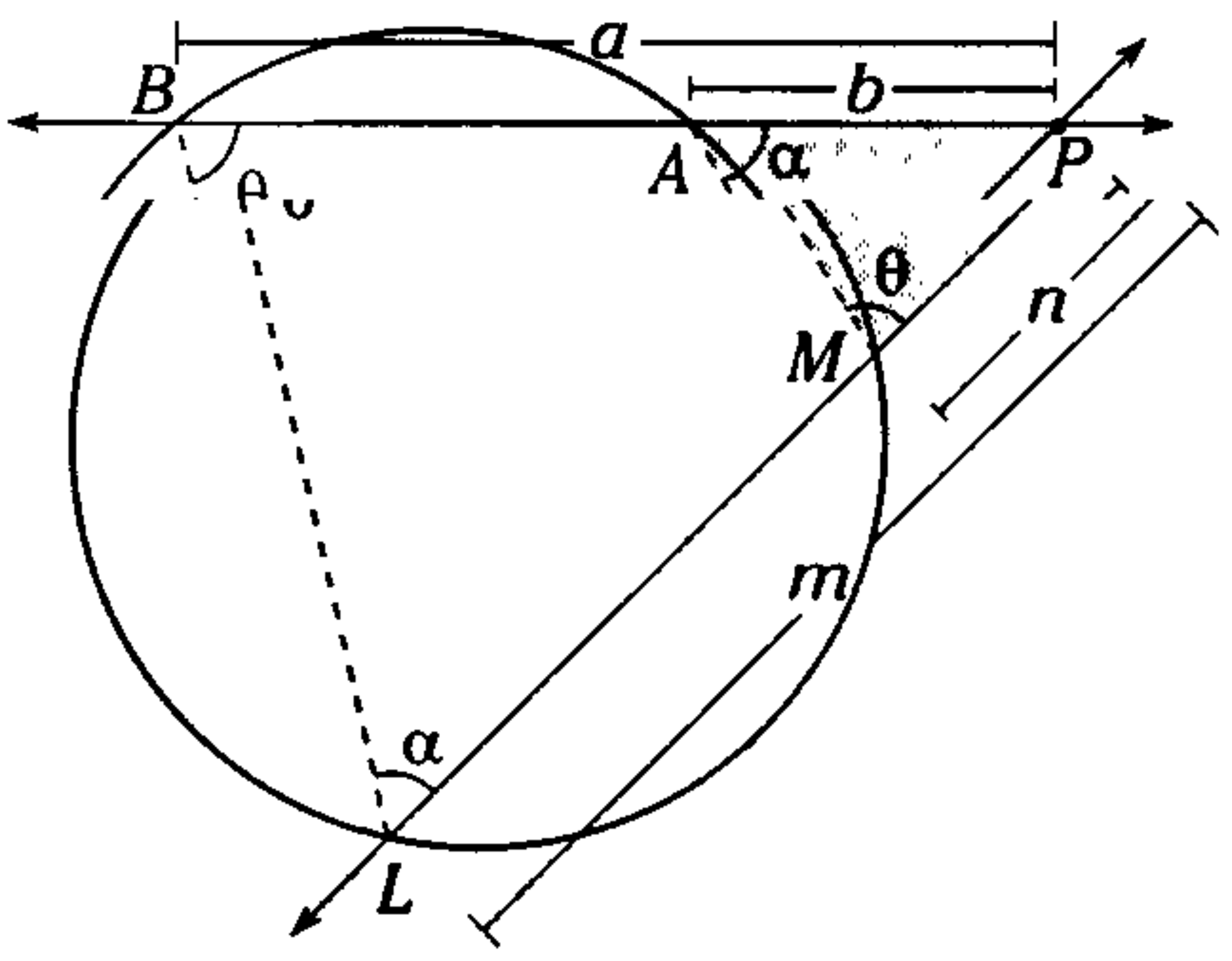
$\overline{PB}$ y $\overline{PL}$: Segmentos secantes determinados.

$\overline{PA}$ y $\overline{PM}$: Parte externa de los segmentos secantes.

Se cumple

$$\boxed{ab = mn}$$

Demostración



(b)

Figura 15.2

Se trazan $\overline{BL}$ y $\overline{AM}$

Como $\square LBAM$: inscrito

$\rightarrow$ m$\measuredangle BLM$ = m$\measuredangle PAM$ y m$\measuredangle LBA$ = m$\measuredangle AMP$

De la figura

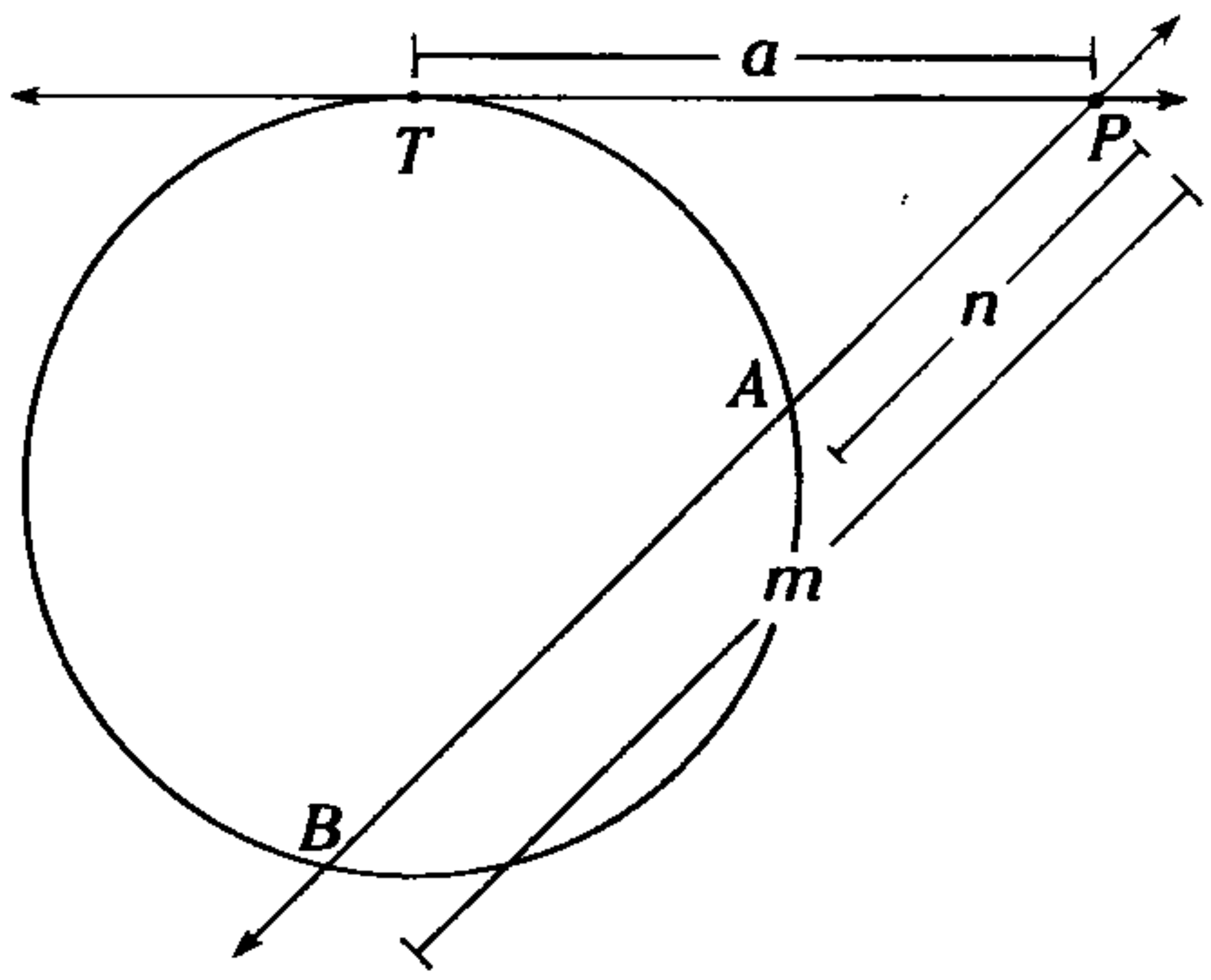
$\triangle PLB \sim \triangle PAM$ (A.A.A.)

$$\rightarrow \frac{a}{n} = \frac{m}{b}$$

$$\therefore \boxed{ab = mn}$$

TEOREMA DE LA TANGENTE

Al trazar desde un punto exterior a una circunferencia una recta tangente y una recta secante, se cumple que el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante y su parte externa.



(a)

En la figura 15.3(a), $\overleftrightarrow{PT}$ es una tangente y $\overleftrightarrow{PAB}$ una recta secante trazadas por P.

$\overline{PT}$: segmento tangente.

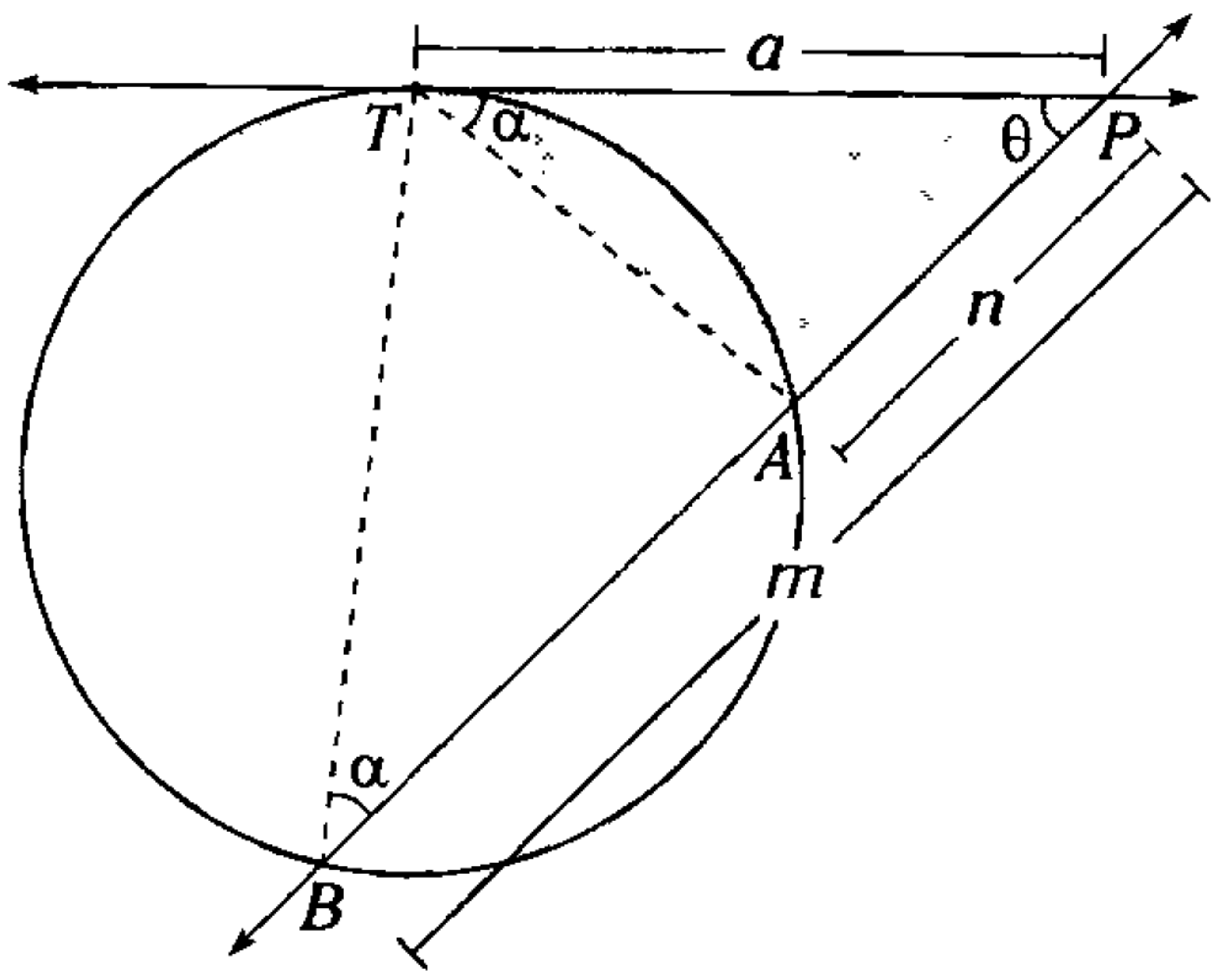
$\overline{PB}$: segmento secante.

$\overline{PA}$: parte externa del segmento secante.

Se cumple

$$\boxed{a^2 = mn}$$

Demostración



(*b*)
Figura 15.3

Se trazan $\overline{AT}$ y $\overline{TB}$

Se sabe m∢PTA = m∢TBA

Se observa

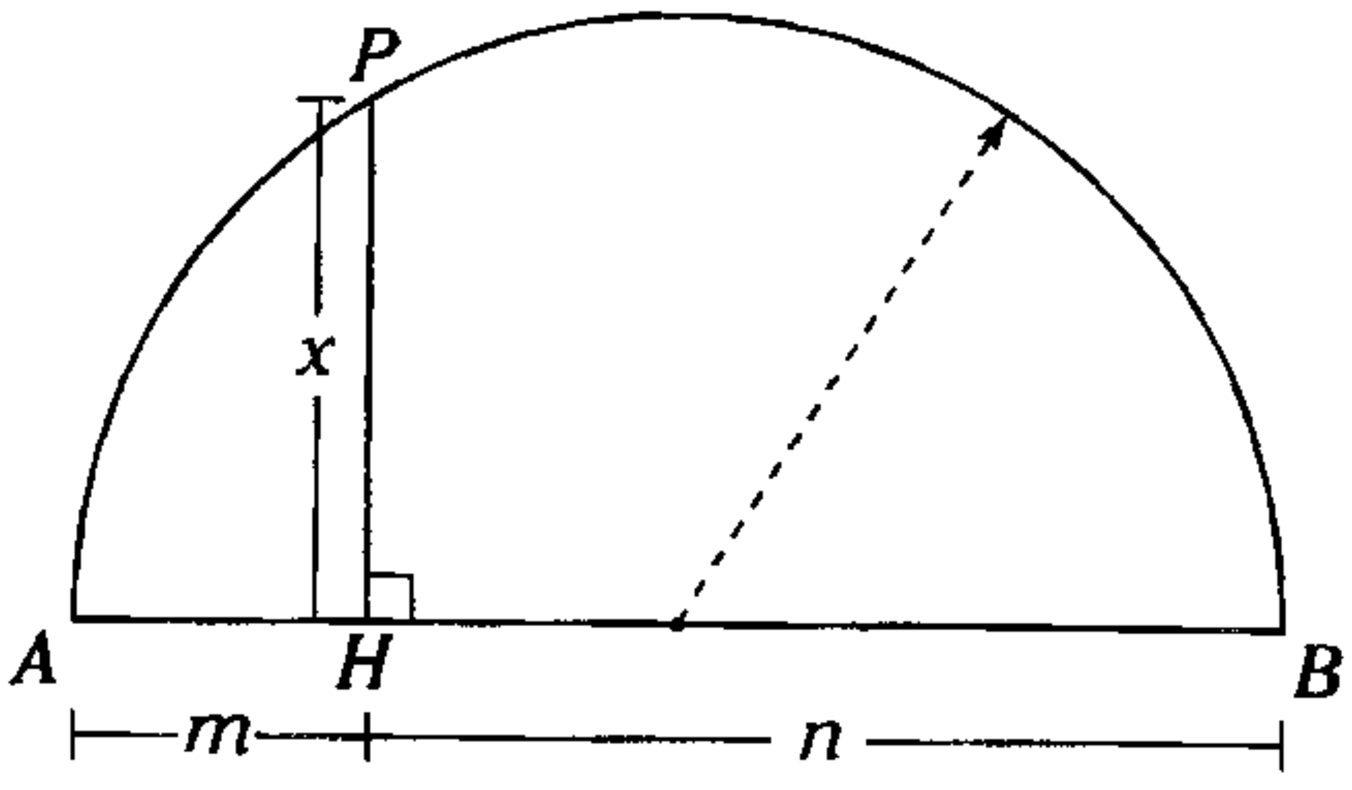
$\triangle PTA \sim \triangle PBT$ (A.A.A.)

$\rightarrow \dfrac{a}{m} = \dfrac{n}{a}$

$\therefore$ $\boxed{a^2 = mn}$

TEOREMAS

1. Si desde un punto de una semicircunferencia se traza un segmento perpendicular a su diámetro, se cumple que el cuadrado de la longitud de dicho segmento es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados en el diámetro.



(*a*)

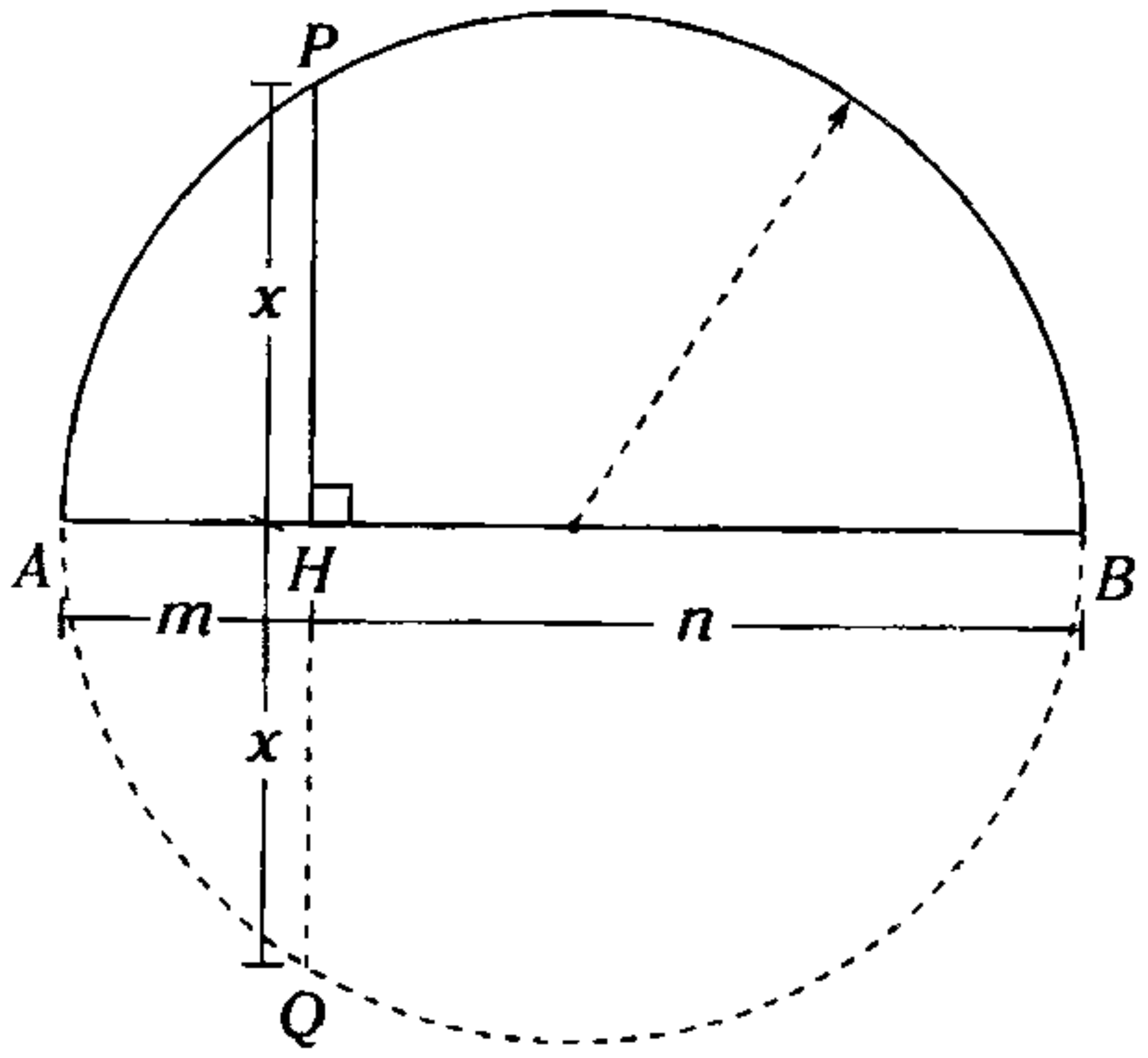
En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro y $\overline{PH} \perp \overline{AB}$.

$\overline{AH}$ y $\overline{HB}$ segmentos determinados por $\overline{PH}$ en el diámetro $\overline{AB}$.

Se cumple

$\boxed{x^2 = mn}$

Demostración



(*b*)

Figura 15.4

Se completa la circunferencia y se prolonga $\overline{PH}$ hasta Q.

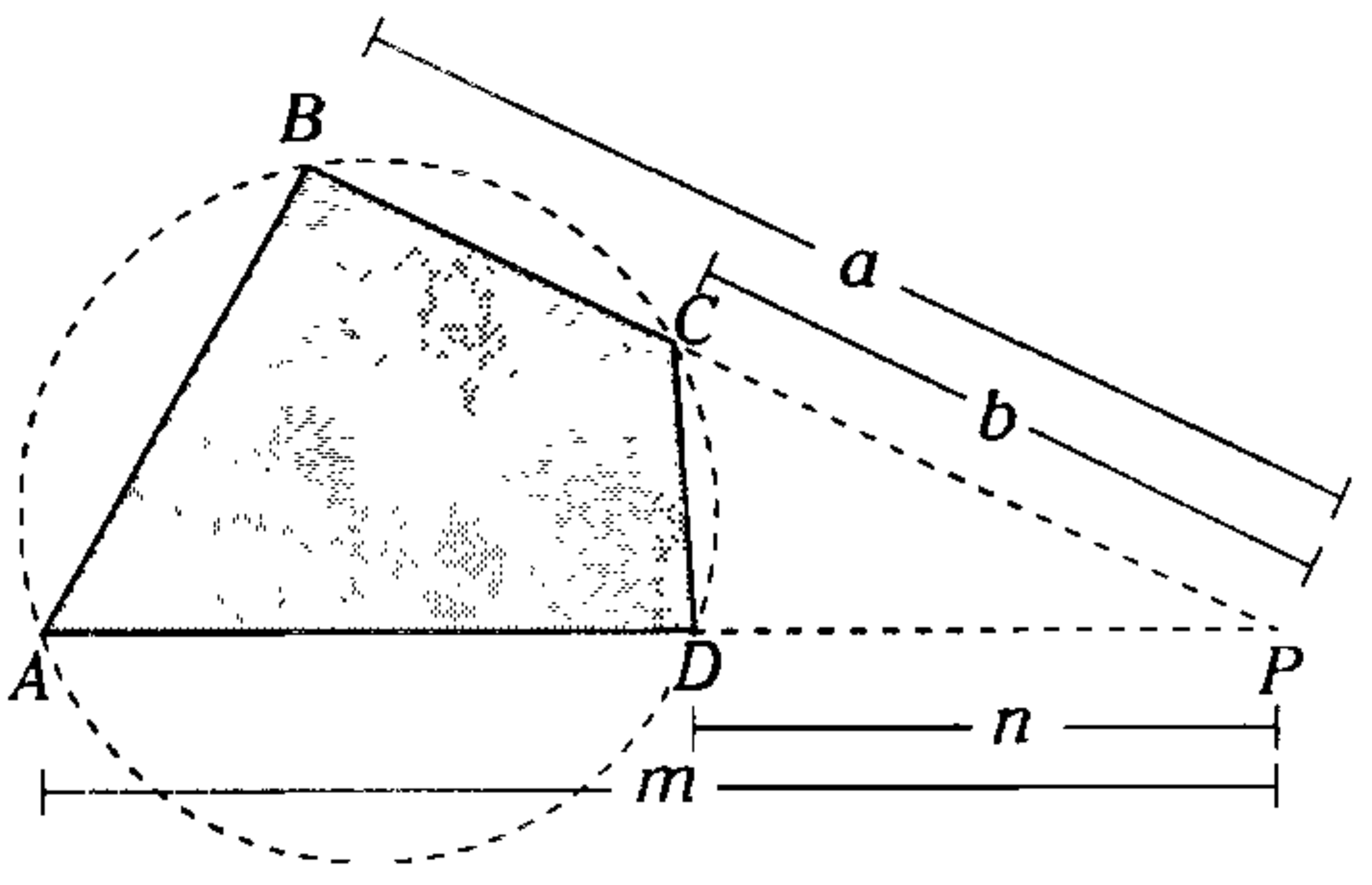
Por simetría en la circunferencia

$PH = HQ = x$.

Teorema de las cuerdas

$\boxed{x^2 = mn}$

2. Al prolongar dos lados opuestos de un cuadrilátero inscrito o inscriptible de modo que se intersequen, se cumple, que el producto de las longitudes de los segmentos determinados por el punto de intersección en dichos lados son iguales.



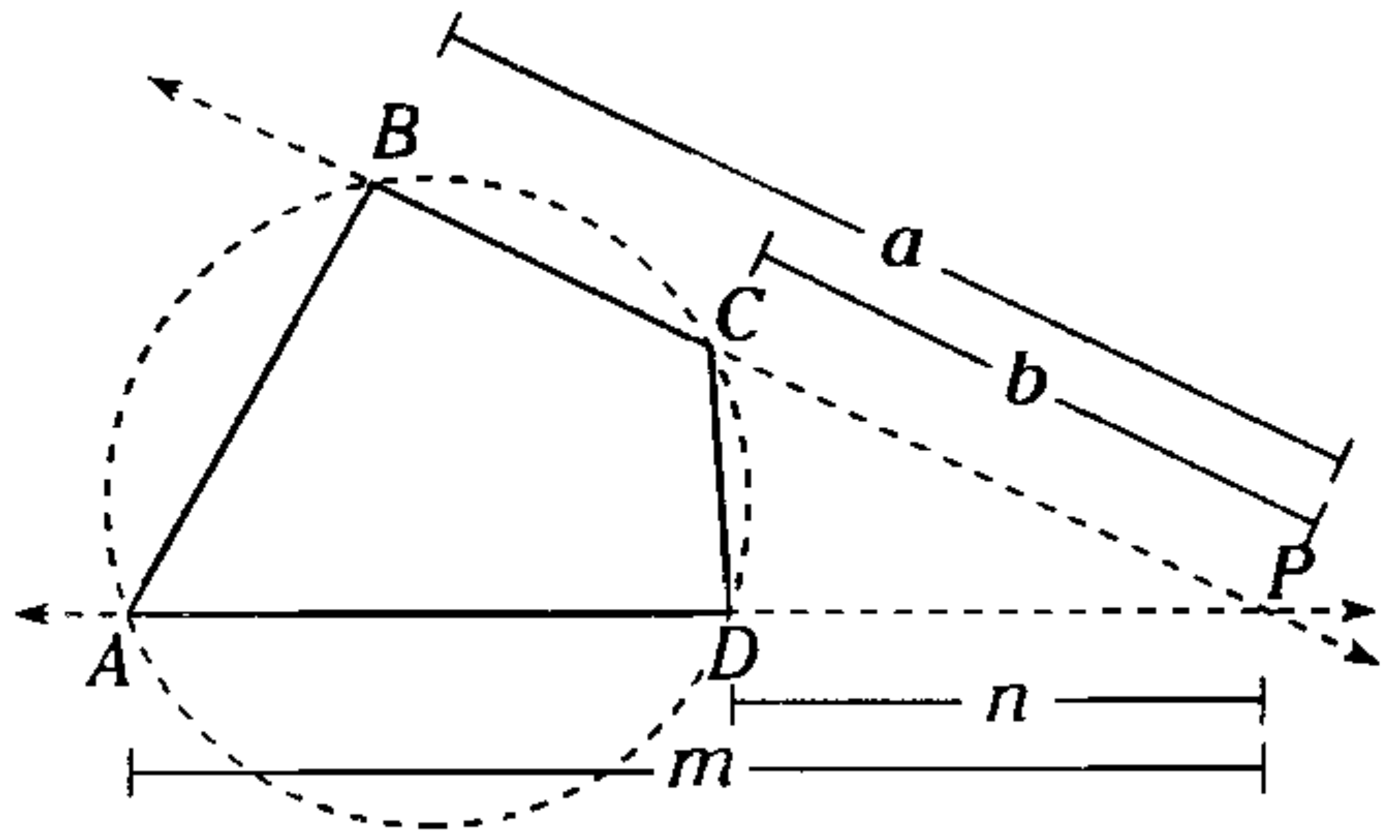
(a)

En la figura, $\square ABCD$: inscrito o inscriptible.
P es el punto de intersección de las prolongaciones de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$.

Se cumple

$$ab = mn$$

Demostración



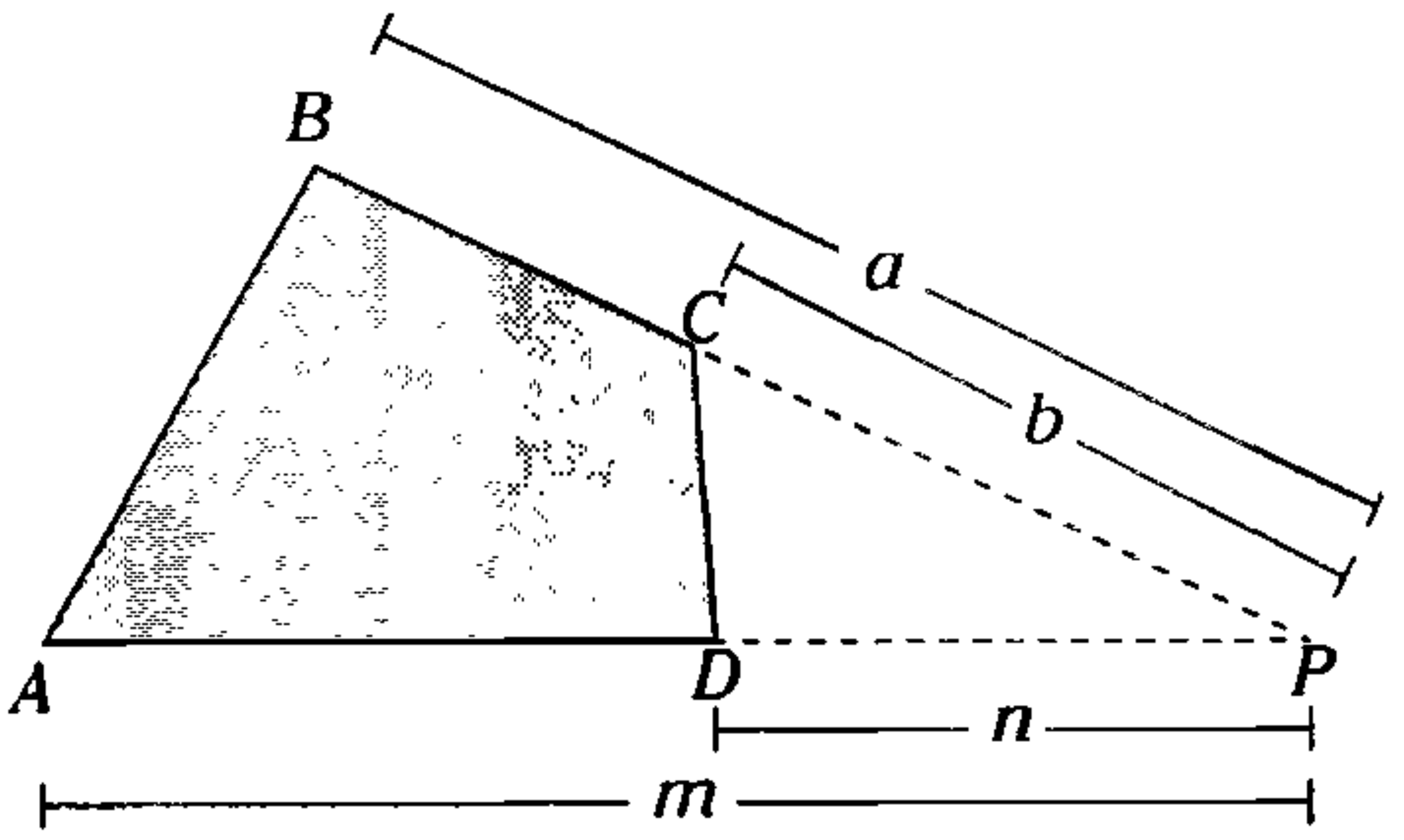
(b)

Figura 15.5

Como el $\square ABCD$ es inscrito o inscriptible, al prolongar dos lados opuestos, PCB y PDA serán secantes a la circunferencia circunscrita a dicho cuadrilátero.
Por teorema de las secantes

$$ab = mn$$

3. Si al prolongar dos lados opuestos de un cuadrilátero convexo hasta que se intersecan, se cumple que el producto de las longitudes de los segmentos determinados por este punto en dichos lados son iguales; entonces, el cuadrilátero será inscriptible.

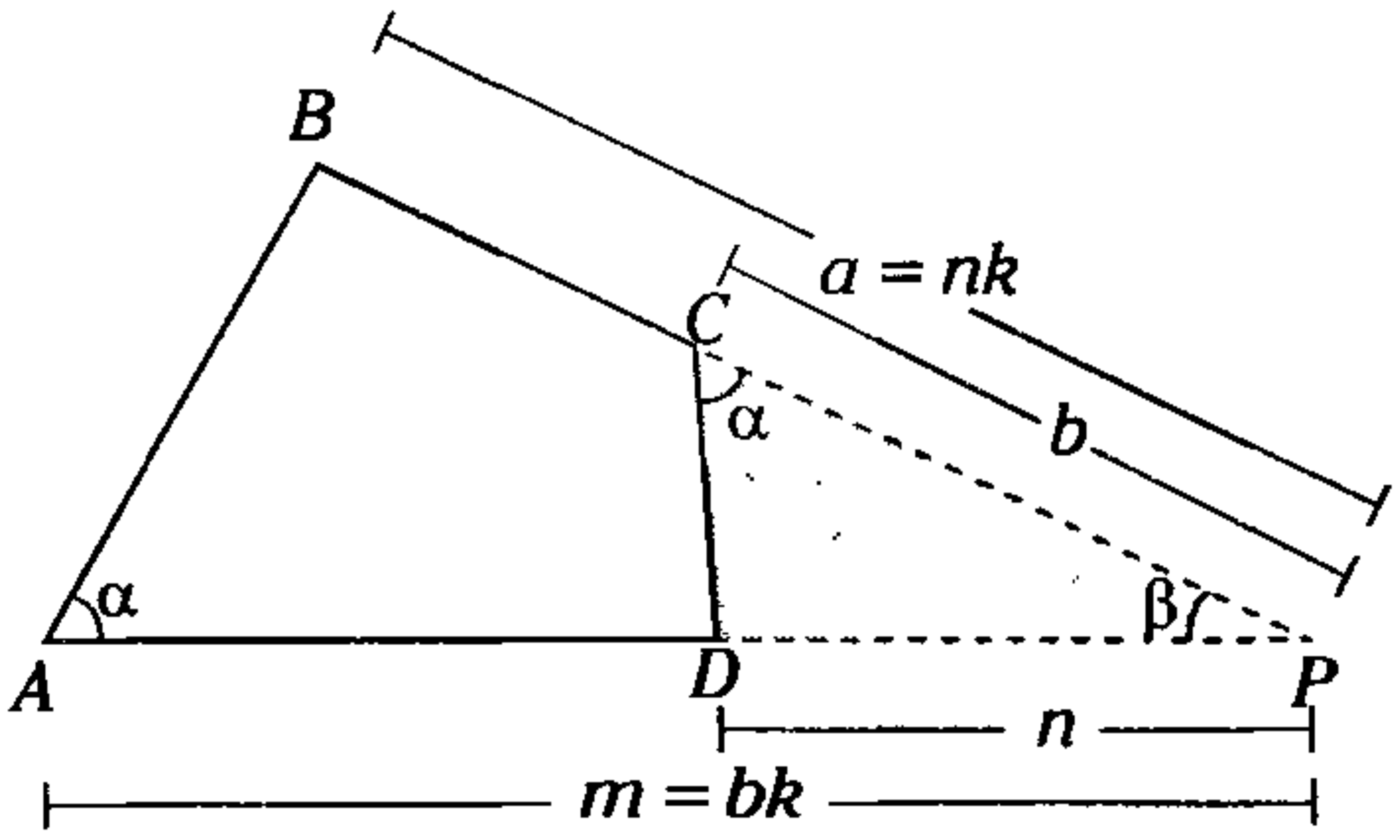


(a)

En la figura 15.6(a) P, es el punto de intersección de dos lados opuestos.
$\overline{PB}$ y $\overline{PC}$: Segmentos determinados por P en el lado BC.
$\overline{PA}$ y $\overline{PD}$: Segmentos determinados por P en el lado AD.
Si $ab = mn$

$$\rightarrow \boxed{\square ABCD\text{: inscriptible}}$$

Demostración



(b)

Figura 15.6

En la figura, los triángulos APB y CPD tienen en su vértice P un ángulo de igual medida. De la condición $ab = mn$, se tiene

$$\frac{a}{m} = \frac{n}{b} \rightarrow a = n.k; \quad m = b.k$$

Por el segundo caso de semejanza

$\triangle APB \sim \triangle CPD$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle BAP$ = m$\sphericalangle DCP = \alpha$

$\therefore$ ⏢$ABCD$: inscriptible

RAYOS ISOGONALES

Son dos rayos coplanares a un ángulo que tienen como origen el vértice del ángulo y que son simétricos respecto a la bisectriz de dicho ángulo; es decir, forman con los lados del ángulo dado ángulos de igual medida.

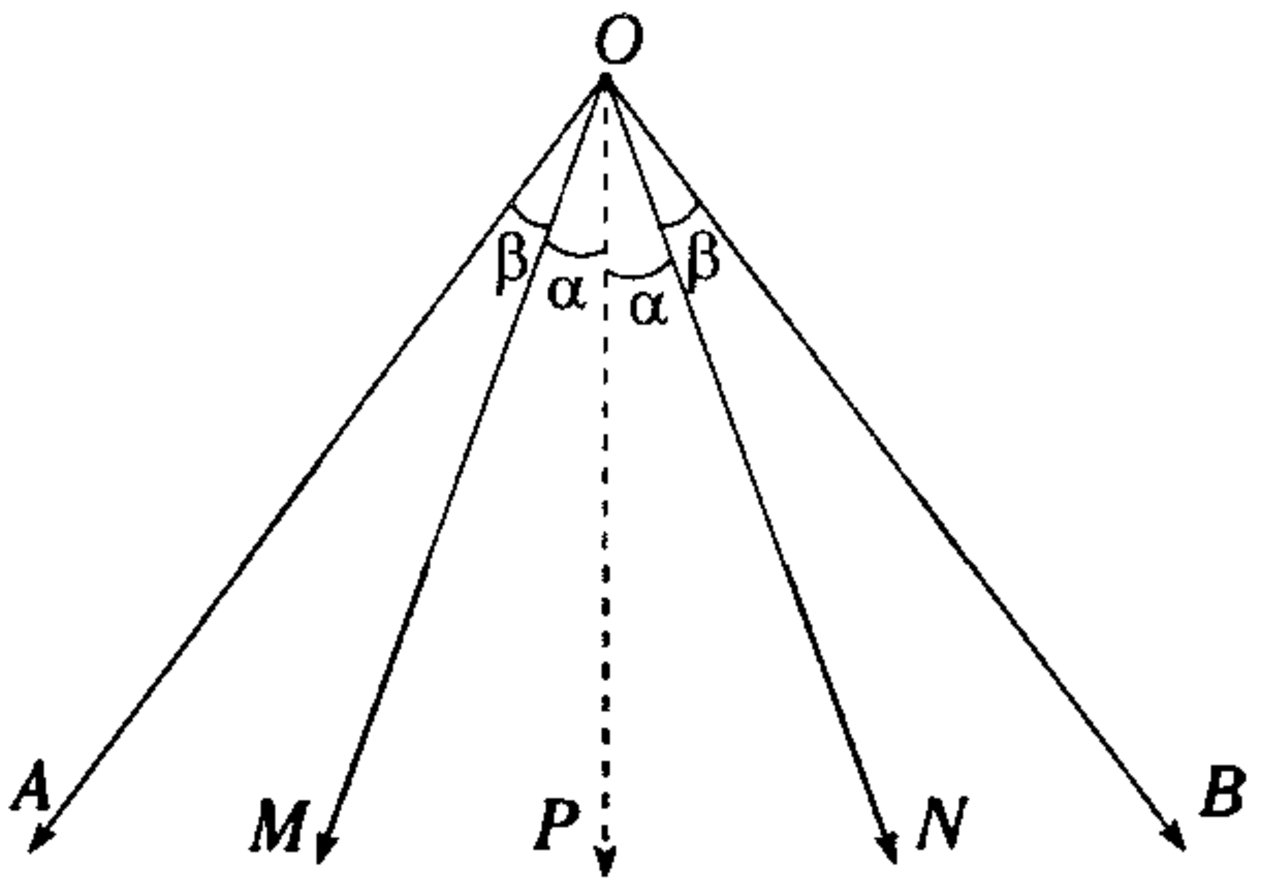


Figura 15.7

De la figura 15.7

$\overrightarrow{OP}$: bisectriz del $\sphericalangle AOB$

$\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$: rayos isogonales respecto del $\sphericalangle AOB$.

Se cumple por definición

$$\boxed{m\sphericalangle AOM = m\sphericalangle BON}$$

La bisectriz del ángulo es considerado una autoisogonal.

Donde además

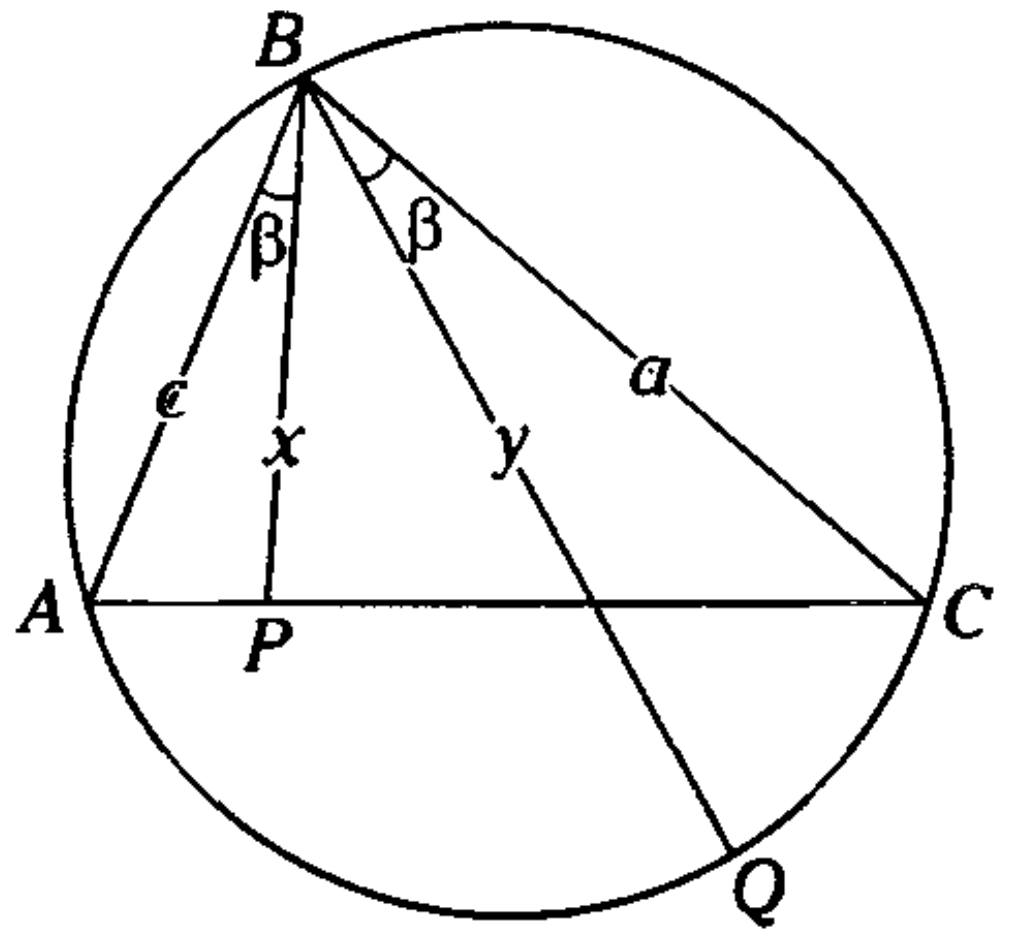
$\overrightarrow{OM}$: conjugado isogonal de $\overrightarrow{ON}$ respecto al $\sphericalangle AOB$.

$\overrightarrow{ON}$: conjugado isogonal de $\overrightarrow{OM}$ respecto al $\sphericalangle AOB$.

> **Nota**
>
> En la figura 15.7 $\overrightarrow{OP}$: conjugado isogonal de $\overrightarrow{OP}$ respecto al $\sphericalangle AOB$. Por ello, toda bisectriz de un ángulo es conjugada isogonal de si misma respecto a dicho ángulo (línea autoisogonal).

TEOREMA DE LAS ISOGONALES

En todo triángulo, el producto de las longitudes de dos lados, es igual al producto de las longitudes de los segmentos isogonales respecto del ángulo determinado por estos lados, de modo que uno de dichos segmentos isogonales se determina con el tercer lado y el otro con la circunferencia circunscrita al triángulo.



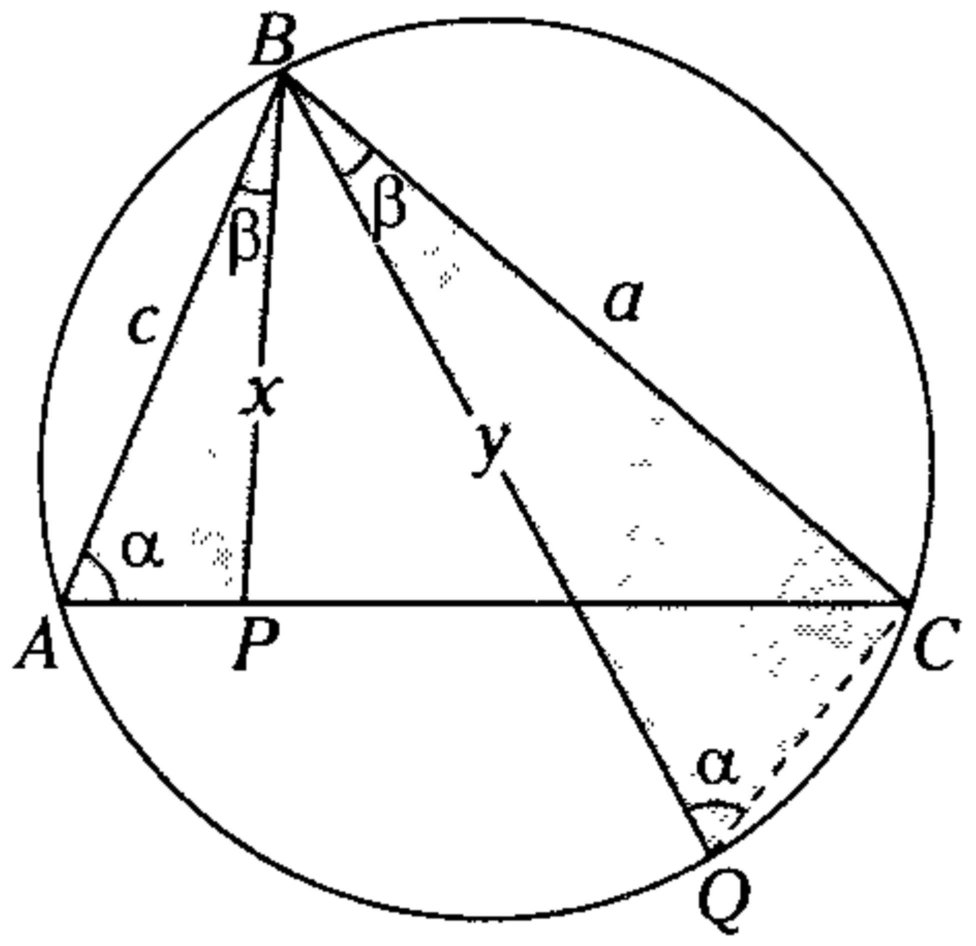
(a)

En la figura 15.8(a), $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ son segmentos isogonales respecto del $\sphericalangle ABC$.

Se cumple

$$c.a = xy$$

Demostración



(*b*)

Figura 15.8

De la figura

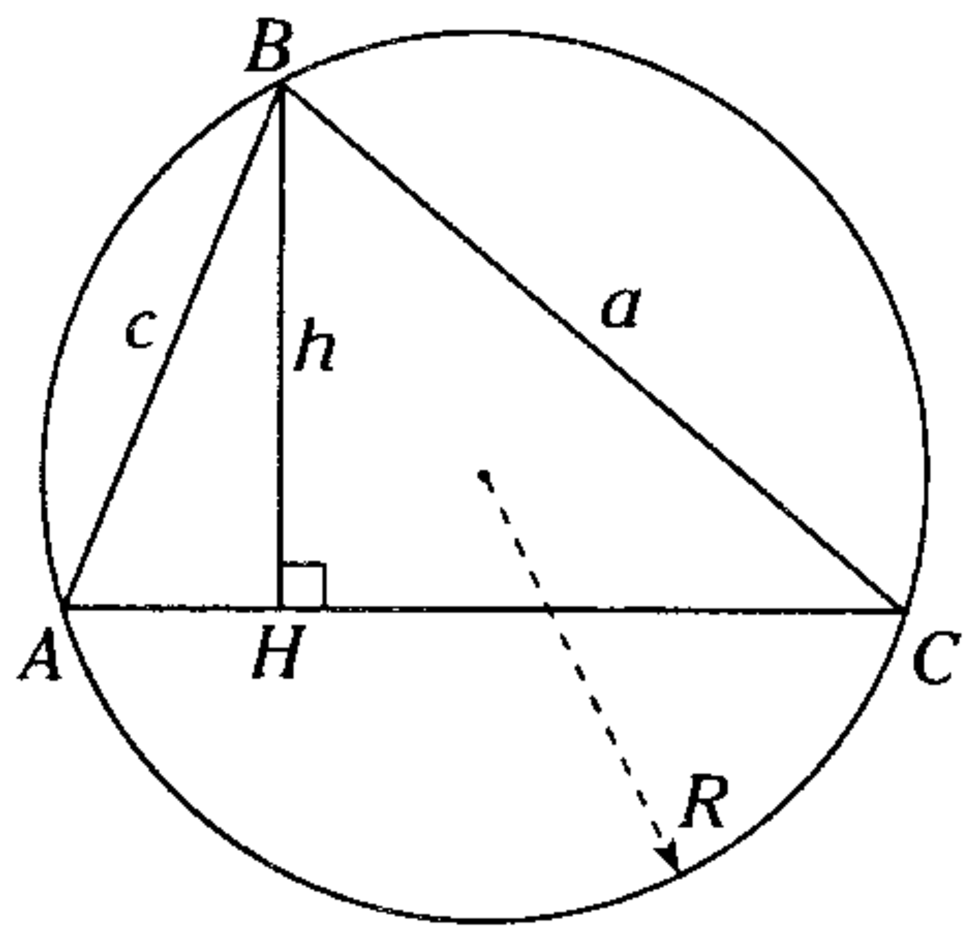
$\triangle ABP \sim \triangle QBC$ (A.A.A.)

$$\rightarrow \frac{c}{y} = \frac{x}{a}$$

$$\therefore \quad c.a = xy$$

TEOREMA DEL PRODUCTO DE DOS LADOS

En todo triángulo, el producto de las longitudes de dos lados es igual al producto de las longitudes de la altura relativa al tercer lado con el diámetro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.



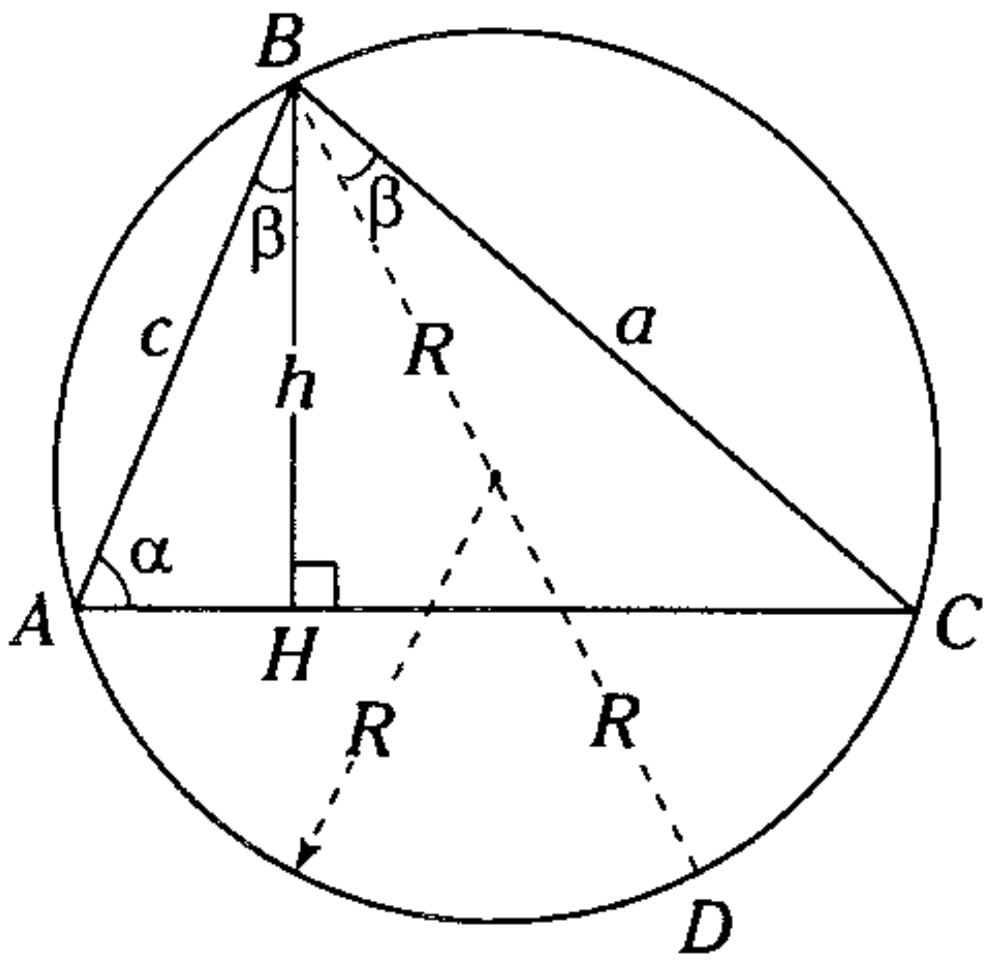
(*a*)

En la figura, R: circunradio del $\triangle ABC$

Se cumple

$$c.a = h(2R)$$

Demostración



(*b*)

Figura 15.9

De la figura 15.9(b)

$\overline{BD}$: diámetro

$\overline{BH}$ y $\overline{BD}$: segmentos isogonales respecto del $\sphericalangle ABC$.

Por el teorema de las isogonales, en el $\triangle ABC$.

$$\therefore \quad c.a = h(2R)$$

L
E
C
T
U
R
A

LOS MOLINOS GIRATORIOS

Es muy probable que el molino giratorio de grano se haya inventado en la cuenca mediterránea alrededor del siglo II a.n.e. ya que en el siglo I de nuestra era, los judíos de Palestina lo conocían.

Los molinos de tracción animal se utilizaron en Roma y en gran parte del Imperio Romano. En Pompeya todavía se pueden ver muchos de estos molinos, compuestos por una pesada muela superior parecida a un reloj de arena que servía de tolva y una muela inferior cónica. A medida que la piedra superior giraba sobre la inferior, iban cayendo los granos entre las dos piedras y quedaban reducidos a polvo. Las piedras superiores de esta clase que hoy día se conservan tienen entre 45 y 20 centímetros de diámetro. Estos molinos llegaron a medir 180 centímetros de altura.

Impulsados por agua o viento

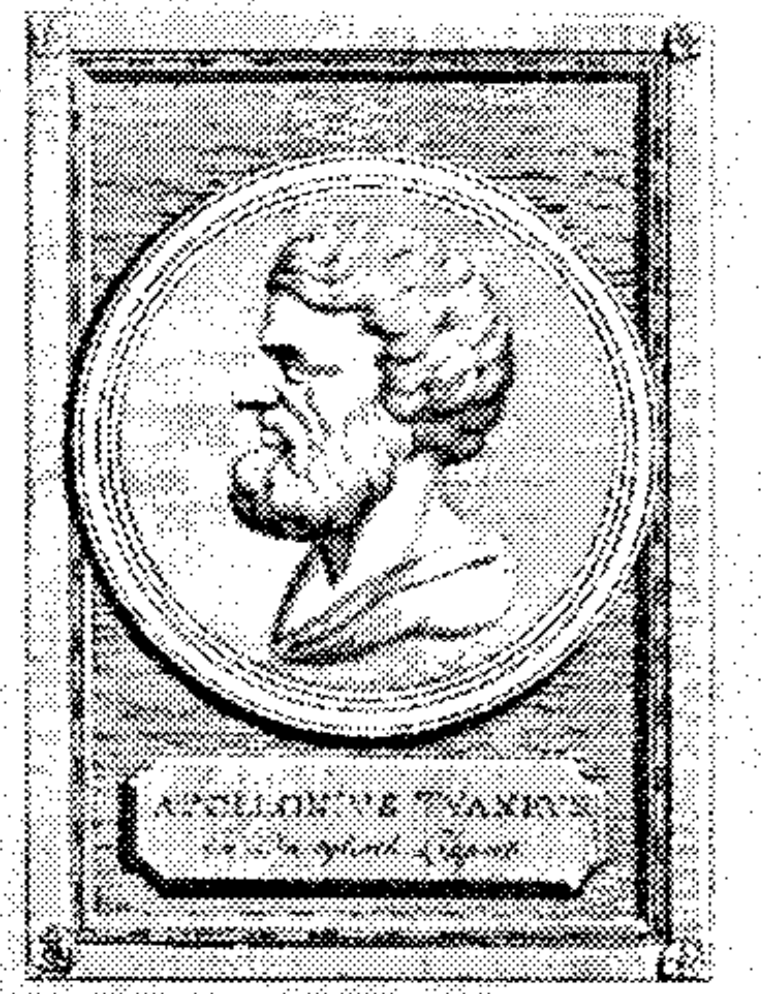
Alrededor del año 27 a.n.e., el ingeniero romano Vitrubio describió un molino de agua de su época. Sujeta a un eje horizontal, la rueda vertical giraba cuando la corriente del agua empujaba sus paletas. Una serie de engranajes trasmitía este movimiento a un eje vertical, que a su vez, hacia funcionar una enorme piedra superior al molino.

¿Había diferencia entre el rendimiento de un molino de agua y de otros tipos de molino? Se calcula que los molinos de mano podían moler menos de 10 kg de grano por hora, y los de tracción animal más eficaces, hasta 50 kg. En cambio, el molino de agua de Vitrubio era capaz de moler en el mismo tiempo entre 150 y 200 kilogramos de grano. Aunque con innumerables variantes y mejoras, los buenos constructores de molinos continuaron empleando por siglos el principio básico expuesto por Vitrubio.

El agua no fue la única fuente de energía natural utilizada para mover las piedras de molino de viento. Estos molinos aparecieron en Europa probablemente en el siglo XII de nuestra era y fueron de uso generalizado en Alemania, Bélgica, Holanda y otros lugares. Siguieron empleándose hasta que el vapor y otras fuentes de energía dejaron atrás a todas las demás.

BIOGRAFÍA

APOLONIO DE PERGA (262 - 190 a.n.e.)



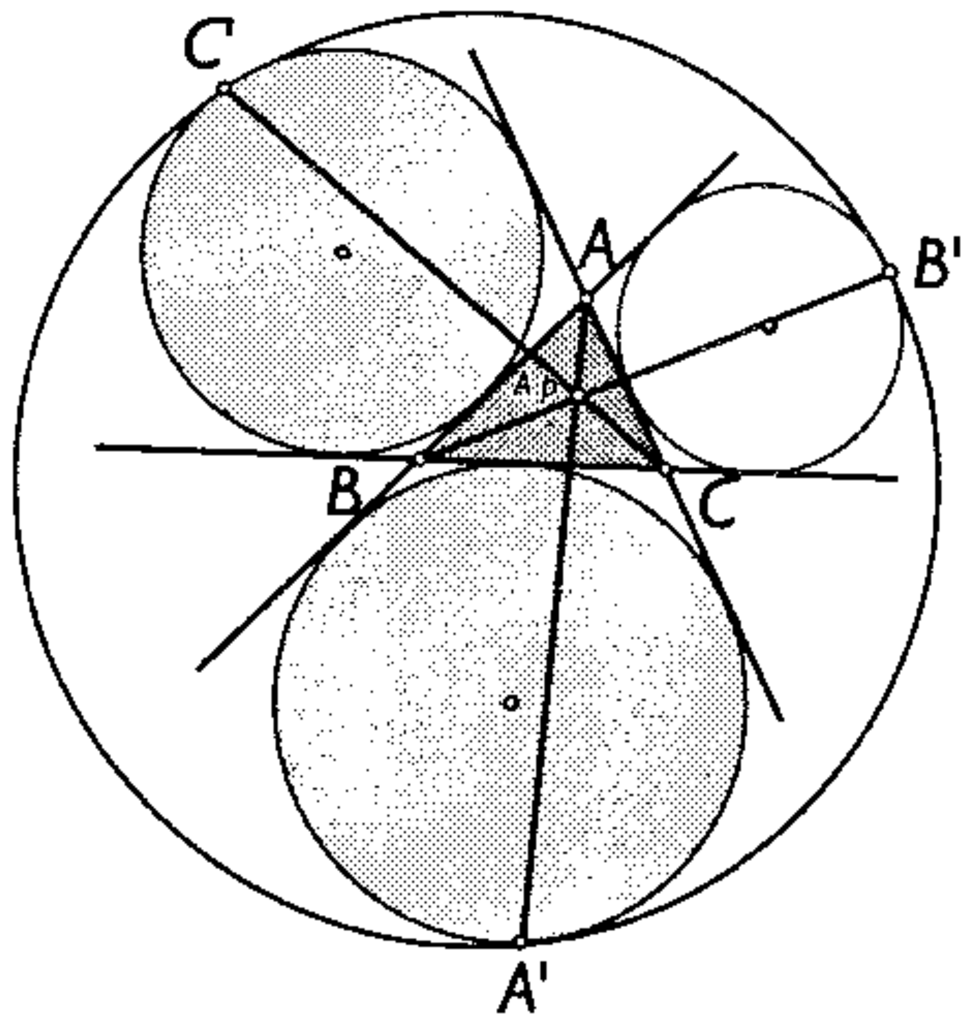
Entre los estudiosos de la historia de la matemática los cuatro personajes más importantes de la antigüedad clásica son: Euclides, Arquímedes, Apolonio y Pitágoras.

La mayor parte de las obras de estos personajes se ha preservado gracias al aporte de traducción de la cultura árabe. Apolonio nació en Perga (hoy Murtiria en Turquía), y si bien no se sabe mucho de su vida, es probable que estudió y enseñó en Alejandría. Respecto a sus obras, se han perdido muchas: en el que se enseñaban métodos rápidos de cálculo y se daba una aproximación del número π; secciones en una razón dada, etc.

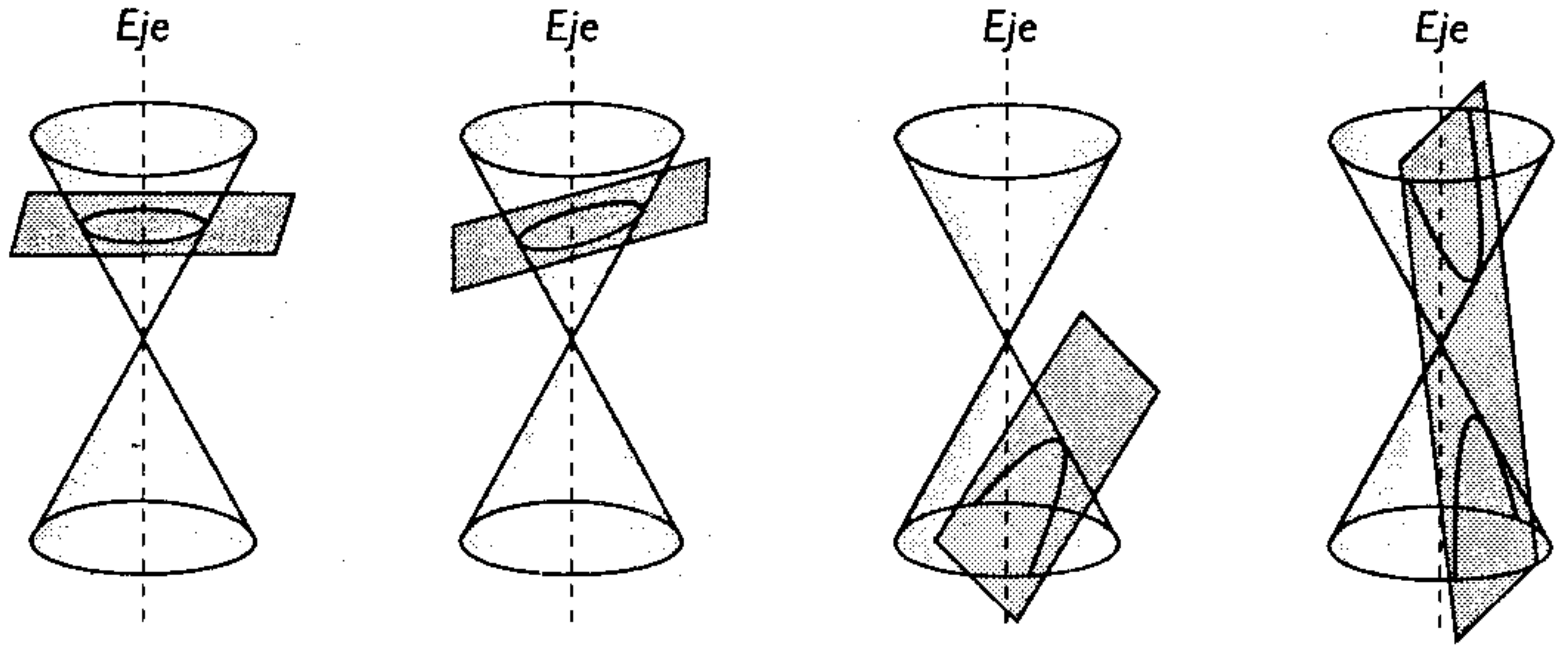
Solo dos obras de Apolonio han llegado hasta nuestros días, *Secciones en una razón dada* (no se conserva el original sino una traducción al árabe) y *Las cónicas* (solo se conserva el original de la mitad de la obra, el resto es una traducción al árabe).

Si entre los matemáticos griegos Euclides representa el maestro sistematizador y Arquímedes el genio investigador por antonomasia, el tercer talento del helenismo, Apolonio de Perga, personifica el virtuosismo geométrico.

Apolonio polarizó su actividad investigadora en una dirección casi monotemática con una sagacidad tan magistral que sus investigaciones sobre cónicas, donde aparecen sus descubrimientos sobre ejes centros, diámetros asíntotas, focos, etc. le convierten en el primer especialista que registra la historia de la geometría y dan justificación al apelativo de "gran geometra".



Centro de Apolonio

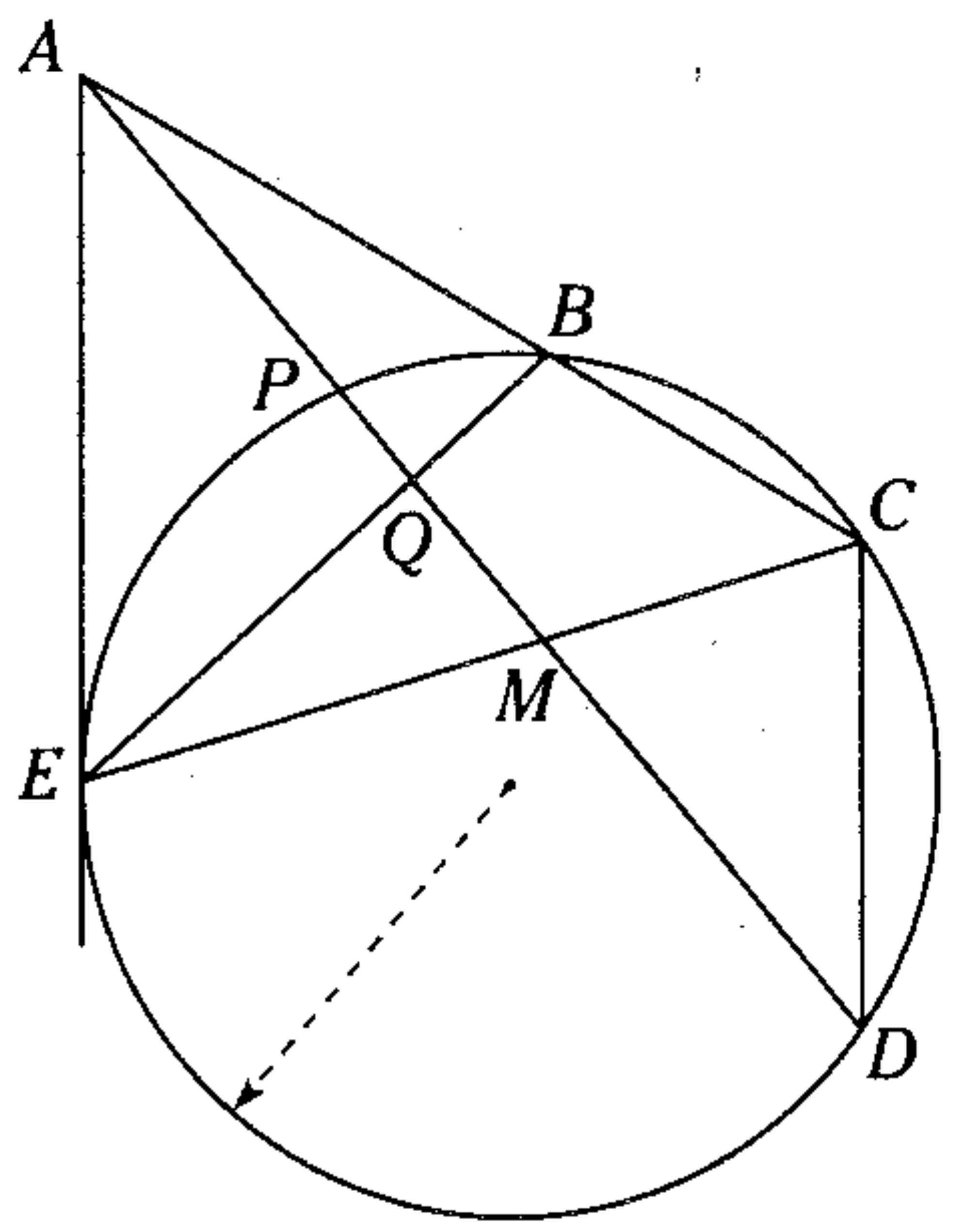


Círculo *Elipse* *Parábola* *Hipérbola*

FUENTE: Centro virtual de divulgación de las matemáticas. http://www.divulgamat.net/weborriak/historia

Problema 1

Según la figura, $\overline{CD}//\overline{AE}$ y $CD = MD$. Si E es punto de tangencia; $AP = 3$, $PQ = 1$ y $AE = 6$, calcule $(BQ)(QE)$.



A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

Resolución

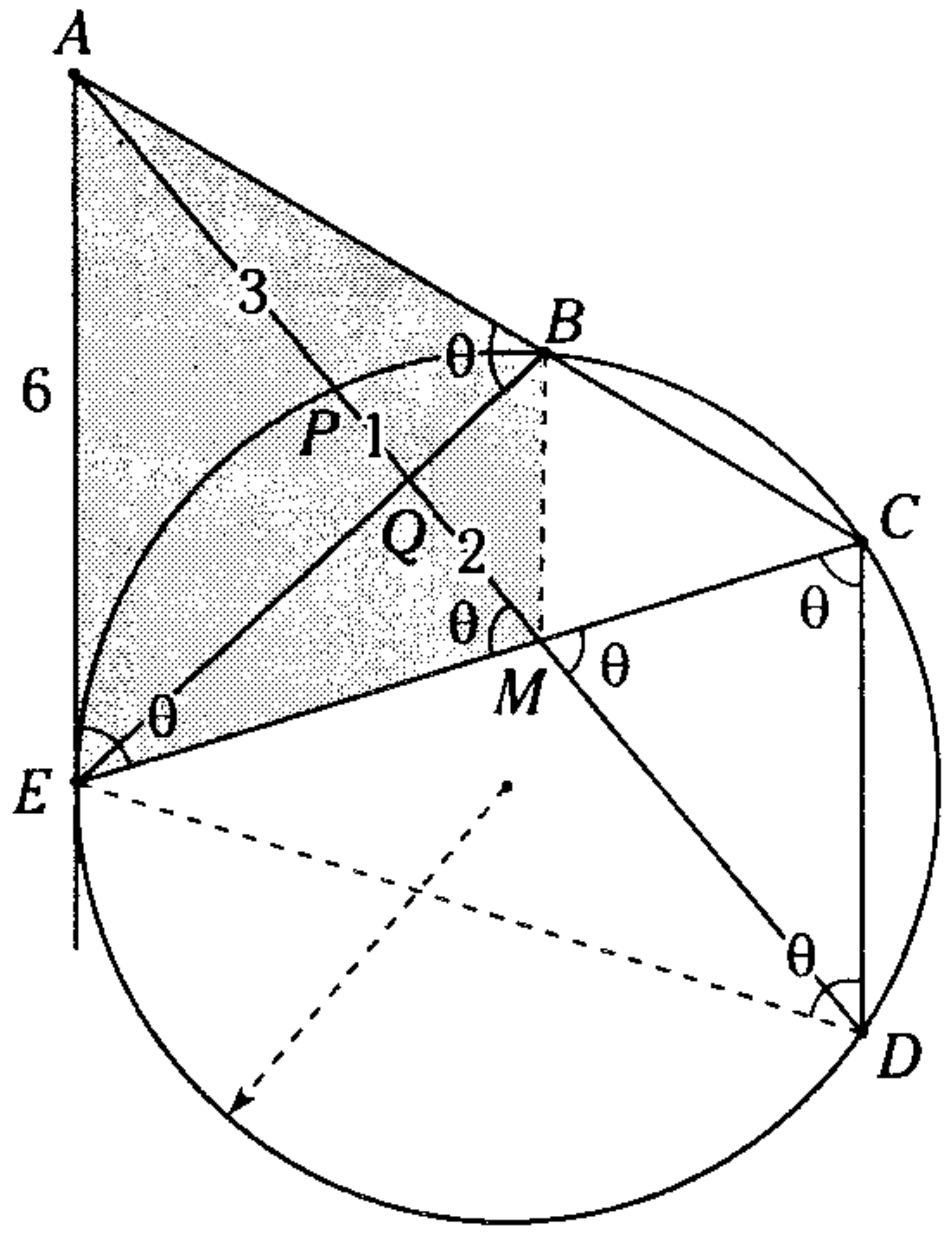


Figura 15.10

Piden $(BQ)(QE)$

Como del dato, $CD = MD$

$\rightarrow$ $m\measuredangle MCD = m\measuredangle CMD = \theta$

$\rightarrow$ $AE = AM = 6$ y $QM = 2$

Como

$\overline{CD}//\overline{AE} \rightarrow EC = ED$

Se observa ⏢$EBCD$ es inscrito: $m\measuredangle ABE = m\measuredangle CI$

De la figura ⏢$ABME$ es inscriptible

Al aplicarse el teorema de las cuerdas

$(BQ)(QE) = (4)(2)$

$\therefore$ $(BQ).(QE) = 8$

CLAV

Problema 2

En un triángulo ABC, se traza la mediar luego en la prolongación de $\overline{CB}$ se ubica el P, tal que $m\measuredangle APC = m\measuredangle PLA$. Si los ángulo y BLA son suplementarios; $AC = 2\sqrt{2}$ y AP determine PC.

A) $\sqrt{5} + 2$ B) $\sqrt{5} - 1$ C) $\sqrt{5} + 1$
D) $2\sqrt{5} + 1$ E) $\sqrt{5} + 3$

Resolución

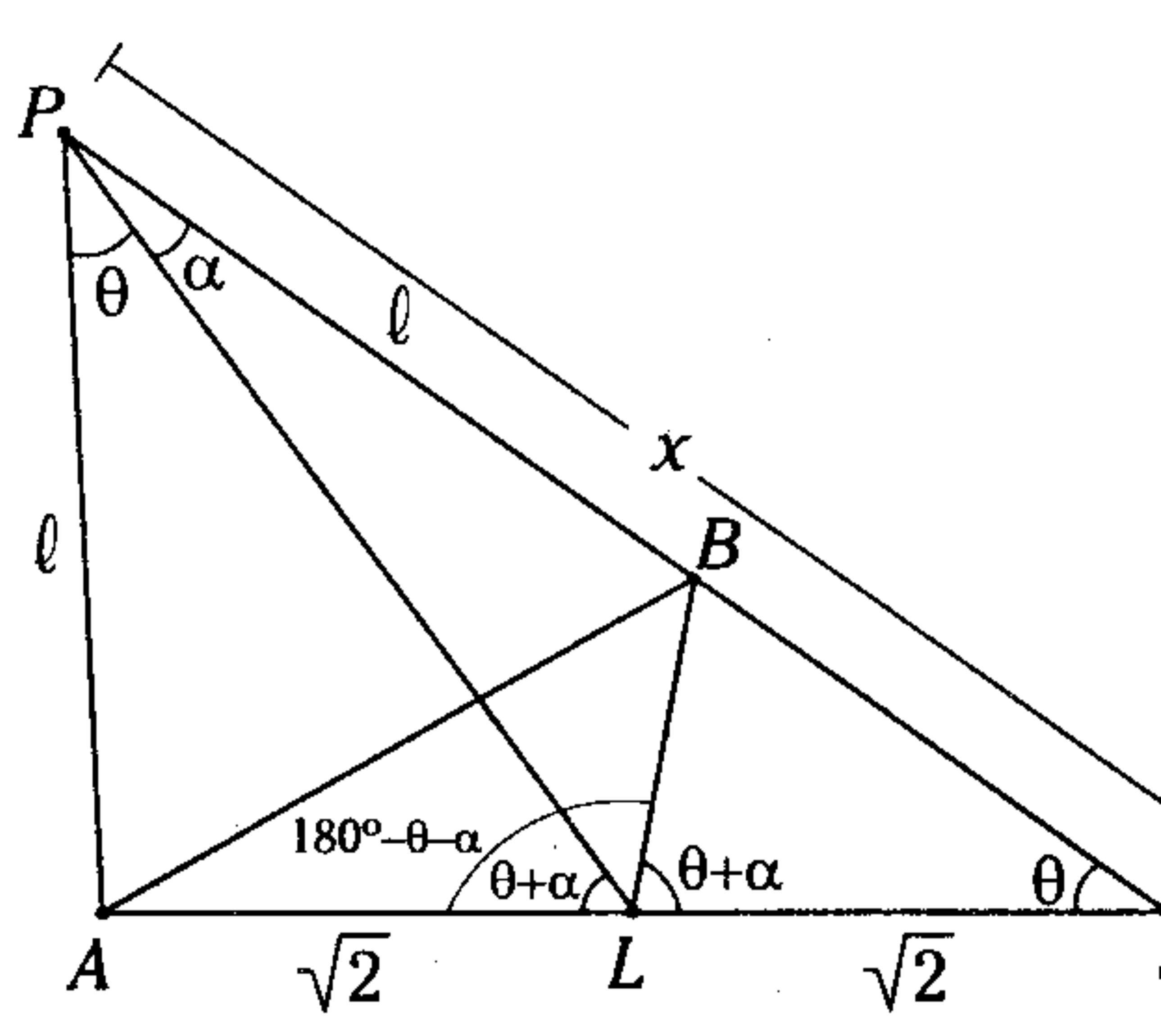


Figura 15.11

Piden $PC = x$

Sea $m\sphericalangle APL = m\sphericalangle PCA = \theta$

Dato

$m\sphericalangle APC = m\sphericalangle PLA = m\sphericalangle BLC = \theta + \alpha$,

Por propiedad de la semejanza en $\triangle APC$.

$$\ell^2 = 2\sqrt{2}\,(\sqrt{2})$$

$$\ell = 2$$

Como $APBL$: ⏢ Inscriptible

Se aplica el teorema de las secantes

$$x(x-2) = (2\sqrt{2})(\sqrt{2})$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

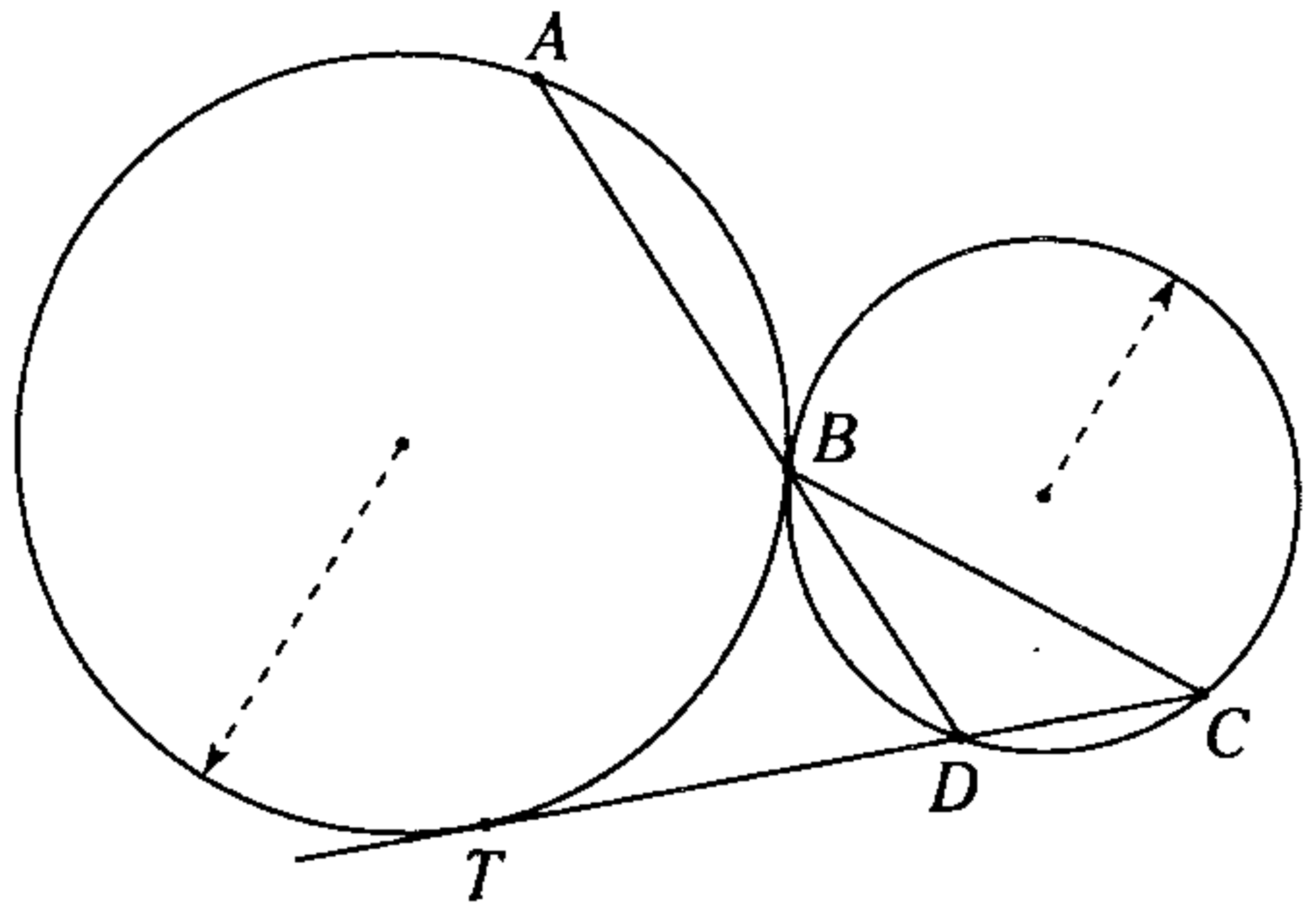
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-4)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{5} + 1$$

CLAVE C

Problema 3

De la figura, T y B son puntos de tangencia. Si $BD = 6$, $BC = 8$ y $DC = 3$, halle AB.



A) 7 B) 7,5 C) 8
D) 8,5 E) 9

Resolución

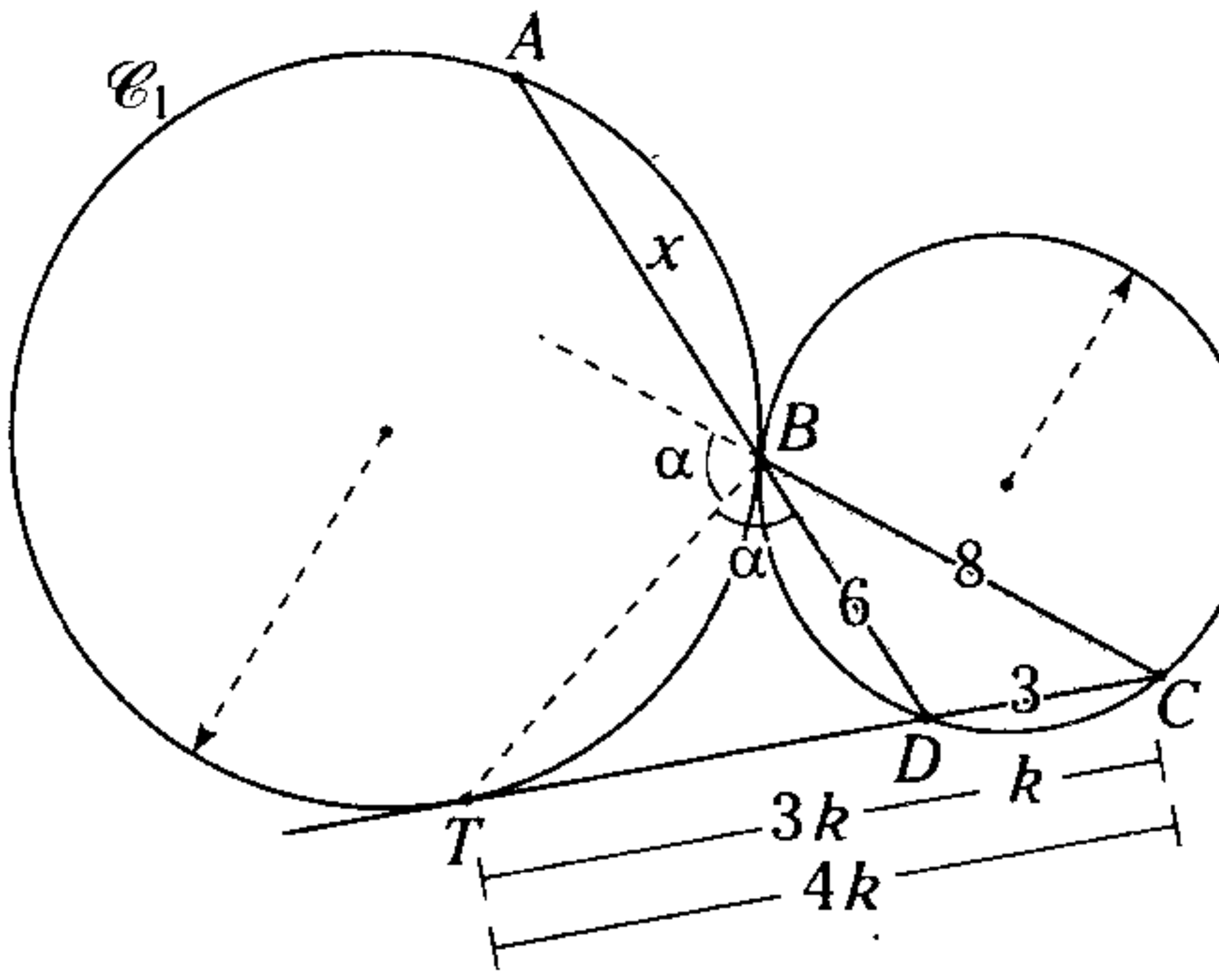


Figura 15.12

Piden $AB = x$

Por el teorema de la tangente en $\mathscr{C}_1$.

$$TD^2 = (x+6)\,.\,6 \qquad \text{(I)}$$

$\triangle BCD$: $\overline{BT}$ es bisectriz exterior

Por el teorema de la bisectriz exterior

$$\frac{TD}{TC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad TD = 3k, \quad TC = 4k$$

De la figura15.12 $k = 3 \rightarrow TD = 3(3) = 9$

En (I)

$$9^2 = (x+6)\,.\,6$$

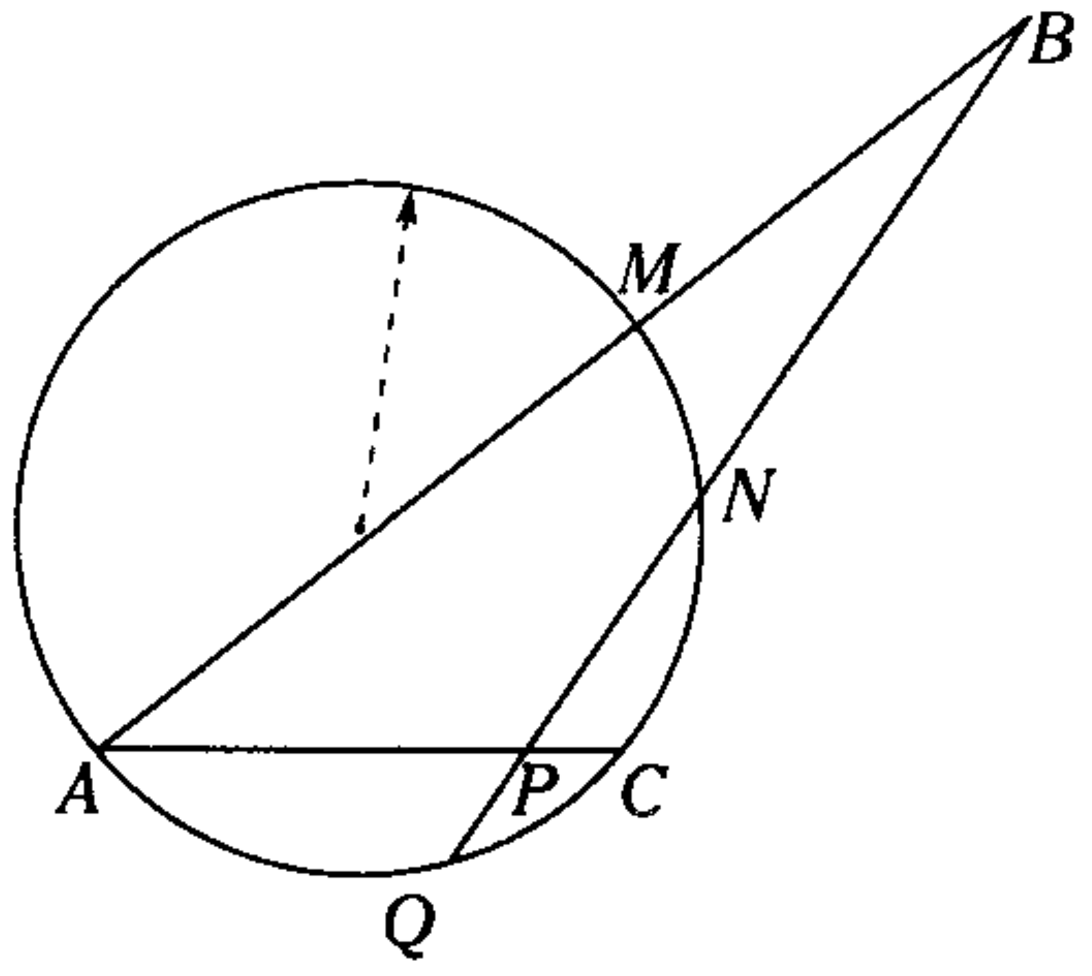
$$\therefore \quad x = 7{,}5$$

CLAVE B

Problema 4

Según la figura, $m\overset{\frown}{MN} = m\overset{\frown}{NC}$, $QP = 2(PC)$, $AP = 4$ y $PQ + BN = 6$. Indique BM.

A) 5
B) 7
C) 4
D) 6
E) 8



Resolución

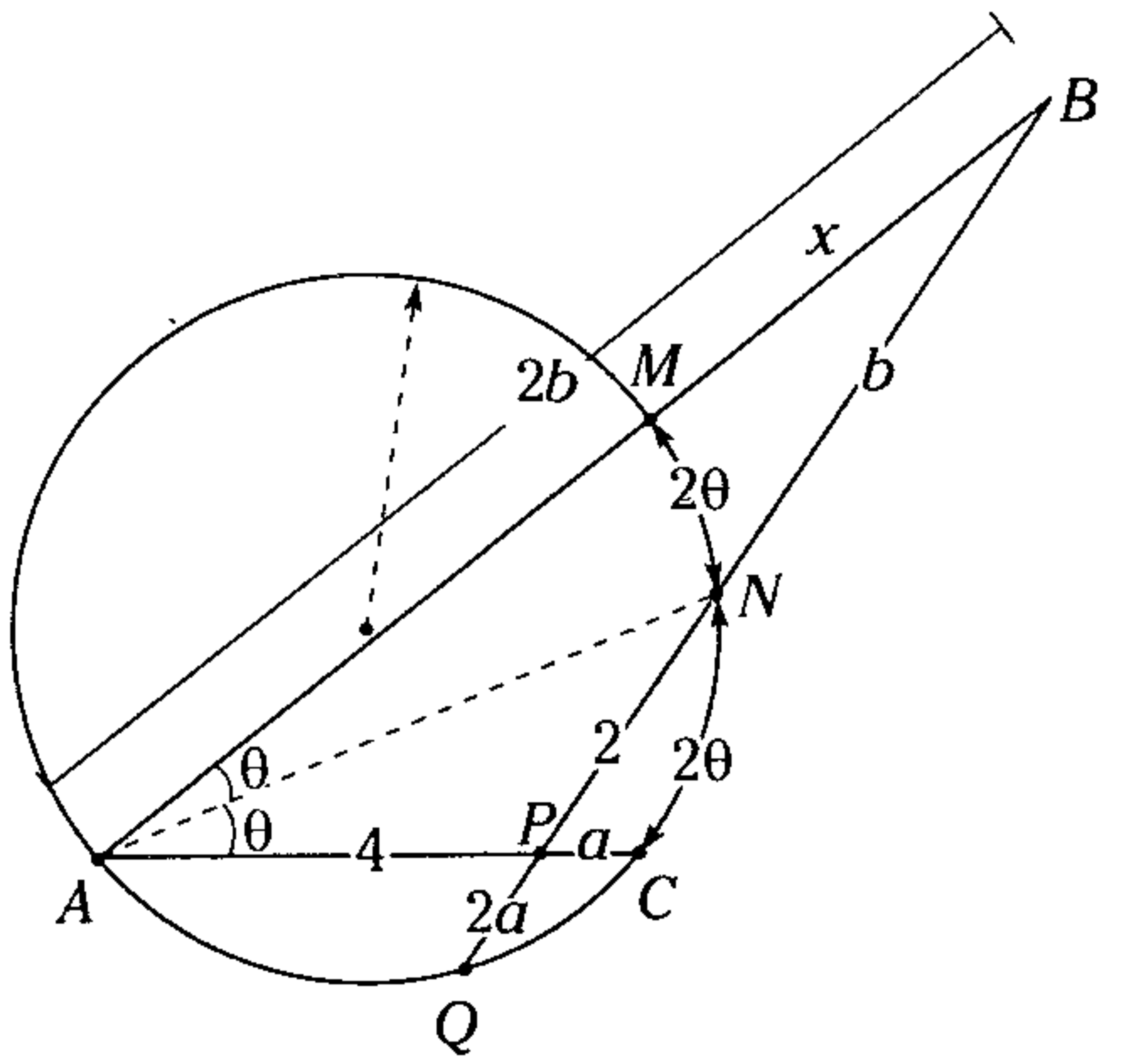


Figura 15.13

Piden $BM = x$

Datos: $m\widehat{MN} = m\widehat{NC} = 2\theta$ y $QP = 2(PC)$

Si $PC = a$; $PQ = 2a$ y

$2a + b = 6$ (I)

Aplicando teorema de las cuerdas

$4(a) = (NP)(2a) \rightarrow NP = 2$

$\triangle ABP$: del teorema de la bisectriz interior

$\frac{AB}{4} = \frac{b}{2} \rightarrow AB = 2b$

Aplicando el teorema de las secantes (respecto de B)

$2b(x) = (2a + b + 2)b$ (II)

(I) en (II)

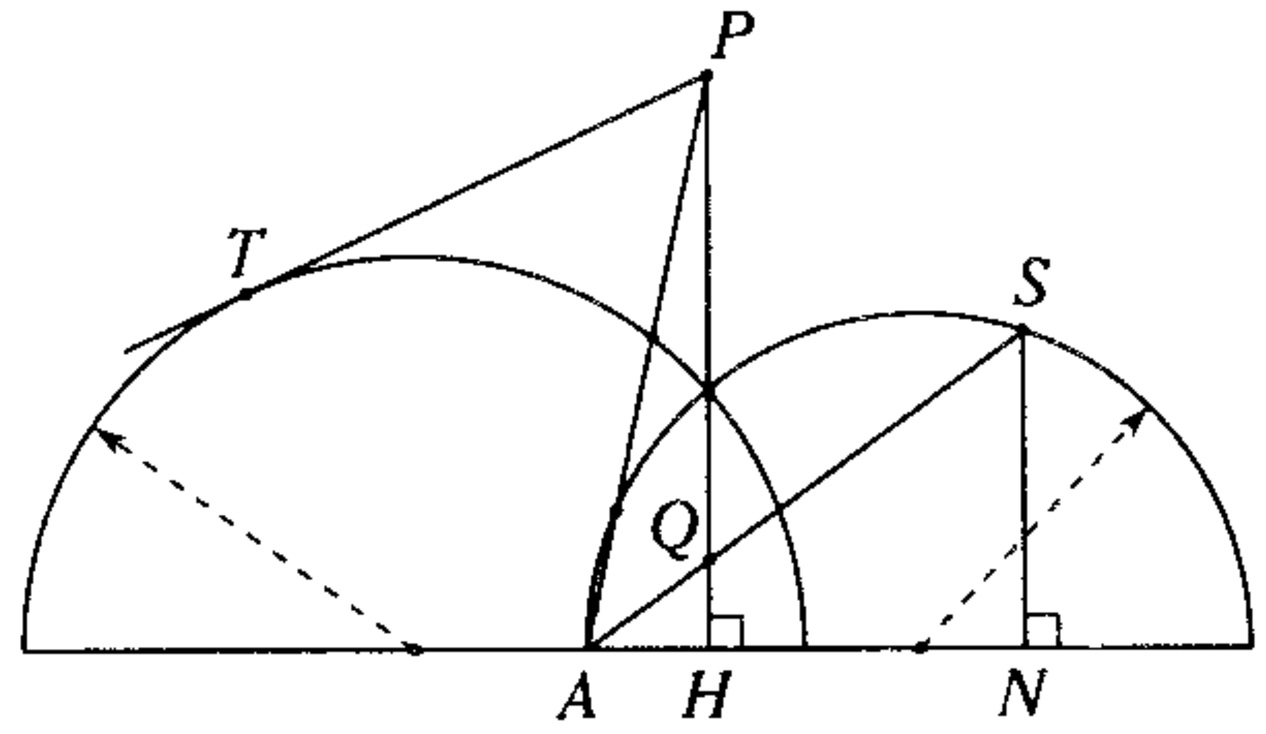
$\rightarrow 2x = 6 + 2$

$\therefore x = 4$

CLAVE C

Problema 5

En la figura, $(QH).(NS) = 11$, $PT = 10$ y $AP = 12$. Señale $(AS).(AQ)$ (T es punto de tangencia).



A) 23 B) 22 C) 33
D) 44 E) 32

Resolución

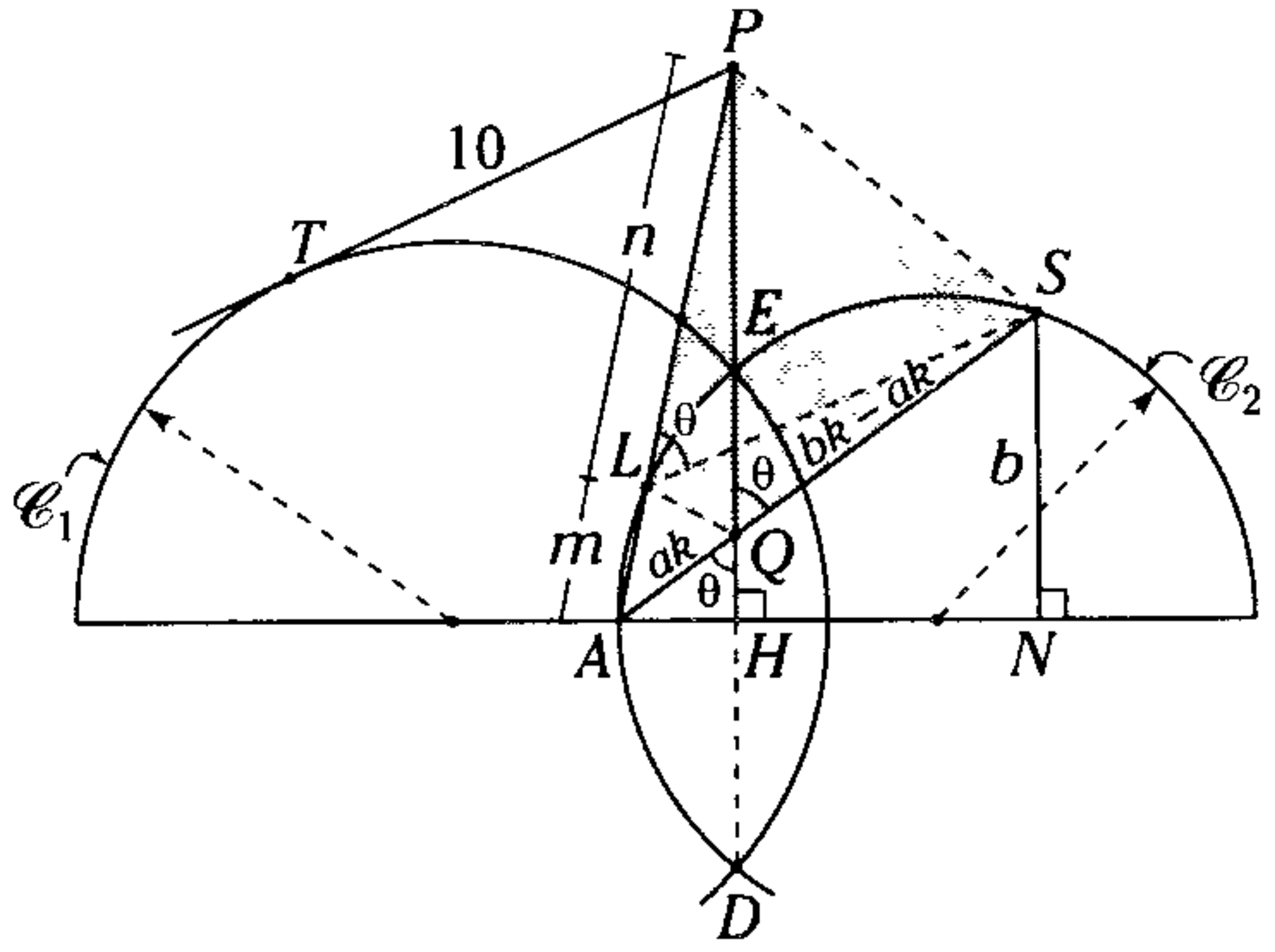


Figura 15.14

Piden $(AS).(AQ)$

Datos: $(QH).(NS) = 11$

$a.b = 11$

$AL + LP = 12$

$m + n = 12$

$\triangle AHQ \sim \triangle ANS$ (A.A.A.)

$\frac{a}{b} = \frac{AQ}{AS} \rightarrow AQ = a.k$ y $AS = b.k$

Sea

$m\widehat{AS} = 2\theta \rightarrow m\measuredangle PLS = \theta$ (Por $\measuredangle$ exinscrito)

y $m\widehat{SE} = 180° - 2\theta$

$\rightarrow m\measuredangle SAE = 90° - \theta$, $m\measuredangle PQS = \theta$

Como

$m\sphericalangle PLS = m\sphericalangle PQS = \theta$

$\rightarrow$ $LPSQ$: ⏢ Inscriptible

Teorema de secante

$(m+n)m = bk \cdot ak$ (I)

$\mathscr{C}_2$: Teorema de las secantes

$(DP) \cdot (PE) = (m+n)n$

$\mathscr{C}_1$: Teorema de la tangente

$(DP) \cdot (PE) = 10^2$

$\rightarrow$ $(m+n)n = 100$ (II)

(I) + (II)

$12 \times 12 = 100 + bak^2$

$abk^2 = 44$

$\therefore$ $(AS) \cdot (AQ) = 44$

CLAVE D

Problema 6

Dado un cuadrado $ABCD$, en la prolongación de $\overline{CB}$, se ubica el punto P y, con diámetro $\overline{AP}$, se traza una semicircunferencia cuyo centro es O, la cual interseca a $\overline{CO}$ en F. Si $m\sphericalangle COA = 90°$, $CP = \sqrt{17}$ y $AP = 4$, calcule la longitud del segmento tangente trazado desde C a la semicircunferencia.

A) 3 B) 5 C) 6
D) 4 E) 7

Resolución

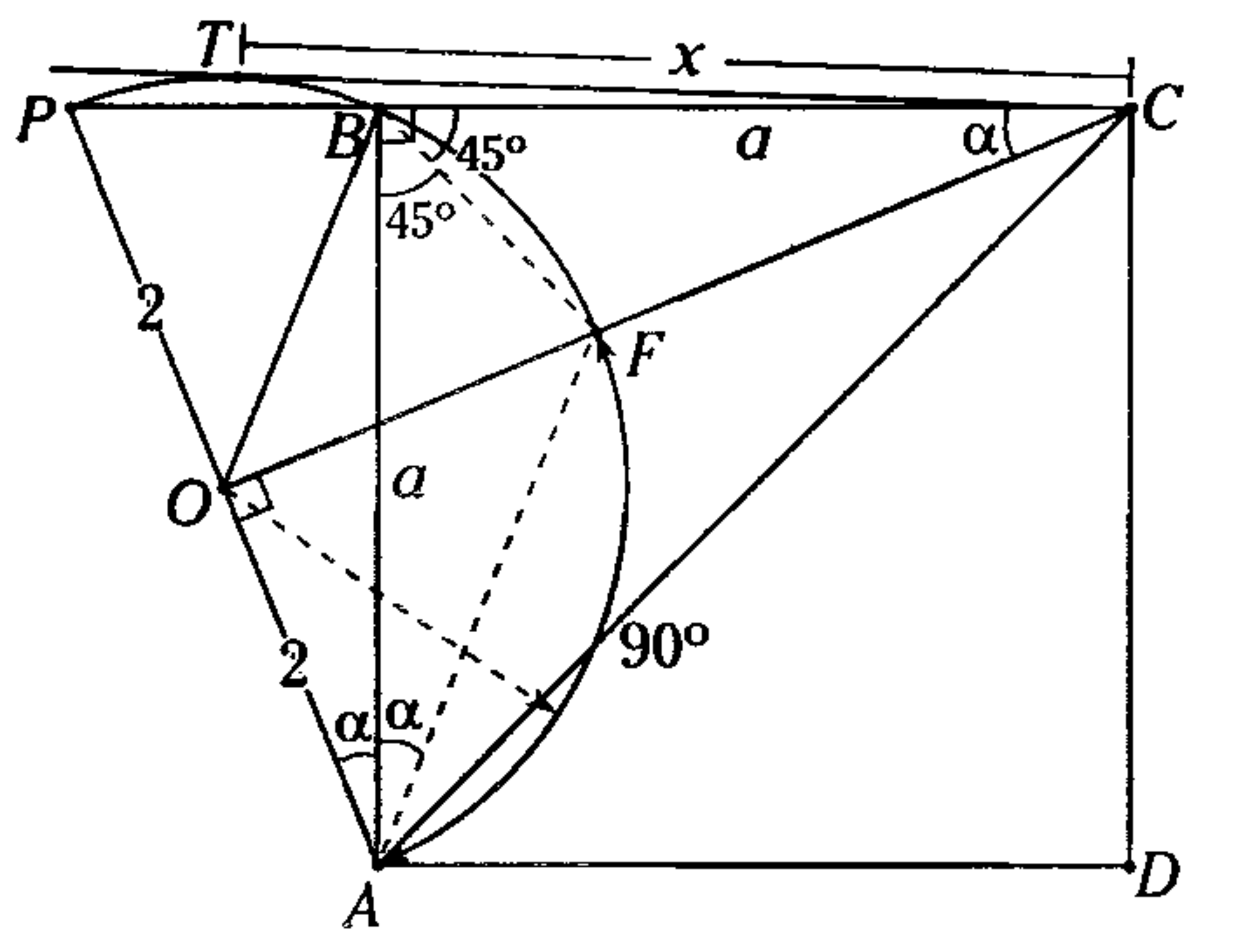


Figura 15.15

Piden $CT = x$

En la semicircunferencia, se aplica el teorema de la tangente

$x^2 = (CP) \cdot (CB)$ (I)

Como

$m\overset{\frown}{FA} = 90°$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle ABF = 45°$

$\triangle FBC \cong \triangle FBA$ (L.A.L.)

$\rightarrow$ $m\sphericalangle BCF = m\sphericalangle BAF = \alpha$

Como $m\sphericalangle AOC = m\sphericalangle ABC$, entonces $OBCA$: ⏢ inscriptible, por lo cual se aplicará el teorema de las secantes.

$(4)(2) = (CP) \cdot (PB)$ (II)

(I) + (II)

$x^2 + 8 = (CP)(CB + BP)$

$x^2 + 8 = (CP)^2$

$x^2 + 8 = \sqrt{17}^2$

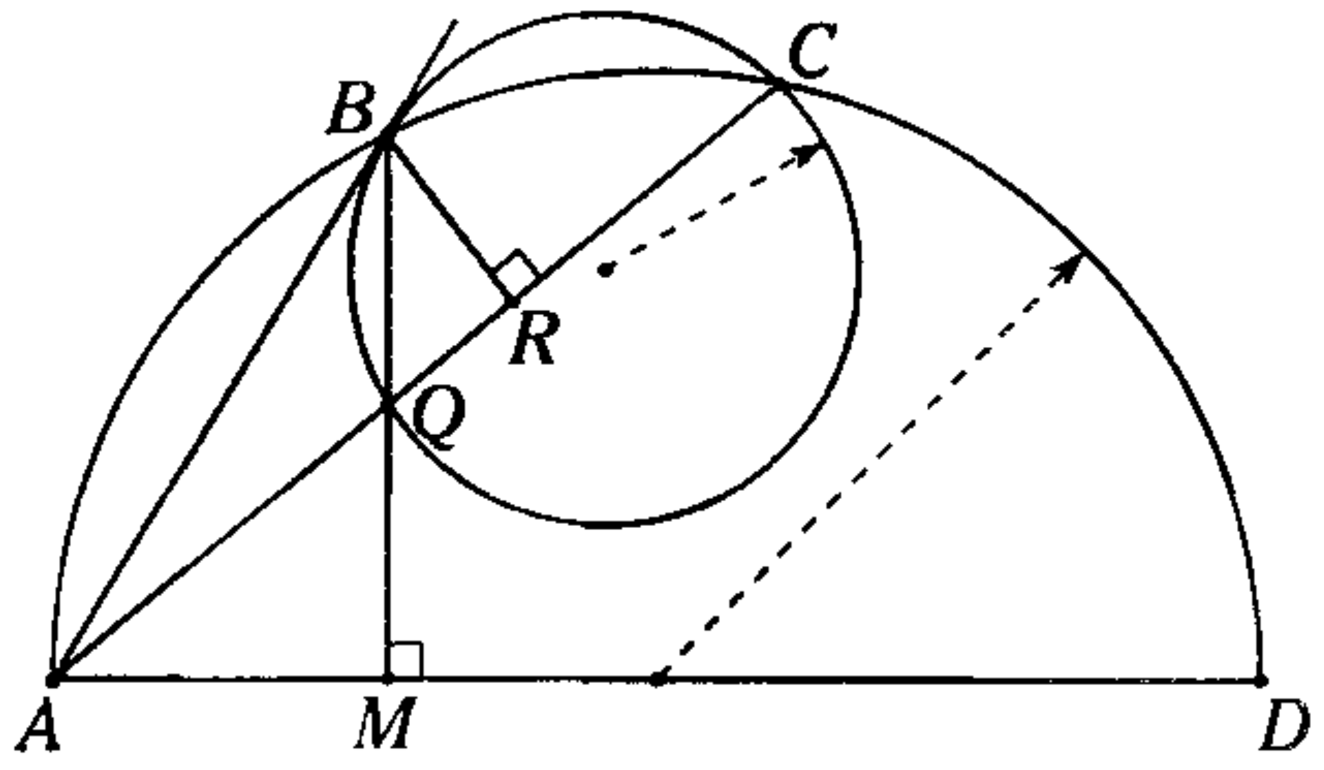
$x^2 = 9$

$\therefore$ $x = 3$

CLAVE A

Problema 7

En la figura, $RC = 2$, $BQ = 1$ y $QM = 3$. Indique AB (B es punto de tangencia)



A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{11}$
D) $\sqrt{13}$ E) $\sqrt{15}$

Resolución

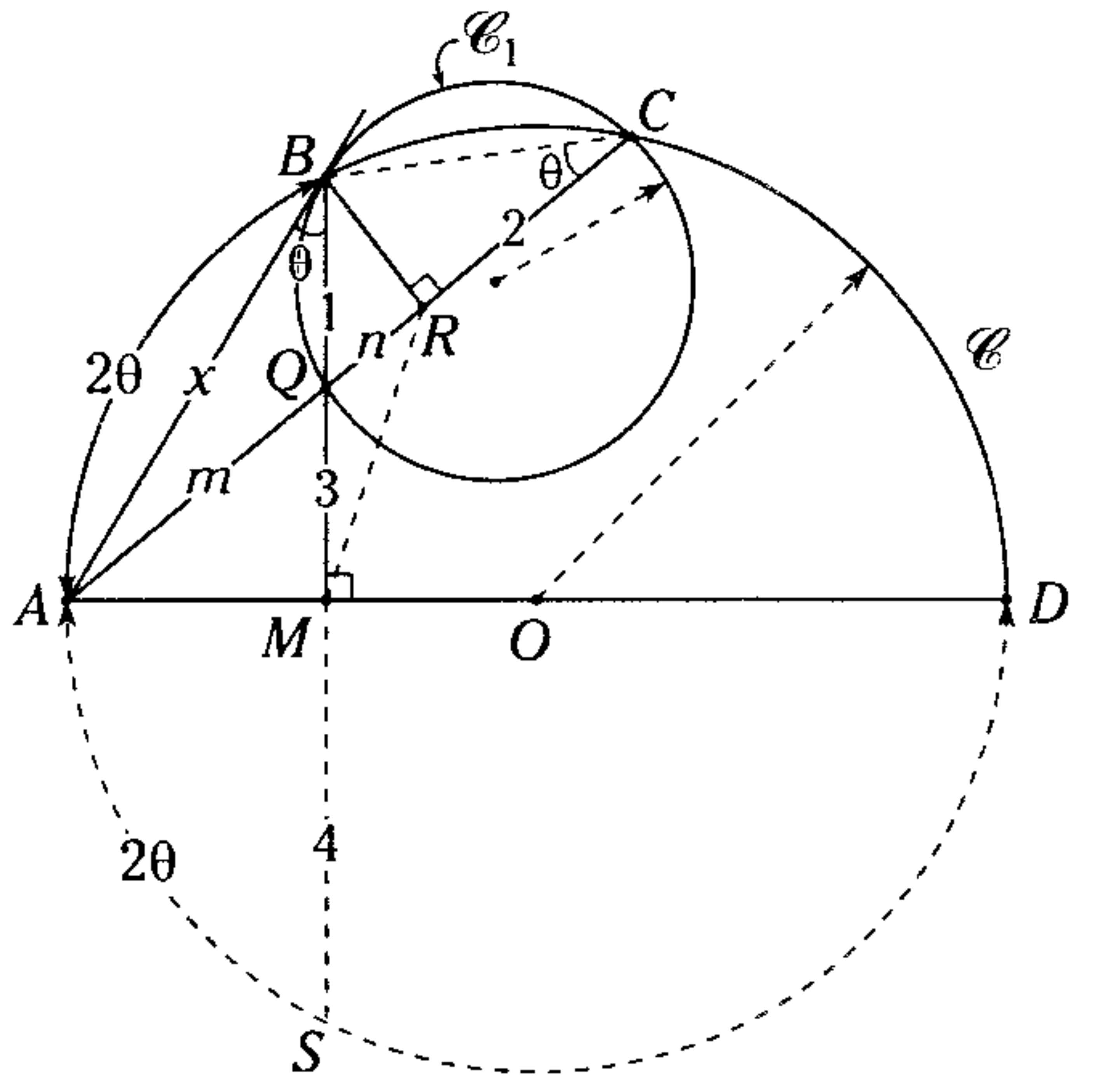


Figura 15.16

Piden $AB = x$

Como $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{AS} = 2\theta$ y AO: radio y

$\overline{BS} \perp \overline{MO} \rightarrow BM = MS = 4$

Sea

$QR = n,\ AQ = m$

De la figura se observa $ABRM$: ⏢ inscriptible

$\rightarrow mn = (1)(3)$ (I)

$\mathscr{C}$: teorema de las cuerdas

$m(n+2) = 1 \times 7$

$mn + 2m = 7$ (II)

De (I) y (II)

$m = 2,\ n = \dfrac{3}{2}$

$\mathscr{C}_1$: teorema de la tangente

$x^2 = (m + n + 2)m$

$x^2 = (2 + \dfrac{3}{2} + 2)2$

$\therefore\ x = \sqrt{11}$

CLAVE C

Problema 8

En un rectángulo $ABCD$, con diámetro $\overline{BC}$, se traza interiormente una semicircunfererencia, de ahí, se ubica M en $\overline{AD}$ y, con diámetro MD; se traza una semicircunferencia tangente a $\overline{AC}$ en T. Si las semicircunferencias se intersecan en Q y S, y los puntos A, Q y S son colineales, halle $m\overset{\frown}{TD}$.

A) 140° B) 120° C) 137°
D) 127° E) 135°

Resolución

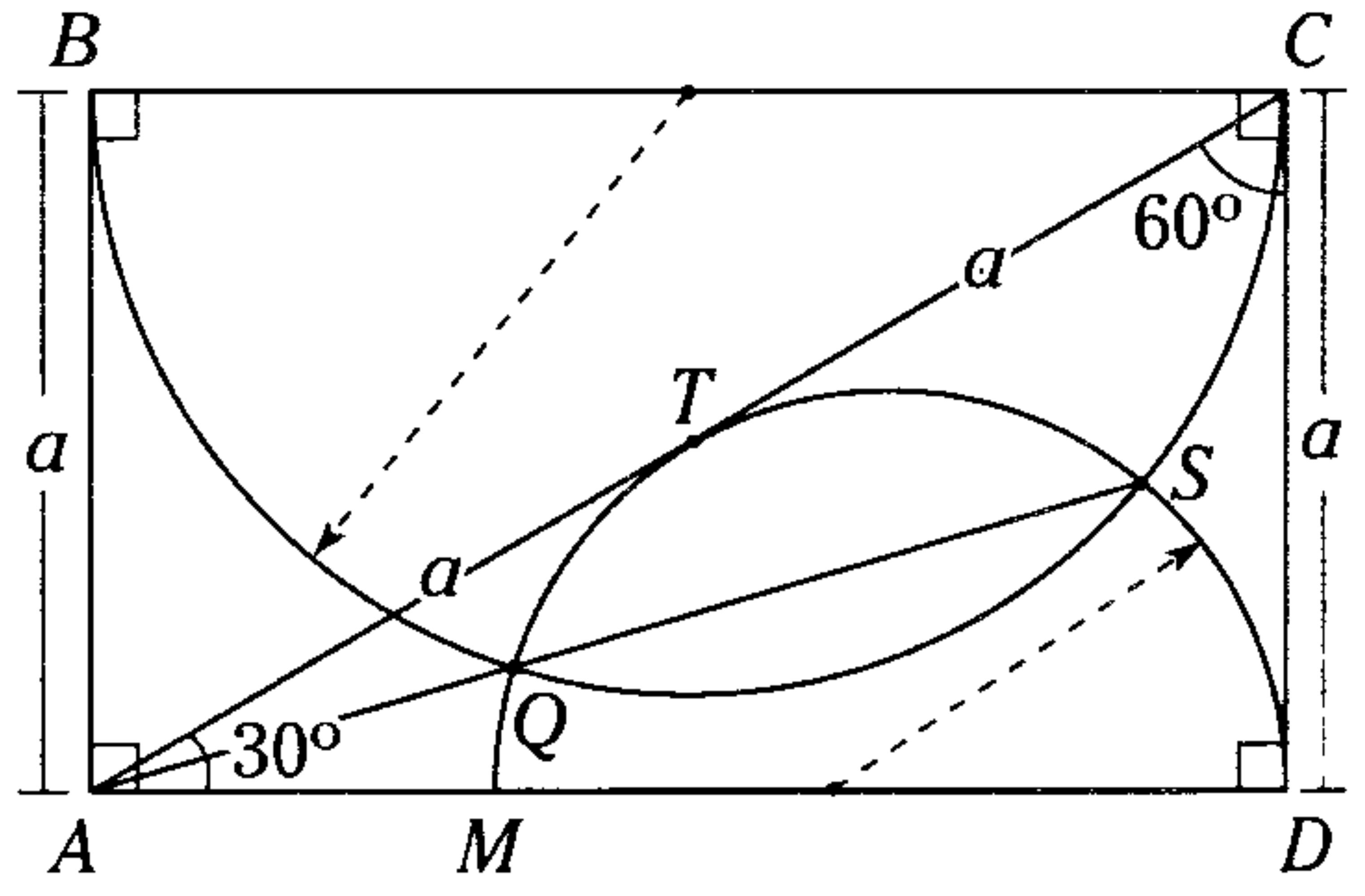


Figura 15.17

Piden $m\overset{\frown}{TD}$

Semicircunfencia mayor

$(AB)^2 = (AS).(AQ)$ (teorema de la tangente

Semicircunferencia menor

$(AT)^2 = (AS).(AQ)$ (teorema de la tangente

$\rightarrow AB = AT = a$

Se sabe

$CD = AB = a$

Por propiedad de tangentes

$TC = CD = a$

⊿ADC: notable 30° y 60°

$m\sphericalangle ACD = 60°$

Por teorema

$m\overset{\frown}{TD} + 60° = 180°$

$\therefore\ m\overset{\frown}{TD} = 120°$

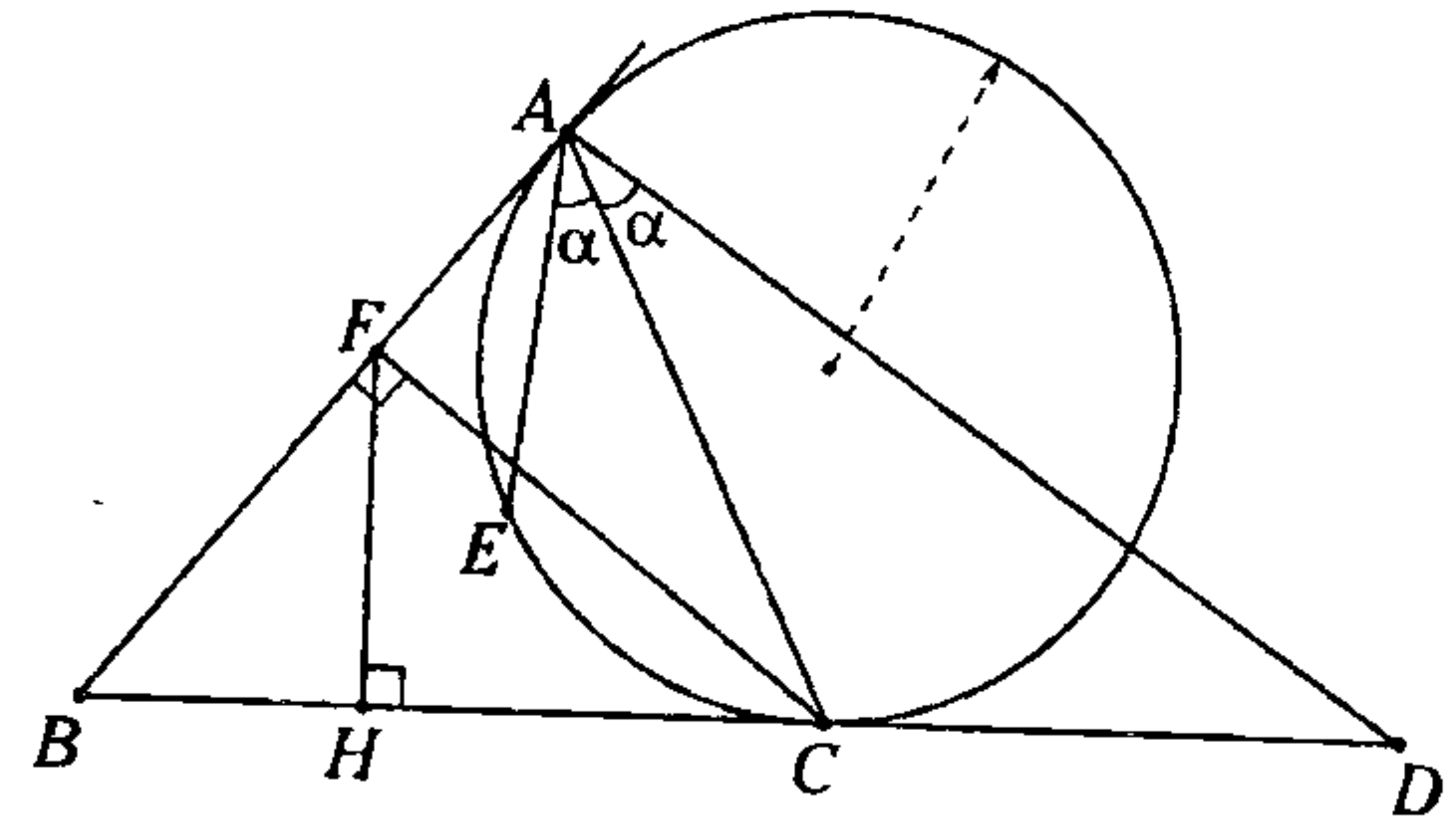
CLAVE B

Problema 9

En la figura, A y C son puntos de tangencia.

Si $AD = 8$, $AE = 2$ y $\dfrac{(BC)(FH)}{BF} = 4$,

señale el circunradio del triángulo ACD.



A) 3
B) 4
C) 4,5
D) 5
E) 6

Resolución

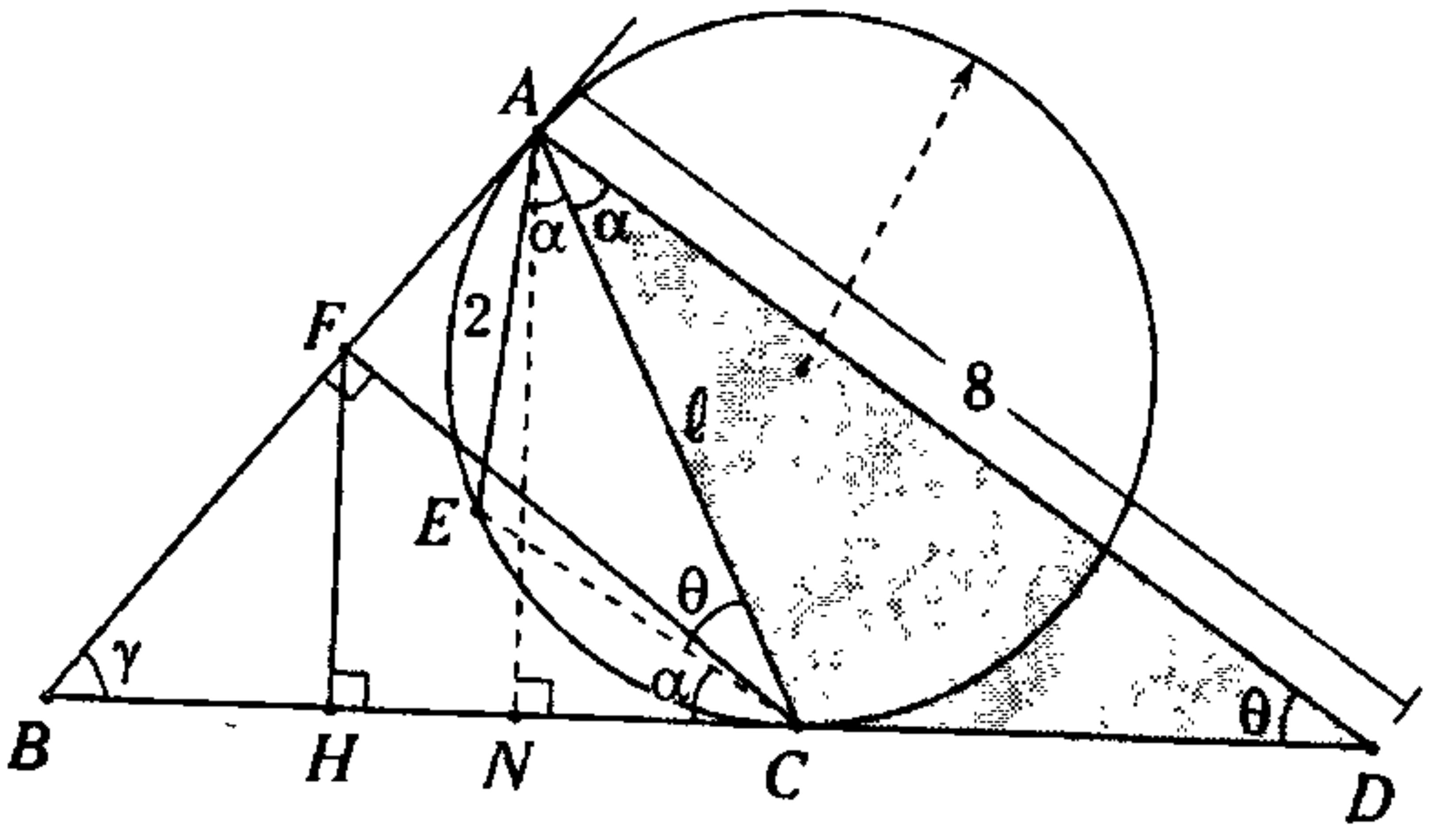


Figura 15.18

Piden R (circunradio del $\triangle ACD$)

Por teorema del producto de dos lados en $\triangle ACD$

$$\ell(8) = (2R)(AN) \rightarrow R = \frac{4\ell}{AN} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle EAC \sim \triangle CAD$ (A.A.A.)

$$\frac{\ell}{8} = \frac{2}{\ell} \rightarrow \ell = 4 \qquad \text{(II)}$$

Como ABC: $\triangle$ isósceles, se sabe $AN = CF$

⊿BFC ~ ⊿BHF (A.A.A.)

$$\frac{CF}{FH} = \frac{BC}{BF} \rightarrow CF = \frac{(BC)(FH)}{BF}$$

Por dato, $CF = 4$

$$\rightarrow AN = 4 \qquad \text{(III)}$$

(II) y (III) en (I)

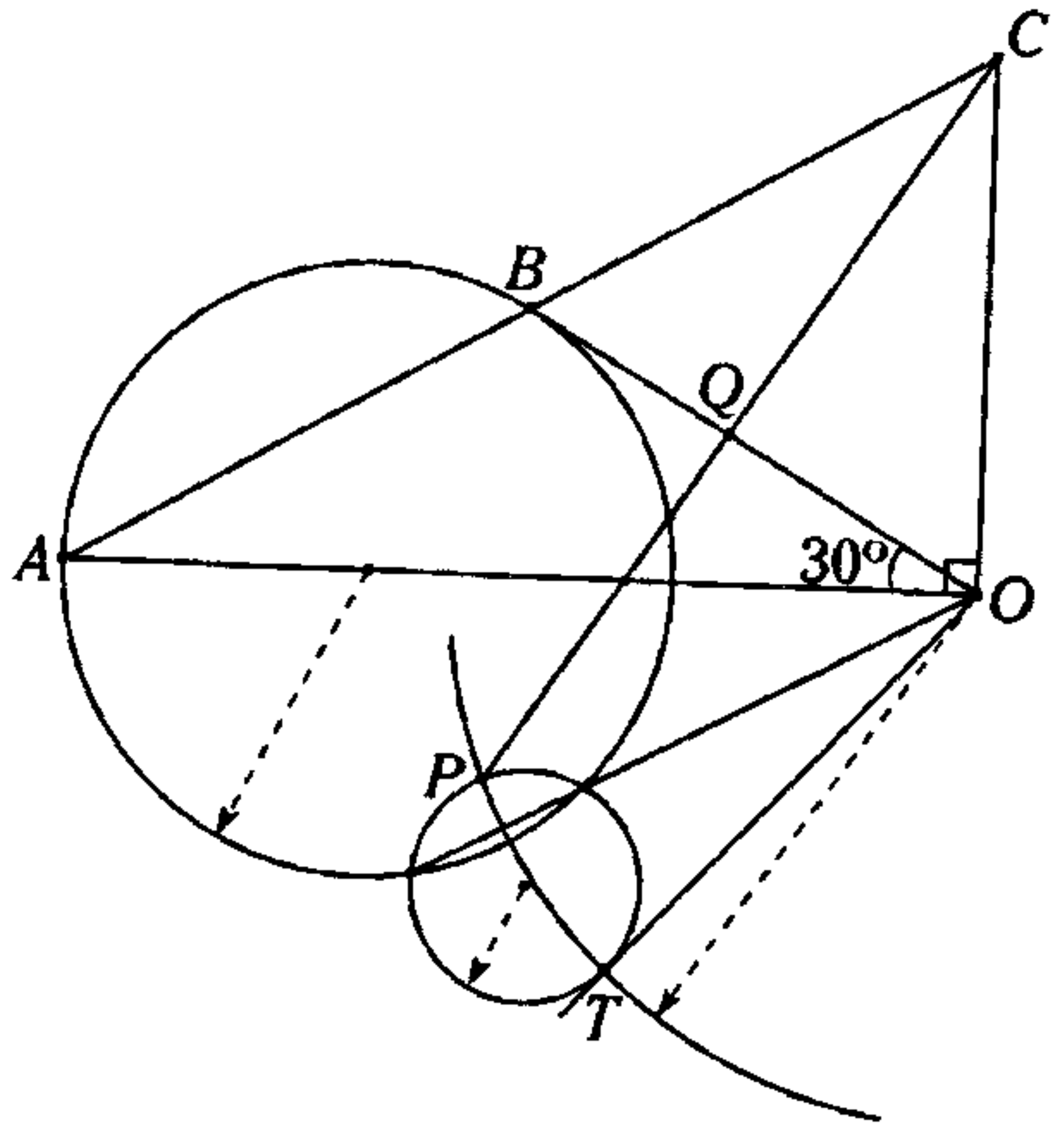
$$R = \frac{4(4)}{4}$$

$$\therefore\ R = 4$$

CLAVE B

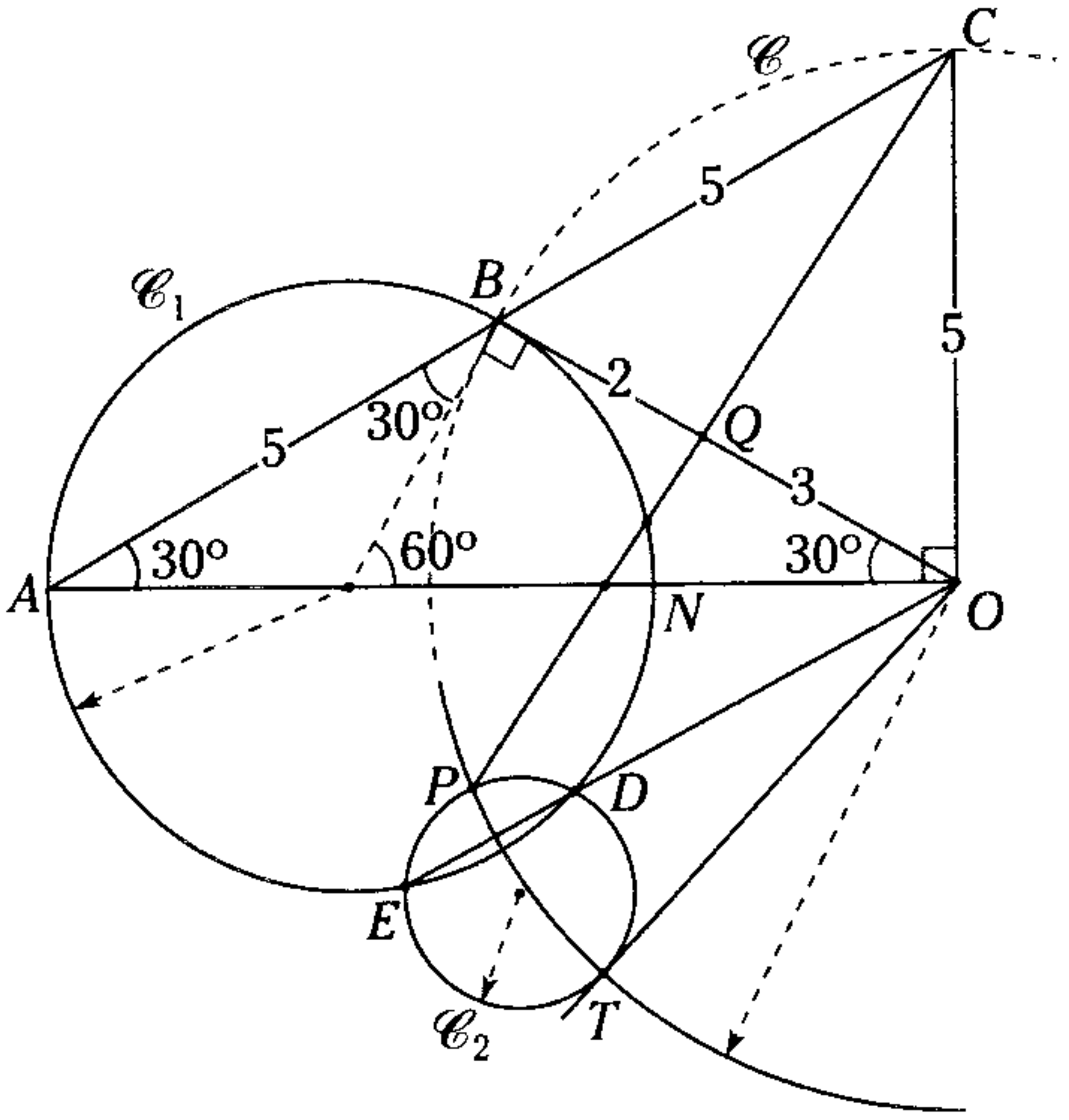
Problema 10

Según la figura, T es punto de tangencia. Si $AB = BC = 5$ y $QB = 2$, indique $(PQ)(QC)$.



A) 12
B) 14
C) 15
D) 16
E) 18

Resolución



(*a*)

Piden $(PQ).(QC)$

$\triangle$ AOC: $\overline{BO}$ es mediana relativa a la hipotenusa

$\rightarrow\ BO=5$

Como $BC=BO$ y $m\measuredangle BOC=60°$

$\triangle BCO$: equilátero $\rightarrow\ CO=5$

Por el teorema de la tangente

$\mathscr{C}_1$: $(BO)^2=(OE).(OD)$ (I)

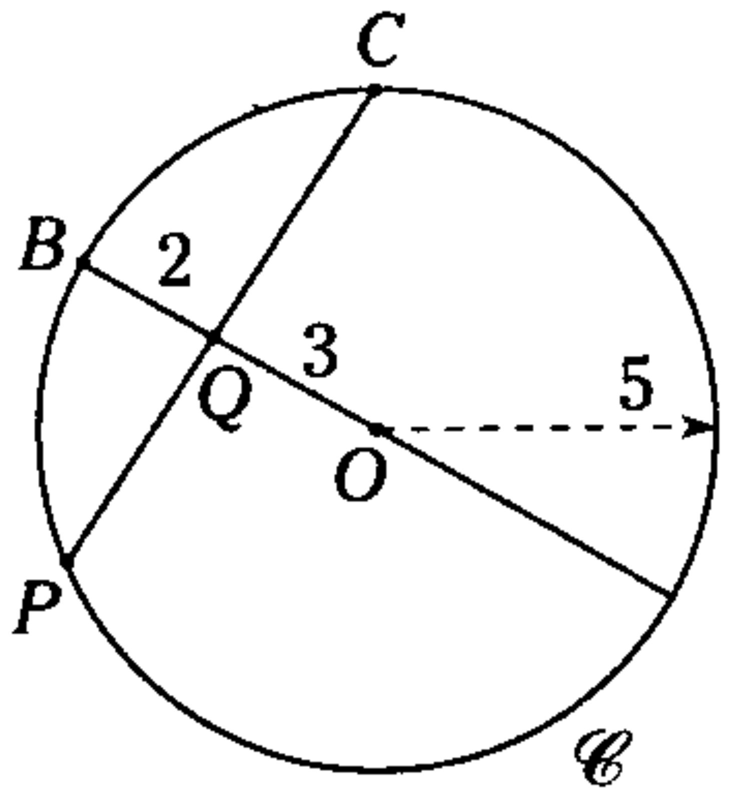
$\mathscr{C}_2$: $(OT)^2=(OE).(OD)$ (II)

De (I) y (II)

$OT=OB=CO=5$

Es decir, T, P, B y C son concíclicos.

Por el teorema de las cuerdas en $\mathscr{C}$



(*b*)

Figura 15.19

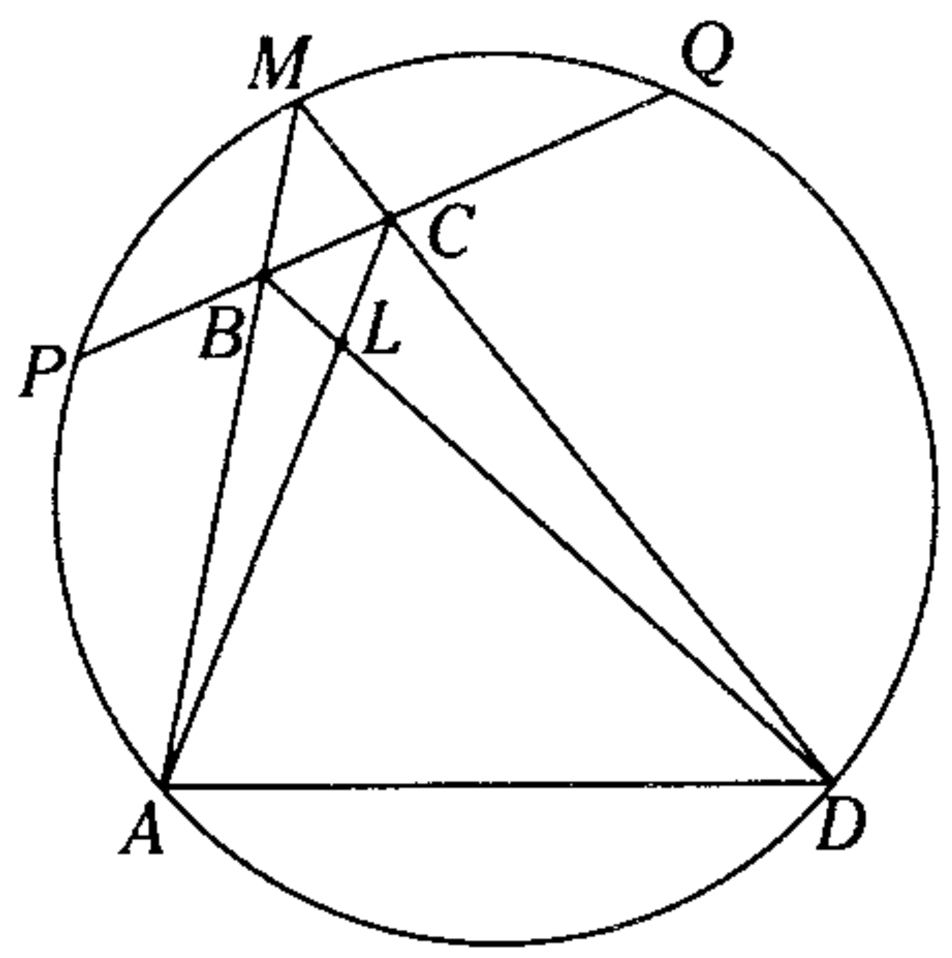
$(PQ).(QC)=(2)(8)$

$\therefore\ (PQ)(QC)=16$

CLAVE D

Problema 11

Según la figura, $m\overset{\frown}{PM}=m\overset{\frown}{MQ}$. Calcule $(BL)(LD)$, si $(LC)(LA)=k$



A) $k/3$ B) $k/2$ C) k

D) $2k$ E) $3k$

Resolución

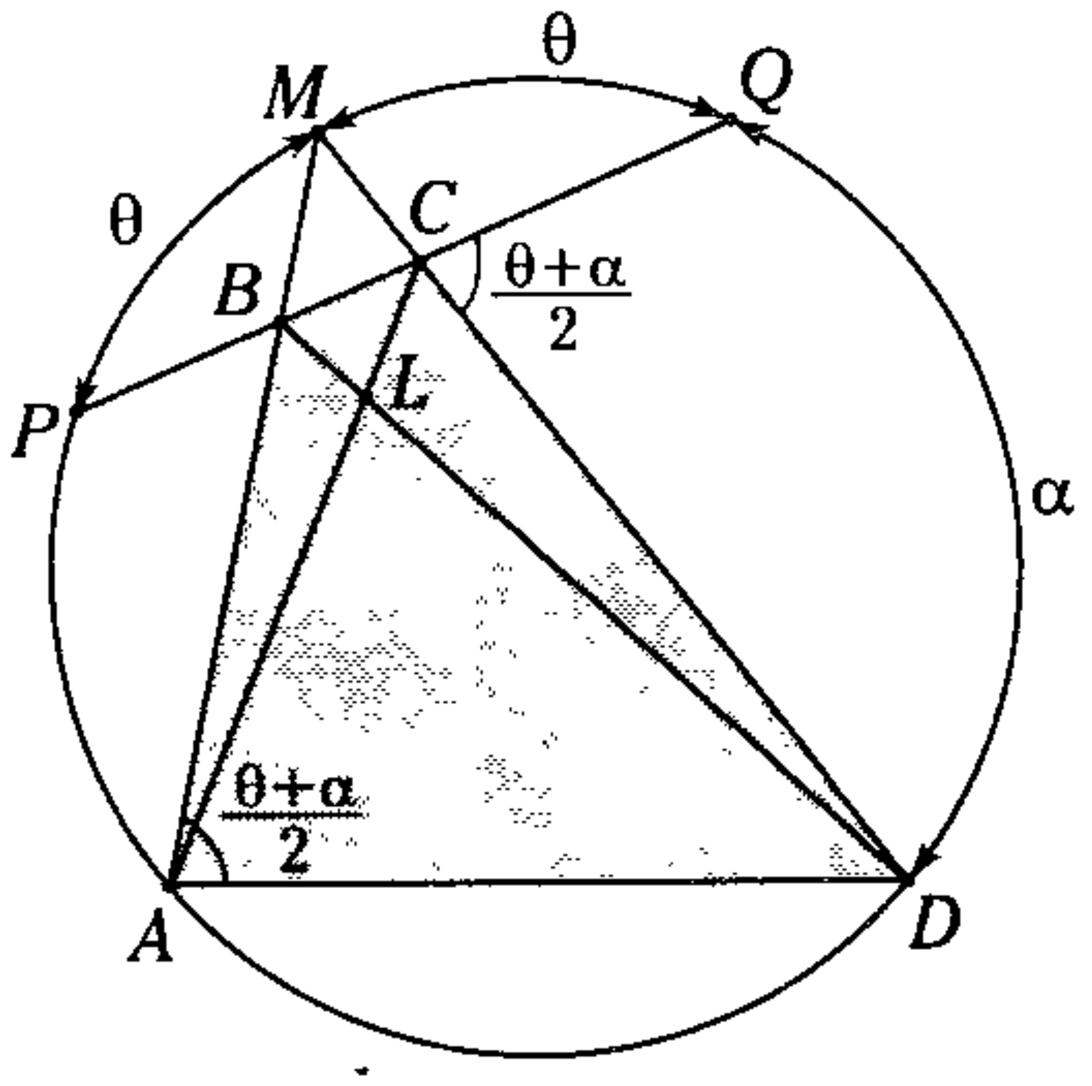


Figura 15.20

Piden $(BL)(LD)$

Dato $(LC)(LA)=k$

Sea $m\overset{\frown}{PM}=m\overset{\frown}{MQ}=\theta$

y $m\overset{\frown}{QD}=\alpha$

Por ∢ inscrito

$$m\sphericalangle MAD=\frac{\theta+\alpha}{2}$$

Por ∢ interior

$$m\sphericalangle QCD=\frac{\theta+\alpha}{2}$$

Como $m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle QCD=\frac{\theta+\alpha}{2}$

→ $ABCD$: ⏢ inscriptible

Por el teorema de las cuerdas

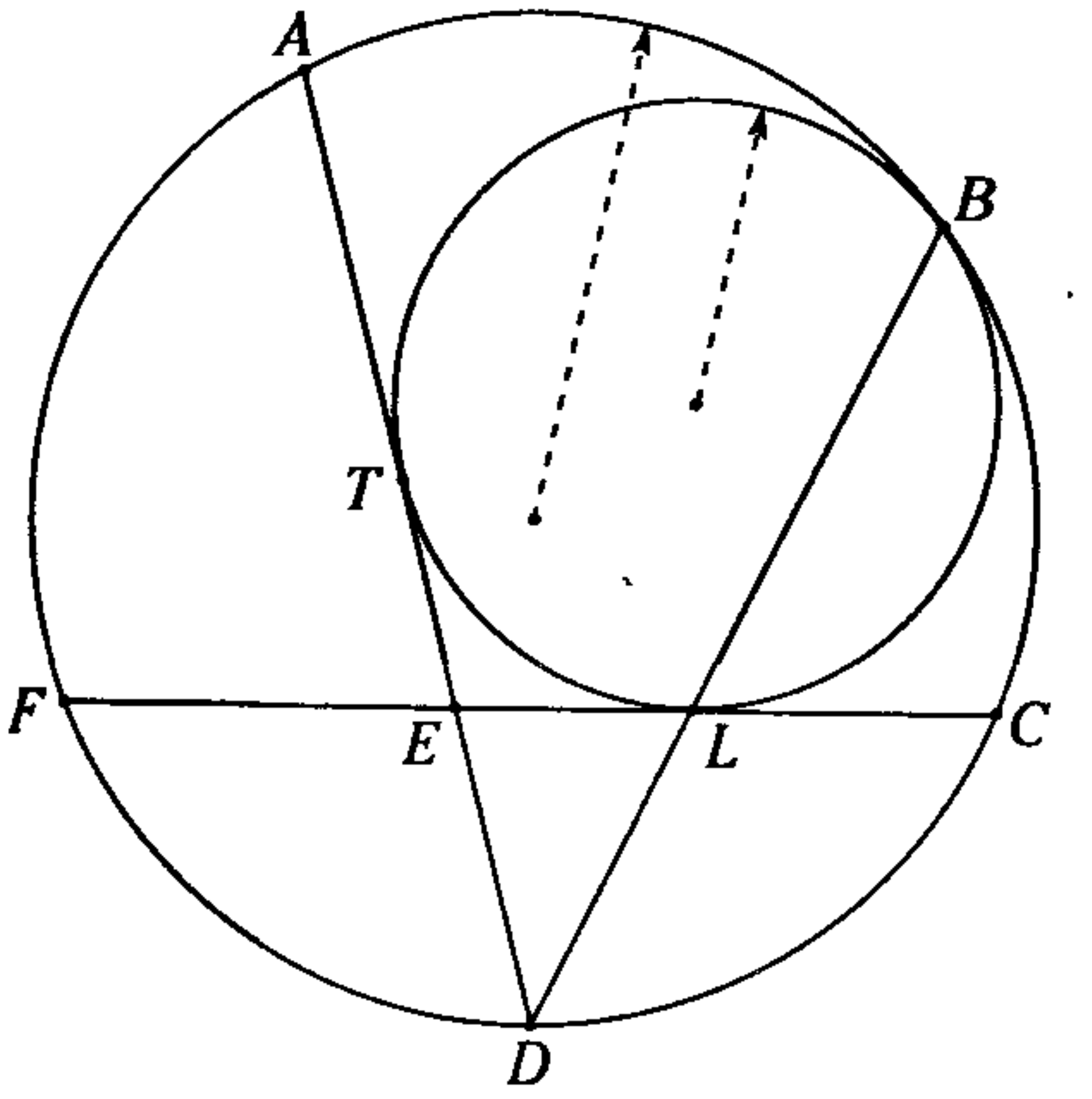
⏢ $ABCD$: $(BL)(LD) = (AL)(LC)$

$\therefore\ (BL).(LD) = k$

CLAVE C

Problema 12

De la figura, B, L y T son puntos de tangencia. Si $m\overset{\frown}{TL} = m\sphericalangle BLC$ y $\frac{AT}{3}=\frac{EL}{2}=\frac{BL}{5}=1$, halle FE.



A) $2\sqrt{5}-3$ B) $\sqrt{21}-2$ C) $\sqrt{23}-2$
D) $2\sqrt{5}-1$ E) $\sqrt{21}-1$

Resolución

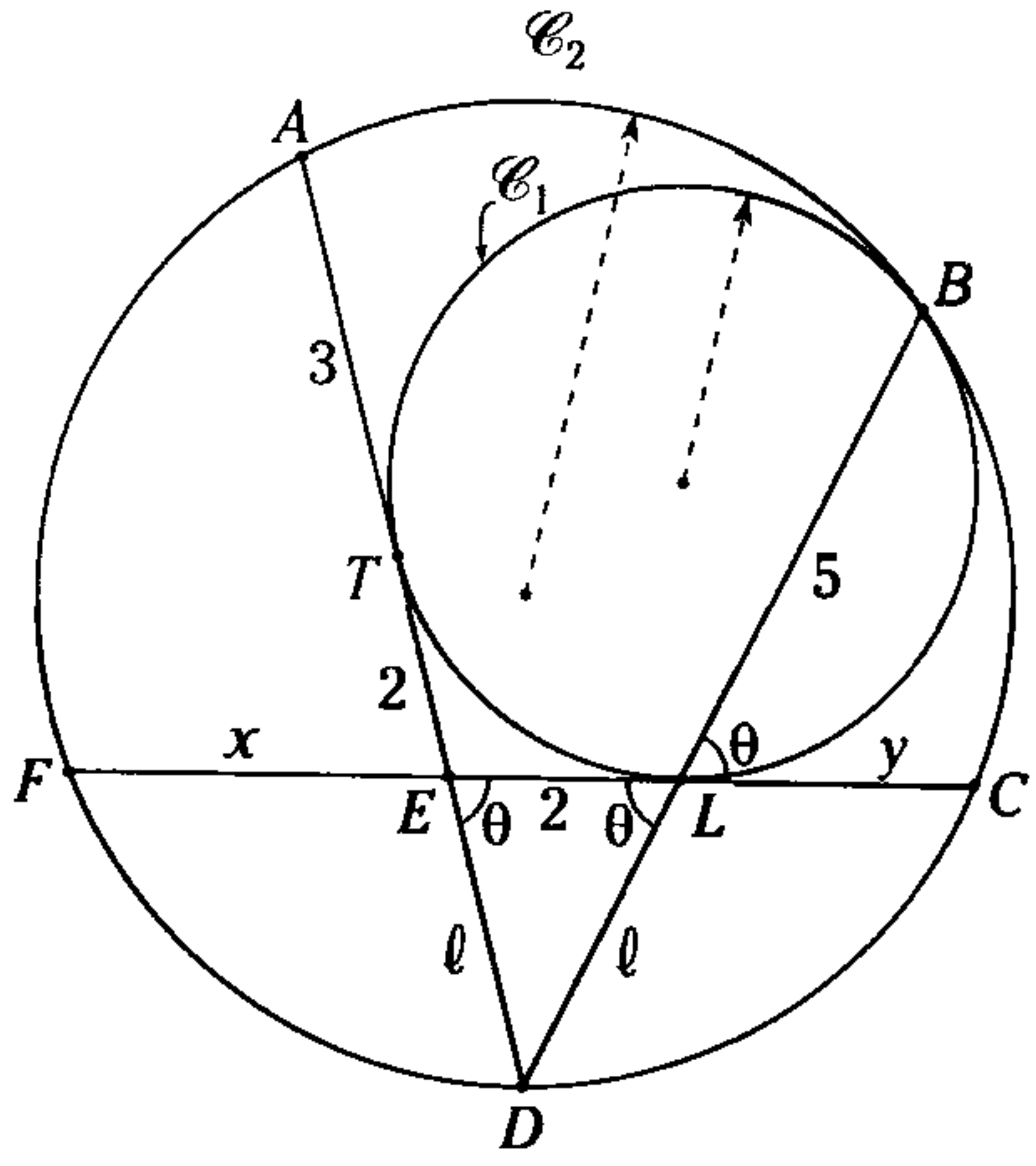


Figura 15.21

Piden $FE = x$

Como $m\overset{\frown}{TL} = m\sphericalangle BLC = \theta$

En $\mathscr{C}_1$, por teorema de la circunferencia

$m\sphericalangle DEL = m\overset{\frown}{TL} = \theta$

Se observa en $\triangle EDL$

$ED = DL = \ell$

Por el teorema de la tangente

$\mathscr{C}_1$: $(\ell+2)^2 = (5+\ell)\ell$

$\ell^2+4\ell+4 = 5\ell+\ell^2$

$\rightarrow\ \ell = 4$

Por el teorema de las cuerdas

$\mathscr{C}_2$: $x(2+y) = 5(4)$ (I)

$\mathscr{C}_2$: $y(x+2) = 5(4)$ (II)

De (I) y (II)

$x = y$

En (I)

$x(2+x) = 5(4)$

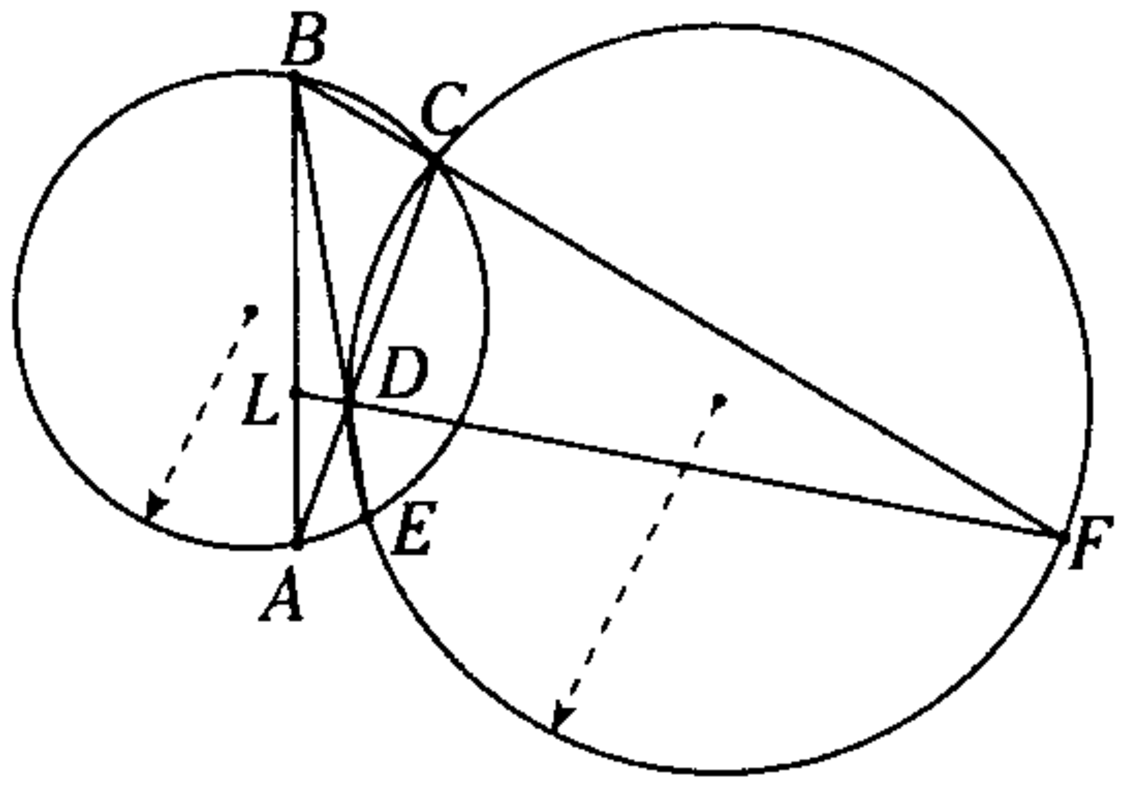
$x^2+2x-20 = 0$

$\therefore\ x = \sqrt{21}-1$

CLAVE E

Problema 13

De la figura, $(BE)(DE) = 10\ u^2$. Calcule $(LD)(DF)$.



A) $5\ u^2$ B) $10\ u^2$ C) $12\ u^2$
D) $16\ u^2$ E) $20\ u^2$

Resolución

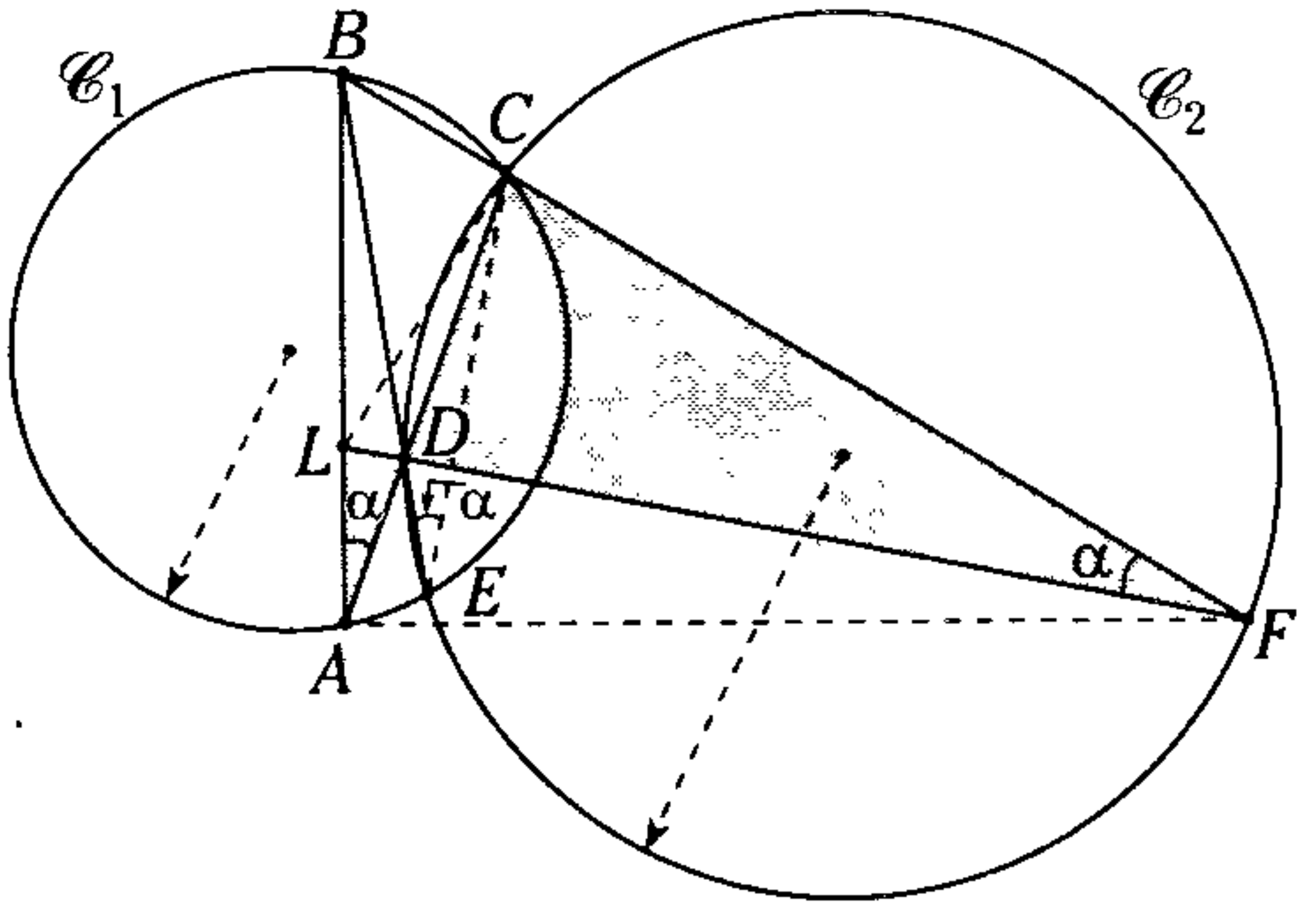


Figura 15.22

Piden $(LD)(DF)$

Dato: $(BD)(DE) = 10\ u^2$

Por teorema de cuerdas en $\mathscr{C}_1$

$(BD).(DE) = (CD).(DA)$ (I)

Se traza $\overline{CE}$: cuerda común

$\mathscr{C}_2$: $m\sphericalangle DEC = m\sphericalangle DFC = \alpha$

$\mathscr{C}_1$: $m\sphericalangle DEC = m\sphericalangle BAC = \alpha$

Como $m\sphericalangle LAC = m\sphericalangle LFC = \alpha$

$\rightarrow$ $ALCF$: $\triangle$ inscriptible

Por el teorema de las cuerdas

$\triangle ALCF$: $(LD).(DF) = (AD).(DC)$ (II)

Igualando (I) y (II)

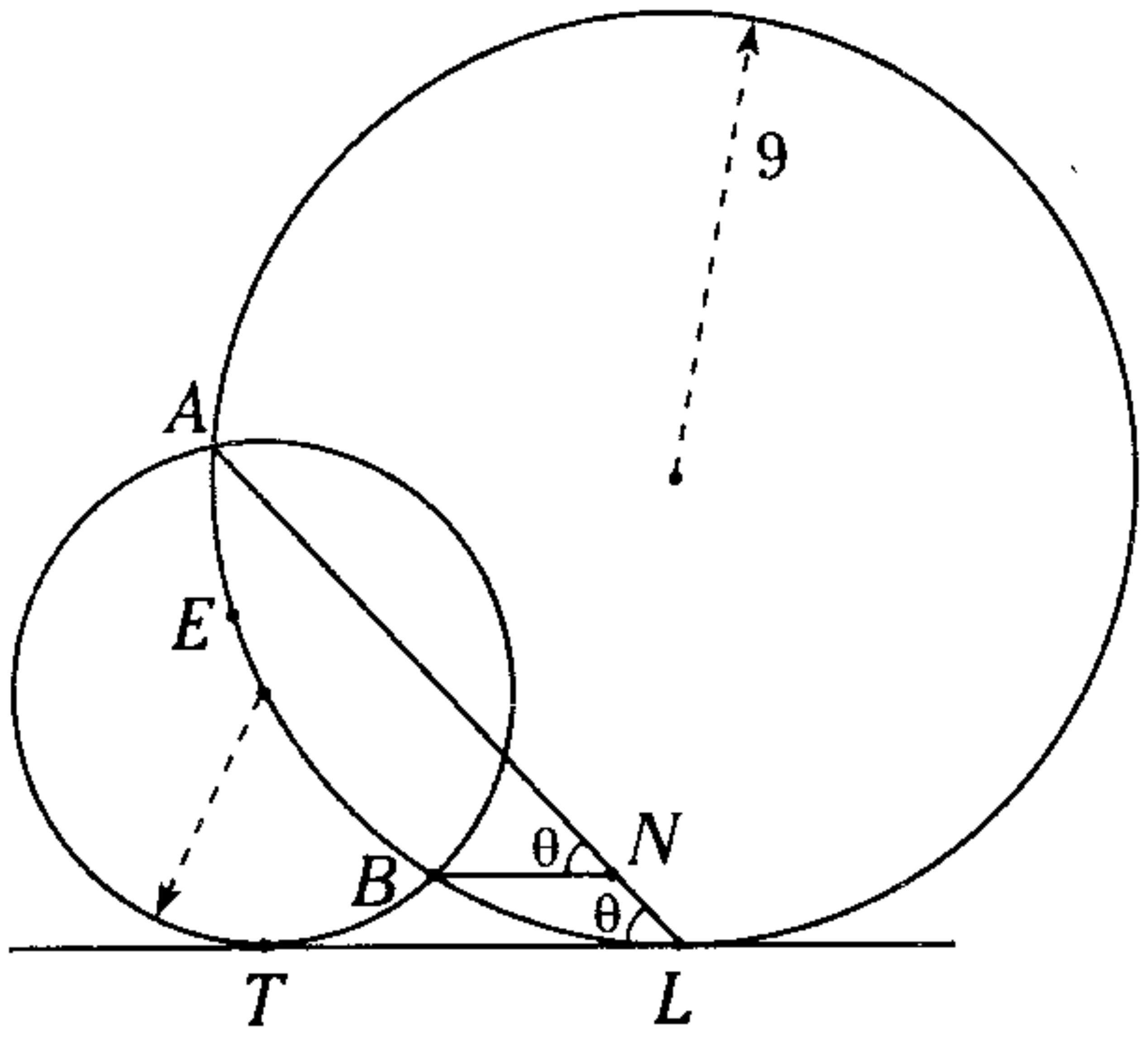
$(LD)(DF) = (BD)(DE)$

$\therefore$ $(LD)(DF) = 10\ u^2$

CLAVE B

Problema 14

De la figura, T y L son puntos de tangencia. Si $AN = 9(NL)$ y $TL = 2\sqrt{10}$, halle $m\widehat{AEB}$.



A) 53° B) 60° C) 90°
D) 45° E) 74°

Resolución

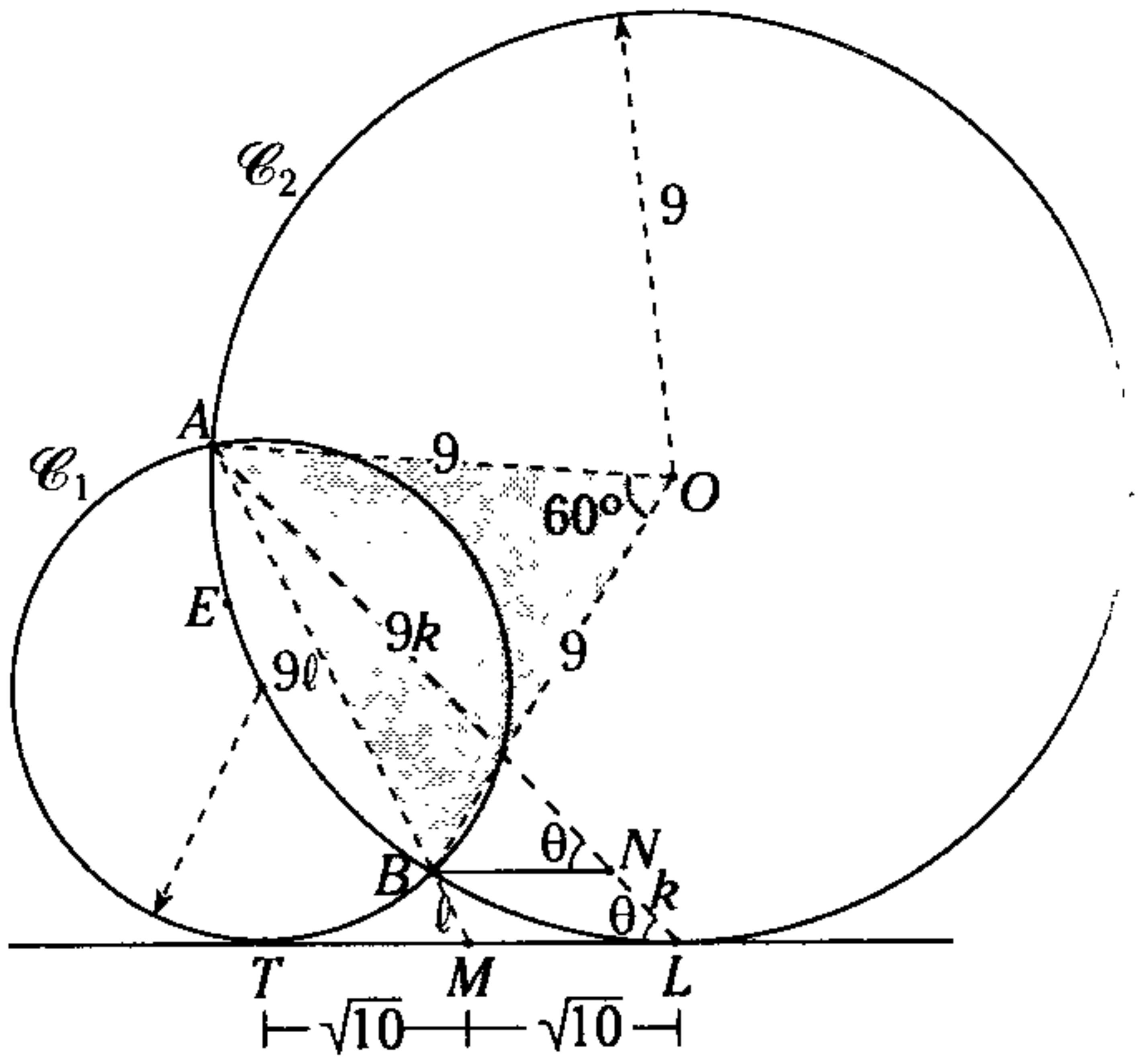


Figura 15.23

Piden $m\widehat{AEB} = x$

Se traza $\overline{AM}$ que contiene a la cuerda común $\overline{AB}$.

Por el teorema de la tangente

$\mathscr{C}_1$: $(TM)^2 = (AM)(BM)$ (I)

$\mathscr{C}_2$: $(ML)^2 = (AM)(BM)$ (II)

De (I) y (II)

$$TM = ML = \sqrt{10}$$

Por corolario del teorema de Tales en el $\triangle MAL$.

$$\frac{NL}{AN} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{9}$$

$\mathscr{C}_1$: teorema de la tangente

$$\sqrt{10}^2 = \ell.(10\ell)$$

$$\rightarrow \quad \ell = 1$$

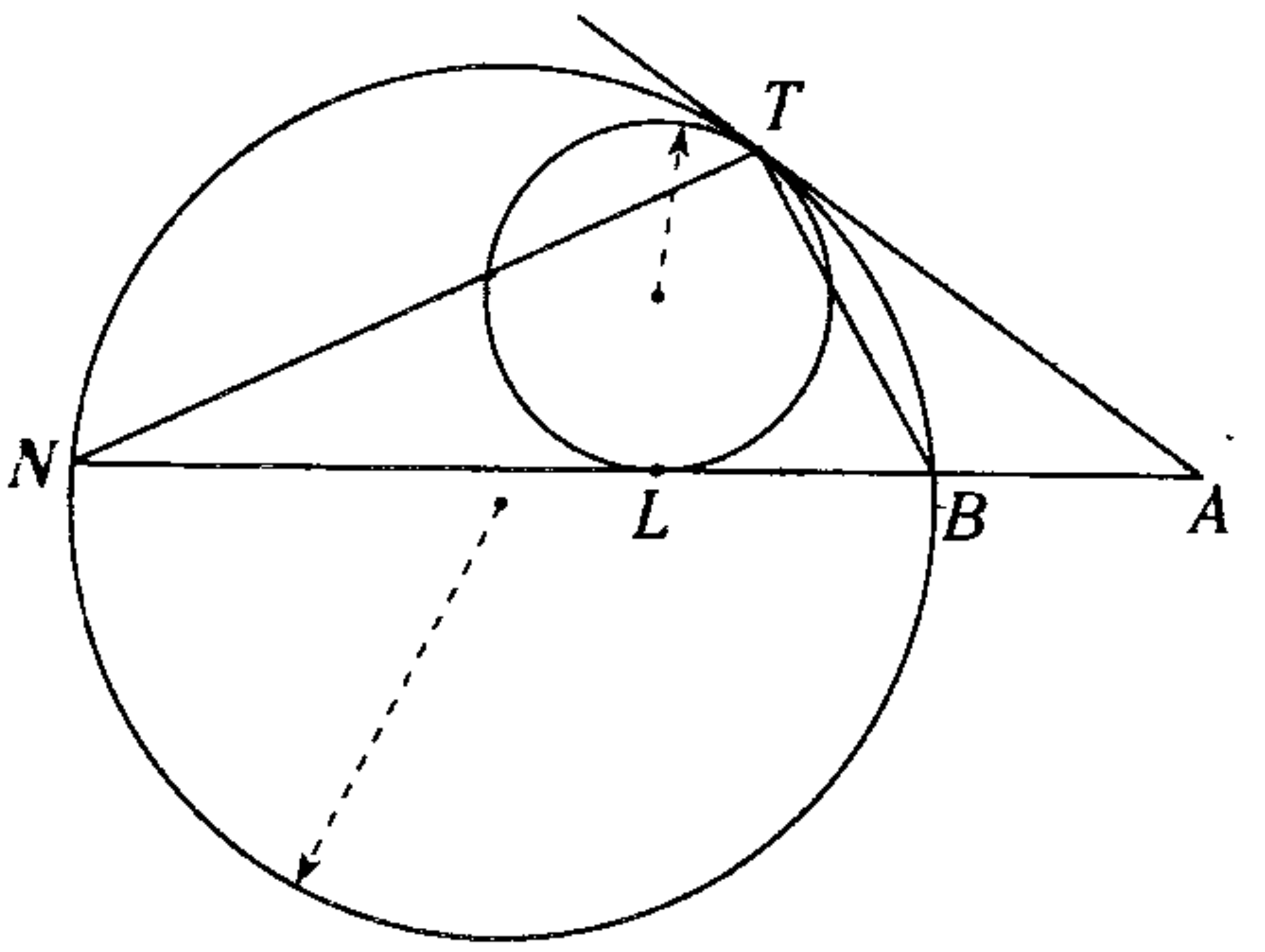
$\triangle AOB$: $\triangle$ equilátero

$$\therefore \quad x = 60°$$

CLAVE B

Problema 15

De la figura, T y L son puntos de tangencia, si $LB = BA$, indique NT/TB.



A) 1/2 B) 2/3 C) 2

D) 3 E) 1/4

Resolución

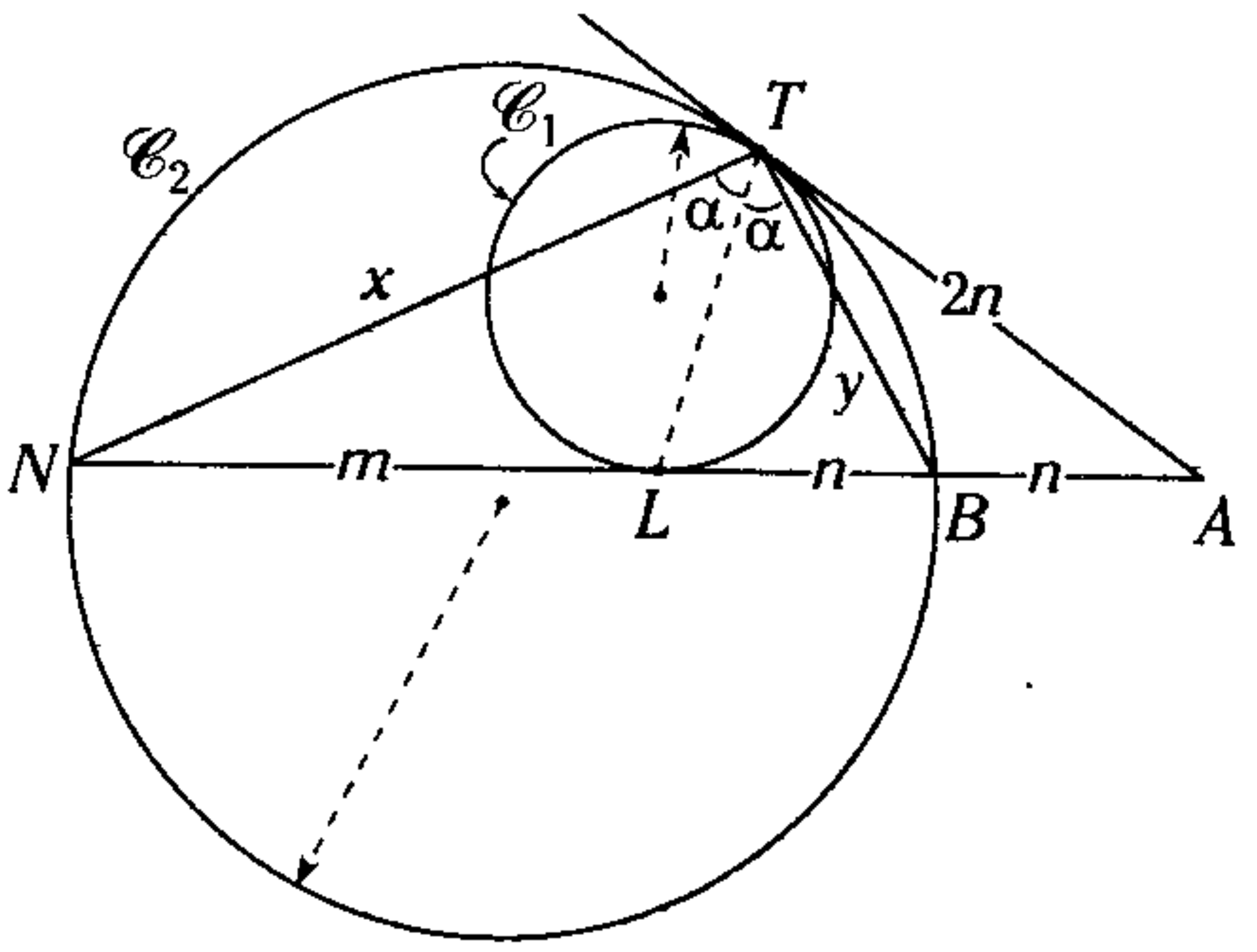


Figura 15.24

Piden $\frac{NT}{TB} = \frac{x}{y}$

Por teorema se sabe que

$\overline{TL}$: bisectriz interior del $\triangle NTB$

$\triangle NTB$: teorema de la bisectriz interior

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \quad \text{(I)}$$

$\mathscr{C}_1$: teorema: $TA = LA = 2n$

$\mathscr{C}_2$: teorema de la tangente

$$(2n)^2 = (m + 2n)n$$

$$4n = (m + 2n) \rightarrow 2n = m \quad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{2n}{n} = 2$$

CLAVE C

Problema 16

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BF y la circunferencia $\mathscr{C}$ que contiene a B y es tangente al lado AC en F. La circunferencia $\mathscr{C}$ interseca a $\overline{AB}$ en P y a $\overline{BC}$ en Q. Si $\overline{PQ} \cap \overline{BF} = \{E\}$, $3(AP) = BP = 6$ y $AF = BQ$, señale $(BE)(EF)$.

A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 D) 8

Resolución

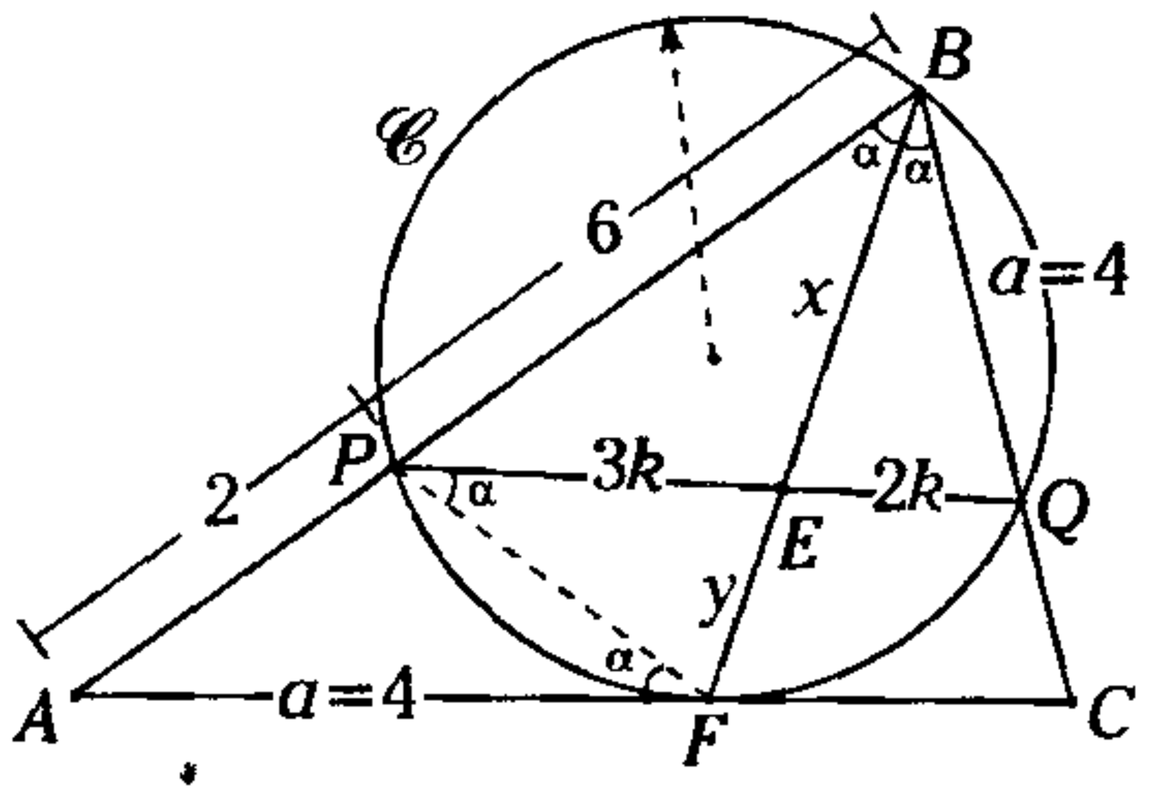


Figura 15.25

Piden $(BE)(EF) = x.y$

En $\mathscr{C}$: teorema de las cuerdas

$$xy = (PE)(EQ) \qquad \text{(I)}$$

En $\mathscr{C}$: teorema de la tangente

$$a^2 = (8)(2) \rightarrow a = 4$$

$\triangle PBQ$: teorema de la bisectriz interior

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{6}{4} \rightarrow PE = 3k \text{ y } EQ = 2k$$

$\triangle PBE \sim \triangle ABF$ (Caso A.A.A.)

$$\frac{3k}{4} = \frac{6}{8} \rightarrow k = 1$$

En (I)

$$x.y = (3)(2)$$

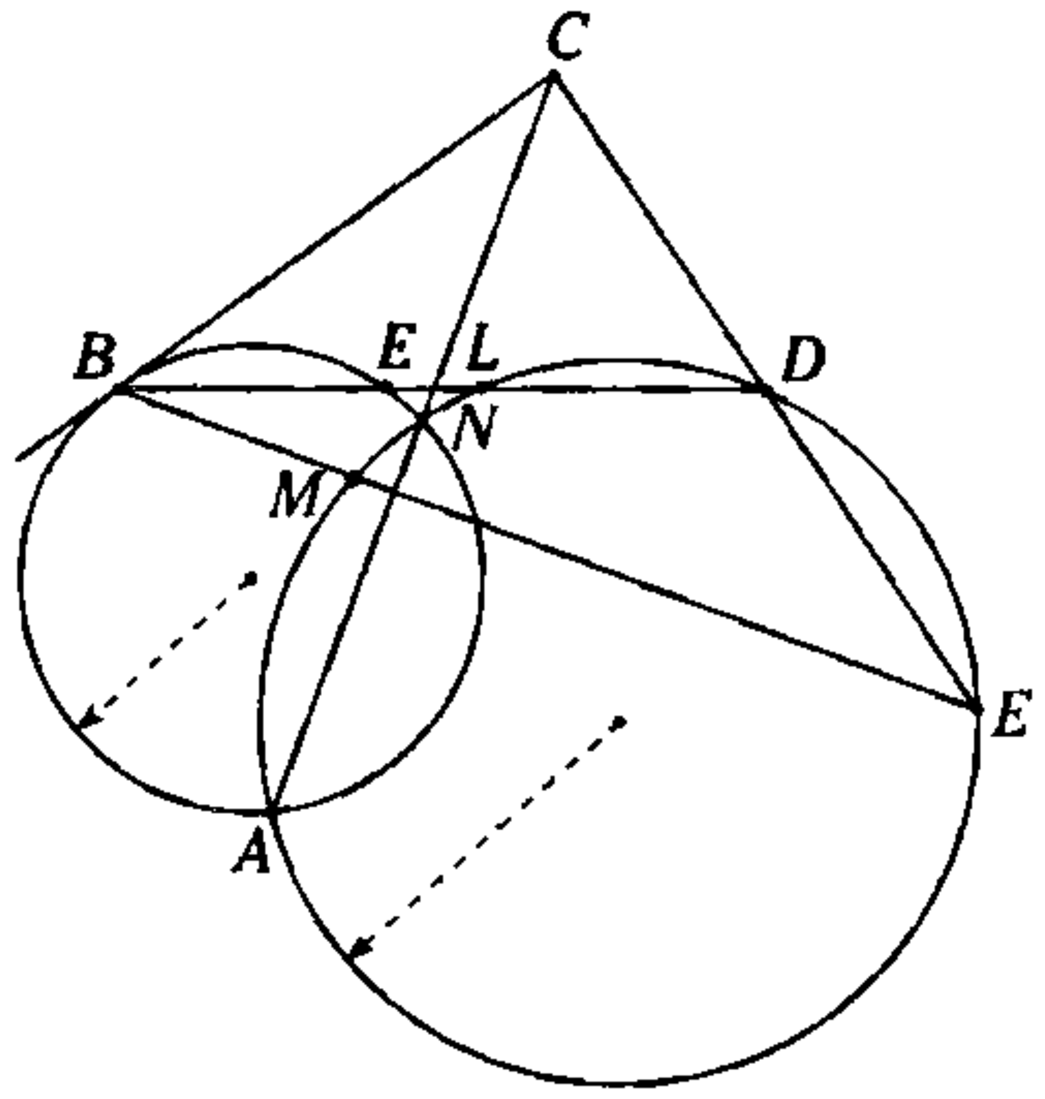
$$\therefore\ x.y = 6$$

CLAVE C

Problema 17

De la figura, B es punto de tangencia, si $m\overset{\frown}{BE} = \theta$, indique $m\overset{\frown}{MD}$.

A) $\theta/2$
B) 2θ
C) $\theta/4$
D) θ
E) $2\theta/3$



Resolución

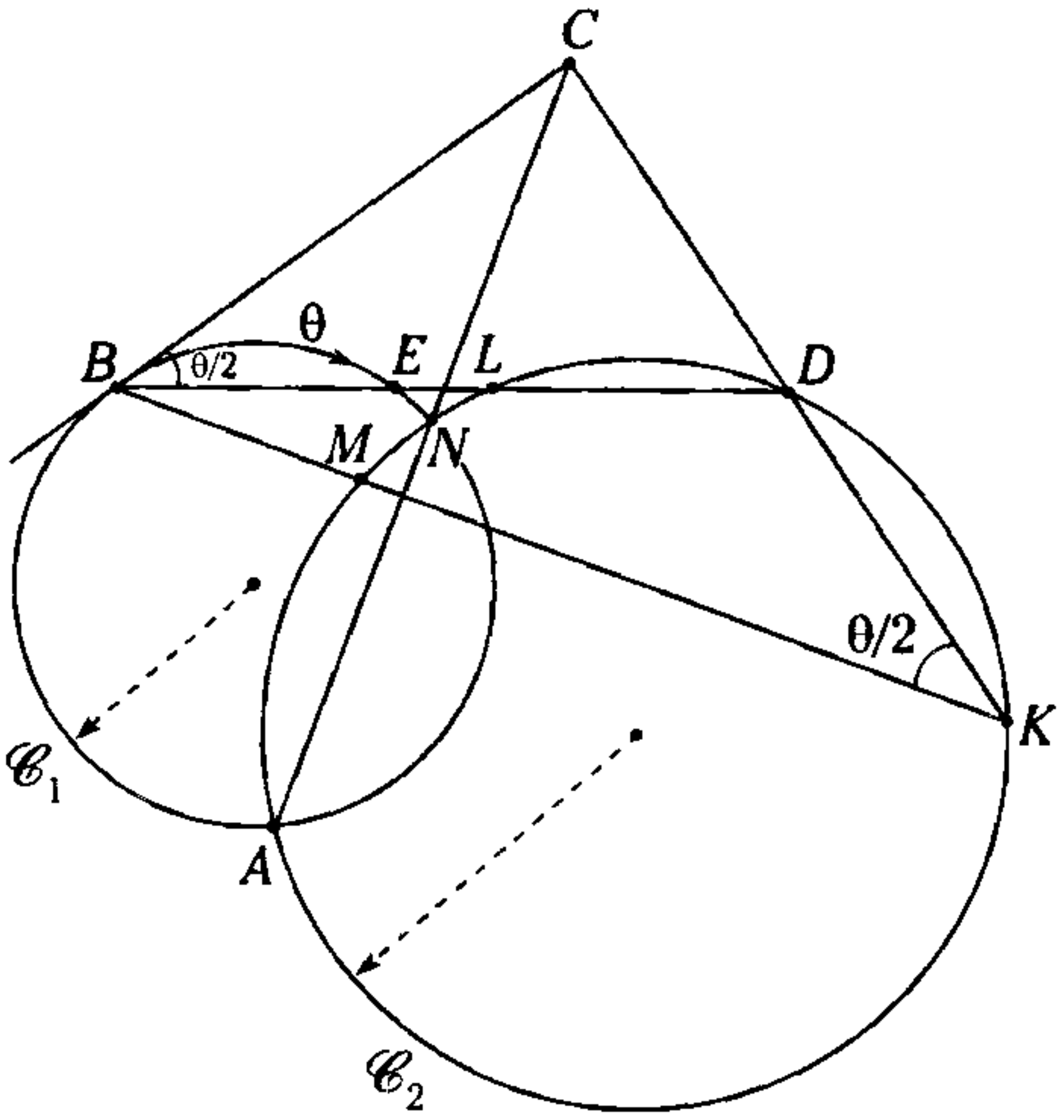


Figura 15.26

Piden $m\overset{\frown}{MD}$

Por ángulo semiinscrito en $\mathscr{C}_1$:

$$m\sphericalangle CBE = \frac{\theta}{2}$$

En $\mathscr{C}_1$: teorema de la tangente

$$(BC)^2 = (CA)(CN) \qquad \text{(I)}$$

En $\mathscr{C}_2$: teorema de las secantes

$$(CA)(CN) = (CK)(CD) \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$(BC)^2 = (CK)(CD)$$

Como en el $\triangle BCK$, se cumple la relación anterior

$$\rightarrow\ m\sphericalangle CBD = m\sphericalangle BKC = \theta/2$$

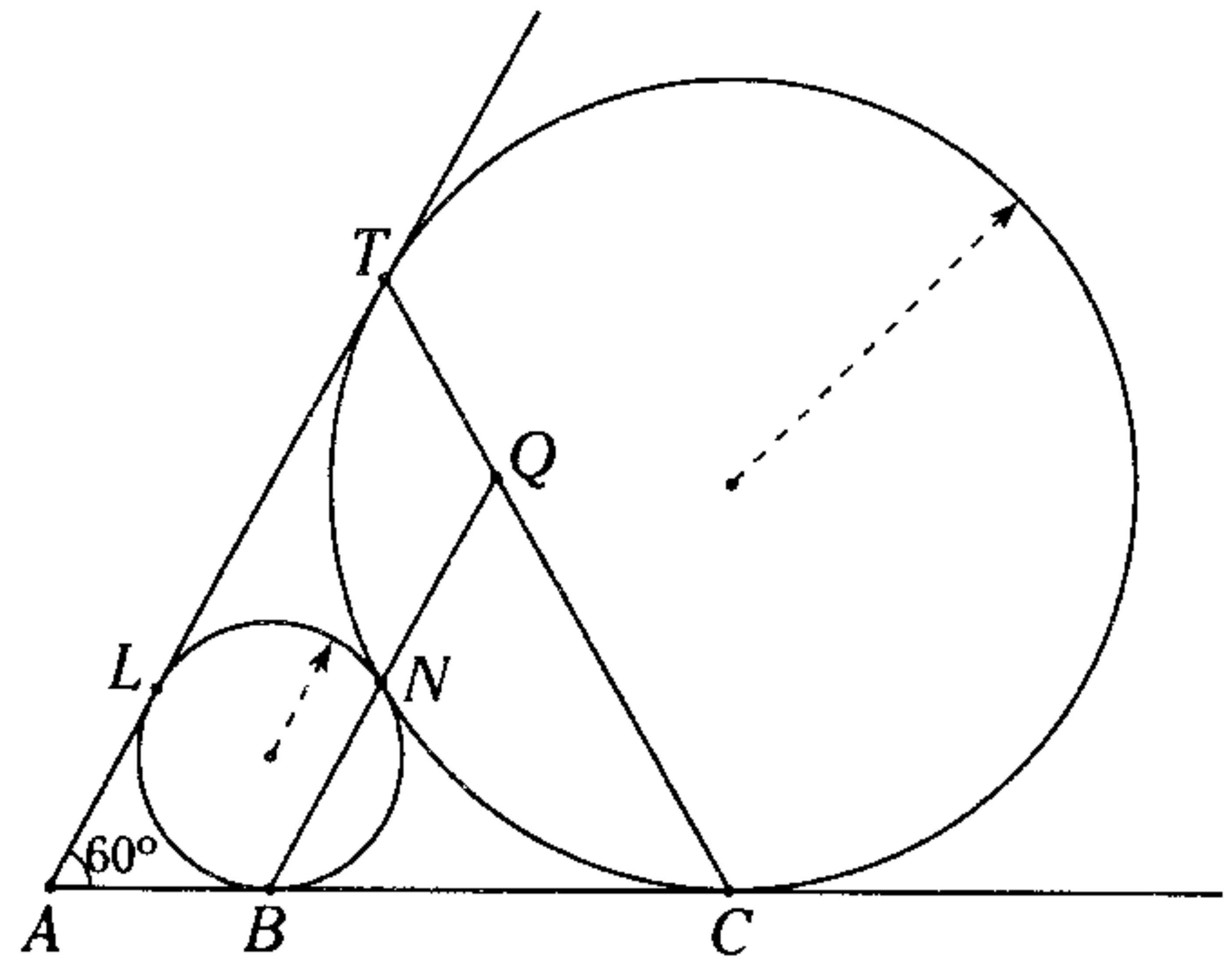
Por ángulo inscrito en $\mathscr{C}_2$

$$\therefore\ m\overset{\frown}{MD} = \theta$$

CLAVE D

Problema 18

De la figura, $NB=a$; B, C, N, L y T son puntos de tangencia. Calcule $(TQ)(QC)$.



A) a^2 B) $1{,}5a^2$ C) $2a^2$
D) $2{,}5a^2$ E) $3a^2$

Resolución

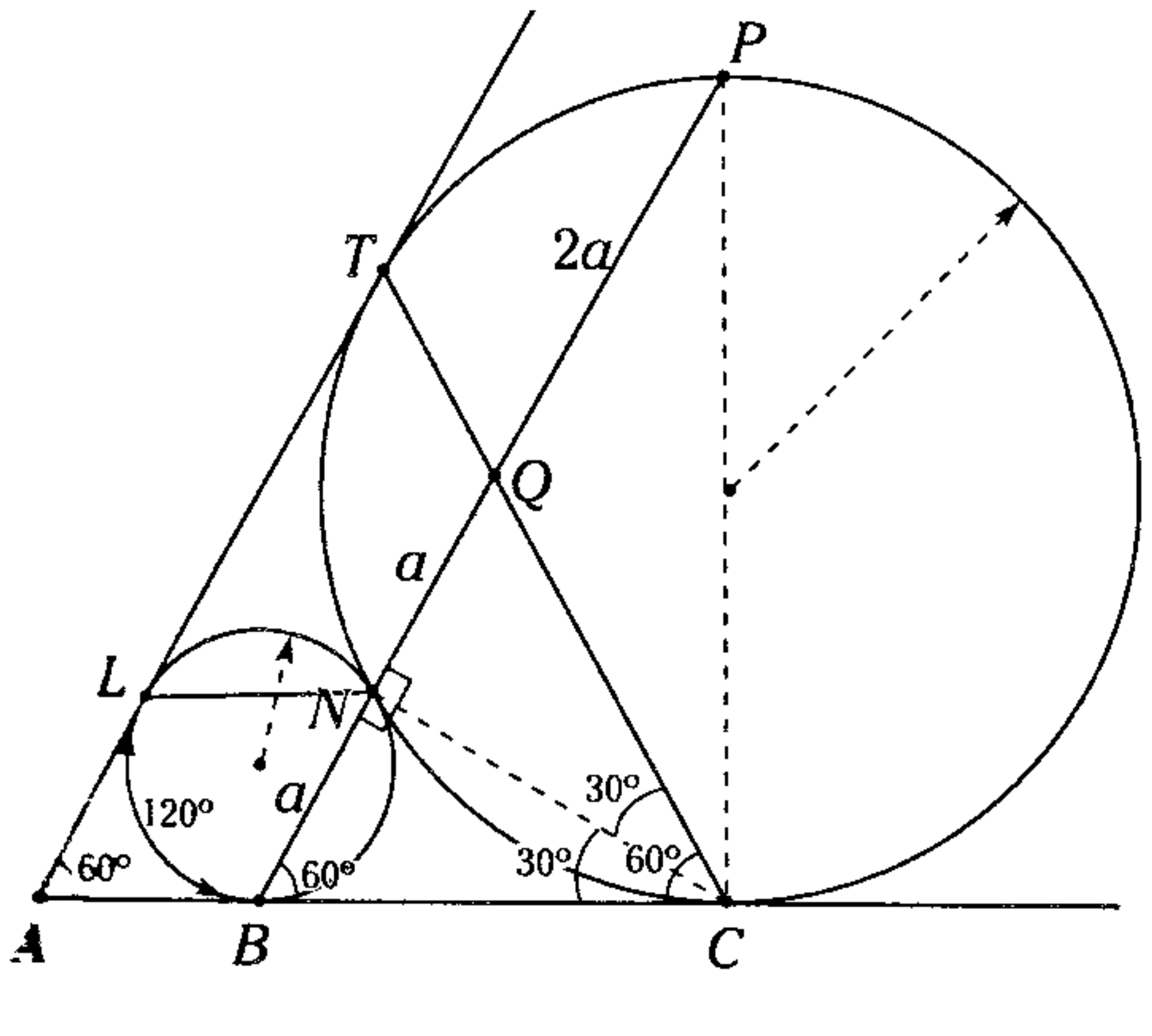


Figura 15.27

Piden $(TQ)(QC)$

$$\rightarrow \ m\widehat{LB}=120°$$

Por simetría

$$\rightarrow \ m\widehat{LN}=m\widehat{NB}=120° \ \text{ y } \ m\sphericalangle NBC=60°$$

Por teorema de circunferencia

$$m\widehat{TC}=120°$$

$$\rightarrow \ m\sphericalangle TCA=60°$$

De la figura, BQC es un triángulo equilátero.

Por teorema, $m\sphericalangle BNC=90°$

Se prolonga $\overline{BQ}$, hasta P.

$$\rightarrow \ m\widehat{PC}=180° \text{ y } \overline{PC}\text{: diámetro}$$

$\triangle PCB$: notable 30° y 60°

$$\rightarrow \ BP=4a \ \text{ y } \ QP=2a$$

En la circunferencia mayor: teorema de las cuerdas

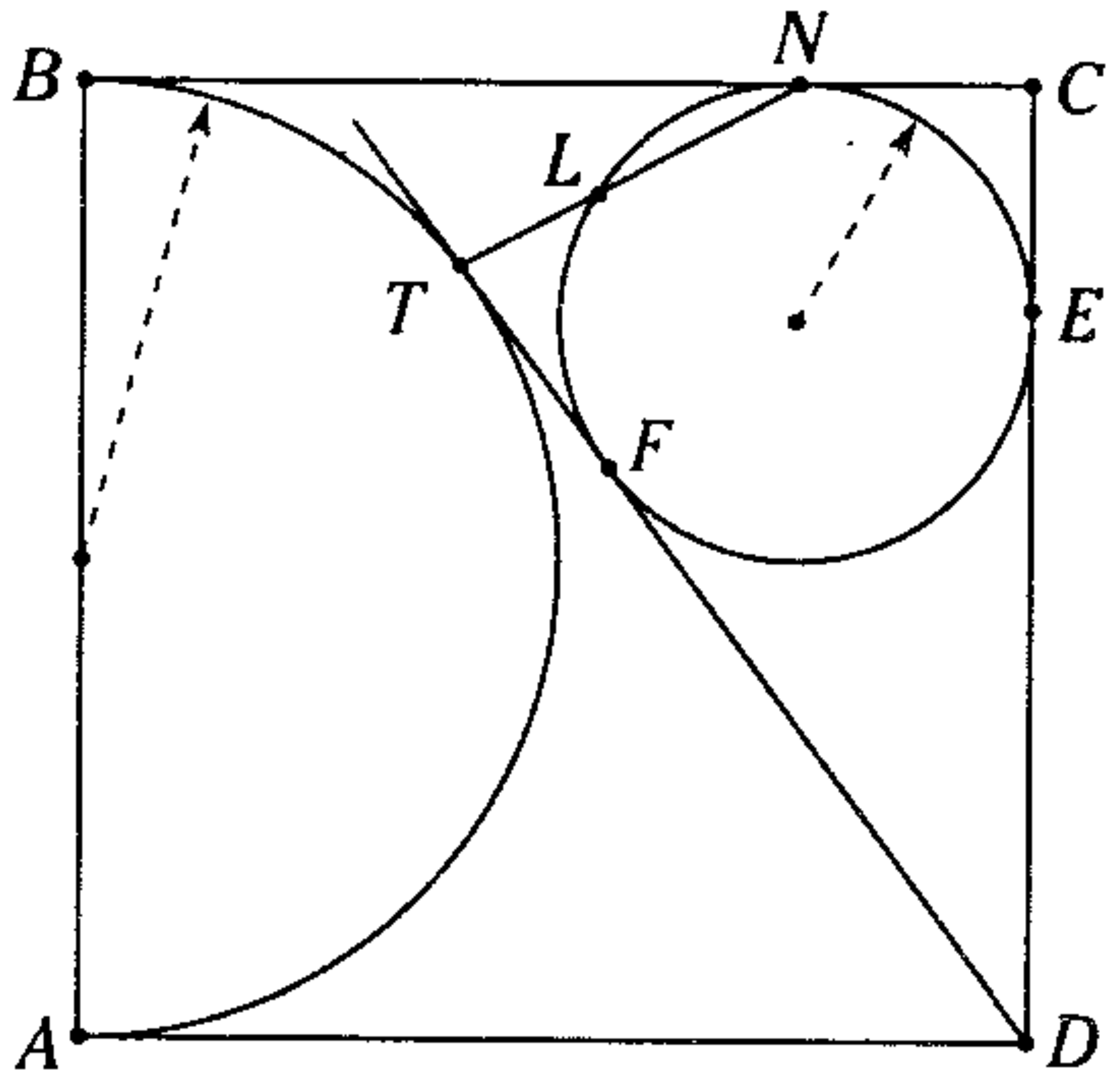
$$\rightarrow \ (TQ)(QC)=a\,.\,2a$$

$$\therefore \ (TQ)(QC)=2a^2$$

CLAVE C

Problema 19

De la figura, A, B, T, F, N y E son puntos de tangencia. Si $ABCD$ es un cuadrado, $NC=5$, calcule TL.



A) $6\sqrt{65}\ /13$ B) $4\sqrt{65}\ /13$
C) $\sqrt{65}\ /3$
D) $5\sqrt{65}\ /13$ E) $3\sqrt{65}\ /13$

Resolución

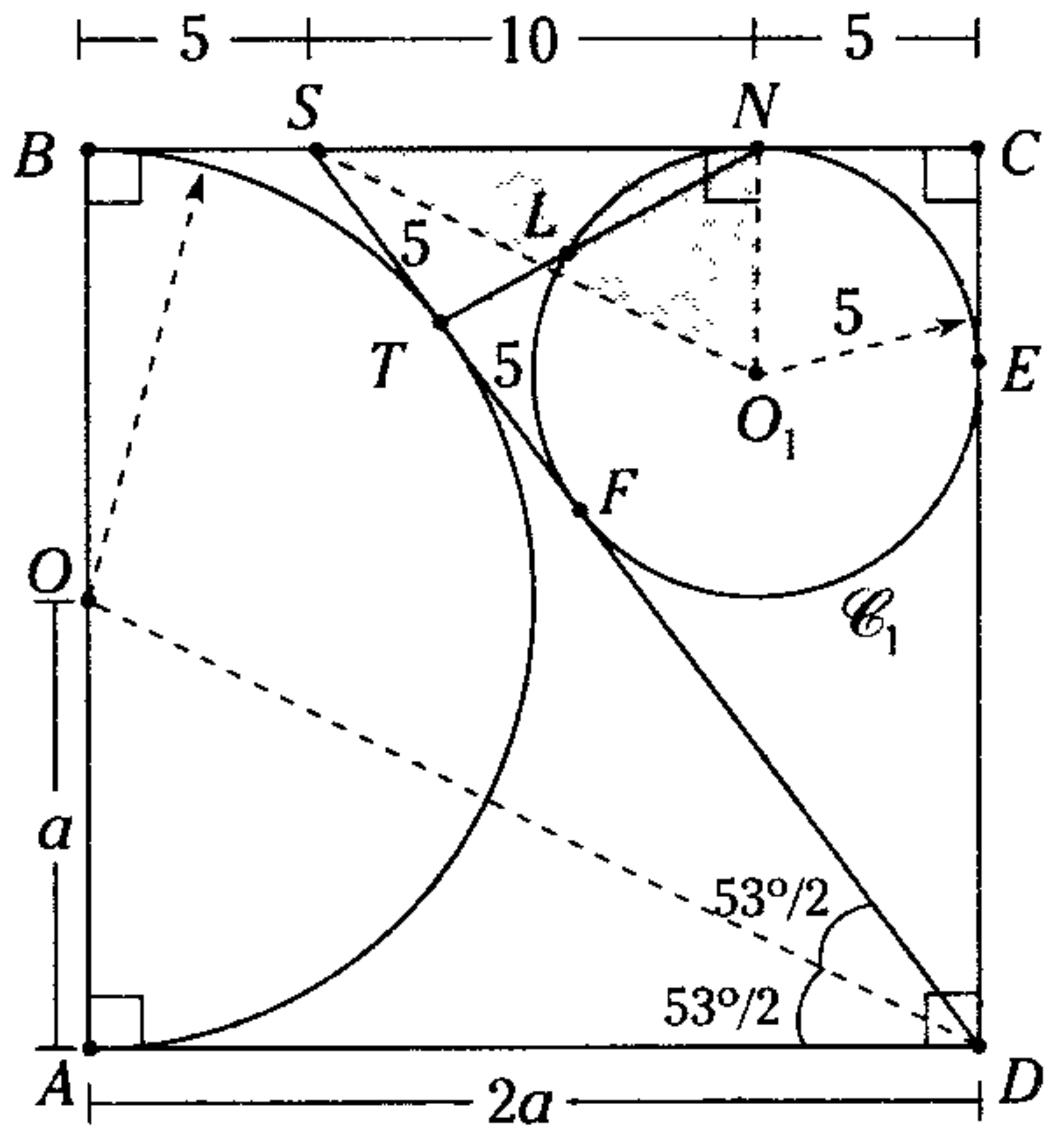


Figura 15.28

Piden $TL = x$

$\triangle OAD$: notable de $\frac{53°}{2}, \frac{127°}{2} \rightarrow m\measuredangle ODA = \frac{53°}{2}$

Por teorema $m\measuredangle ODA = m\measuredangle SDO$

$\rightarrow m\measuredangle SDA = m\measuredangle CSD = 53°$

$\triangle SNO_1$: notable de $\frac{53°}{2}, \frac{127°}{2} \rightarrow SN = 2(NO_1) = 10$

$\triangle SCD$: notable de 37° y 53°: si $SC = 15$

$\rightarrow CD = 20;\ BC = CD = 20 \ \therefore\ BS = 5$

Por teorema en la semicircunferencia

$BS = TS = 5, SF = 10 \rightarrow TF = 5$

$\triangle TSN$: teorema de cosenos

$TN^2 = 5^2 + 10^2 - 2(5)(10)\cos 53°$

$TN = \sqrt{65}$

En $\mathscr{C}_1$: Teorema tangente

$5^2 = \sqrt{65}\,(x)$

$\therefore\ x = \frac{5\sqrt{65}}{13}$

CLAVE D

Problema 20

En un triángulo rectángulo *ABC*, recto en *B*, se inscribe una circunferencia de centro *O*. Luego se traza $\overline{MN} // \overline{AC}$ tangente a la circunferencia ($M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{BC}$), de modo que $AB = 20$ y $BC = 15$. Calcule el circunradio del triángulo *MNO*.

A) $\frac{7}{6}\sqrt{2}$ B) $\frac{11}{6}\sqrt{2}$ C) $\frac{25}{12}\sqrt{2}$

D) $2\sqrt{2}$ E) $\frac{13}{12}\sqrt{2}$

Resolución

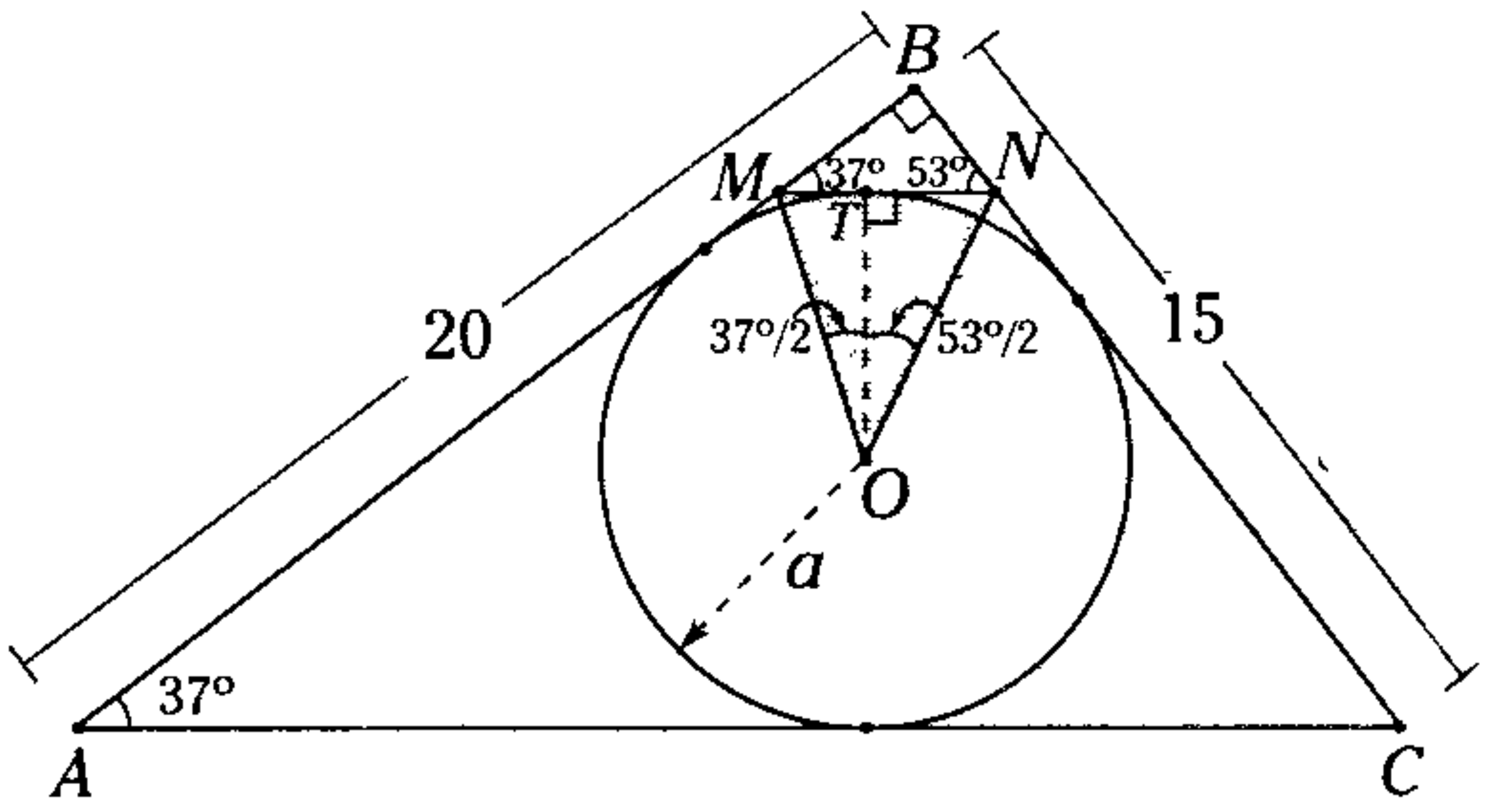


Figura 15.29

Piden el circunradio del $\triangle MNO$: R

$\triangle ABC$: notable de 37° y 53° $\rightarrow AC = 25$

Luego, por el teorema de Poncelet

$20 + 15 = 25 + 2a \rightarrow a = 5$

$\triangle MTO$: notable de $\frac{37°}{2}, \frac{143°}{2} \rightarrow MO = \frac{5}{3}\sqrt{10}$

$\triangle NTO$: notable de $\frac{53°}{2}, \frac{127°}{2} \rightarrow NO = \frac{5}{2}\sqrt{5}$

$\triangle MNO$: teorema del producto de dos lados

$(MO)(NO) = (TO)(2R)$

$\frac{5}{3}\sqrt{10} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{5} = 5(2R)$

$\therefore\ R = \frac{25}{12}\sqrt{2}$

CLAVE C

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

CONCEPTOS PREVIOS

PROYECCIÓN ORTOGONAL

La proyección ortogonal de un punto respecto a una recta, es el pie de la perpendicular trazada por dicho punto a la recta. A esta perpendicular se denomina proyectante y a la recta eje de proyección.

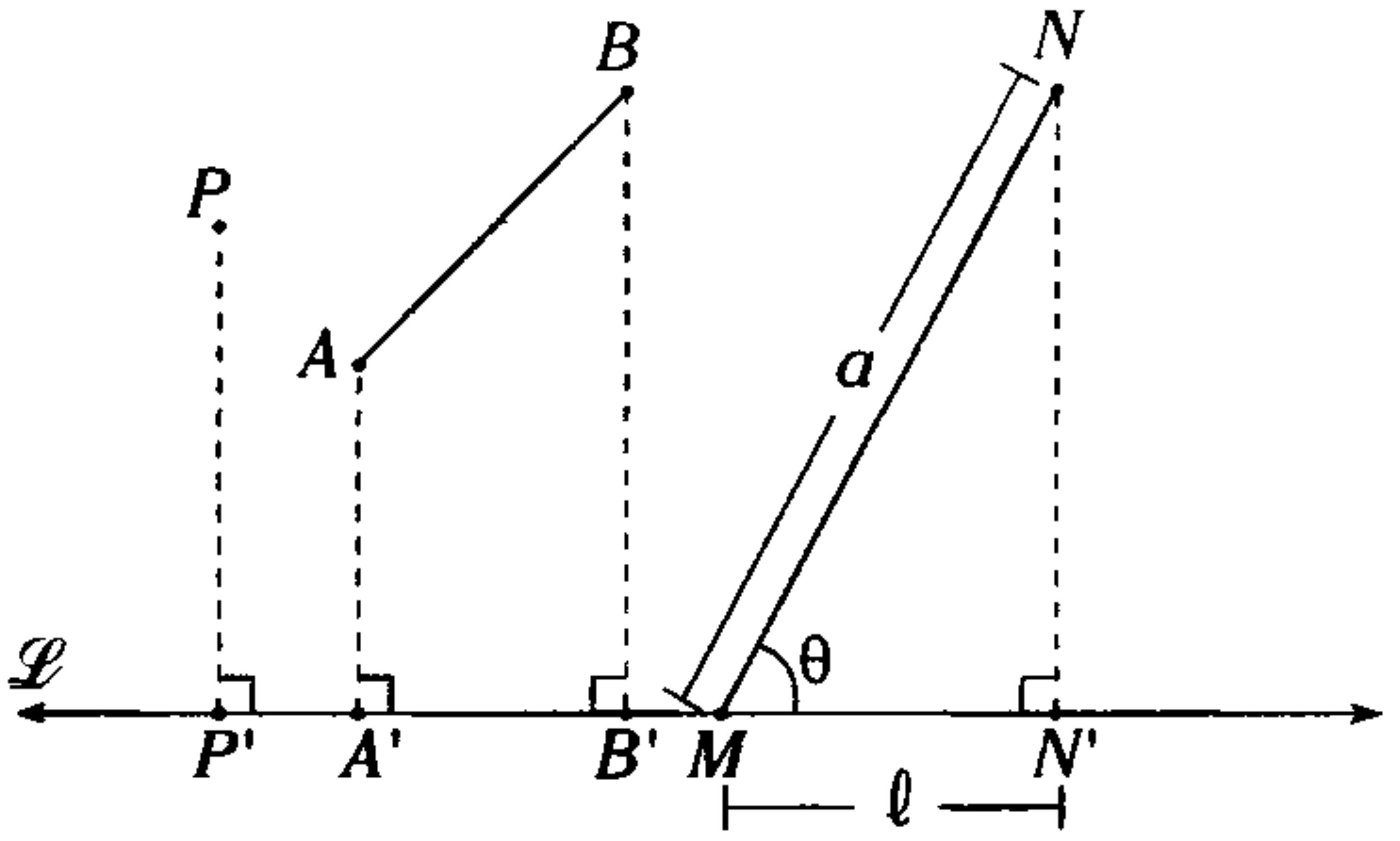


Figura 15.30

En la figura, $\overline{PP'} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ ($P' \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$), así

P': Proyección ortogonal de P respecto a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

$\overline{PP'}$: Proyectante de P respecto a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: Eje de proyección

$\overline{A'B'}$: Proyección ortogonal de $\overline{AB}$ respecto a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$\overline{M'N'}$: Proyección ortogonal de $\overline{MN}$ respecto a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

Teorema: si θ es la medida del ángulo determinado por $\overline{MN}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

En ⊿MNN' se cumple

$$\ell = a\cos\theta$$

Es decir, la longitud de la proyección ortogonal de un segmento respecto a una recta, es igual a la longitud de dicho segmento multiplicado por el coseno del menor ángulo determinado por dicho segmento y dicha recta.

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

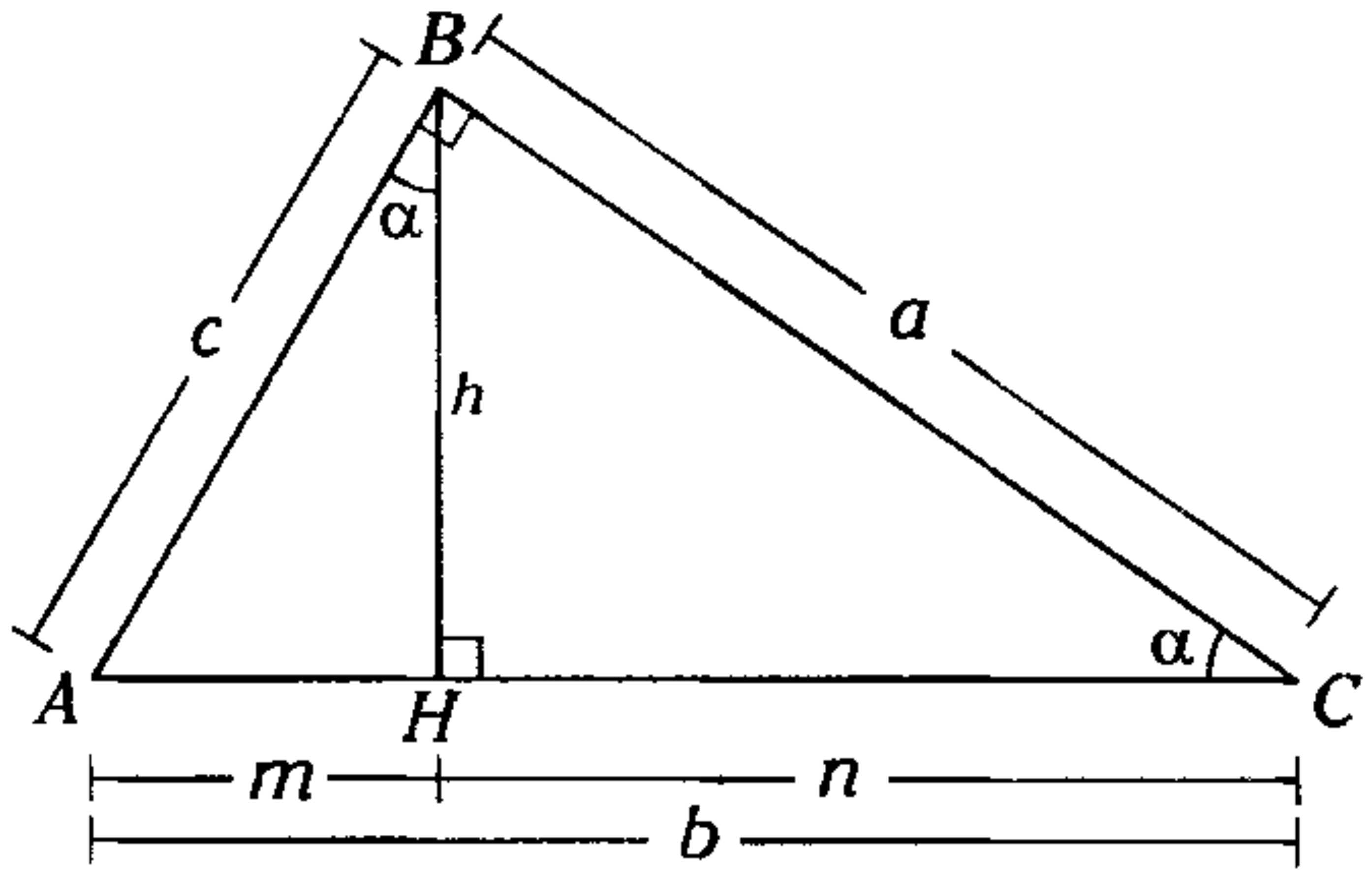


Figura 15.31

Según la figura 15.31, en el ⊿ABC

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: Catetos

$\overline{AC}$: Hipotenusa

$\overline{BH}$: Altura relativa a la hipotenusa

$\overline{AH}$ y $\overline{CH}$: Proyecciones ortogonales de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respecto a $\overline{AC}$ respectivamente.

Además

$$⊿ABH \sim ⊿BCH \sim ⊿ACB$$

Teorema

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la proyección ortogonal de dicho cateto respecto a la hipotenusa.

De la figura 15.31, se cumple

$$c^2 = bm \qquad \text{(I)}$$

$$a^2 = bn \qquad \text{(II)}$$

Demostración

De la figura 15.31, $\triangle ABC \sim \triangle AHB$ (A.A.A.)

$$\frac{c}{b}=\frac{m}{c}$$

$$\therefore \quad \boxed{c^2=bm}$$

análogamente se cumple $\boxed{a^2=bn}$

Además de (I)$\div$(II)

$$\boxed{\frac{c^2}{a^2}=\frac{m}{n}}$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

De la figura 15.31, se cumple

$$\boxed{b^2=a^2 \div c^2}$$

Demostración

Sumando (I) y (II)

$$c^2+a^2=bm+bn$$

Ordenando y factorizando

$$a^2+c^2=b(m+n),$$

pero $m+n=b$

$$\therefore \quad \boxed{b^2=a^2+c^2}$$

Teorema

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de las proyecciones ortogonales de los catetos respecto de dicha hipotenusa.

De la figura 15.31, se cumple

$$\boxed{h^2=mn}$$

Demostración

De la figura 15.31, $\triangle AHB \sim \triangle BHC$ (A.A.A.)

$$\frac{h}{n}=\frac{m}{h} \rightarrow h^2=mn$$

Teorema

En todo triángulo rectángulo, el producto de las longitudes de sus catetos es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la altura relativa a dicha hipotenusa.

De la figura 15.31, se cumple

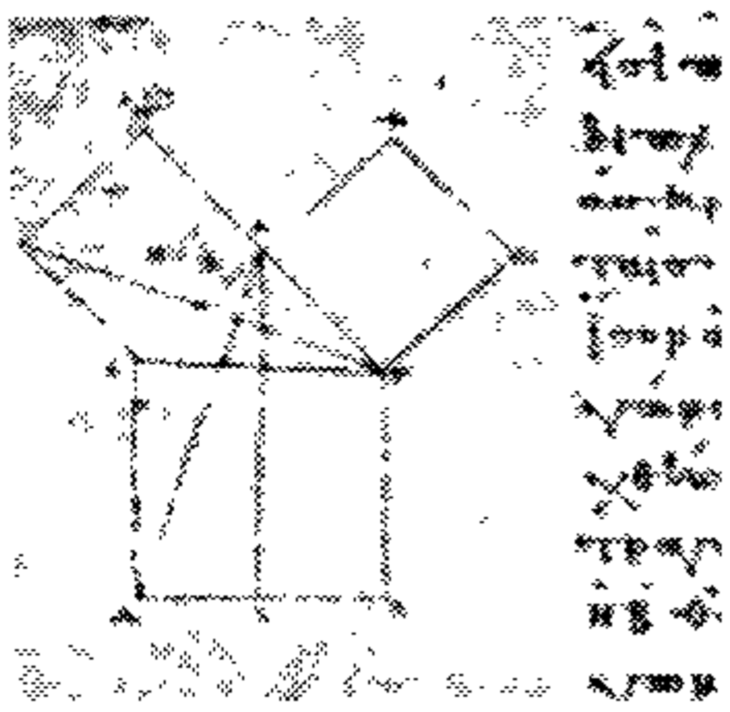
$$\boxed{ca=bh}$$

Demostración

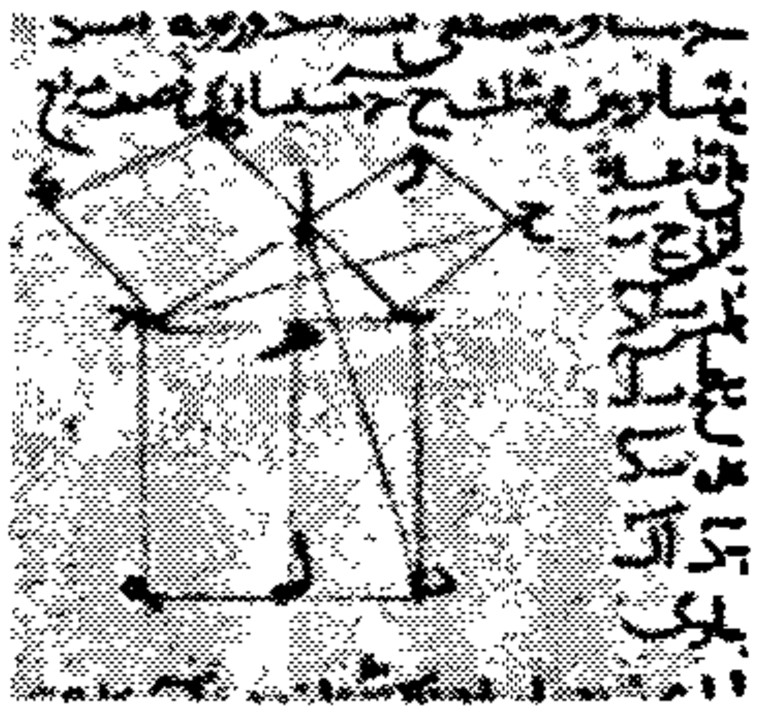
De la figura, $\triangle ABC \sim \triangle AHB$ (A.A.A.)

$$\frac{a}{h}=\frac{b}{c}$$

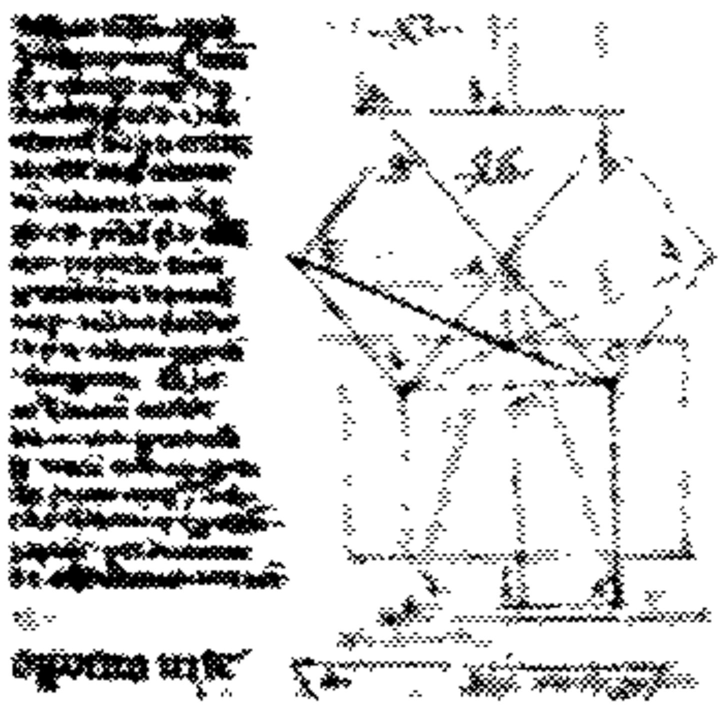
$$\therefore \quad \boxed{ca=bh}$$



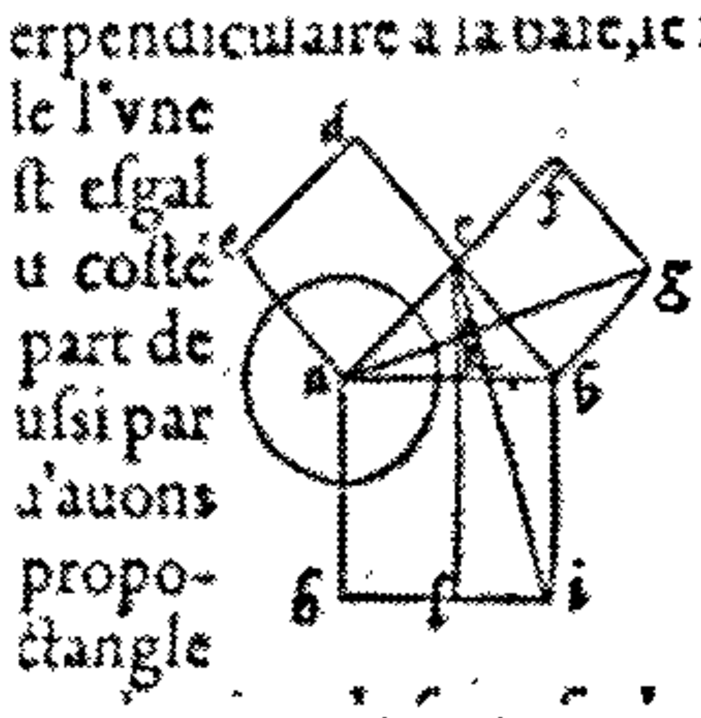
Griego, c. 800



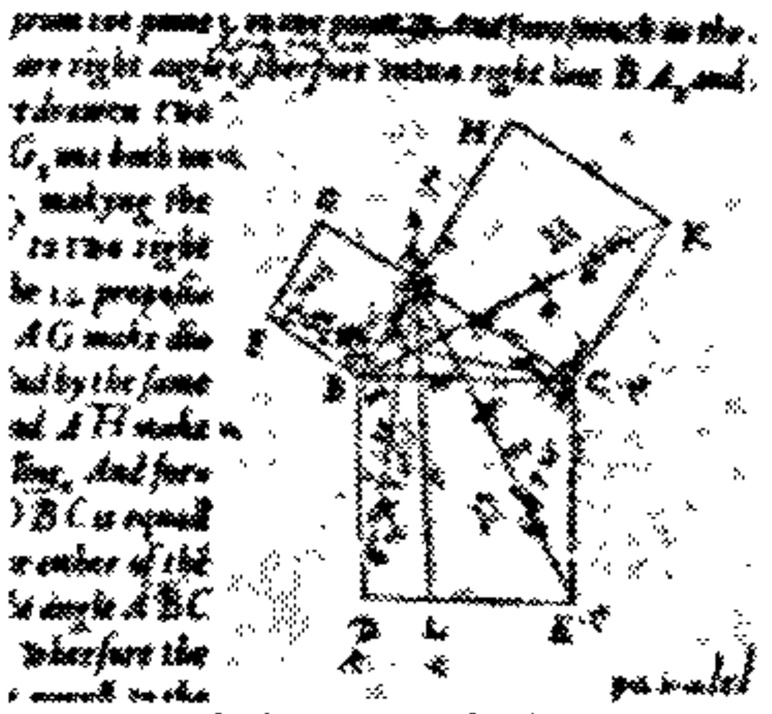
Arábigo, c.1250



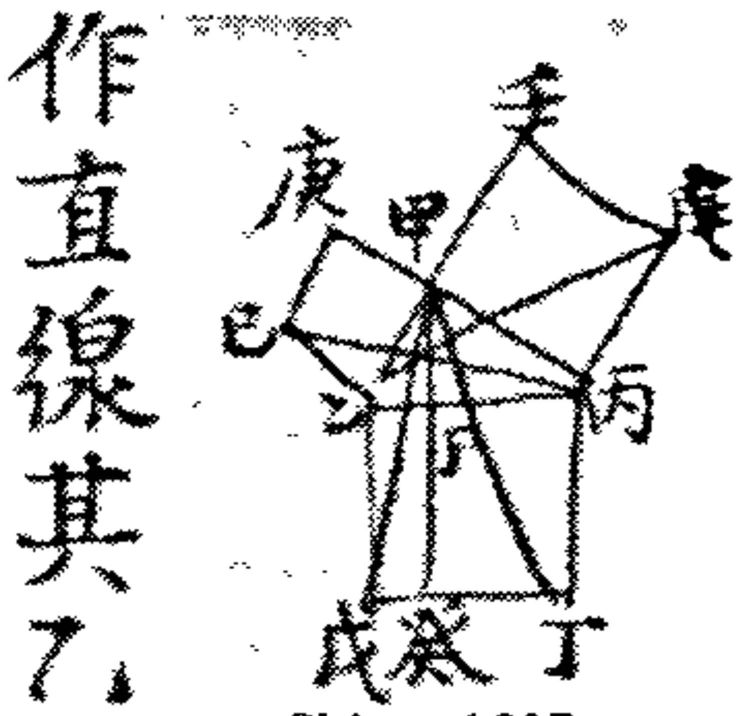
Inglés, 1570



Francés, 156



Griego, c. 800



Chino, 1607

El teorema de Pitágoras fue, durante siglos, como el "santo y seña" de los geometras. Los grabados muestran su exposición desde el griego hasta el chino.

Teorema

En todo triángulo rectángulo, la inversa del cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la suma de las inversas de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

De la figura, se cumple

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}$$

Demostración

Por teorema

sabemos

$$ca = bh$$

elevando al cuadrado la relación anterior

$$c^2a^2 = b^2h^2 \qquad \text{(I)}$$

Del teorema de Pitágoras

Sabemos

$$b^2 = a^2 + c^2 \qquad \text{(II)}$$

(II) en(I)

$$c^2a^2 = (a^2 + c^2)h^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{h^2}=\frac{(a^2+c^2)}{c^2a^2}$$

$$\therefore \frac{1}{h^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}$$

Teorema

En toda semicircunferencia el cuadrado de la longitud de una cuerda, consecutiva al diámetro, es igual al producto de longitudes del diámetro y la proyección ortogonal de la cuerda respecto a dicho diámetro.

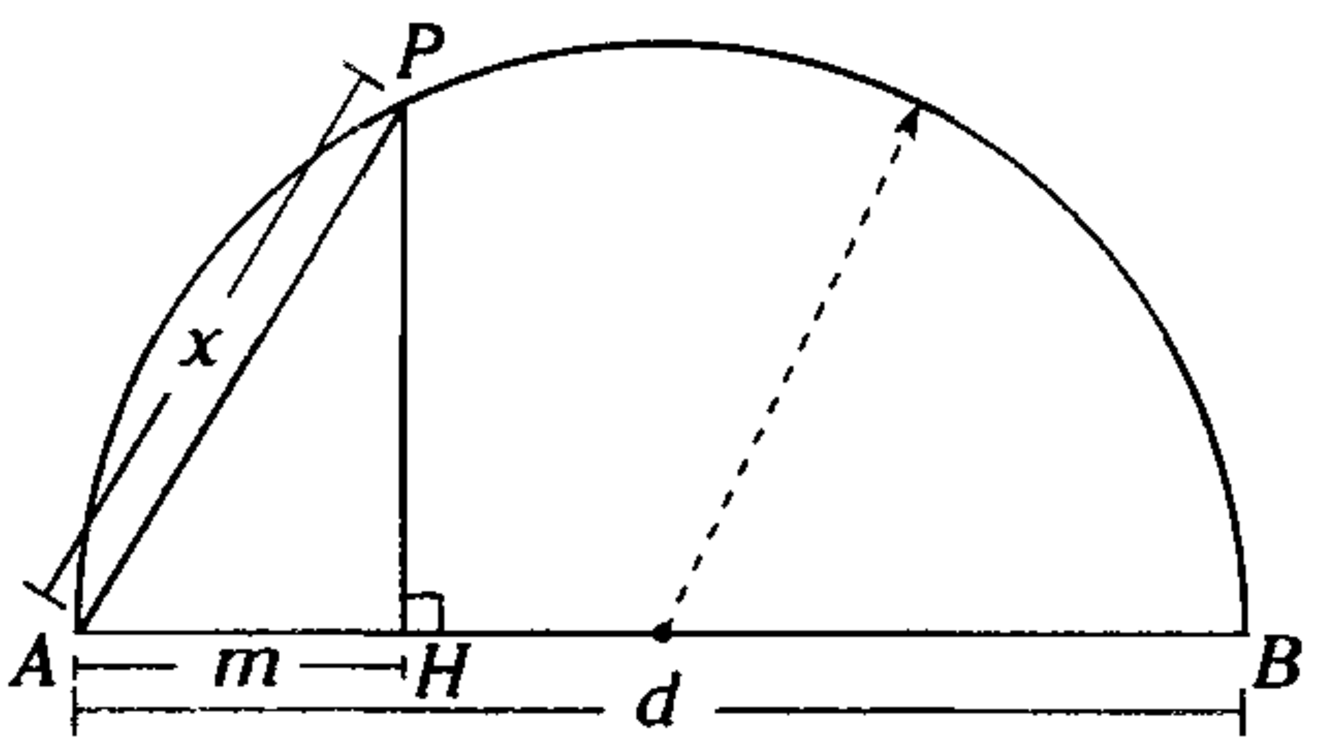


Figura 15.32

En la figura 15.32, $\overline{AH}$ es proyección ortogonal de la cuerda AP, respecto del diámetro AB.

Se cumple

$$x^2 = d.m$$

Demostración

Si unimos P con B mediante un segmento de recta, m$\angle APB$ = 90°; luego, en el ⊿ APB por relaciones métricas se cumple que el cateto AP es media proporcional con el diámetro y su respectiva proyección ortogonal.

$$(AP)^2 = (AB).(AH)$$

$$\therefore x^2 = d.m$$

Teorema

En toda semicircunferencia, el cuadrado de la perpendicular trazada desde un punto de ella hacia el diámetro es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados por el pie de la perpendicular en el diámetro.

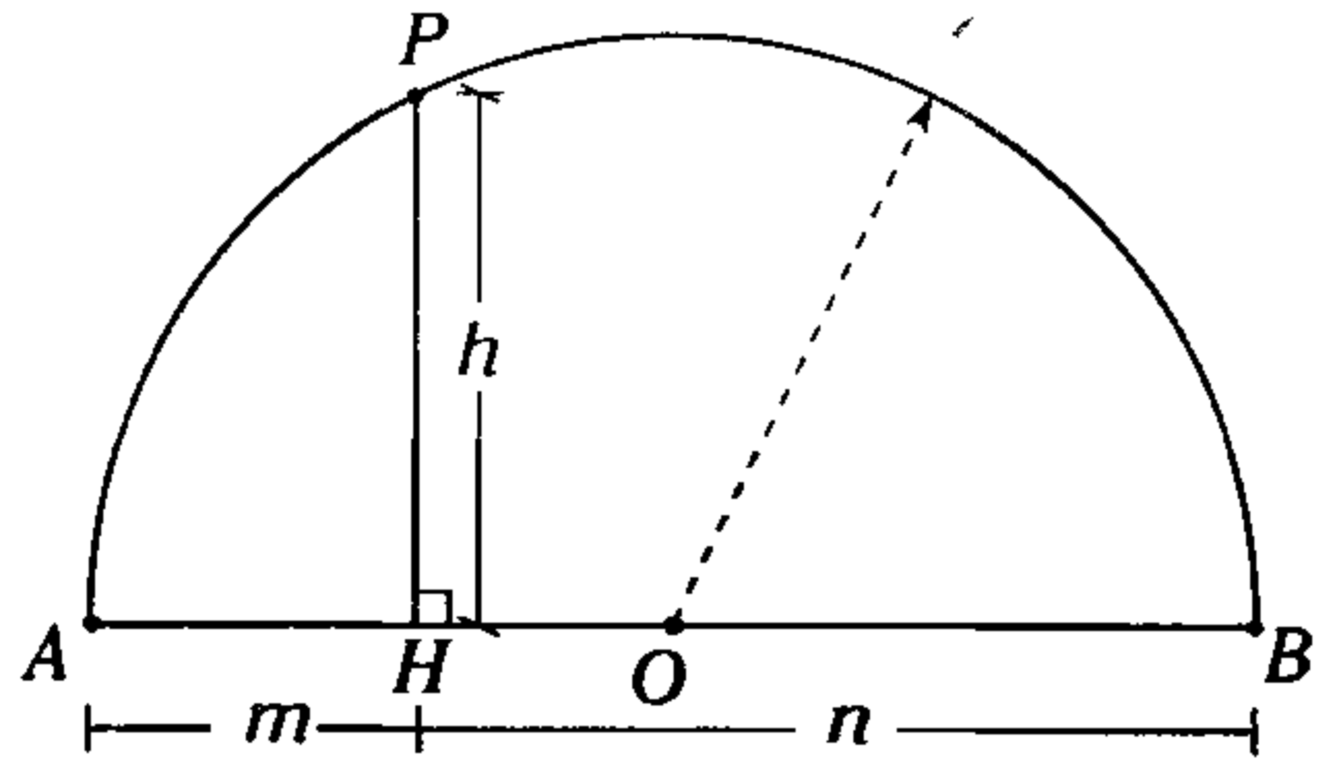


Figura 15.33

En la figura, $\overline{PH} \perp \overline{AB}$

Se cumple

$\rightarrow$ $(PH)^2 = (AH)(HB)$

$$\boxed{h^2 = m \cdot n}$$

Demostración

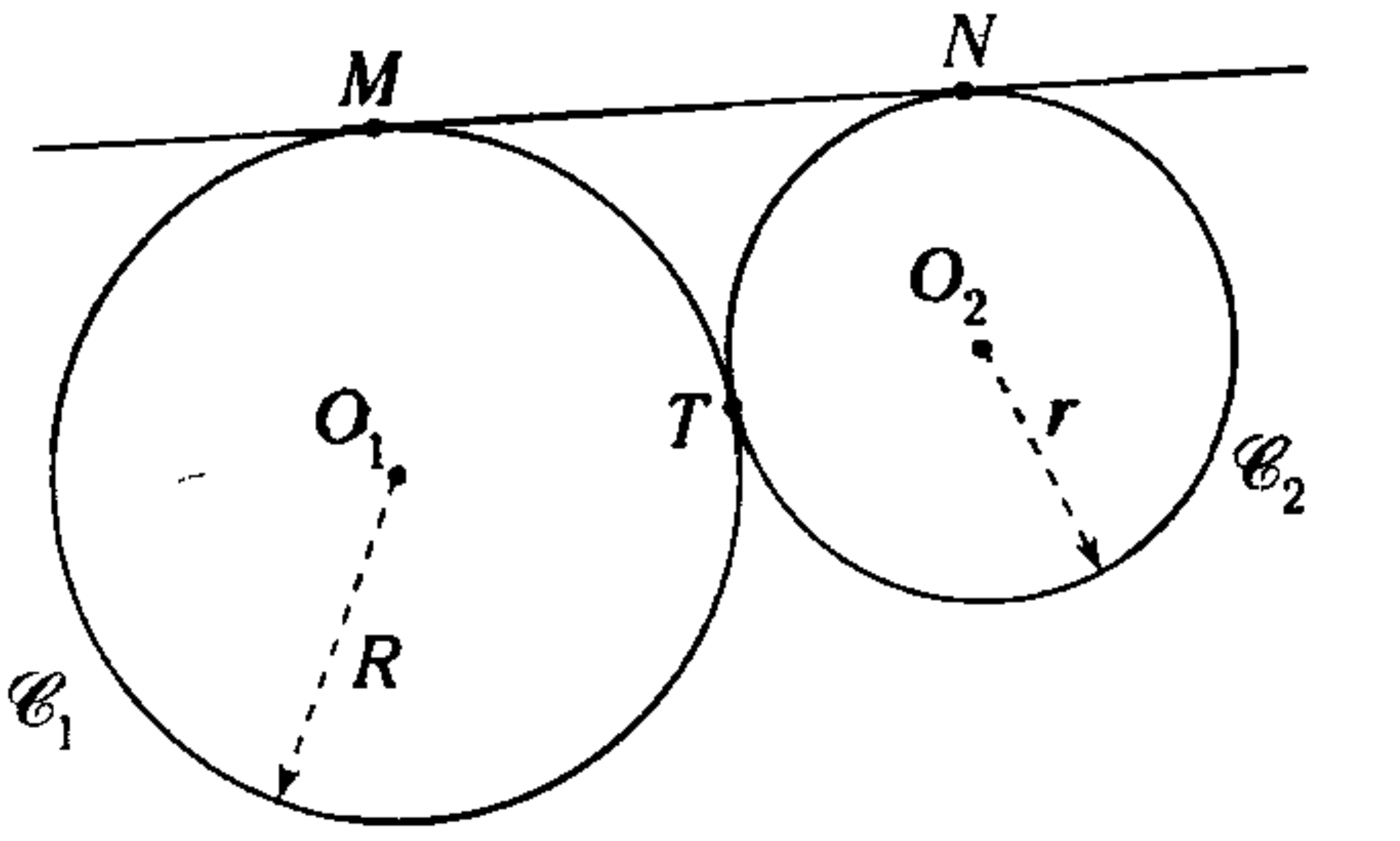
Si unimos A con P y luego P con B mediante segmentos de recta, entonces $\angle APB = 90°$, luego por relaciones métricas en el $\triangle APB$ la altura PH es media proporcional con las proyecciones ortogonales ($\overline{AH}$ y $\overline{HB}$) de los catetos AP y PB respectivamente con lo cual quedará demostrado el teorema.

$(PH)^2 = (AH)(HB)$

$$\therefore \boxed{h^2 = m \cdot n}$$

Teorema

Dadas dos circunferencias tangentes exteriores, la longitud del segmento tangente común exterior a dichas circunferencias es igual a dos veces la raíz cuadrada del producto de los radios de dichas circunferencias.



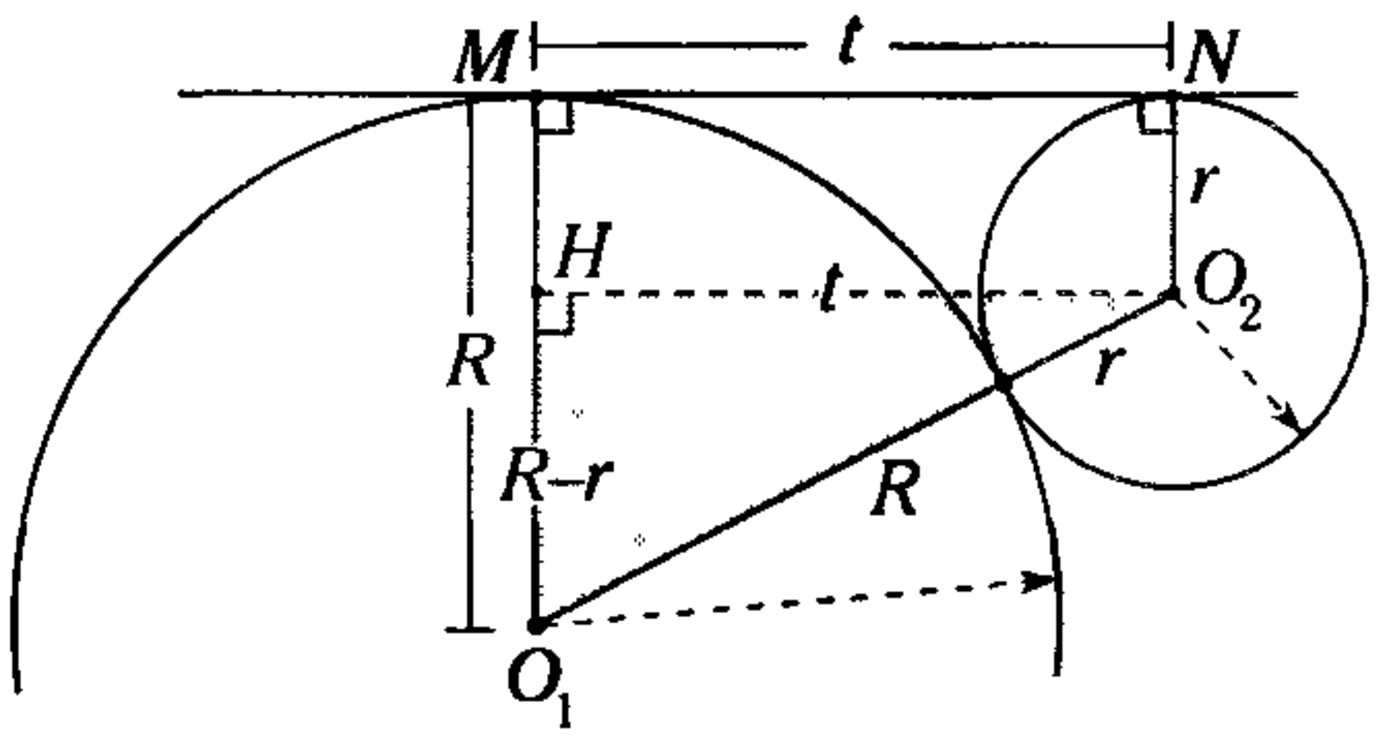
(a)

Si T, M y N son puntos de tangencia

$$\rightarrow \boxed{MN = 2\sqrt{R.r}}$$

Demostración

Trazamos $\overline{O_1M}$ y $\overline{O_2N}$, entonces $\overline{O_1M} \perp \overline{MN}$ y $\overline{O_2N} \perp \overline{MN}$. Dado que los centros y el punto de tangencia son colineales; entonces, $O_1O_2 = R + r$.



(b)

Figura 15.34

Sea $R > r$

luego trazamos $\overline{O_2H} \perp \overline{O_1M}$

$\rightarrow$ $O_2H = MN = t$ y $O_1H = R - r$

En el $\triangle O_1HO_2$: por el teorema de Pitágoras

$t_2 = (R+r)^2 - (R-r)^2$

operando $t^2 = 4R.r$

$$\therefore \boxed{MN = 2\sqrt{R.r}}$$

Observación

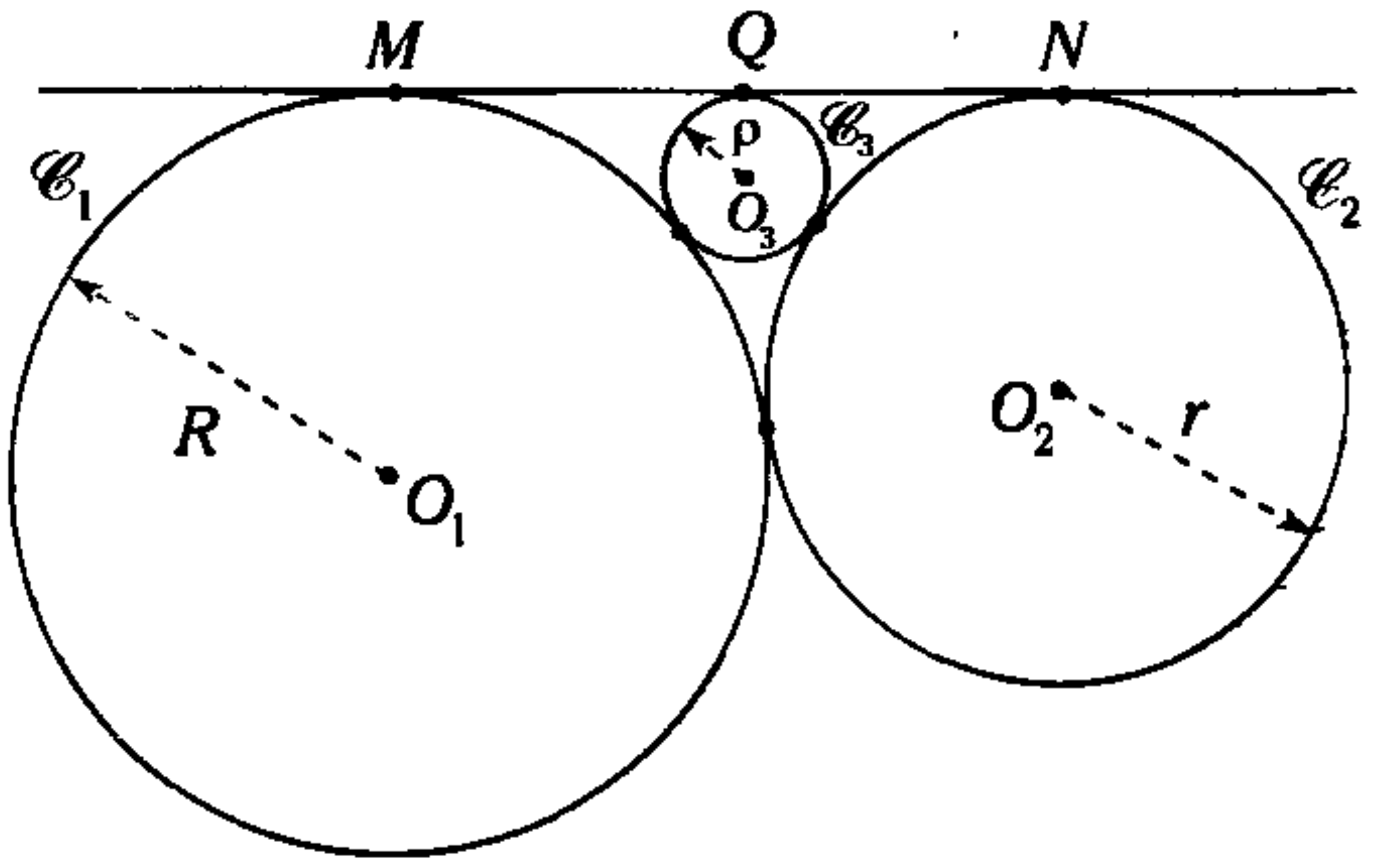


Figura 15.35

Análogamente al caso anterior para ($\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$); ($\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$) y ($\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_3$), se cumple, respectivamente

$MN = 2\sqrt{R.r}$ $\rightarrow$ $MQ = 2\sqrt{\rho.R}$

$QN = 2\sqrt{\rho.r}$

Además $MN = MQ + QN$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}}$$

CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES

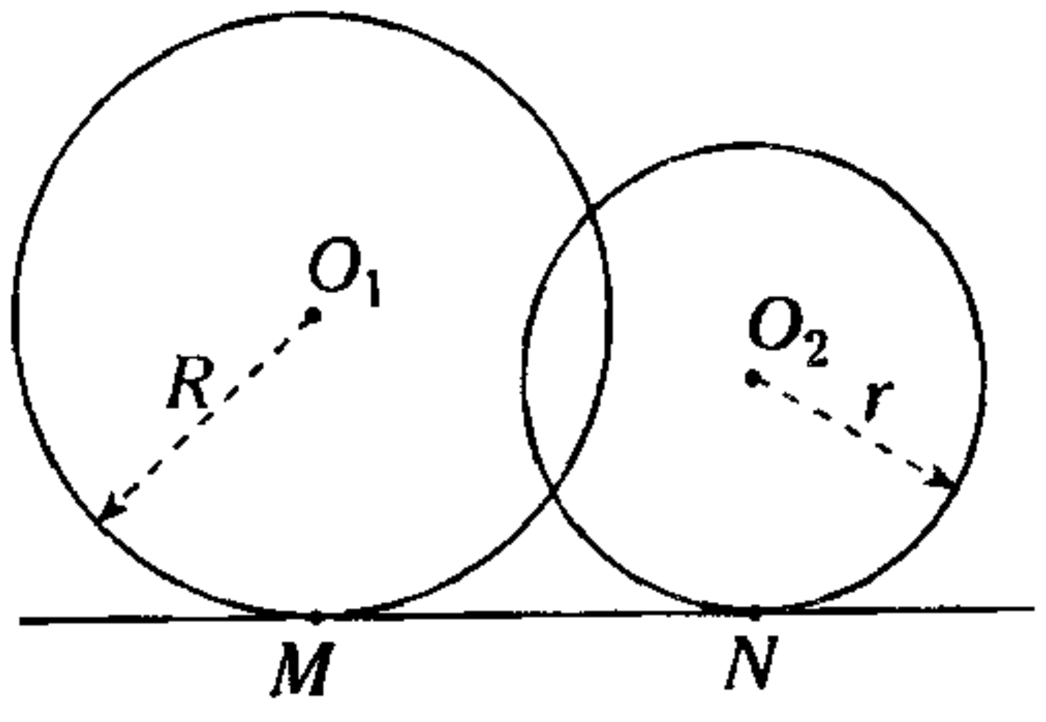


Figura 15.36

Si M y N son puntos de tangencia:

$$MN = \sqrt{2Rr}$$

TEOREMA DE DOSTOR

Dados dos triángulos rectángulos semejantes, el producto de las longitudes de sus hipotenusas es igual a la suma de los productos de las longitudes de sus catetos homólogos, respectivamente.

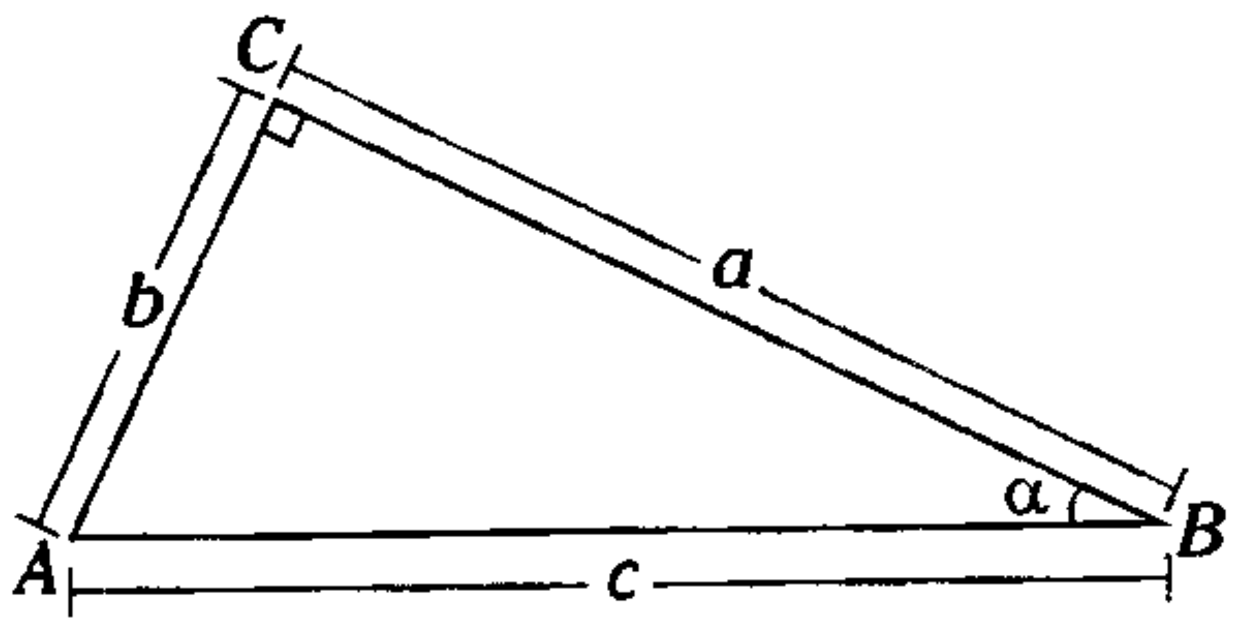


Figura 15.37

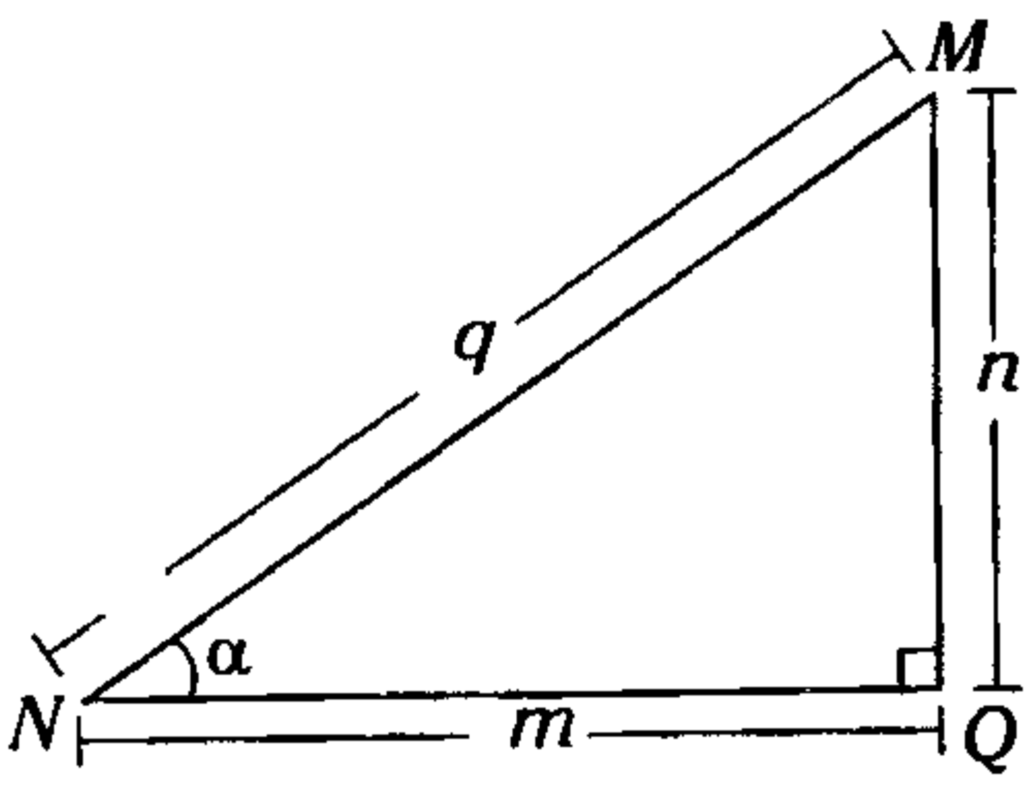


Figura 15.38

Se cumple

$$c.q = a.m + b.n$$

Demostración

Por teoría de proporciones, sabemos que si

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{s} = \frac{t}{u} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{r+t}{s+u}$$

Como los $\triangle ACB$ y $\triangle MQN$ son semejantes, se cumple que

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{q}$$

Si a cada razón se multiplica y divide con el consecuente, se tiene

$$\frac{a.m}{m^2} = \frac{b.n}{n^2} = \frac{c.q.}{q^2}$$

De lo anterior $\frac{c.q}{q^2} = \frac{a.m + b.n}{m^2 + n^2}$, pero en el

$\triangle MQN$: $m^2 + n^2 = q^2$

$$\therefore \quad c.q = a.m + b.n$$

Teorema

En todo triángulo rectángulo, se cumple que el cubo de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y las proyecciones ortogonales determinadas en los catetos por los segmentos parciales determinados en la hipotenusa por el pie de la altura.

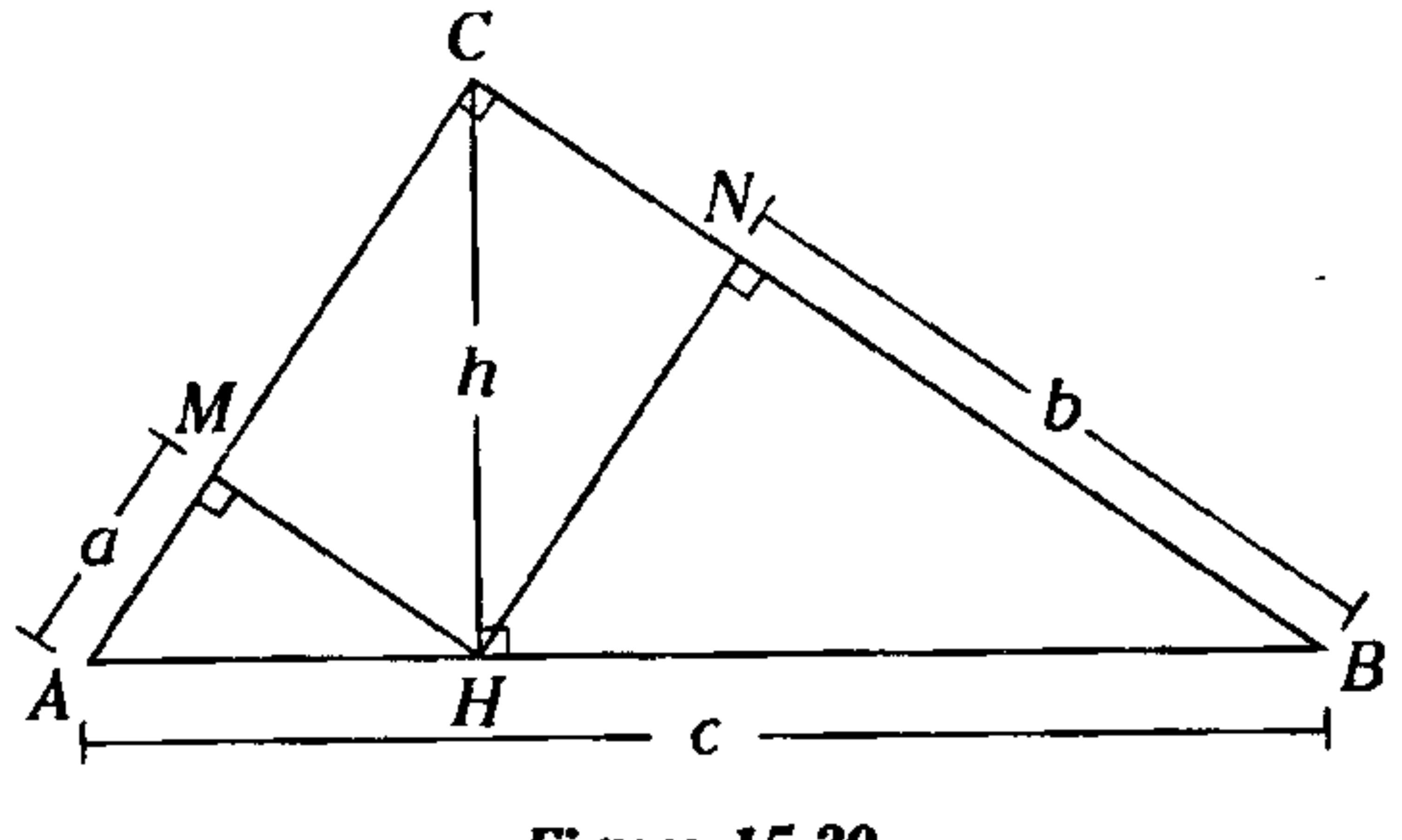


Figura 15.39

$\overline{AM}$: proyección ortogonal de $\overline{AH}$ respecto de $\overline{AC}$.

$\overline{BN}$: proyección ortogonal de $\overline{HB}$ respecto de $\overline{BC}$.

$$\rightarrow \quad h^3 = a.c.b$$

Demostración

De la figura 15.39, sabemos que

$(AH)^2 = (AC).a;$

$(BH)^2 = (BC).b$

Multiplicando se tiene

$$(AH)^2(BH)^2 = (AC)(BC).a.b. \qquad \text{(I)}$$

Pero

$$(AH)(BH) = h^2 \text{ y } (AC)(BC) = c.h$$

Reemplazando en (I)

$$h^4 = c.h.a.b$$

$$\therefore \boxed{h^3 = a.c.b}$$

Observación

Elevando al cuadrado

$$(AC)^2 = c.(AH)$$

$$(AC)^4 = c^2.(AH)^2$$

es decir

$$(AC)^4 = c^2.(AC).a$$

$$\therefore (AC)^3 = c^2.a \rightarrow (AC)^2 = c^{4/3}.a^{2/3}$$

Analógamente

$$(BC)^2 = c^{4/3}.b^{2/3}$$

Como

$$(AC)^2 + (BC)^2 = c^2$$

reemplazando obtenemos

$$\boxed{(\sqrt[3]{c})^2 = (\sqrt[3]{a})^2 + (\sqrt[3]{b})^2}$$

TEOREMAS ADICIONALES DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

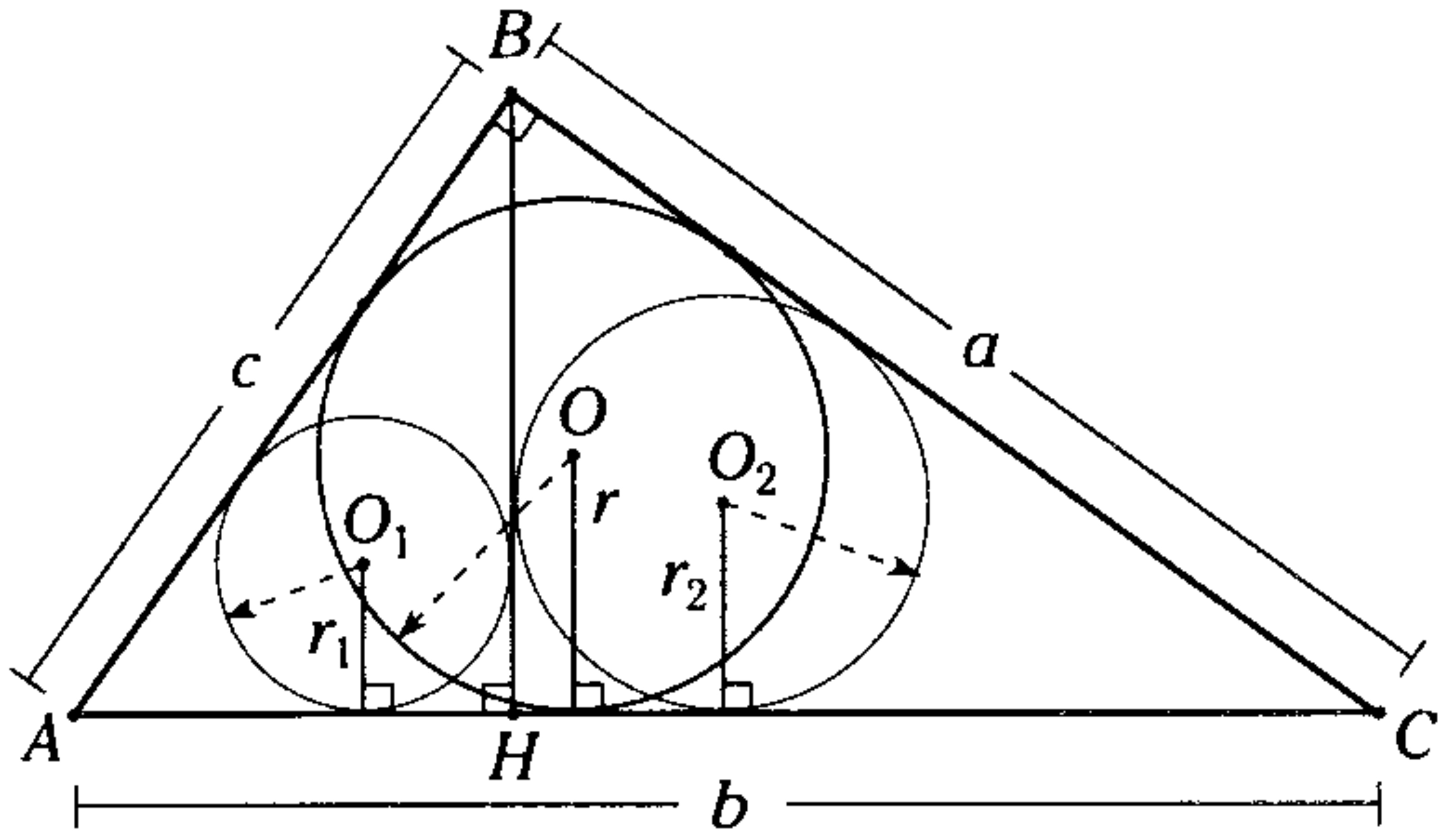


Figura 15.40

1. $\boxed{r^2 = r_1^2 + r_2^2}$

2. $\boxed{r.b = r_1.c + r_2.a}$

3. $\boxed{O_1O_2 = r\sqrt{2}}$

4. $\boxed{d(O; \overline{BH}) = r_2 - r_1}$

Demostración

$⊿ABH \sim ⊿BCH \sim ⊿ACB$

$$\rightarrow c = r_1.k; \; a = r_2.k; \; b = r.k$$

1. Como $c^2 + a^2 = b^2 \rightarrow r_1^2.k^2 + r_2^2.k^2 = r^2.k^2$

$$\therefore r_1^2 + r_2^2 = r^2$$

2. $c^2 = (r_1.k)c \,;\; a^2 = (r_2.k)a \,;\; b^2 = (r.k)b$

$$\rightarrow (r_1.c)k + (r_2.a)k = (r.b)k$$

$$\therefore r_1.c + r_2.a = r.b$$

3. $⊿O_1HO_2$: $O_1H = r_1.\sqrt{2}$ y $O_2H = r_2.\sqrt{2}$

$$\rightarrow (O_1O_2)^2 = (O_1H)^2 + (O_2H)^2$$

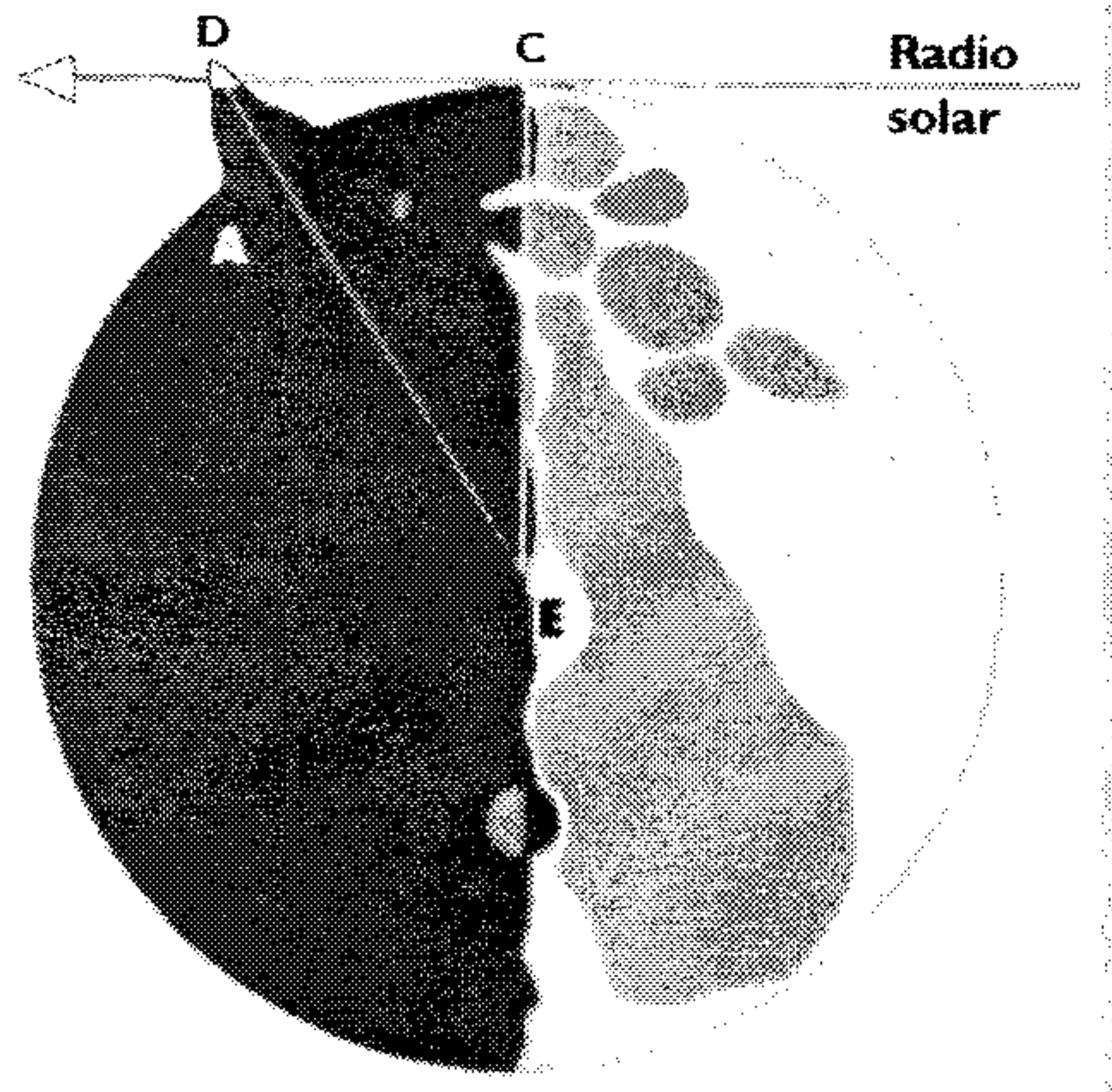
$$(O_1O_2)^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2 = 2r^2$$

$$\therefore O_1O_2 = r\sqrt{2}$$

LA CARA DE LA LUNA

La observación de la Luna ha sido siempre fuente de curiosidad para el hombre. Sin embargo, desde los tiempos de Galileo se conoce bien la estructura irregular de la superficie. Estos son los descubrimientos que el gran científico hizo gracias al telescopio, su estimación acerca de la altura de los montes lunares y las consideraciones de óptica elemental que le permitieron reforzar las conclusiones recogidas pese a la cerrazón y la falta de reflejos de sus adversarios.

Son célebres los muchísimos dibujos, realmente precisos, que Galileo hizo de las distintas fases de la Luna. Llevado por su entusiasmo, pronto intentó calcular la altura de los montes observados. La cuestión era factible, precisamente aprovechando el momento en el que una cumbre comenzaba a ser iluminada por los rayos del Sol, mientras el resto de la montaña permanecía en la oscuridad. Dado que en aquella época el diámetro de la Luna era conocido con una buena aproximación, una serie de proporciones geométricas le permitieron obtener una estimación satisfactoria.



Cálculos a distancia, el gráfico muestra el razonamiento para calcular la altura de un monte lunar, gracias al telescopio y al teorema de Pitágoras. Eso sí exagero mucho la altura del monte.

Galileo estimó con el telescopio la distancia entre *D* (cumbre iluminada) y *C* (punto de demarcación) entre la luz y la sombra del cuerpo lunar como una fracción del radio lunar conocido (*CE*). Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo *CDE*, pudo calcular la hipotenusa *DE* y, después, por la diferencia de *AE* (igual al radio *CE*), la altura *DA* del monte (gráfico adjunto)- Galileo presenta el caso de un monte en el que $CD = CE : 10$, cuya altura viene a ser de 5 leguas, si se toma $CE = 1\,000$ leguas (a Galileo la cuenta le daba en realidad cuatro leguas, a través de una aproximación suya por defecto), lo que equivaldría a una montaña de más de 9 000 metros, más alta, que el Everest, (En 1954, se determinó una altura de 8 848 metros) ubicada en el Himalaya, China.

Estamos ante una valoración muy aproximada a la real, aunque un poco inflada, un valor que Galileo creyó erróneamente mucho mayor que el de los montes de la Tierra, que, a su juicio, no superaban una legua.

BIOGRAFÍA

PITÁGORAS DE SAMOS (582 - 500 a.n.e.)

Nació en la Isla de Samos, junto a Mileto, fue hijo de Menesarco, tal vez un rico comerciante de Samos.

Pitágoras fue filósofo y matemático griego, cuyas doctrinas influyeron mucho en Platón. Fue instruido en las enseñanzas de los primeros filósofos jonicos como Tales de Mileto, Anaximandro y Anaxímenes.

Se pueden distinguir tres etapas en su vida: la primera en el mundo griego, la segunda de viajes a Babilonia y Egipto y la tercera en lo que más tarde se llamó la Magna Grecia (Sur de Italia) con un intermedio en Samos entre la segunda y tercera etapa.

Según algunas tradiciones, al volver Pitágoras a Samos se le pidió que enseñase sus ideas a sus propios ciudadanos. Al parecer les resultó demasiado abstracto y su enseñanza tuvo poco éxito. Esto, junto con la opresión del tirano Policrates, le debió de conducir a tomar la decisión de emigrar. Hacia 529 a.n.e se trasladó a la polis (ciudad - estado) de Crotona, fundación Aquea del siglo VIII a.n.e., en la parte del sur del golfo de Tarento. Allí llego Pitágoras con un sistema de pensamiento más o menos perfilado después de su larga experiencia por oriente. La ciudad le pidió que expusiera sus ideas y, según la tradición, Pitágoras dirigió por separado cuatro grandes discursos a los jóvenes, al senado, a las mujeres y a los niños. El contenido de estos cuatros discursos, está lleno de recomendaciones morales de gran perfección, necesidad de ajustar la conducta humana a los cánones de armonía e ilustró con elementos específicos de la mitología de los habitantes de Crotona.

Como consecuencia de lo que hizo al parecer, no solo en Crotona, sino en toda Italia, se tenía un gran entusiasmo por Pitágoras.

Fue un pensador místico reformador y religioso.

Sus doctrinas básicas: Los pitágoricos aconsejaban la obediencia y el silencio; la abstinencia de consumir ciertos alimentos, la sencillez en el vestir y en las posesiones, y el hábito de análisis. Los pitagóricos creían en la inmortalidad y en la transmigración del alma.

Respecto a la teoría de números: Entre sus estudios, se encuentra los números pares e impares y de los números primos y de los cuadrados, esencial en la teoría de los números. Un gran descubrimiento fue el teorema que lleva su nombre.

En la Astronomía los pitagóricos marcaron un importante avance en el pensamiento científico clásico, ya que fueron los primeros en considerar la tierra como un globo que gira junto a otros planetas alrededor de un fuego central. Explicaron el orden armonioso de todas las cosas como cuerpos moviéndose de acuerdo a un esquema numérico, en una esfera de la realidad sencilla y omnicomprensiva.

Del $\triangle EFB$ isósceles $\rightarrow$ $EF = FB = 6$
Se traza el diámetro BB'

$\triangle BFB'$: por teorema

$FB^2 = (2r)(BH)$

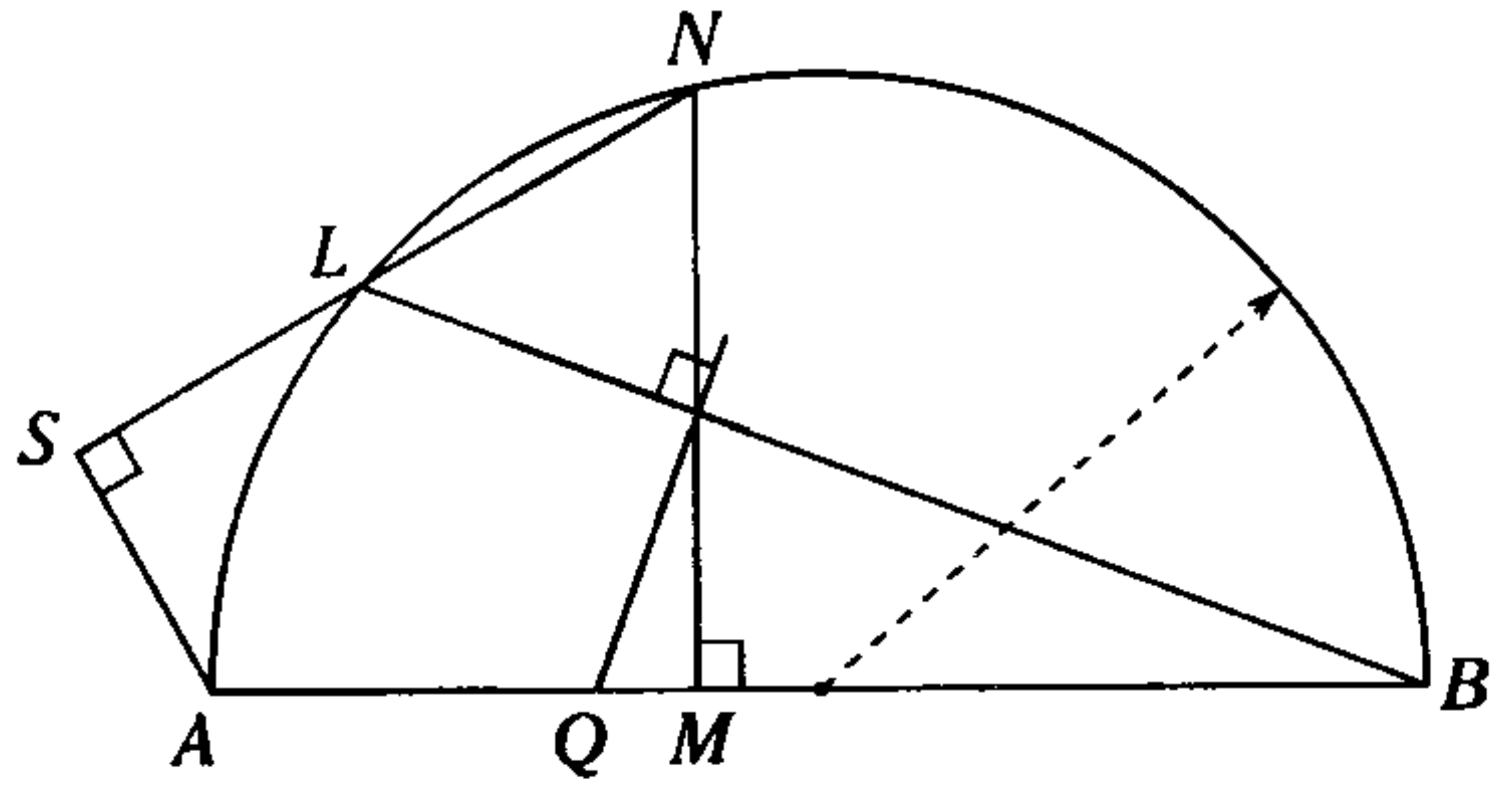
$6^2 = (2r)(2) \rightarrow r = 9$

$\therefore \ x = 18$

CLAVE D

Problema 3

Según la figura, $NL = LS$. Calcule $\dfrac{AM}{QM}$.



A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 3
D) 4 E) $3\sqrt{2}$

Resolución

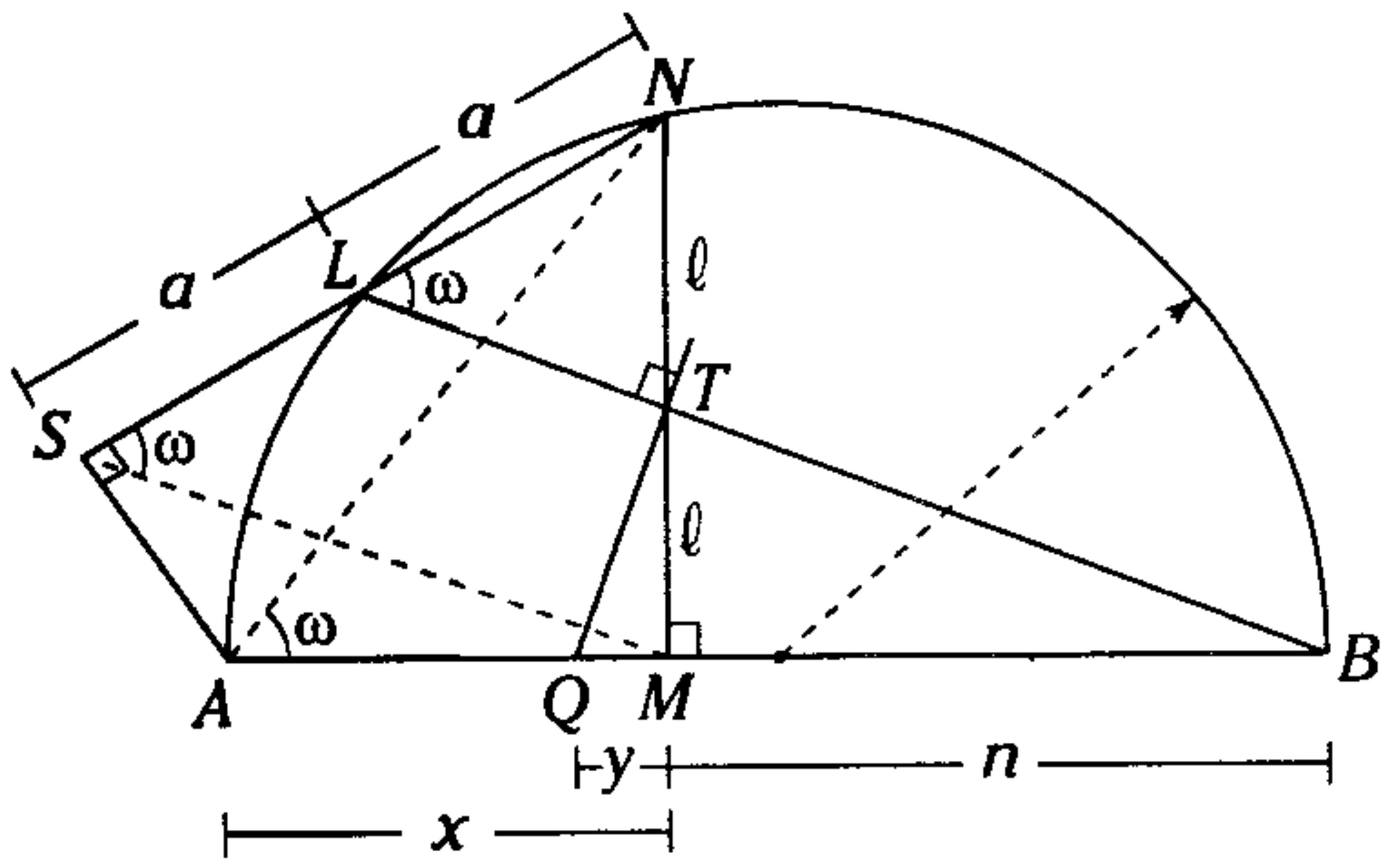


Figura 15.43

Piden $\dfrac{AM}{QM} = \dfrac{x}{y}$

Dato $NL = LS = a$

Sea $m\measuredangle NLB = \omega \rightarrow m\measuredangle NAB = \omega$

$ASNM$: ⏢ inscriptible

$m\measuredangle NSM = m\measuredangle NAM = \omega$

$\triangle NSM$: Se nota que $\overline{LT}$ base media

$NT = TM = \ell$

En la semicircunferencia, por teorema

$(2\ell)^2 = x \cdot n$ (I)

$\triangle QTB$: por teorema

$\ell^2 = y \cdot n$ (II)

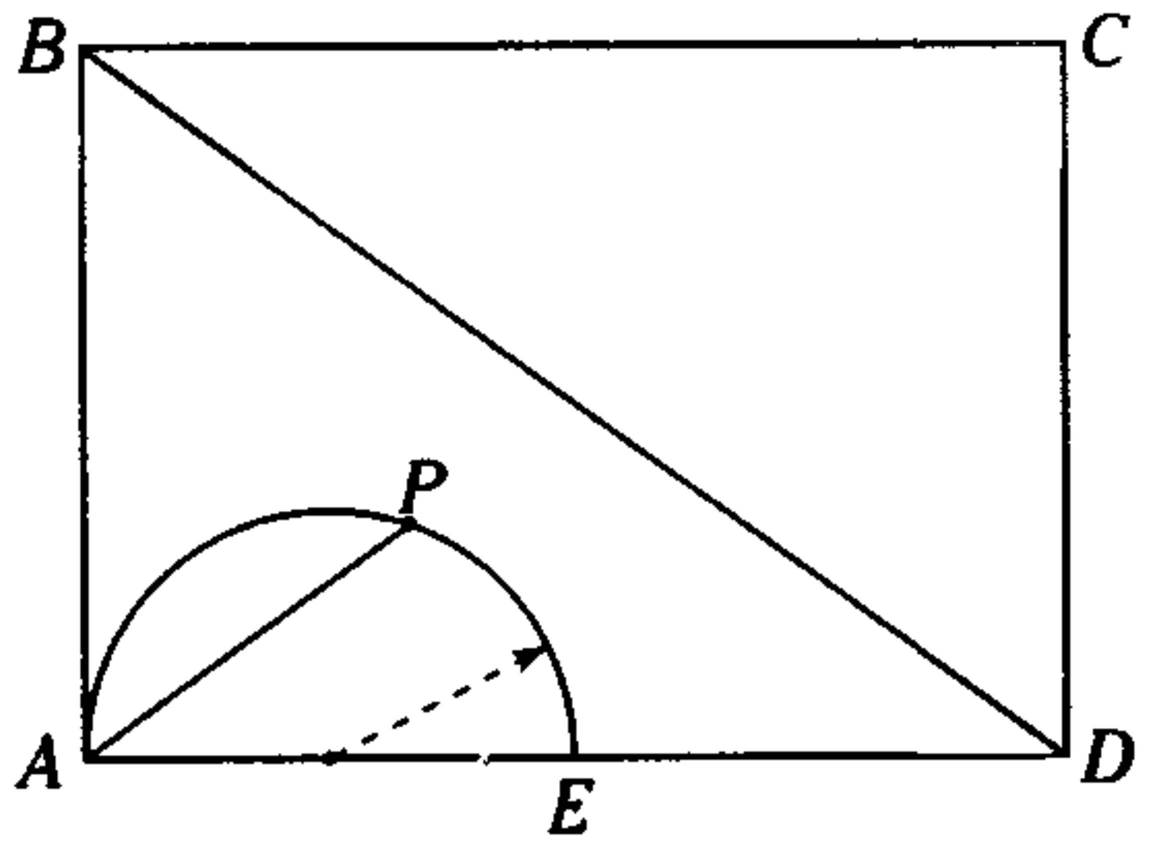
(I) ÷ (II)

$\therefore \ \dfrac{x}{y} = 4$

CLAVE D

Problema 4

De la figura, $ABCD$ es rectángulo; $AE = ED = 3$ $BD = 9$ y $m\measuredangle CBD + \dfrac{m\widehat{AP}}{2} = 90°$. Calcule la longitud de la proyección ortogonal de $\overline{AF}$ respecto de $\overline{AD}$.



A) 2 B) 2/3 C) 4/3
D) 5/3 E) 1

Problemas Resueltos

Problema 1

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, en $\overline{AC}$ y en la prolongación de $\overline{BP}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente.
Si $m\sphericalangle BQC - m\sphericalangle BCP = m\sphericalangle PCQ = 45°$, $BP = 3$ y $PQ = 2$. Calcule AC.

A) 6 B) 7 C) $2\sqrt{17}$
D) $\sqrt{34}$ E) $\sqrt{58}$

Resolución

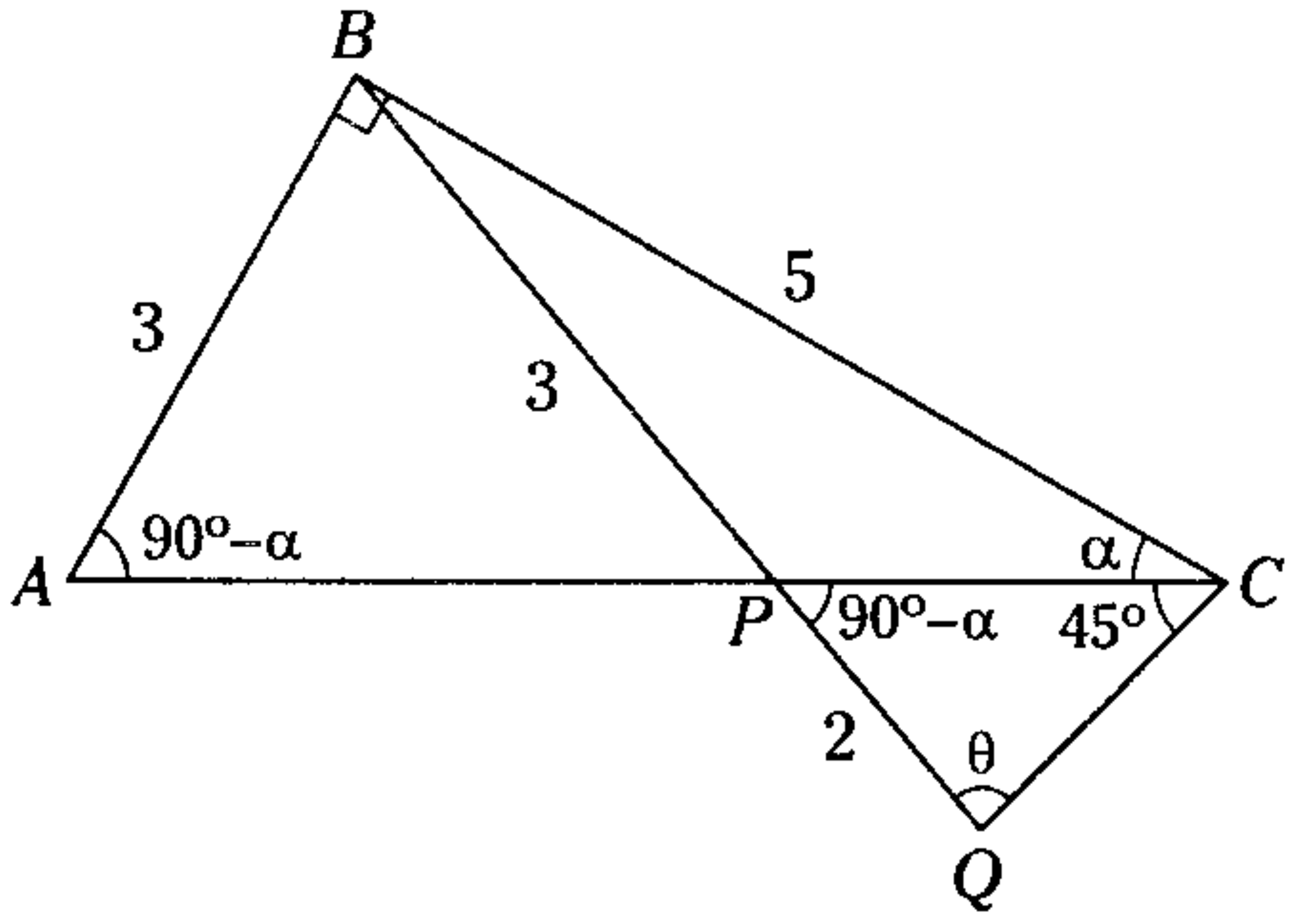


Figura 15.41

Piden $AC = x$

Dato $m\sphericalangle BQC - m\sphericalangle BCP = 45°$

Sea $m\sphericalangle BQC = \theta$ y $m\sphericalangle BCP = \alpha$

$\rightarrow \theta = 45° + \alpha$

$\triangle BQC$: isósceles $\rightarrow BQ = BC = 5$

$\triangle ABP$: isósceles $\rightarrow AB = BP = 3$

$\triangle ABC$: teorema de Pitágoras

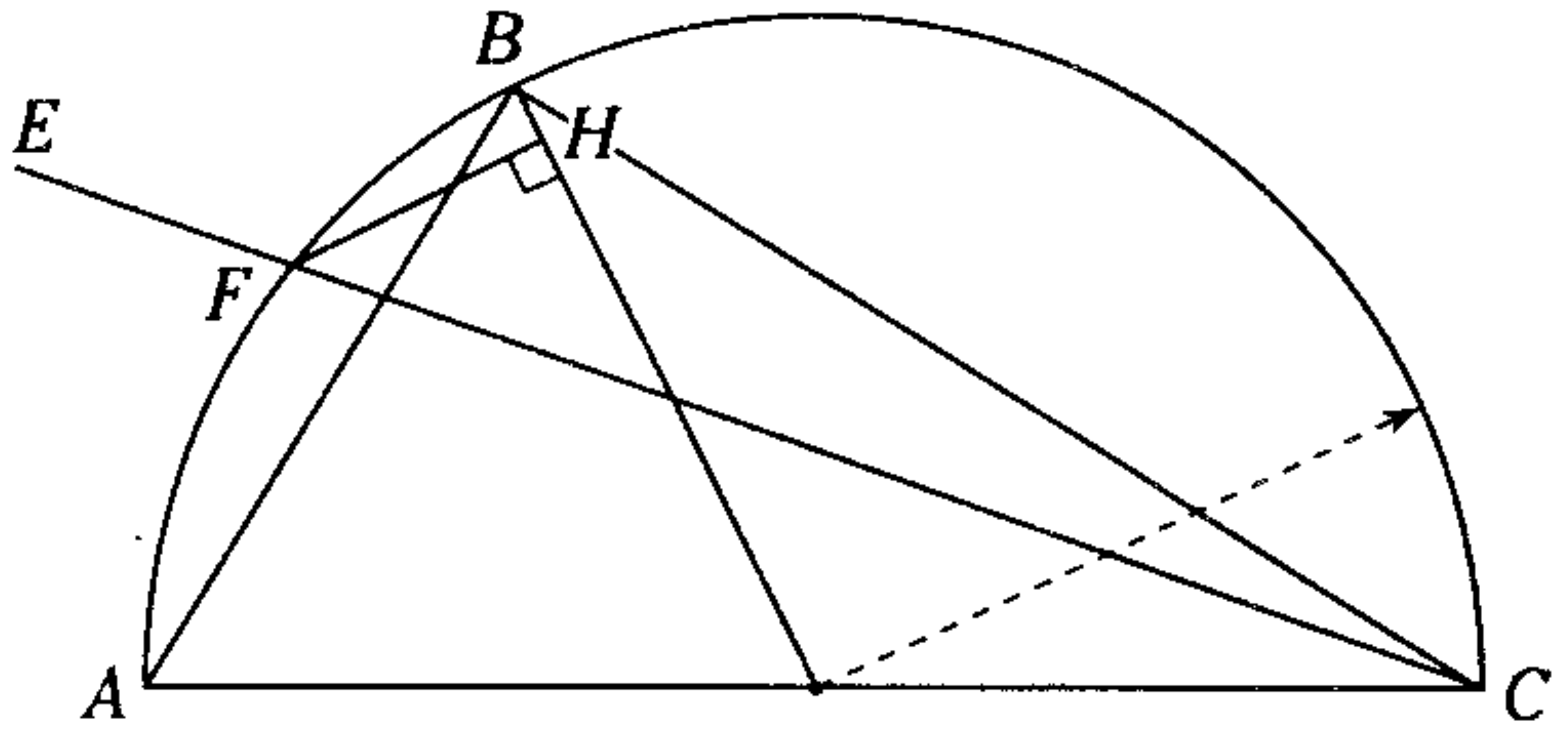
$x^2 = 3^2 + 5^2$

$\therefore x = \sqrt{34}$

CLAVE D

Problema 2

De la figura, $EF = 6$, $BH = 2$ y E es excentro del triángulo ABC. Calcule AC.



A) 9 B) 15 C) 16
D) 18 E) 20

Resolución

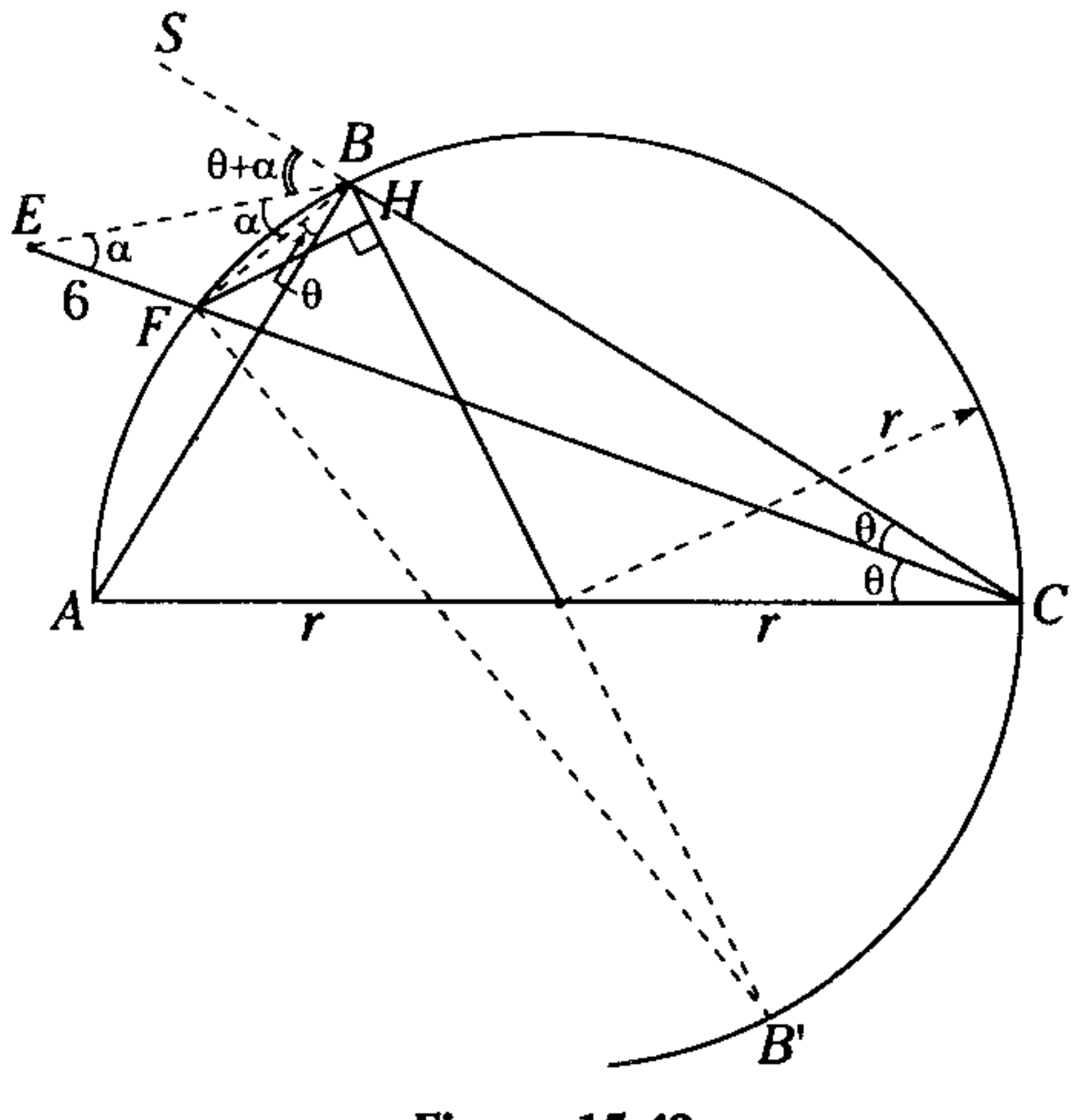


Figura 15.42

Piden $AC = x$
Como E es excentro del triángulo ABC

$\rightarrow m\sphericalangle BCF = m\sphericalangle FCA = \theta$ y

$\rightarrow m\sphericalangle EBS = m\sphericalangle EBA = \theta + \alpha$

$\triangle EBC$: ángulo exterior

$\rightarrow m\sphericalangle BEC = \alpha$

Resolución

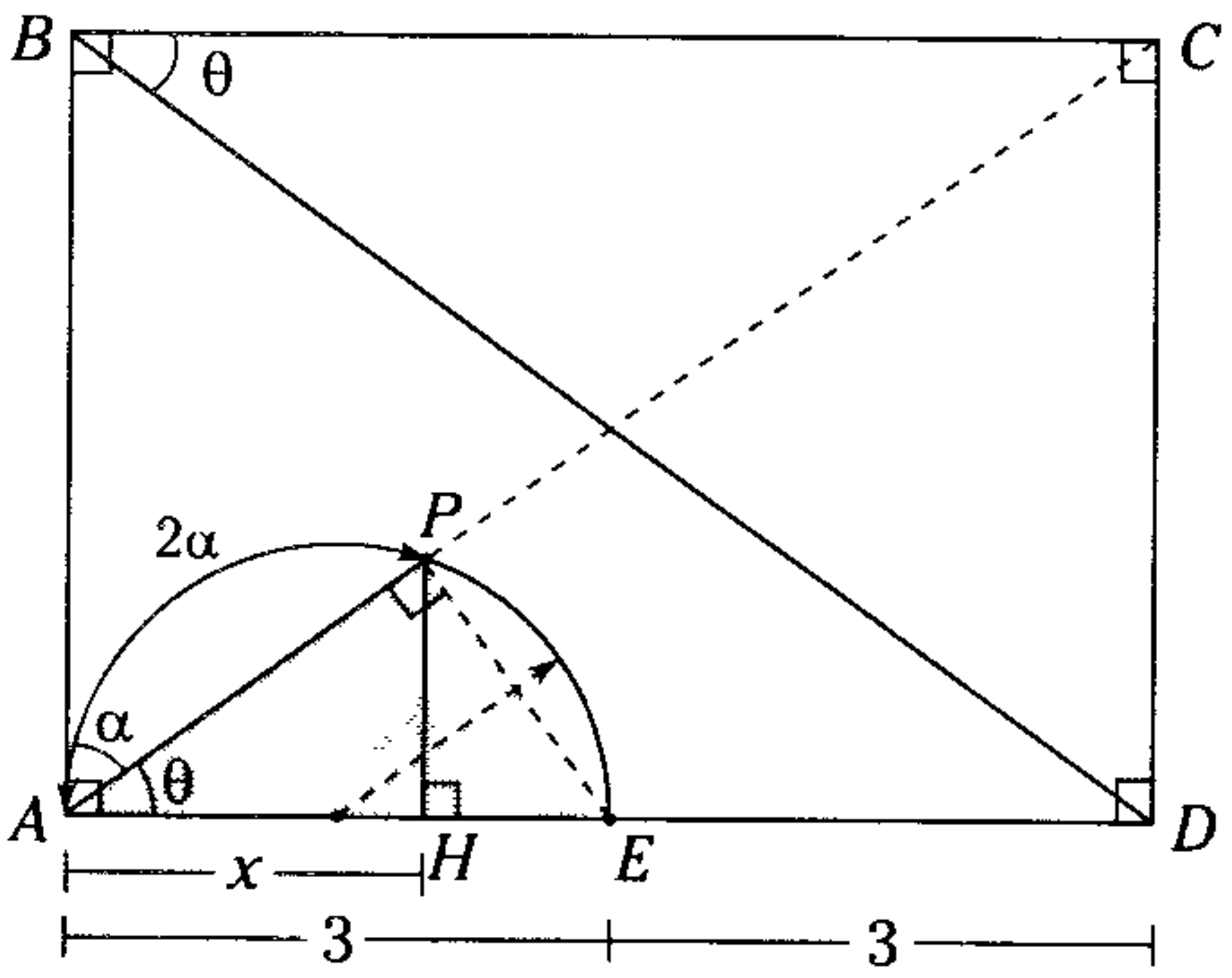


Figura 15.44

Piden $AH = x$

Dato: $m\sphericalangle CBD + \dfrac{m\overset{\frown}{AP}}{2} = 90°$

$$\theta + \frac{(2\alpha)}{2} = 90°$$

$$\theta + \alpha = 90°$$

$$\rightarrow\ m\sphericalangle PAD = \theta$$

esto quiere decir que $\overline{AC}$ contiene a $\overline{AP}$.

De $ABCD$ se sabe que $AC = BD = 9$.

Como $m\sphericalangle CPE + m\sphericalangle CDE = 180°$

Entonces $PCDE$: ⏢ inscriptible (Se aplica el teorema de secantes)

$$9(AP) = 6(3)\ \rightarrow\ AP = 2$$

◺APE: $(2)^2 = 3(x)$

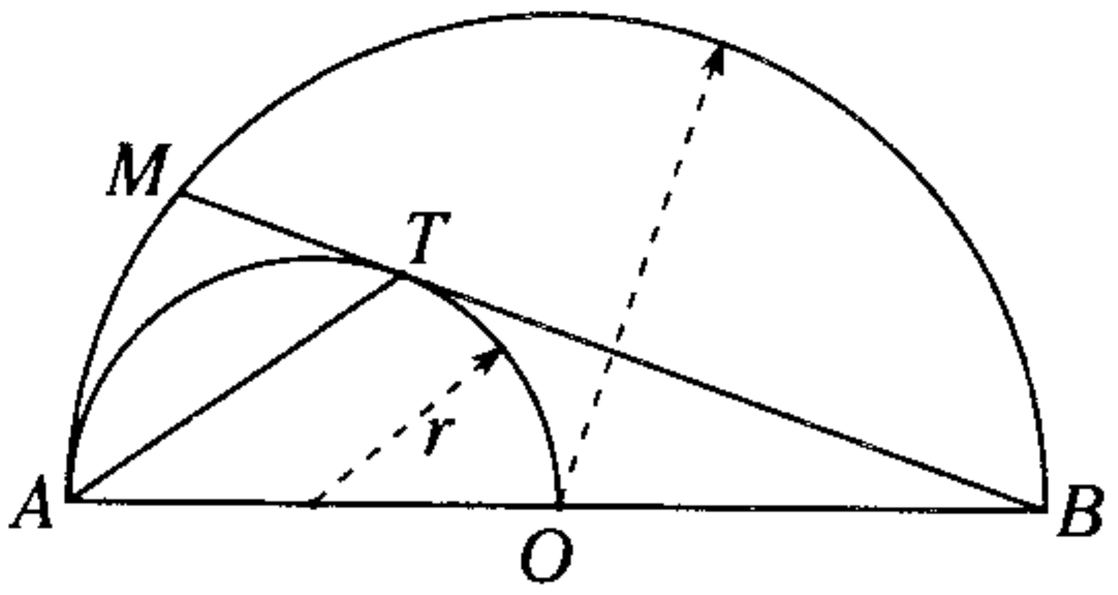
$$\therefore\ x = \frac{4}{3}$$

CLAVE C

Problema 5

De la figura, T es punto de tangencia. Calcule la longitud de la proyección ortogonal del $\overset{\frown}{AM}$ respecto de $\overline{AB}$.

A) $3r/7$
B) $4r/7$
C) $5r/7$
D) $4r/9$
E) $r/3$



Resolución

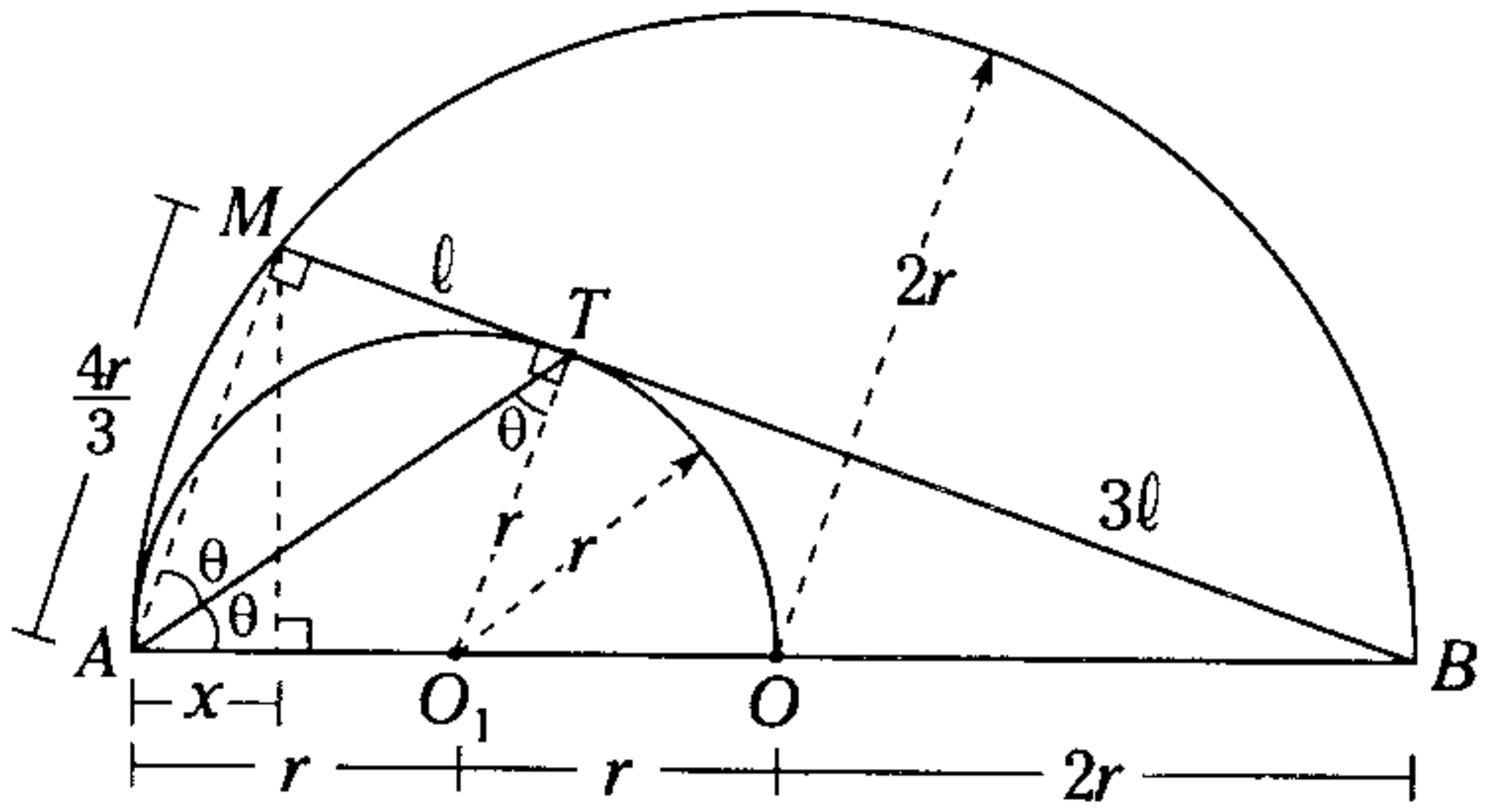


Figura 15.45

Piden x (longitud de la proyección de $\overset{\frown}{AM}$ respecto a $\overline{AB}$)

Se nota de la figura que $\overline{AT}$ es bisectriz interior del $\triangle MAB$

$$\rightarrow\ \frac{AM}{AB} = \frac{MT}{TB}$$

Como $\overline{AM} \parallel \overline{TO_1}$

$$\frac{MT}{TB} = \frac{r}{3r}$$

◺AMB: por teorema de la bisectriz interior

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MT}{TB} = \frac{1}{3}\ \rightarrow\ AM = (4r)\frac{1}{3}$$

◺AMB: por teorema

$$\left(\frac{4r}{3}\right)^2 = (4r)x$$

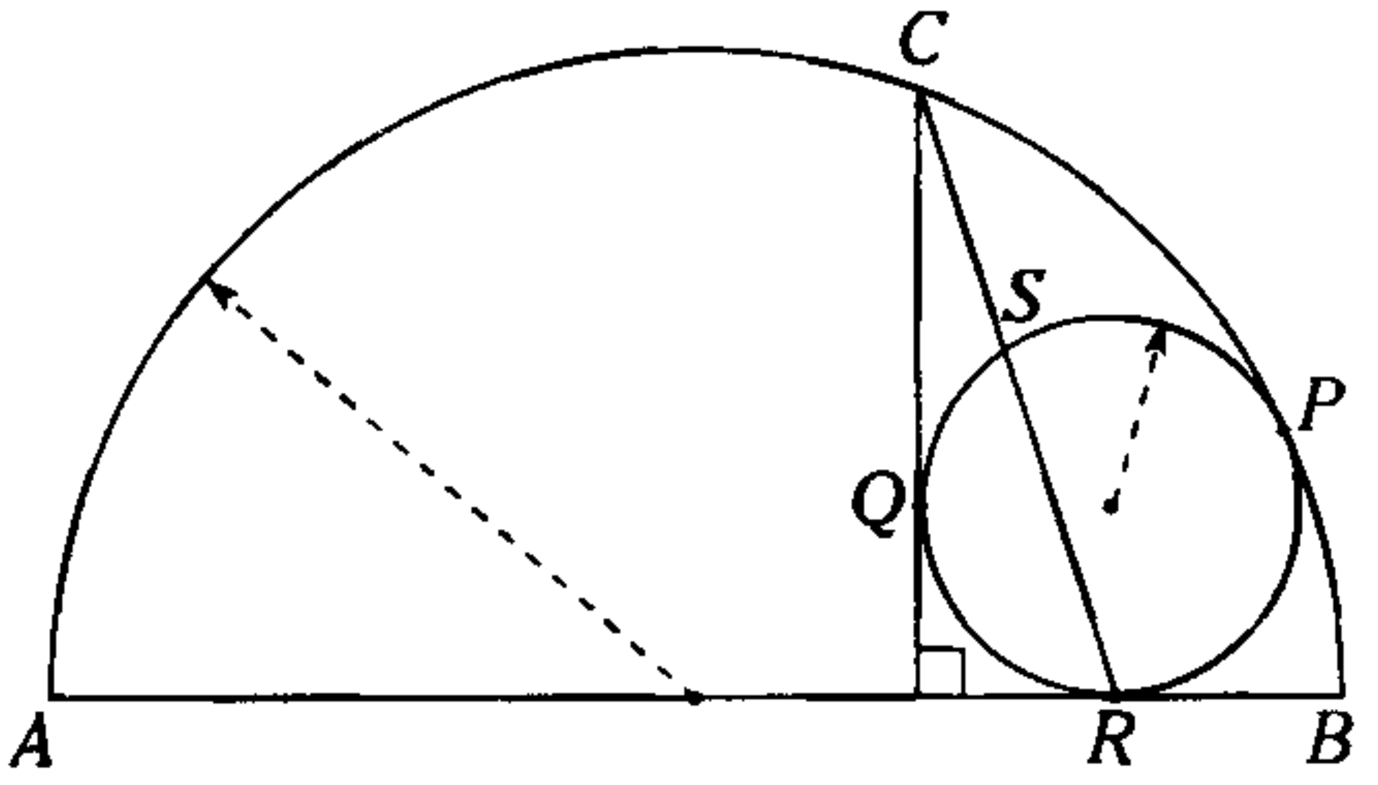
$$\rightarrow\ \frac{16r^2}{9} = 4rx$$

$$\therefore\ x = \frac{4r}{9}$$

CLAVE D

Problema 6

Según la figura, P, Q y R son puntos de tangencia y $m\overset{\frown}{CB} = \alpha$. Calcule $m\overset{\frown}{QS}$.



A) $45° - \alpha/2$ B) $90° - \alpha/4$ C) $90° - \alpha/2$

D) $60° - \alpha/2$ E) $60° - \alpha/4$

Resolución

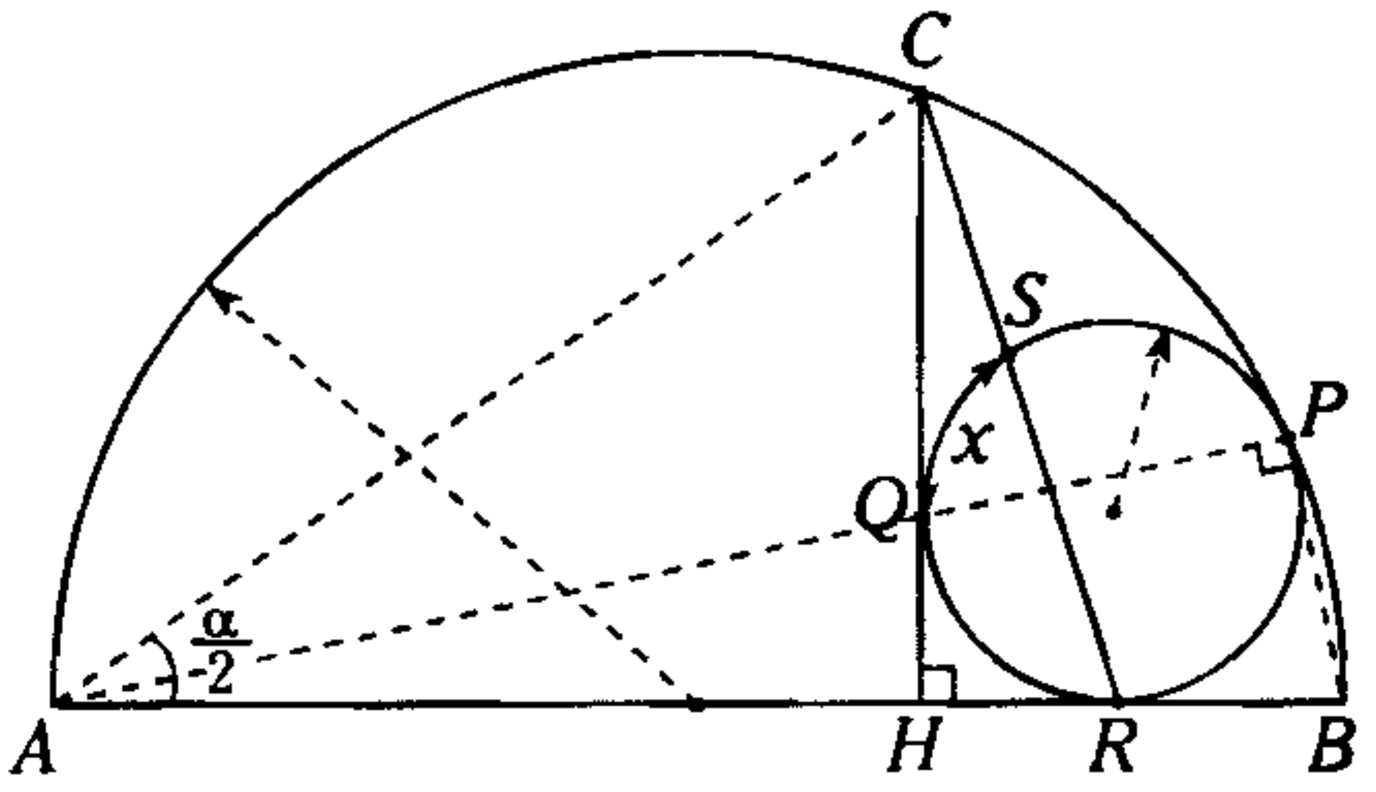


Figura 15.46

Piden $m\overset{\frown}{QS} = x$

Por teorema A, Q, P son colineales

En la semicircunferencia, por teorema

$$AC^2 = (AB)(AH) \qquad \text{(I)}$$

Como $HQPB$: ⏢ inscriptible

$$\rightarrow \quad (AP)(AQ) = (AB)(AH) \qquad \text{(II)}$$

En la circunferencia: Teorema de la tangente

$$AR^2 = (AP)(AQ) \qquad \text{(III)}$$

De (I), (II) y (III)

$$AC = AR$$

$$\rightarrow \quad m\sphericalangle ACR = m\sphericalangle ARC = 90° - \frac{\alpha}{4}$$

En la circunferencia (∢ semiinscrito)

$$x + m\overset{\frown}{QR} = 2\left(90° - \frac{\alpha}{4}\right)$$

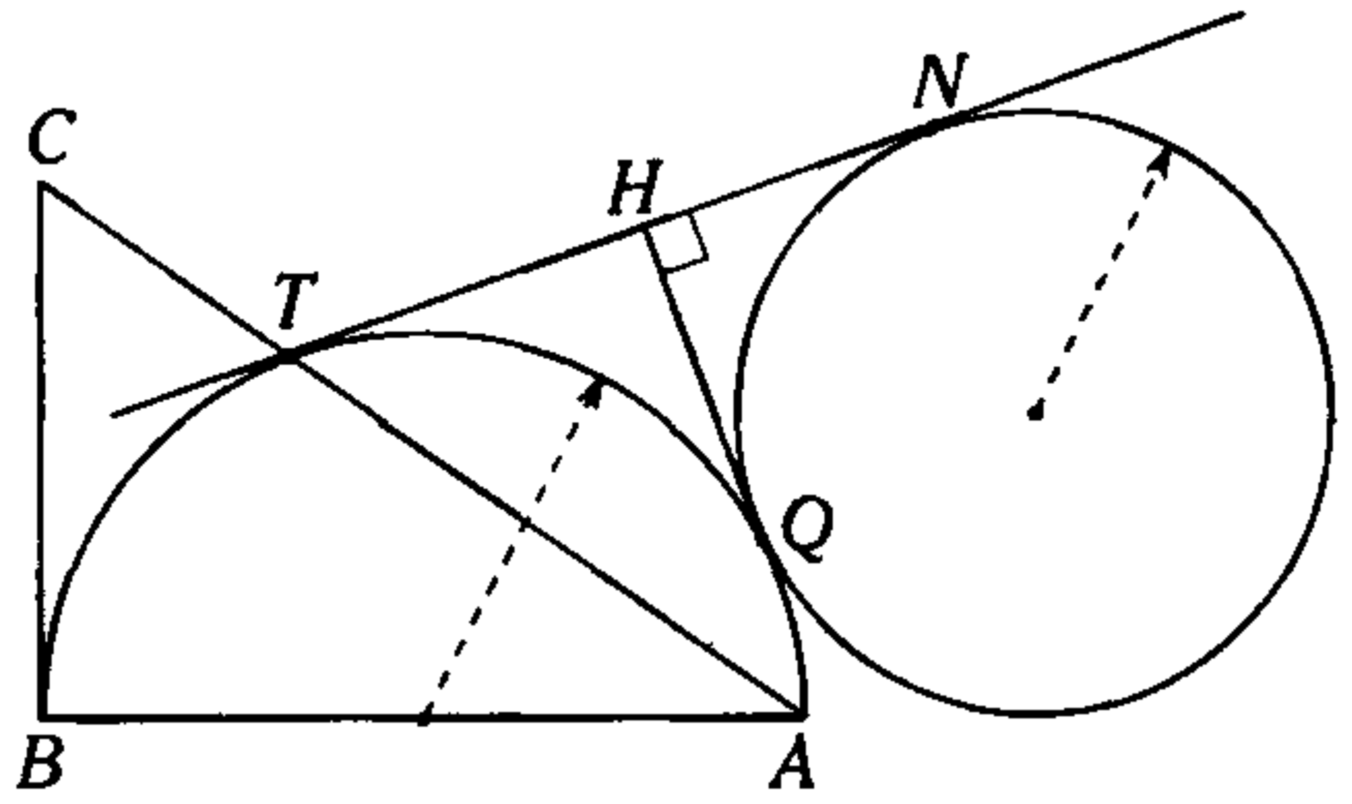
$$x + 90° = 180° - \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \quad x = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

CLAVE C

Problema 7

En la figura, $m\overset{\frown}{TQ} = 2(m\sphericalangle BAC)$, $BC = NT = a$, $TH = b$. Calcule BT (B, T, N y Q son puntos de tangencia).



A) $\sqrt{2ab}$ B) $a - b$ C) $\sqrt{ab}$

D) a^2/b E) b^2/a

Resolución

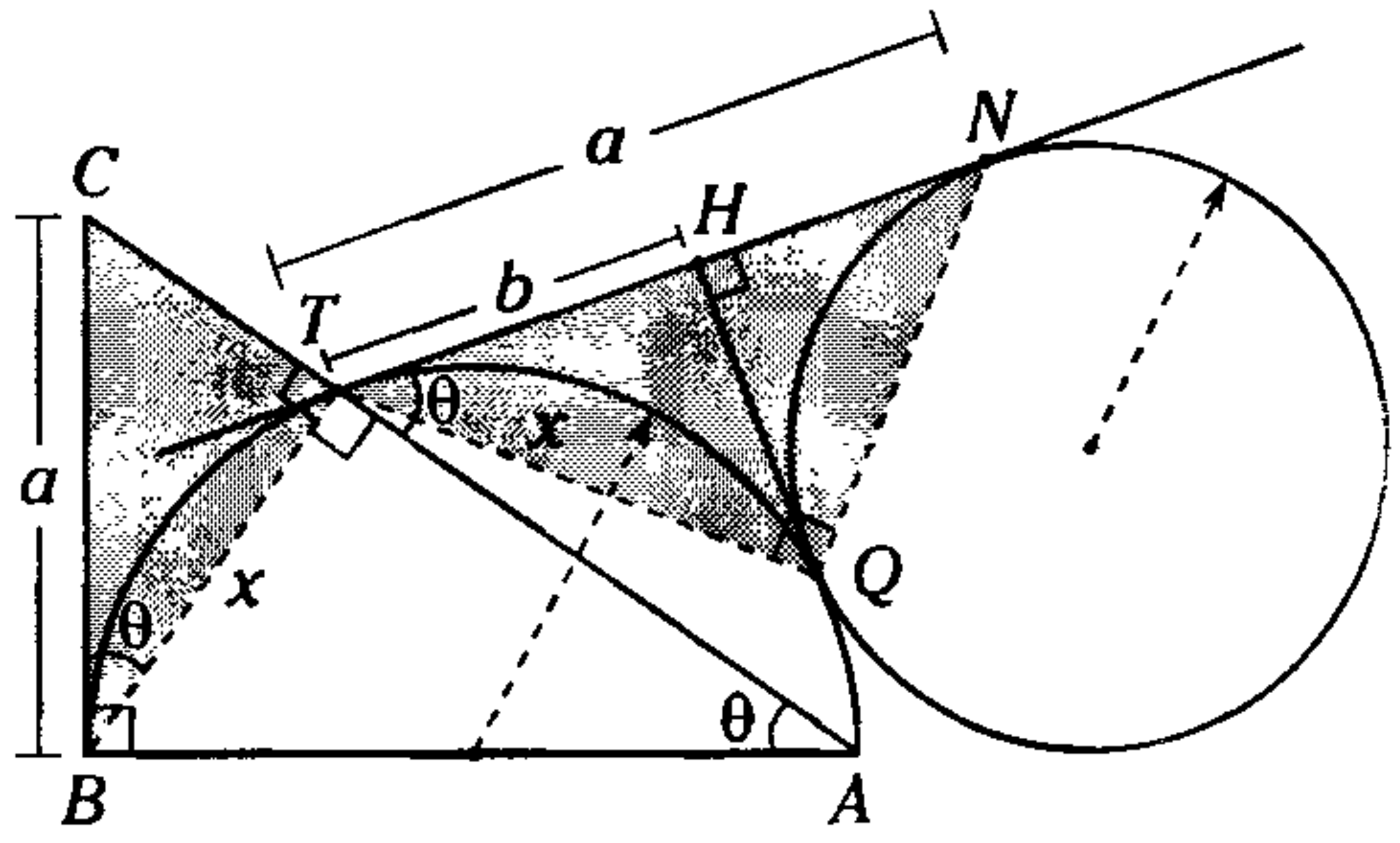


Figura 15.47

Piden $BT = x$

Sea $m\sphericalangle BAC=\theta$

Dato $m\overset{\frown}{TQ}=2\theta$

Propiedad $m\sphericalangle TQN=90°$

$\triangle TQN \cong \triangle BTC$ (A.L.A.)

$\rightarrow \; TQ=BT=x$

$\triangle TQN$: teorema

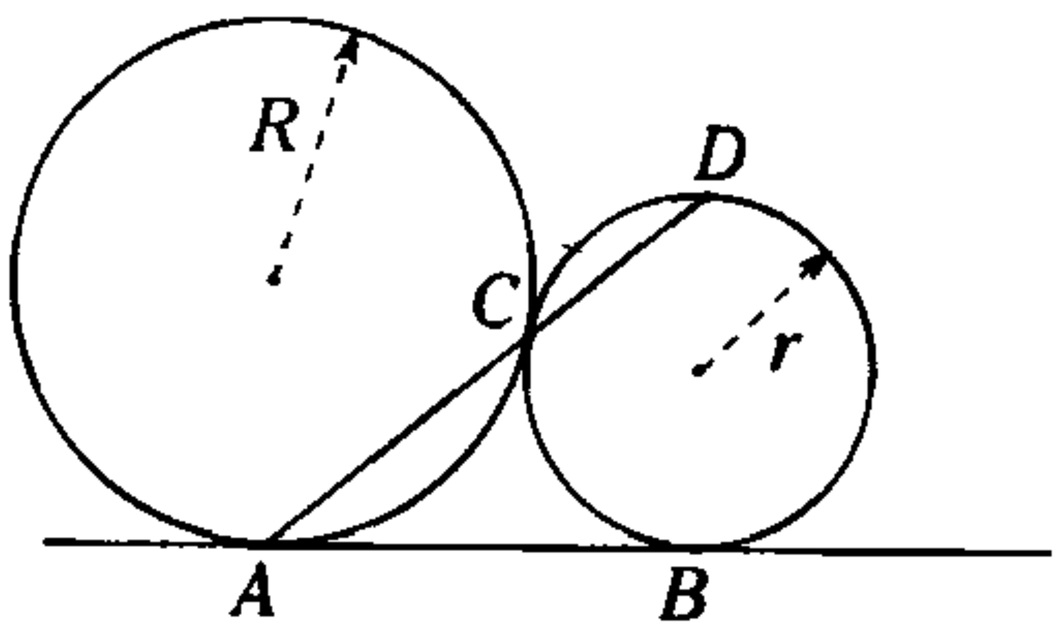
$x^2=ab$

$\therefore \; x=\sqrt{ab}$

CLAVE C

Problema 8

Según la figura, A, B y C son puntos de tangencia. Calcule CD en función de R y r.



A) $\sqrt{R^2+rR}$

B) $\sqrt{r^2+Rr}$

C) $r^2/\sqrt{r^2+Rr}$

D) $\dfrac{2r^2}{\sqrt{r^2+rR}}$

E) $\dfrac{2r^2}{\sqrt{r^2+2Rr}}$

Resolución

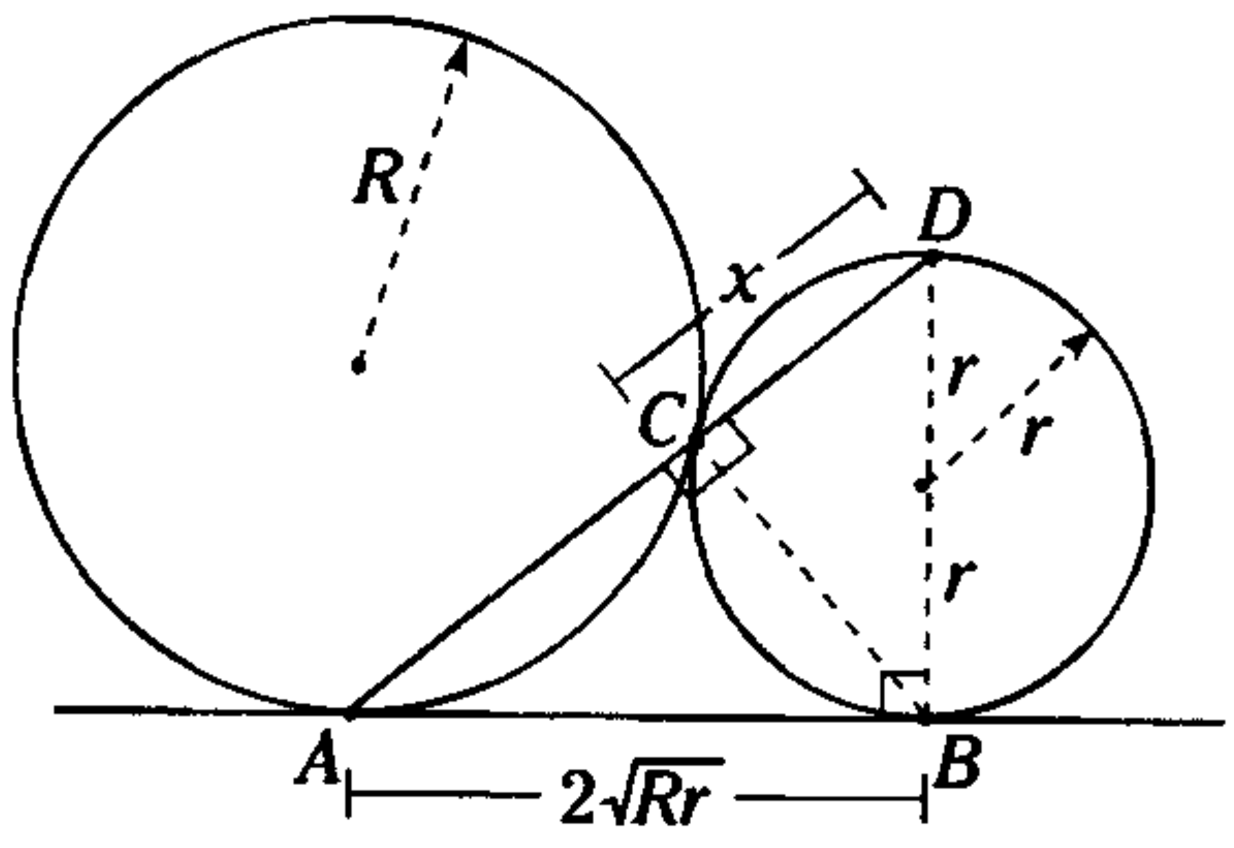


Figura 15.48

Piden $CD=x$

Por propiedad $m\sphericalangle ACB=90°$

$\rightarrow \; \overline{DB}$: diámetro

Por propiedad $AB=2\sqrt{Rr}$

$\triangle ABD$: teorema de Pitágoras

$$AD^2=(2r)^2+(2\sqrt{Rr})^2$$

$$AD=2\sqrt{r^2+Rr}$$

$\triangle ABD$: Teorema

$$(2r)^2=2\sqrt{r^2+Rr}(x)$$

$$\therefore \; x=\frac{2r^2}{\sqrt{r^2+Rr}}$$

CLAVE D

Problema 9

En un cuadrado $ABCD$, en las prolongaciones de $\overline{BA}$, $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P, R, Q y S, respectivamente tal que dichos puntos sean colineales, $PQ=a$ y $RS=b$. Calcule AB.

A) $\sqrt{ab}$

B) $\sqrt{a^2+b^2}$

C) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

D) $\dfrac{a+b}{3}$

E) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}$

Resolución

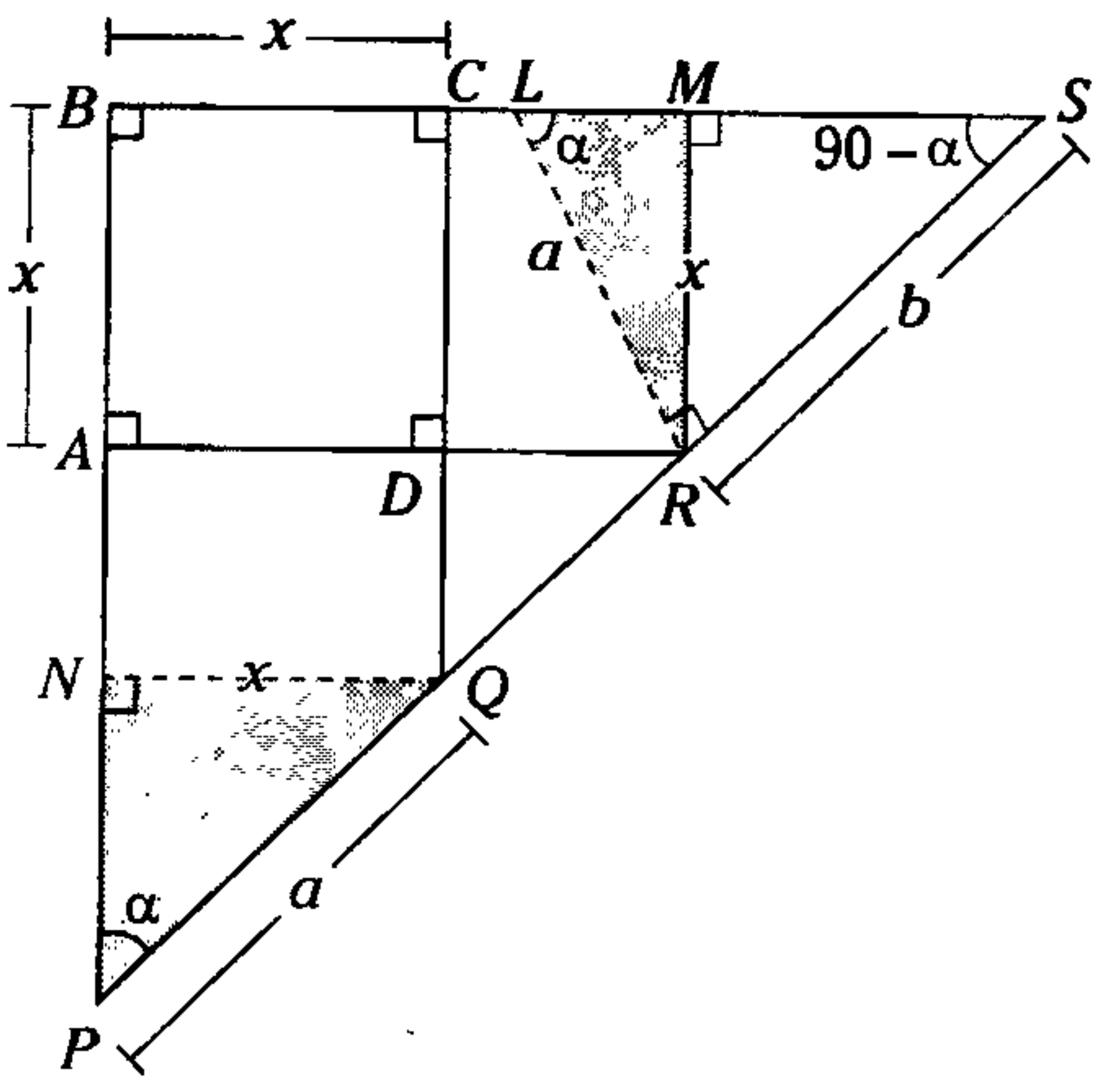


Figura 15.49

Piden $AB = x$

Se trazan $\overline{QN} \perp \overline{PB}$, $\overline{RM} \perp \overline{BS}$

Luego se traza $\overline{RL} \perp \overline{PS}$ para que

$\triangle LMR \cong \triangle QNP$ (A.L.A.)

$\rightarrow\ PQ = LR = a$

$\triangle LRS$: Por teorema

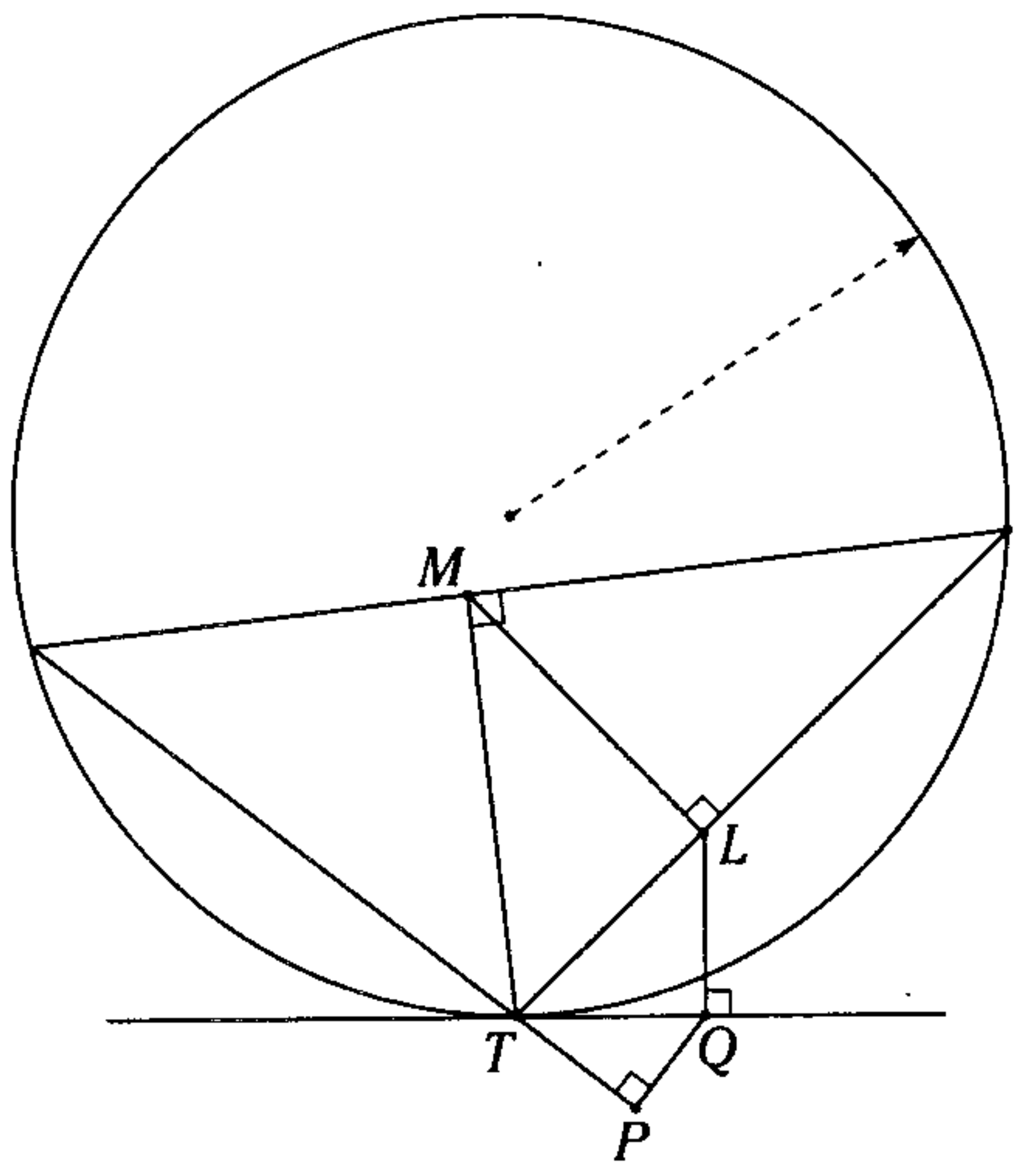
$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

$$\therefore\ x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

CLAVE C

Problema 10

De la figura, T es punto de tangencia, $MN = 3(TP)$, $TL = 5$ y $m\overset{\frown}{NT} = 74°$. Calcule ML.



A) $\sqrt{38}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $\sqrt{34}$

D) $\sqrt{35}$ E) 6

Resolución

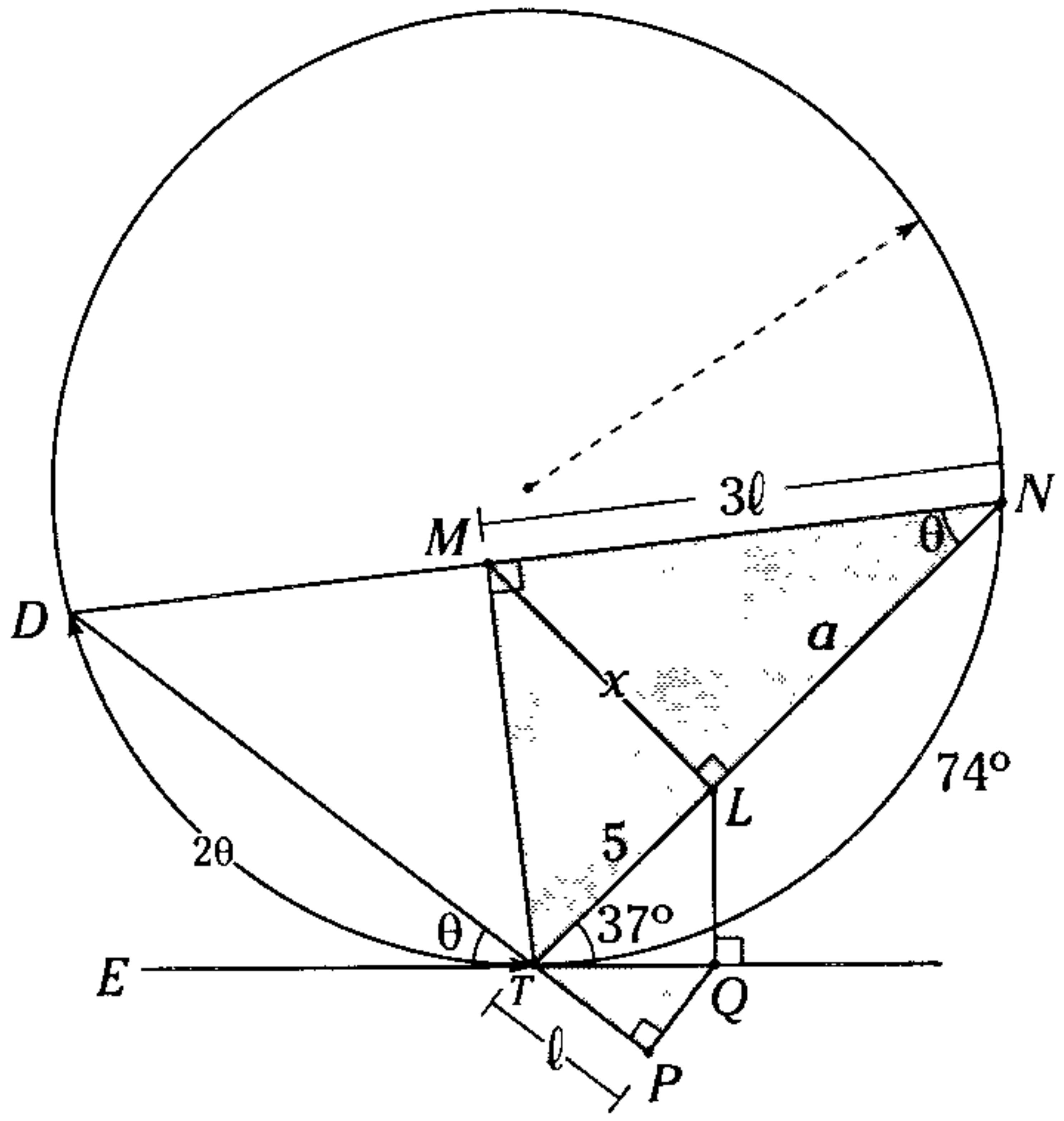


Figura 15.50

Piden $ML = x$

Dato $MN = 3(TP)$

Por ∢ semiinscrito $m\sphericalangle NTQ = \dfrac{74°}{2} = 37°$

Sea $LN = a$, $m\sphericalangle MNT = \theta$

$\triangle TMN$: por teorema

$$x^2 = 5(a) \qquad \text{(I)}$$

De la figura, $m\sphericalangle DNT = m\sphericalangle DTE = \theta$

$\triangle TMN \sim \triangle QPT$ (A.A.A.)

$$\frac{3\ell}{\ell} = \frac{a+5}{TQ} \qquad \text{(II)}$$

Como $\triangle TQL$: notable 37° y 53°

$\rightarrow\ TQ = 4$

En (II)

$$3 = \frac{a+5}{4}$$

$\rightarrow\ a = 7$

En (I)

$$x^2 = 5(7)$$

$$\therefore\ x = \sqrt{35}$$

CLAVE D

Problema 11

En un rectángulo $ABCD$, se ubican los puntos E y H en $\overline{AB}$ y $\overline{EC}$ respectivamente, tal que $m\measuredangle BHC = m\measuredangle AHD = 90°$, $DH = AB$, luego se traza $\overline{EF}$ perpendicular a $\overline{AH}$ ($F \in \overline{AH}$), de modo que $(EF)(DH) = 18$. Calcule BH.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución

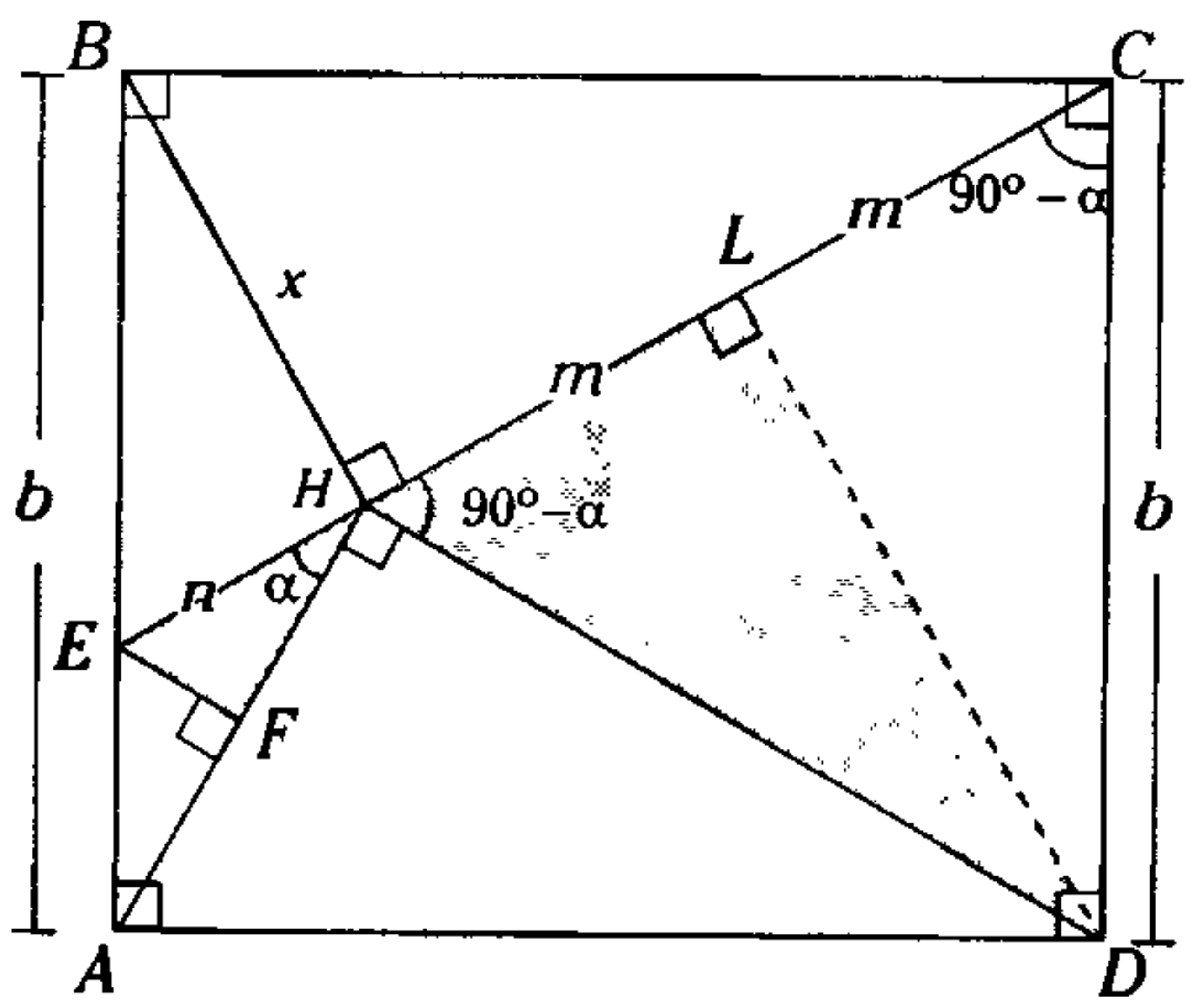


Figura 15.51

Piden $BH = x$

Datos $DH = AB = b$, $(EF)(DH) = 18$

Como $ABCD$: rectángulo

$CD = AB = b$

Se traza

$\overline{DL} \perp \overline{HC} \rightarrow HL = LC = m$, sea $EH = n$

⊿EBC: Por teorema

$x^2 = n(2m)$ (I)

⊿EFH ~ ⊿HLD (A.A.A.)

$$\frac{EF}{m} = \frac{n}{DH}$$

$nm = (EF)(DH) \rightarrow nm = 18$

En (I)

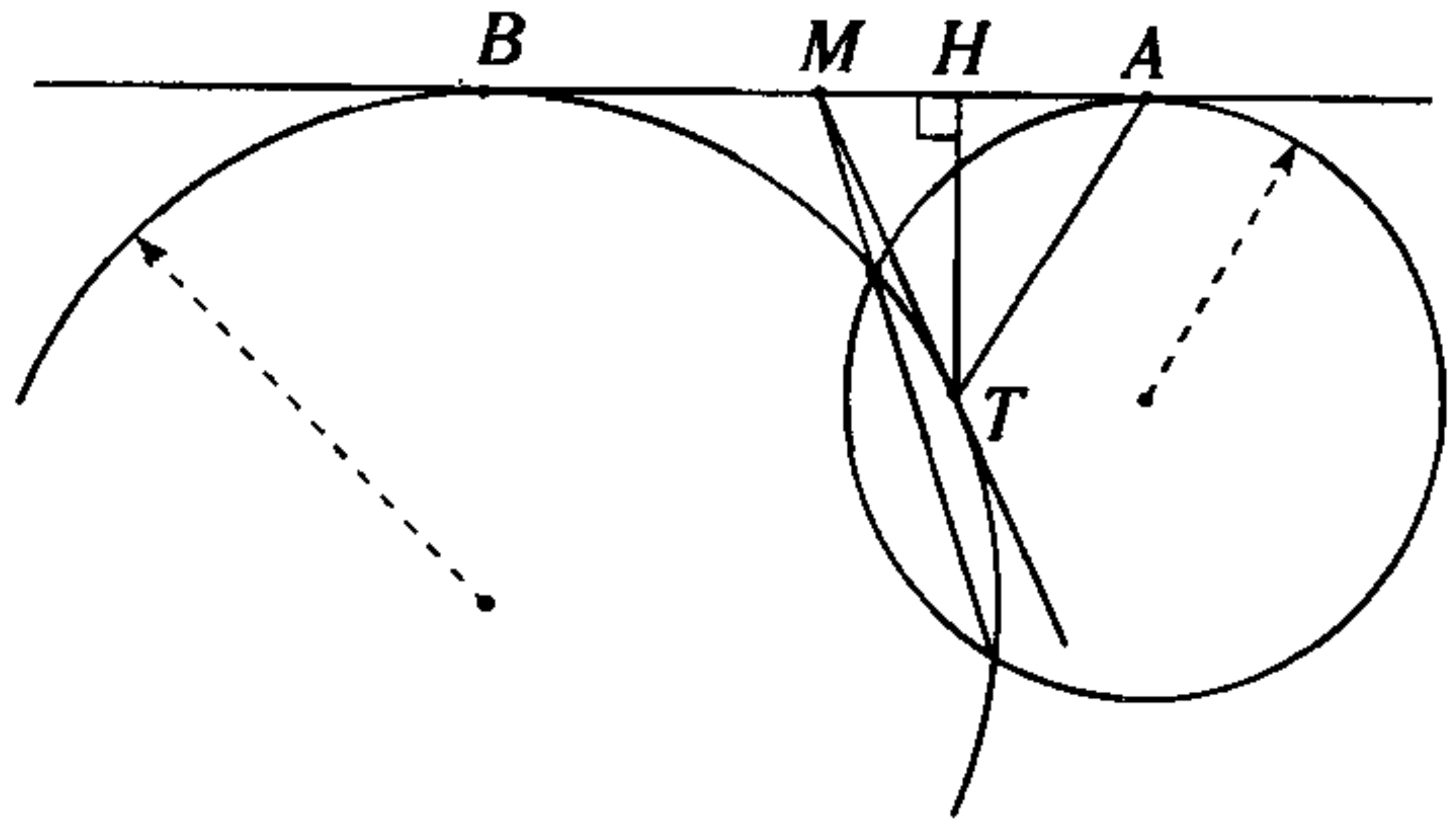
$x^2 = 2(18)$

$\therefore\ x = 6$

CLAVE B

Problema 12

De la figura, A, B y T son puntos de tangencia, $(AH)(AM) = 8$. Calcule AT.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución

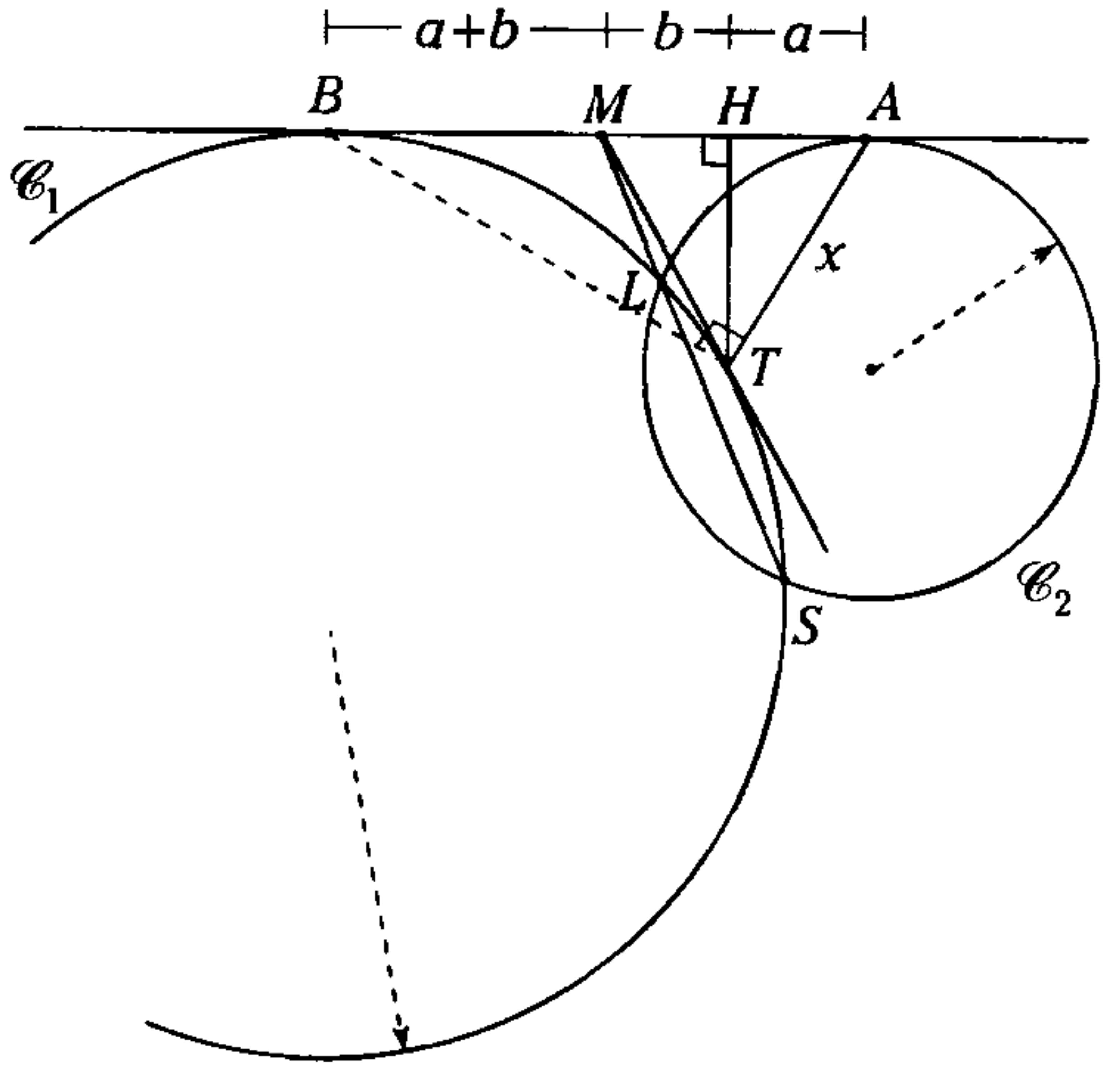


Figura 15.52

Piden $AT = x$

Dato: $(AH)(AM) = 8$

$\mathscr{C}_1$: por teorema $BM = MT$

$\mathscr{C}_1$: por el teorema de la tangente

$BM^2 = (MS)(ML)$ (I)

$\mathscr{C}_2$: Por el teorema de la tangente

$AM^2 = (MS)(ML)$ (II)

De (I) y (II)

$BM = AM$

Como $BM = MT = MA \rightarrow m\measuredangle BTA = 90°$

Sea $AH = a$, $MH = b$

$\rightarrow BM = a + b$

⊾BTA: Por teorema

$x^2 = (2a + 2b)a$ (III)

Del dato $a(a+b) = 8$

En (III)

$x^2 = 2(8)$

$\therefore x = 4$

CLAVE A

Problema 13

En un triángulo ABC, se ubican los puntos P y Q en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que $m\measuredangle BAC = m\measuredangle BPQ$, $m\measuredangle APB + m\measuredangle PBQ = 90°$, $AB = PC$, $AP = QC$ y $BQ = a$. Calcule $PC^2 + QC^2 + QP^2$.

A) $\dfrac{a^2}{2}$ B) $\dfrac{a^2}{3}$ C) a^2

D) $2a^2$ E) $3a^2$

Resolución

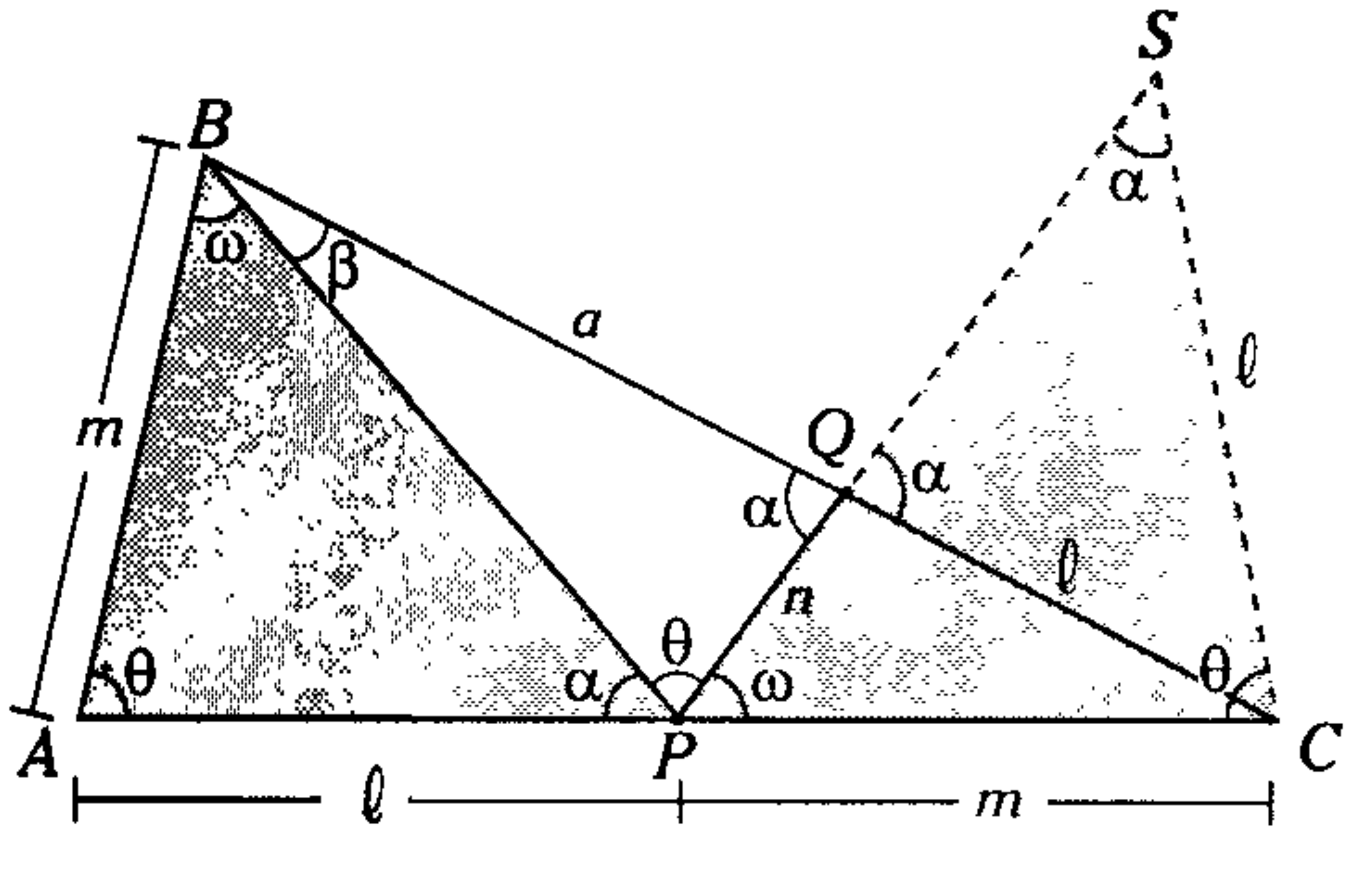


Figura 15.53

Piden

$m^2 + \ell^2 + n^2$

Del dato:

$\alpha + \beta = 90°$

$\rightarrow m\measuredangle ABP = m\measuredangle QPC = \omega$

Se prolonga $\overline{PQ}$ y se traza $\overline{CS}$, tal que $m\measuredangle SCP = m\measuredangle BAP = \theta$

$\triangle ABP \cong \triangle CPS$ (ALA)

$\rightarrow SC = AP = \ell$, $m\measuredangle BPA = m\measuredangle PSC = \alpha$

En $\triangle SQC$, se nota

$SC = QC = \ell$

$\rightarrow m\measuredangle SQC = m\measuredangle QSC = \alpha$

$\triangle BPQ$: Como $\alpha + \beta = 90°$

$\rightarrow \theta = 90°$

$\triangle BAP$: teorema de Pitágoras

$BP^2 = m^2 + \ell^2$ (I)

⊾BPQ: teorema de Pitágoras

$a^2 = n^2 + (BP)^2$ (II)

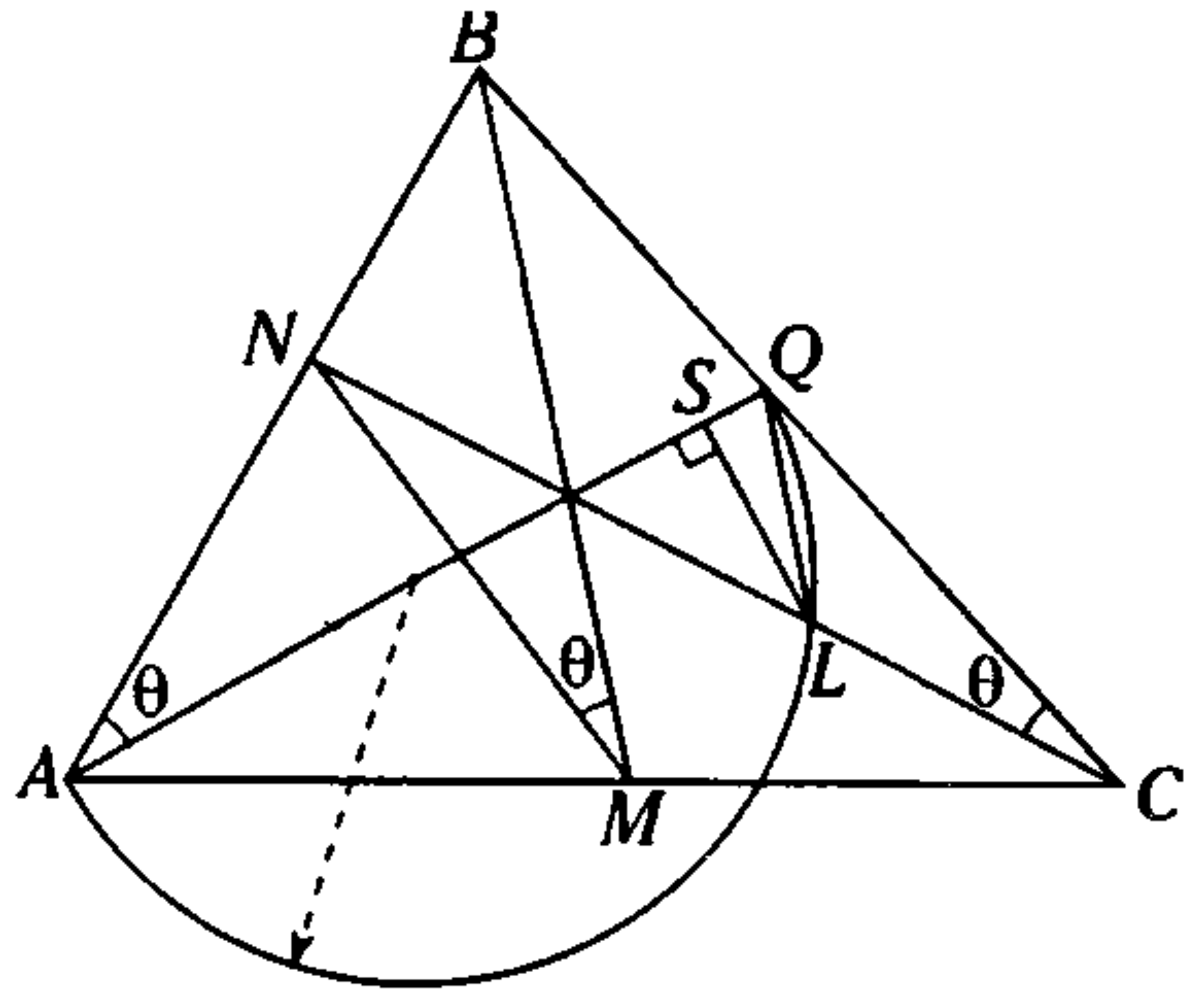
(I) en (II)

$\therefore n^2 + m^2 + \ell^2 = a^2$

CLAVE C

Problema 14

Según la figura, $(AN)(BM) = 36$, $NM = 4$ y $SQ = 1$ Calcule QL.



A) 2 B) 3 C) 3,5

D) 4,5 E) 4

Resolución

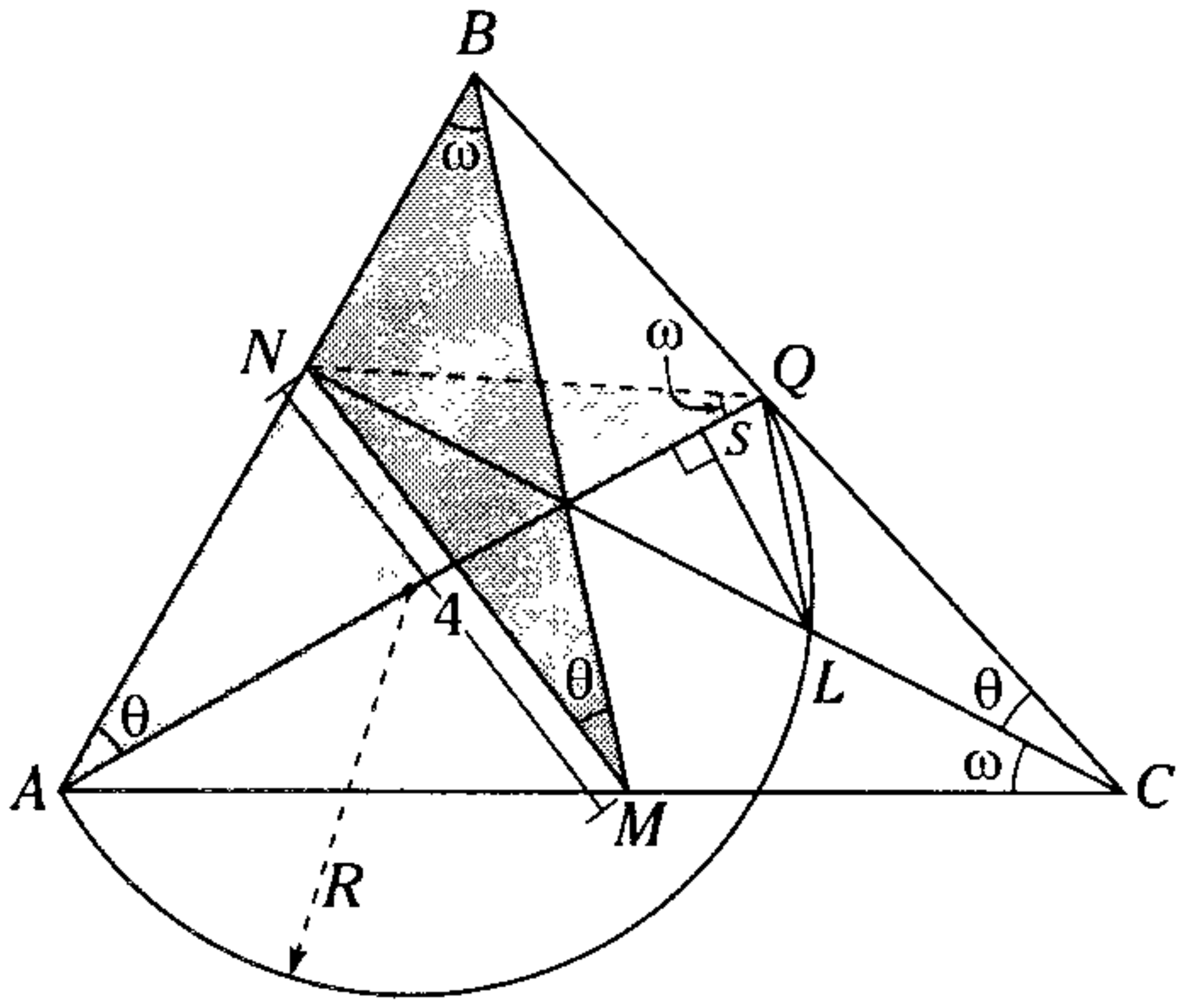


Figura 15.54

Piden $QL = x$

En la semicircunferencia

$x^2 = (2R)(SQ)$ (I)

Dato: $(AN)(BM) = 36$

Como $m\sphericalangle NMB = m\sphericalangle NCB = \theta$

$\rightarrow$ $NBCM$: $\square$ inscriptible

Por lo cual $m\sphericalangle NBM = m\sphericalangle NCM = \omega$

Como $m\sphericalangle NAQ = m\sphericalangle NCQ = \theta$

$\rightarrow$ $NQCA$: $\square$ inscriptible

Por lo cual $m\sphericalangle NQA = m\sphericalangle NCA = \omega$

$\triangle ANQ \sim \triangle MNB$ (A.A.A.)

$$\frac{AN}{4} = \frac{2R}{BM} \rightarrow R = \frac{(AN)(BM)}{8}$$

$$\rightarrow R = \frac{9}{2}$$

En (I)

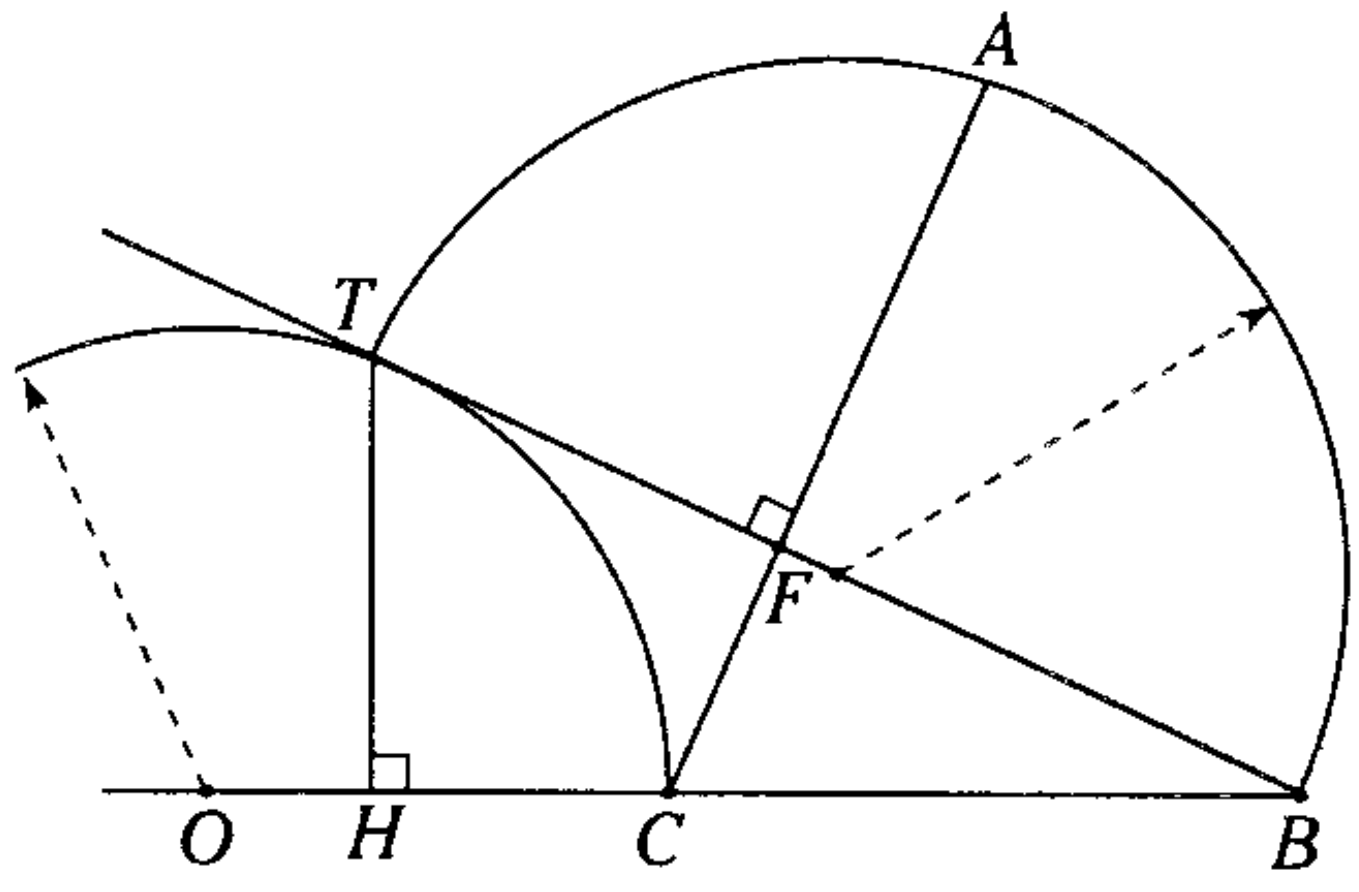
$$x^2 = 2\left(\frac{9}{2}\right) \times (1)$$

$\therefore$ $x = 3$

CLAVE B

Problema 15

De la figura, T es punto de tangencia y $(HB)(FC) = 36$. Calcule AF.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución

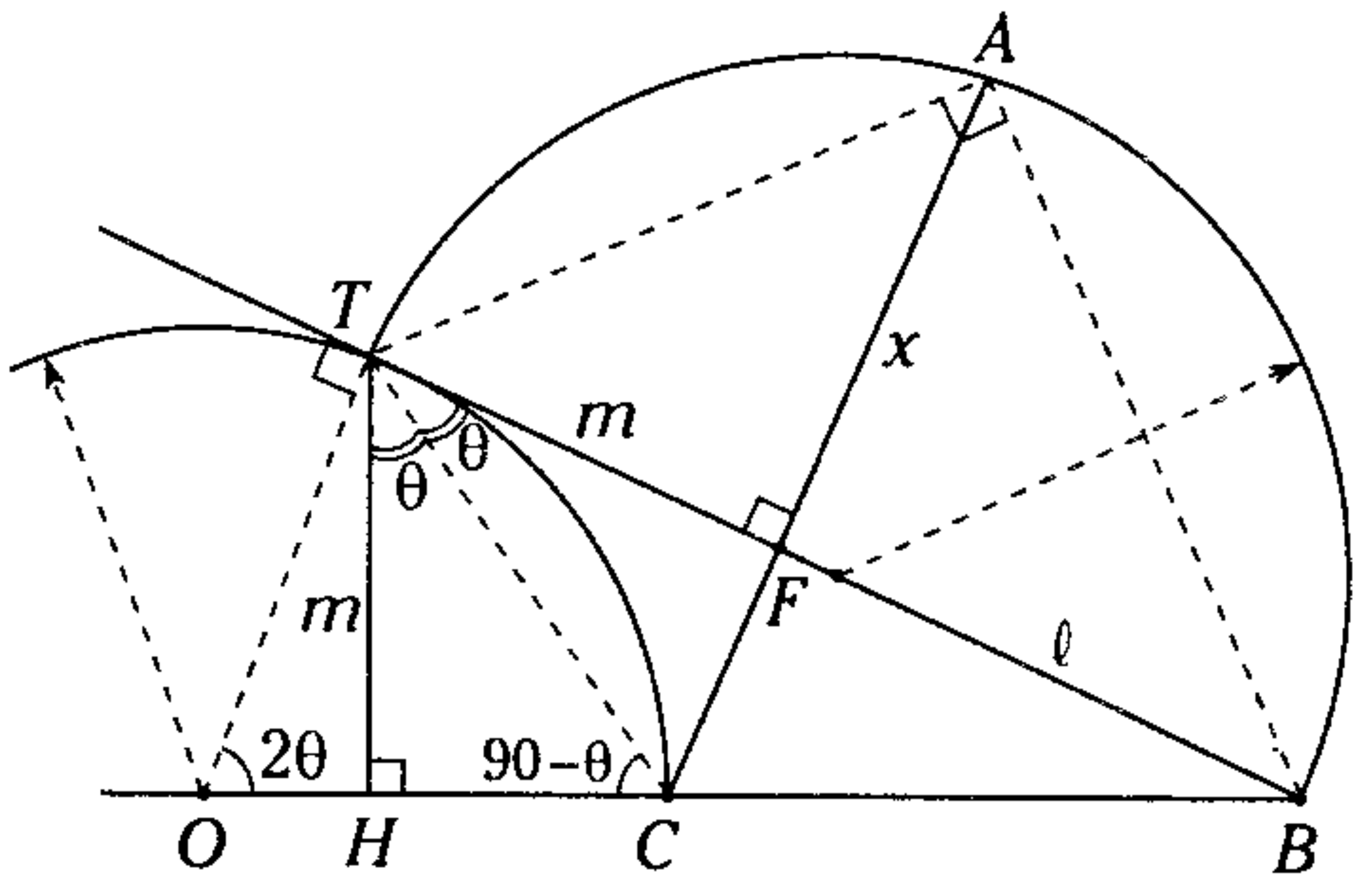


Figura 15.55

Piden $AF = x$

Dato $(HB)(FC) = 36$

En la semicircunferencia

$x^2 = m\ell$ (I)

Sea

$m\sphericalangle BTC = \theta$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle TOC = 2\theta$

$\rightarrow m\sphericalangle TCO = 90° - \theta$

Por lo cual: $m\sphericalangle HTC = \theta$

Se observa $\overline{TC}$: bisectriz interior $\triangle HTB$

Por teorema de la bisectriz

$TH = TF = m$

$\triangle THB \sim \triangle CFB$ (A.A.A.)

$$\frac{m}{FC}=\frac{HB}{\ell} \rightarrow m\ell=(FC)(HB)=36$$

En (I)

$$x^2=36$$

$$\therefore\ x=6$$

CLAVE C

Problema 16

Dado un triángulo rectángulo ABC recto en B, en la altura BH y en las regiones exteriores relativa a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos G, E y F respectivamente, tal que $AEGH$ y $HBFL$ son cuadrados ($L\in HC$), $\overline{EG}\cap\overline{AB}=\{M\}$ y $\overline{FL}\cap\overline{BC}=\{N\}$. En $\overline{FB}$ se ubica el punto P de modo que $\overline{MN}$ y $\overline{PH}$ son perpediculares en Q, además $\overline{MN}\cap\overline{BH}=\{R\}$. Si $QR=1$, $QH=4$ y $PQ=6$. Calcule MG.

A) $\frac{25\sqrt{17}}{153}$ B) $\frac{26\sqrt{17}}{153}$ C) $\frac{23\sqrt{17}}{135}$

D) $\frac{28\sqrt{17}}{153}$ E) $\frac{22\sqrt{19}}{153}$

Resolución

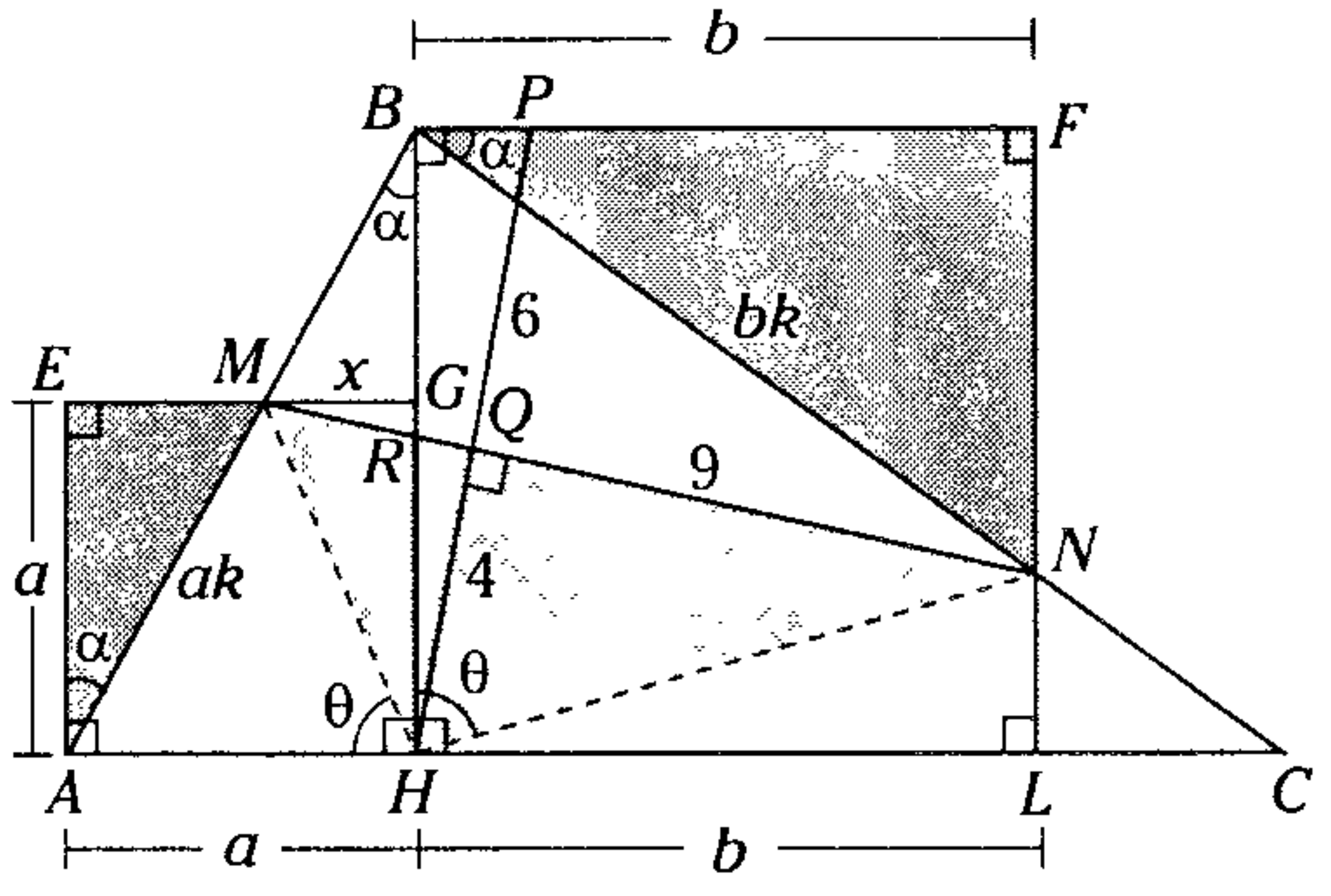


Figura 15.56

Nota

Si $ABCD$ es un cuadrado y $\overline{MN}\perp\overline{LT}$ entonces $MN=LT$.

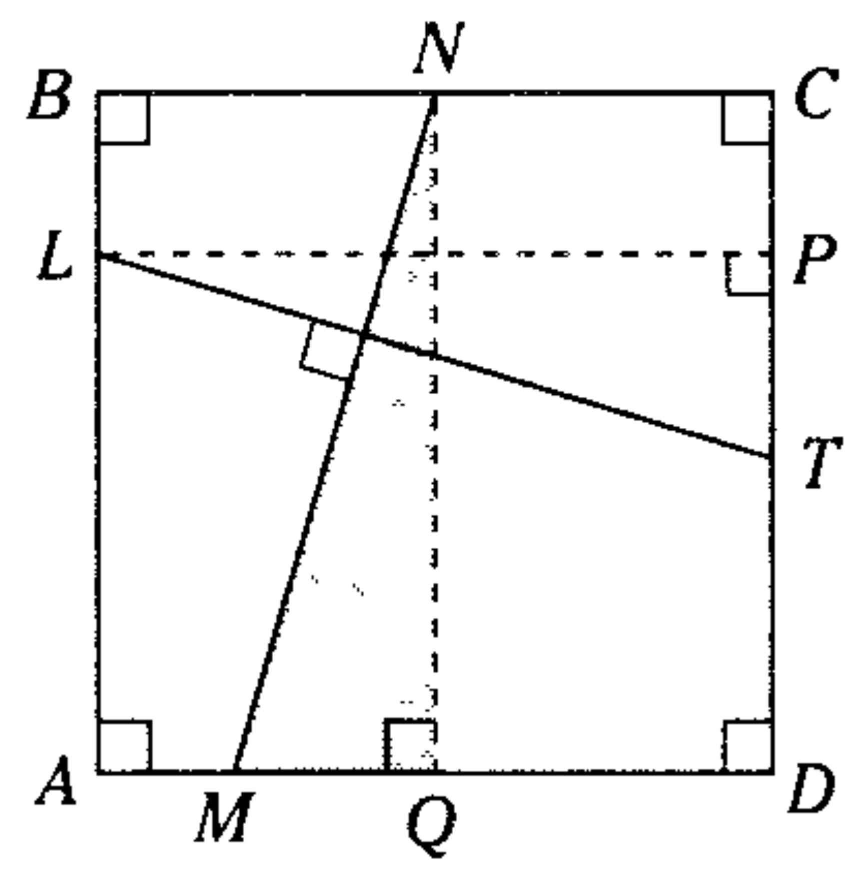


Figura 15.57

$\triangle MNQ \cong \triangle TLP$

Piden $MG=x$

Por propiedad

$$HP=RN$$

$$6+4=1+QN \rightarrow QN=9$$

$\triangle AEM \sim \triangle BFN$ (A.A.A.)

$$\frac{AE}{BF}=\frac{a}{b}=\frac{AM}{BN}$$

$\triangle MAH \sim \triangle NBH$ (L.A.L.)

$$\rightarrow m\sphericalangle AHM=m\sphericalangle BHN=\theta$$

En H: $m\sphericalangle MHN=90°$

$\triangle MNH$: teorema

$$4^2=9(1+MR) \rightarrow MR=\frac{7}{9}$$

$\triangle RQH$ y $\triangle MGR$: notables 14° y 76°

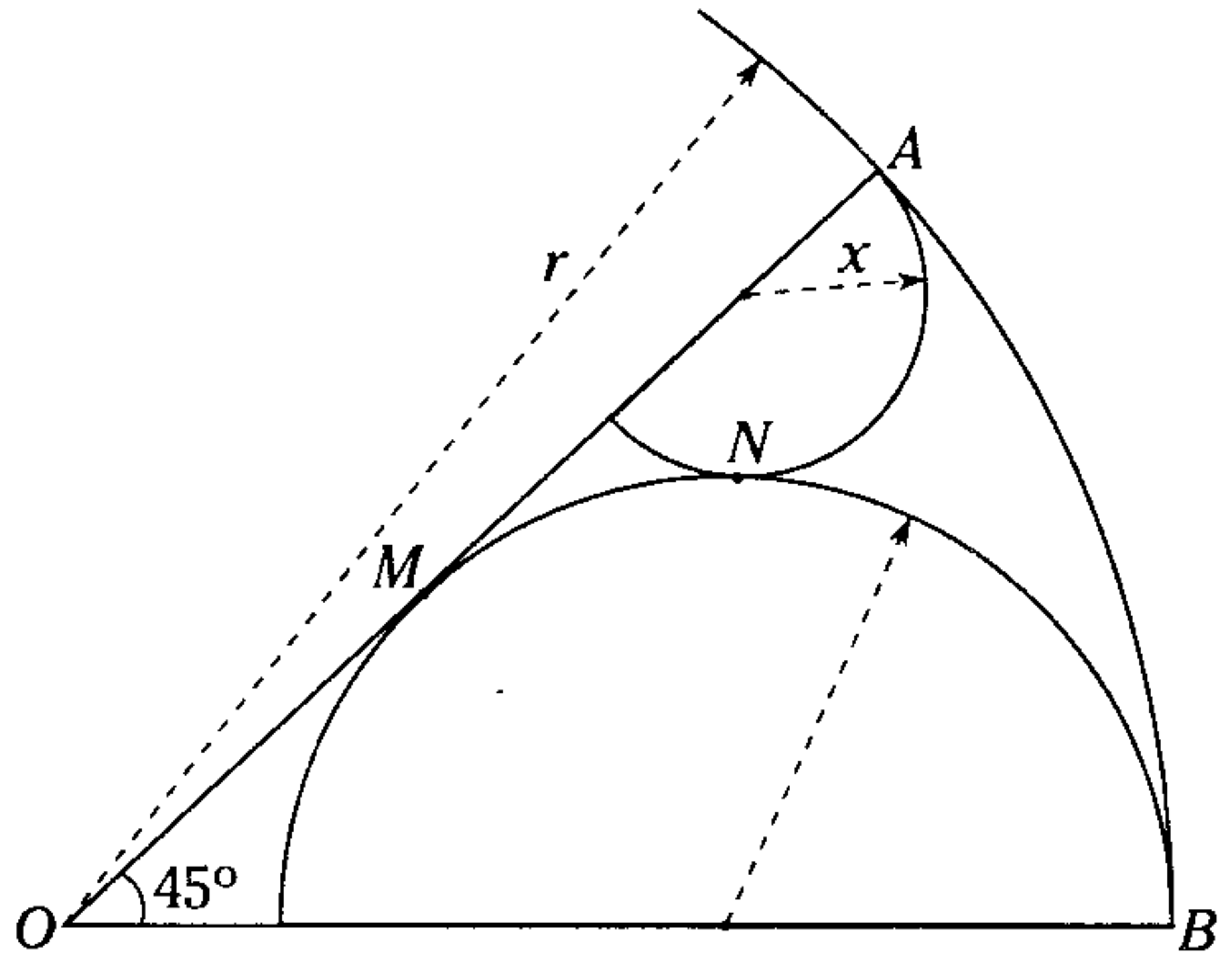
$$\frac{x}{4}\sqrt{17}=\frac{7}{9}$$

$$\therefore\ x=\frac{28\sqrt{17}}{153}$$

CLAVE D

Problema 17

Según la figura, M y N son puntos de tangencia, halle x.



A) $(4-\sqrt{2})r$ B) $(4-2\sqrt{3})r$

C) $(3-\sqrt{3})r$

D) $(3-2\sqrt{2})r$ E) $(2-\sqrt{2})r$

Resolución

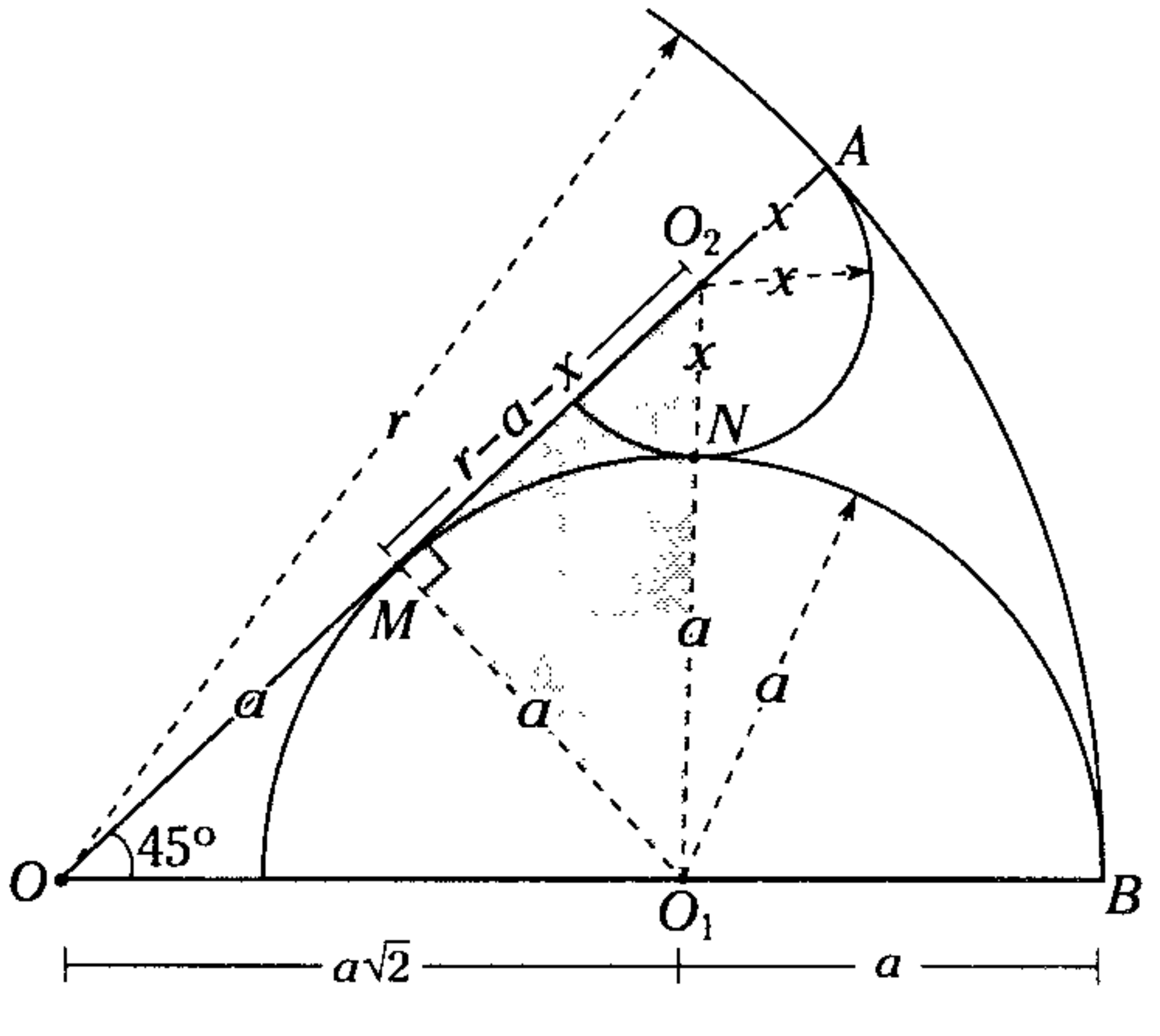


Figura 15.58

Piden x

De la figura, podemos obtener

$a(\sqrt{2}+1)=r$

$a=r(\sqrt{2}-1)$ (I)

⊿ O_1MO_2: teorema de Pitágoras

$$a^2+(r-a-x)^2=(x+a)^2$$

Operando y simplificando

$$a^2+r^2-2ra=2rx$$

$$x=\frac{a^2+r^2-2ra}{2r}$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{(a-r)^2}{2r} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II)

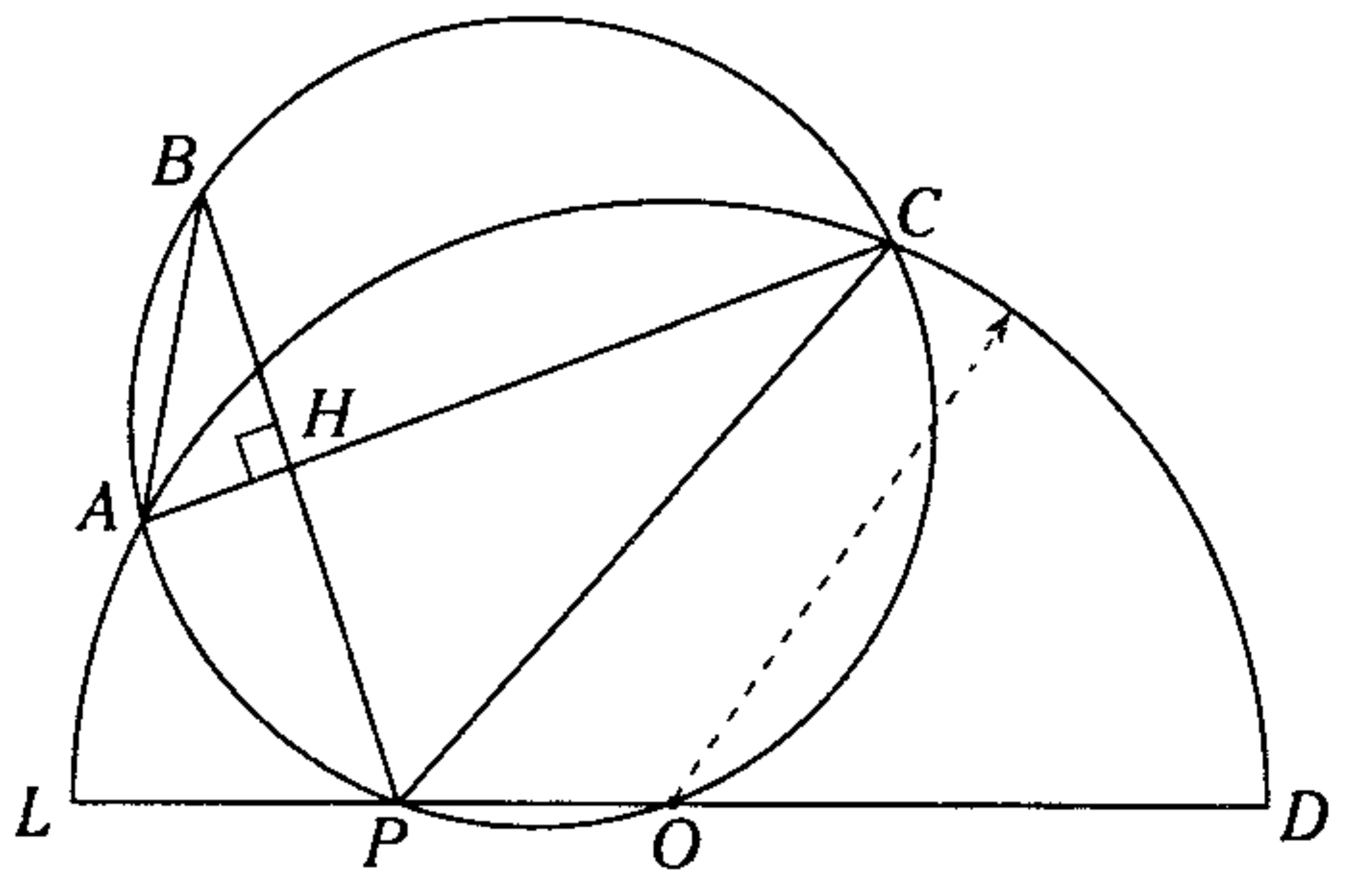
$$x=\frac{(r\sqrt{2}-r-r)^2}{2r}=\frac{(\sqrt{2}-2)^2 r}{2}$$

$$\therefore \quad x=(3-2\sqrt{2})r$$

CLAVE D

Problema 18

De acuerdo a la figura, $m\widehat{ABC}=2(m\widehat{AL}+m\widehat{CD})$; $OD=3$ y $PH=2$, calcule $(PC)(BA)$.



A) 12 B) $4\sqrt{2}$

C) 6

D) $6\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

Resolución

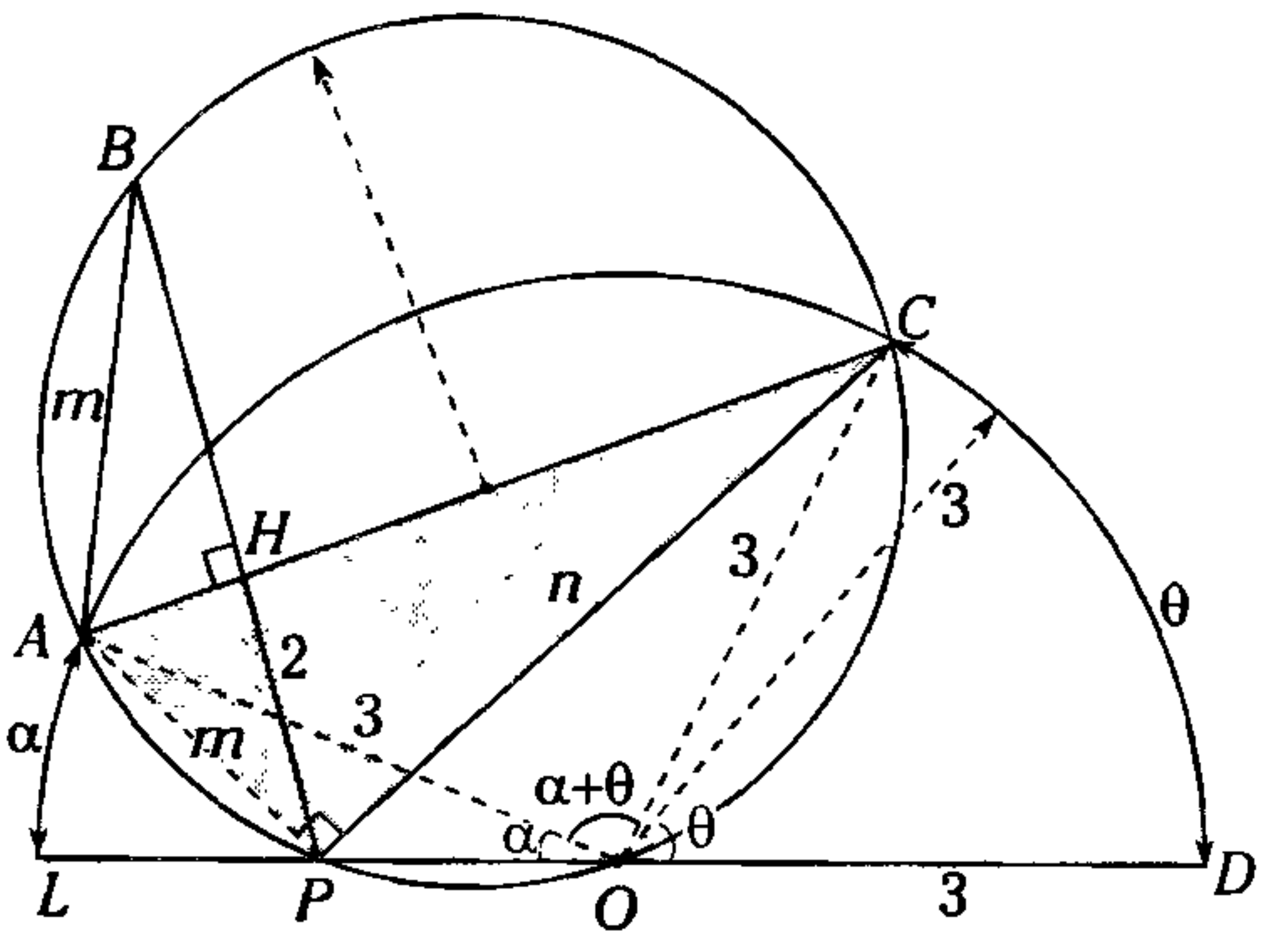


Figura 15.59

Piden $(PC)(BA) = n.m$

Dato: $m\widehat{ABC} = 2(m\widehat{AL} + m\widehat{CD})$

$\rightarrow \quad m\widehat{ABC} = 2(\alpha + \theta)$

En la semicircunferencia se trazan $\overline{AO}$ y $\overline{CO}$.

En la circunferencia

$$m\sphericalangle AOC = \frac{m\widehat{ABC}}{2} = \alpha + \theta$$

En O: $\alpha + \alpha + \theta + \theta = 180°$

$\rightarrow \quad \alpha + \theta = 90°$

Por lo cual $\overline{AC}$: diámetro $\rightarrow m\sphericalangle APC = 90°$

Por propiedad: $AB = AP = m$

⊾APC

$m.n = 2(3\sqrt{2})$

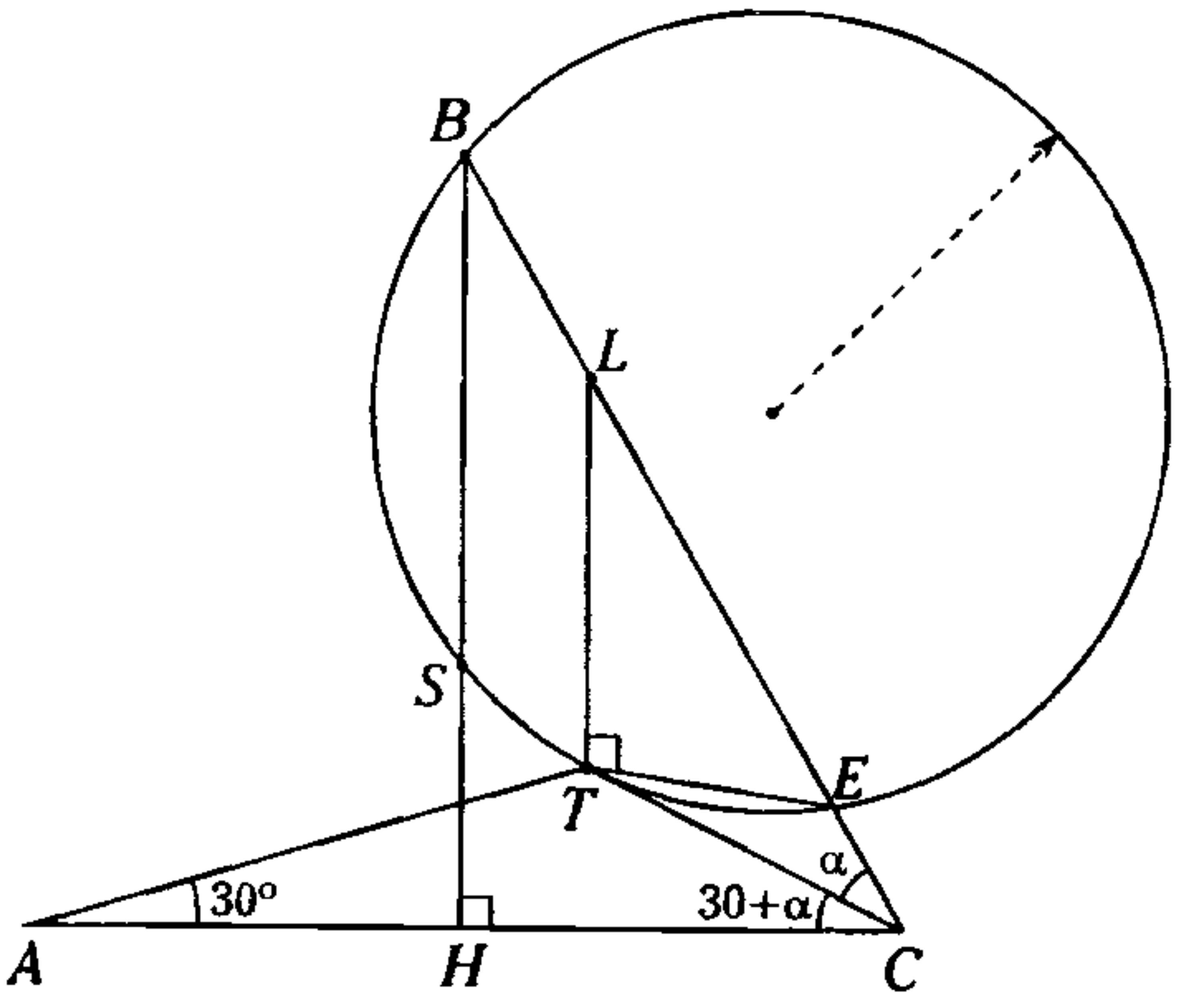
$\therefore \quad m.n = 6\sqrt{2}$

CLAVE D

Problema 19

De la figura, $AH = HC$ y $TS^2 + LT^2 = 16$.

Calcule LE.



A) 1 B) 2 C) 4

D) $4\sqrt{2}$ E) 8

Resolución

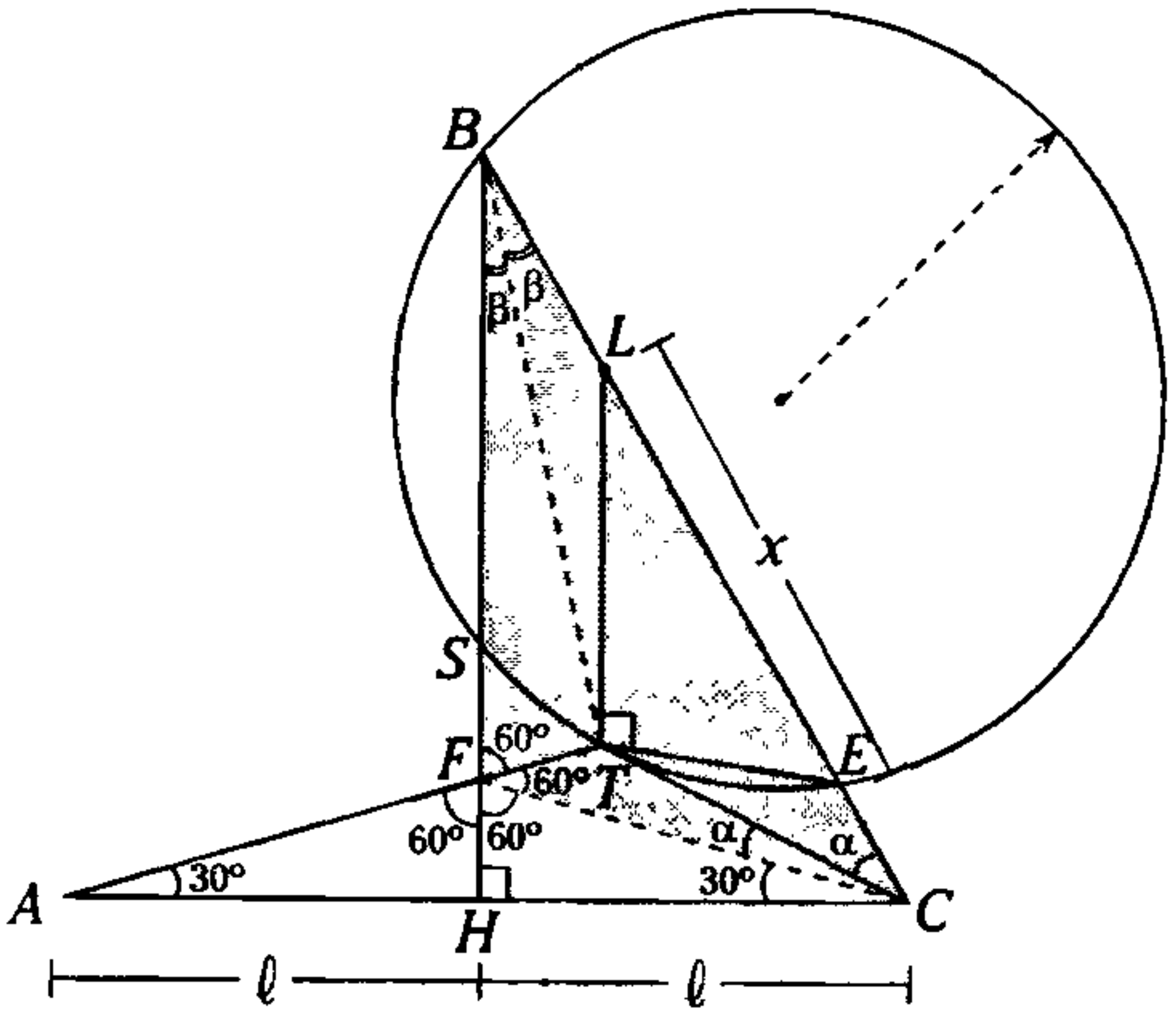


Figura 15.60

Piden $LE = x$

Como $\overline{BH}$: parte dela mediatriz de $\overline{AC}$

$\rightarrow$ Por teorema $FC = FA$, $m\sphericalangle FCA = 30°$

También

$$m\sphericalangle AFH = m\sphericalangle HFC = 60°, \ m\sphericalangle FCT = \alpha$$

Resolución

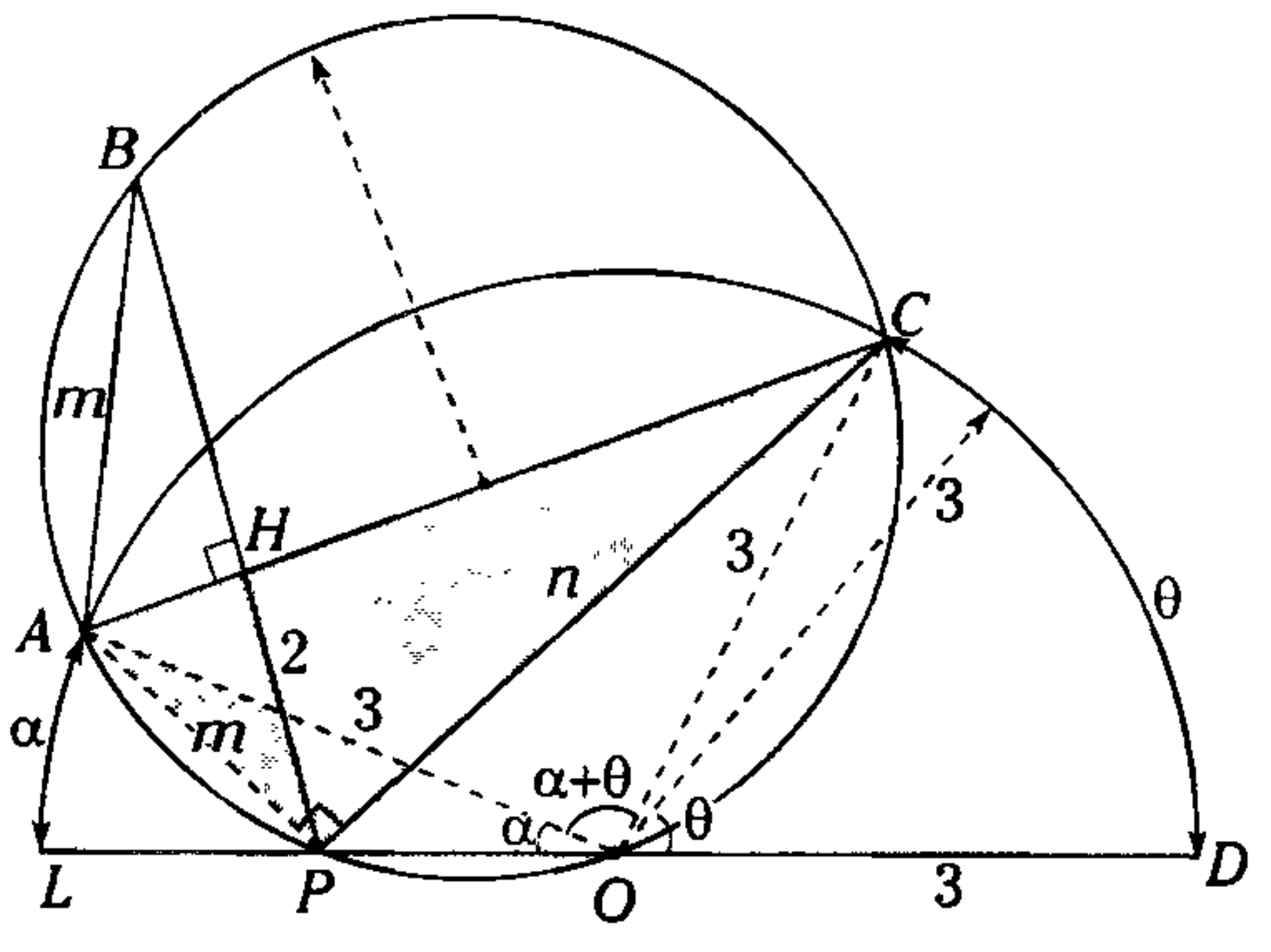


Figura 15.59

Piden $(PC)(BA) = n.m$

Dato: $m\widehat{ABC} = 2(m\widehat{AL} + m\widehat{CD})$

$\rightarrow\ m\widehat{ABC} = 2(\alpha + \theta)$

En la semicircunferencia se trazan $\overline{AO}$ y $\overline{CO}$.

En la circunferencia

$$m\measuredangle AOC = \frac{m\widehat{ABC}}{2} = \alpha + \theta$$

En O: $\alpha + \alpha + \theta + \theta = 180°$

$\rightarrow\ \alpha + \theta = 90°$

Por lo cual $\overline{AC}$: diámetro $\rightarrow$ $m\measuredangle APC = 90°$

Por propiedad: $AB = AP = m$

⊿ APC

$m.n = 2(3\sqrt{2})$

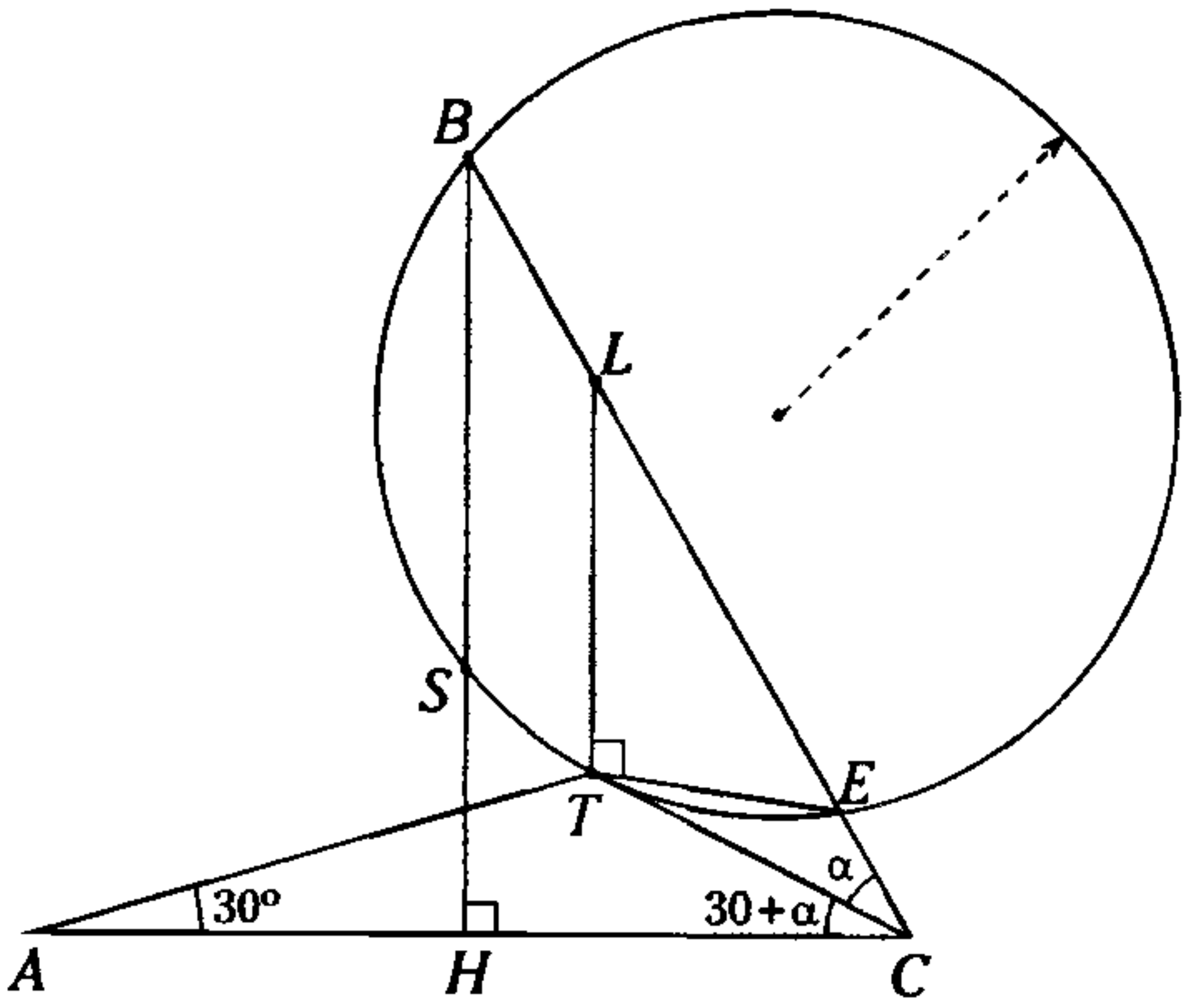
$\therefore\ m.n = 6\sqrt{2}$

CLAVE D

Problema 19

De la figura, $AH = HC$ y $TS^2 + LT^2 = 16$.

Calcule LE.



A) 1 B) 2 C) 4

D) $4\sqrt{2}$ E) 8

Resolución

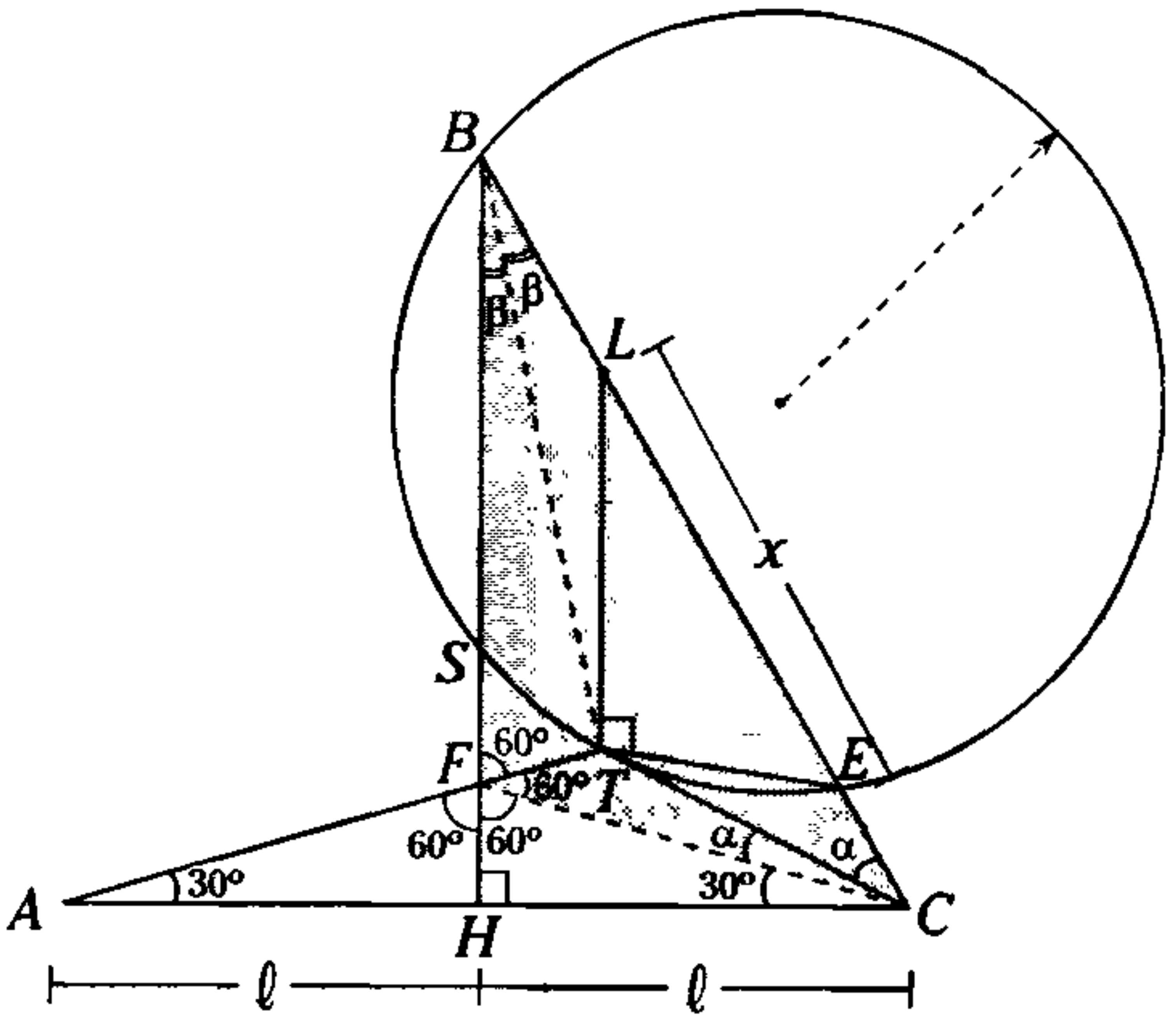


Figura 15.60

Piden $LE = x$

Como $\overline{BH}$: parte dela mediatriz de $\overline{AC}$

$\rightarrow$ Por teorema $FC = FA$, $m\measuredangle FCA = 30°$

También

$m\measuredangle AFH = m\measuredangle HFC = 60°$, $m\measuredangle FCT = \alpha$

Analizando la figura 15.60, podemos plantear que $\overline{FT}$ y $\overline{CT}$ son partes de las bisectrices de los ángulos BFC y FCB entonces T: incentro del $\triangle BCF$, por lo cual $m\measuredangle FBT = m\measuredangle TBC = \beta$

Como $m\overset{\frown}{ST} = m\overset{\frown}{TE}$

$\rightarrow\ ST = TE$

⊾LTE: por teorema de Pitágoras

$TE^2 + TL^2 = x^2$

$ST^2 + TL^2 = x^2$

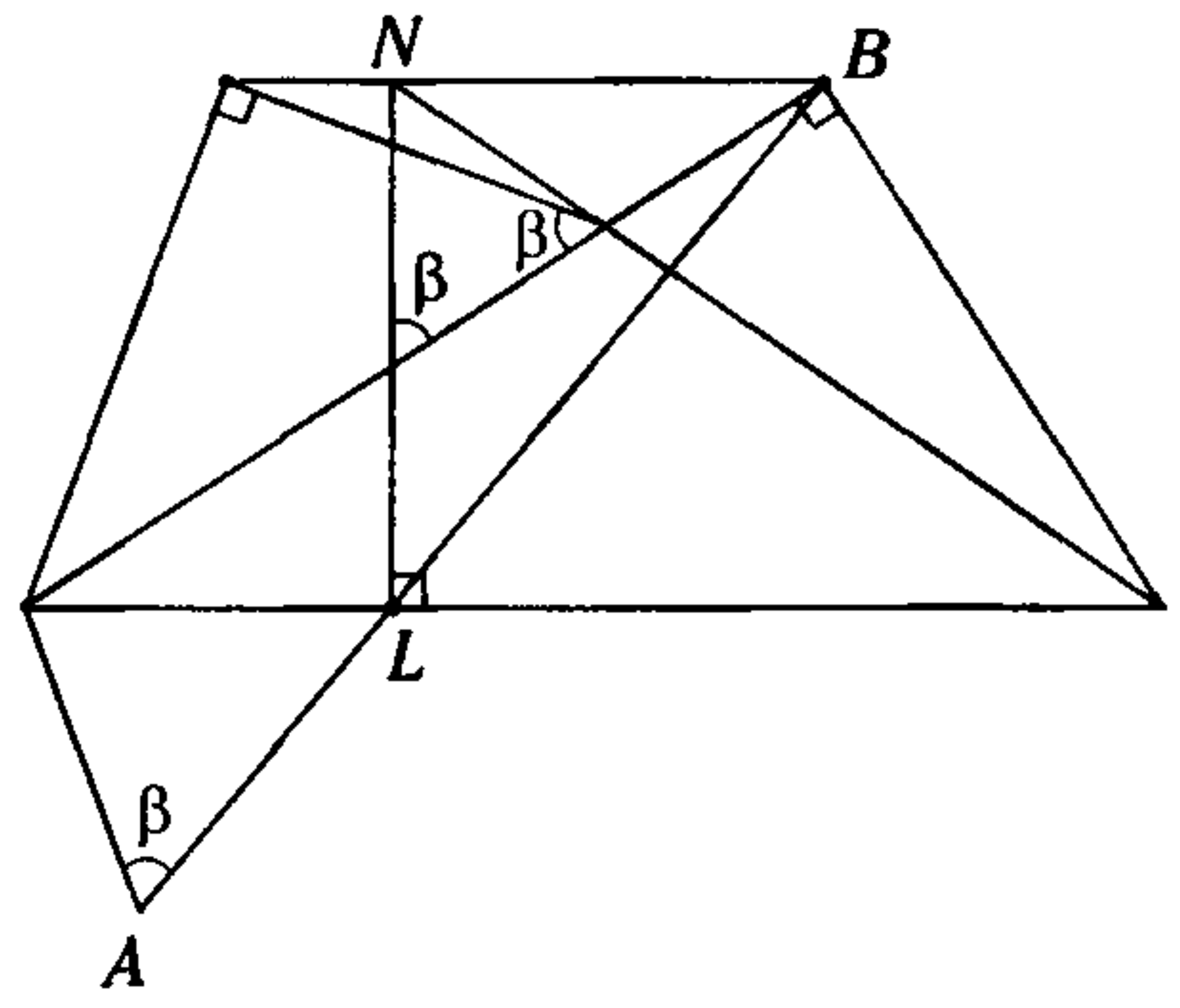
$16 = x^2$

$\therefore\ x = 4$

CLAVE C

Problema 20

De la figura, $(AL)(LB) = a$. Calcule LN.



A) $\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ B) $\sqrt{\dfrac{a}{6}}$ C) $\sqrt{2a}$

D) $\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ E) $\sqrt{a}$

Resolución

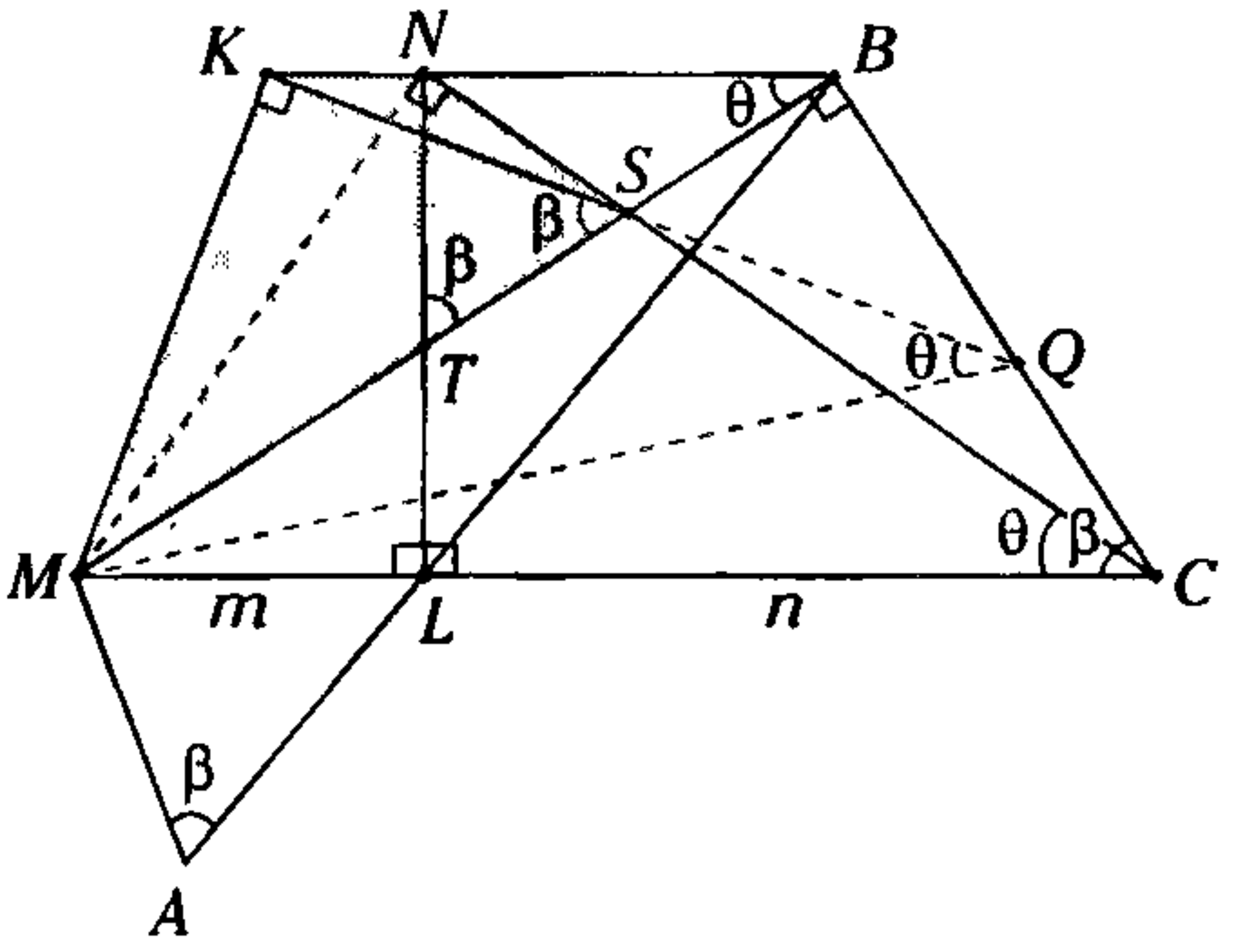


Figura 15.61

Piden $LN = x$

Dato $(AL).(LB) = a$

Como $m\measuredangle TBC + m\measuredangle TLC = 180°$

$\rightarrow$ ⌂$TBCL$: inscriptible

Por lo cual $m\measuredangle BCL = \beta$

$\triangle MLA \sim \triangle BLC$ (A.A.A.)

$\dfrac{AL}{n} = \dfrac{m}{LB} \ \rightarrow\ (AL)(LB) = mn = a$

Se prolongan $\overline{KS}$ hasta que interseca a $\overline{BC}$ en Q

Como $m\measuredangle QCM = m\measuredangle MSK = \beta$

$\rightarrow$ ⌂$MSQC$: inscriptible

Por lo cual $m\measuredangle SQM = m\measuredangle SCM = \theta$

Como $m\measuredangle MKQ = m\measuredangle MBQ = 90°$

$\rightarrow$ ⌂$MKBQ$: inscriptible

Por ello $m\measuredangle KBM = m\measuredangle KQM = \theta$

Como $m\measuredangle NBM = m\measuredangle NCM = \theta$

$\rightarrow$ ⌂$MNBC$: inscriptible

Por lo que $m\measuredangle MNC = 90°$

⊾MNC: por teorema

$x^2 = mn$

$x^2 = a$

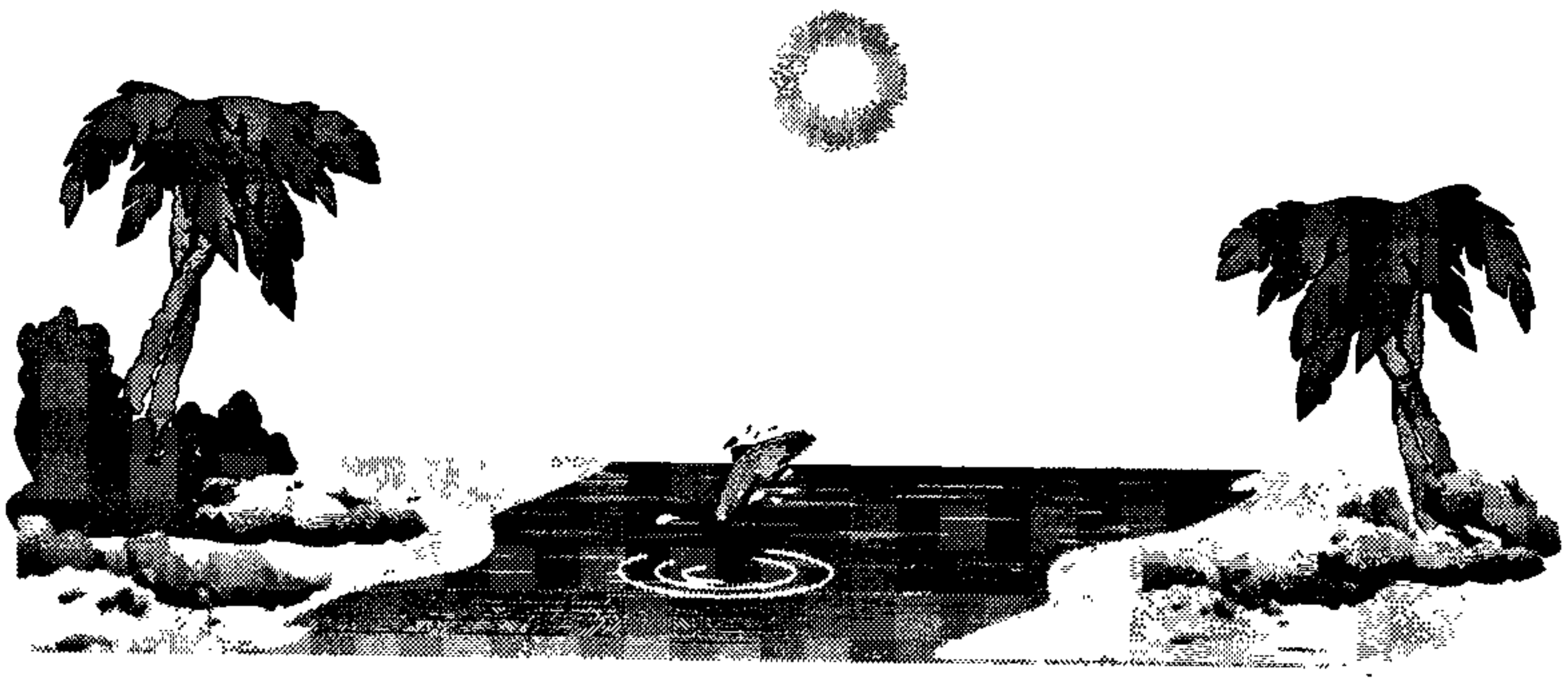
$\therefore\ x = \sqrt{a}$

CLAVE E

Problemas Recreativos

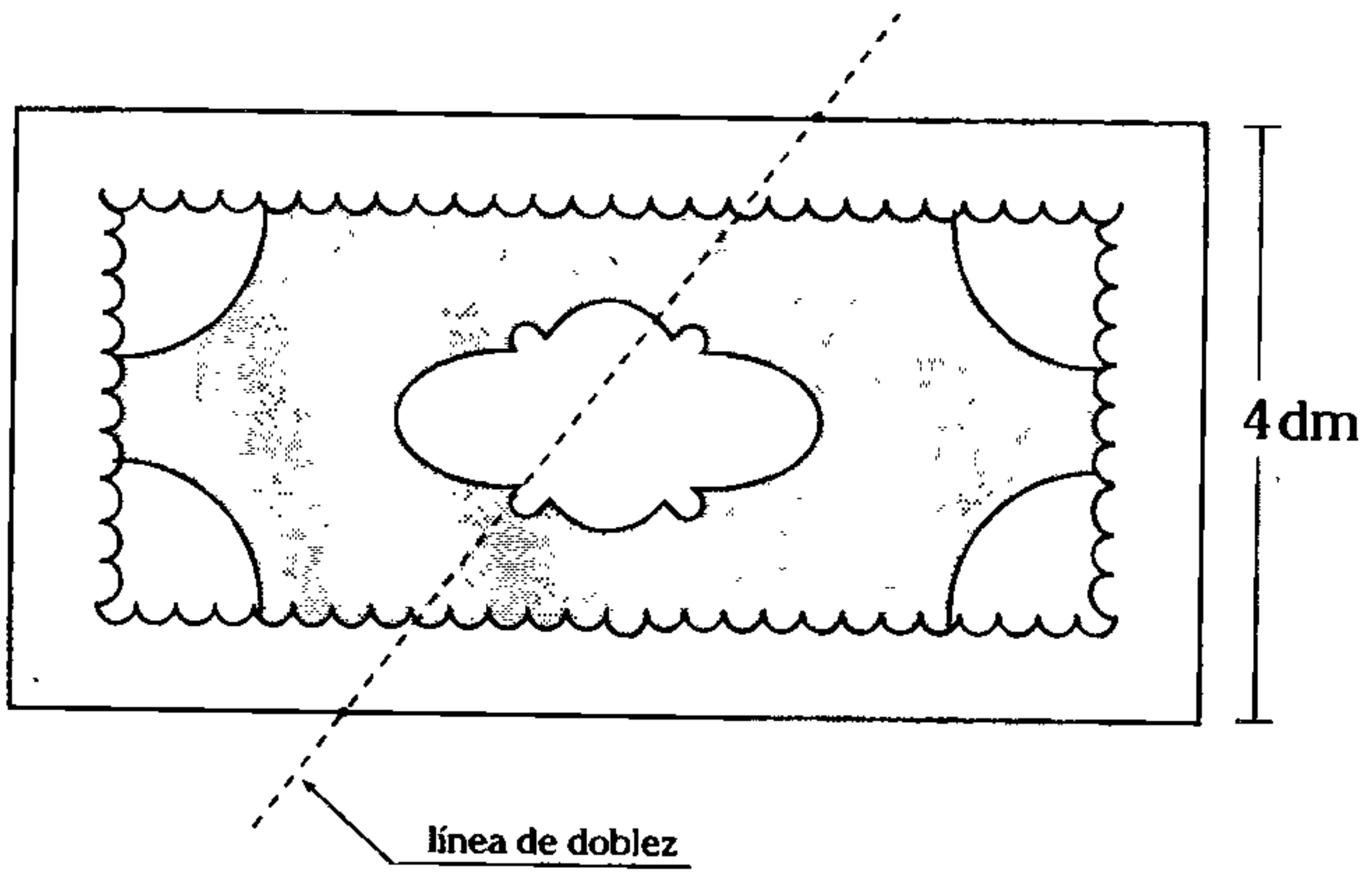
1. **Pez en la superficie**

A ambas orillas de un río hay dos palmeras, una frente a la otra. La altura de una de ellas es de 30 codos y de la otra 20, la distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro y un pez aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron simultáneamente en busca del pez con la misma velocidad y alcanzaron al pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia de la palmera mayor apareció el pez?



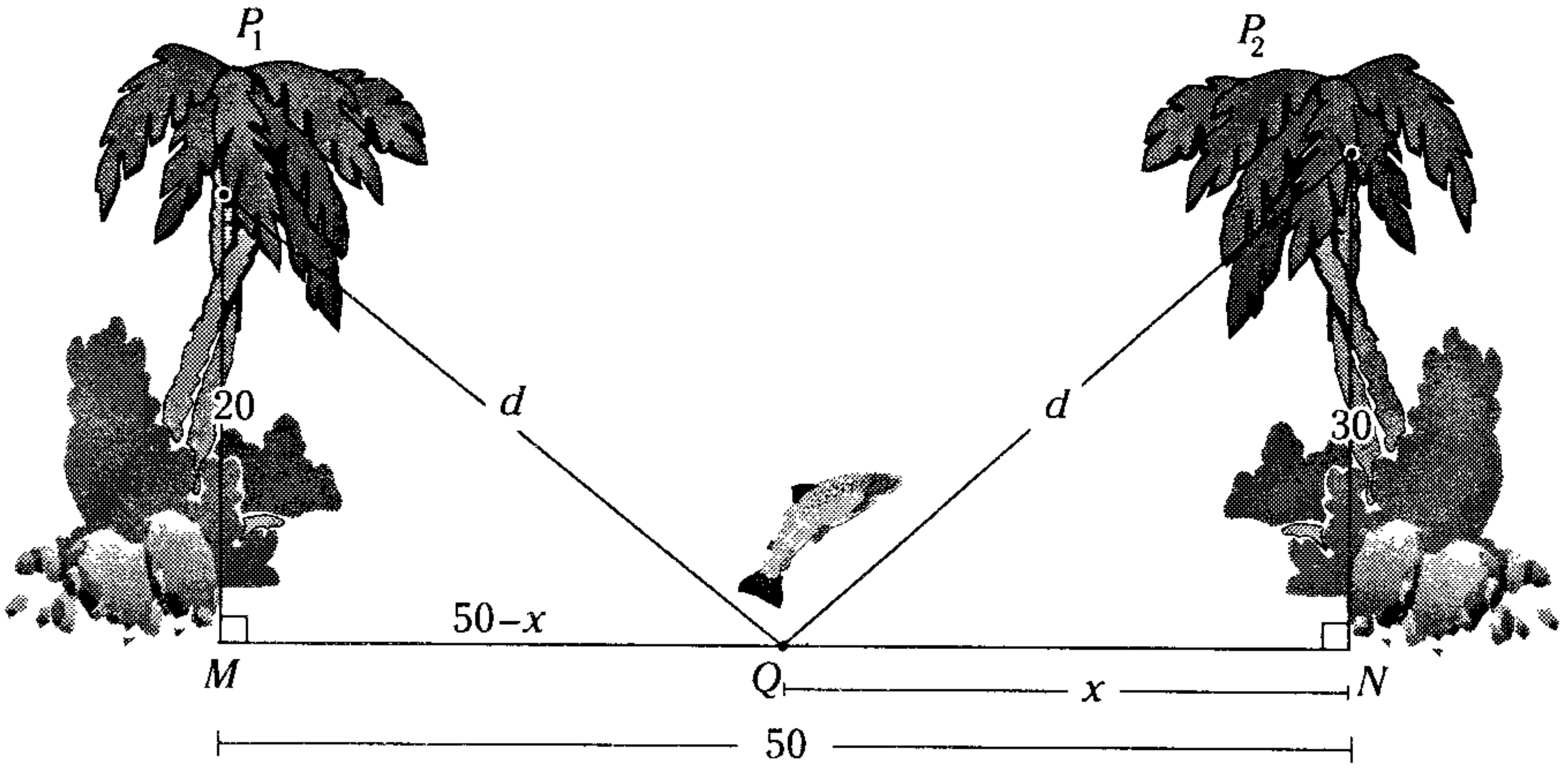
2. **Alfombras rectangulares persas**

Si una alfombra rectangular se dobla de modo que un vértice coincide con otro no consecutivo la longitud del doblez es de 5 dm. ¿Cuál será la longitud del largo, si el ancho mide 4 dm?



Resolución 1

Pez en la superficie



Piden $QN = x$

Si los pájaros se lanzan al mismo tiempo y con la misma velocidad, entonces para que lleguen a coger el pez al mismo tiempo las distancias recorridas deben ser las mismas.

Si la distancia entre los troncos de las palmeras es 50 codos, entonces $QM = 50 - x$

Aplicando el teorema de Pitágoras, en el

$\triangle P_1MQ$: $20^2 + (50-x)^2 = d^2$ (I)

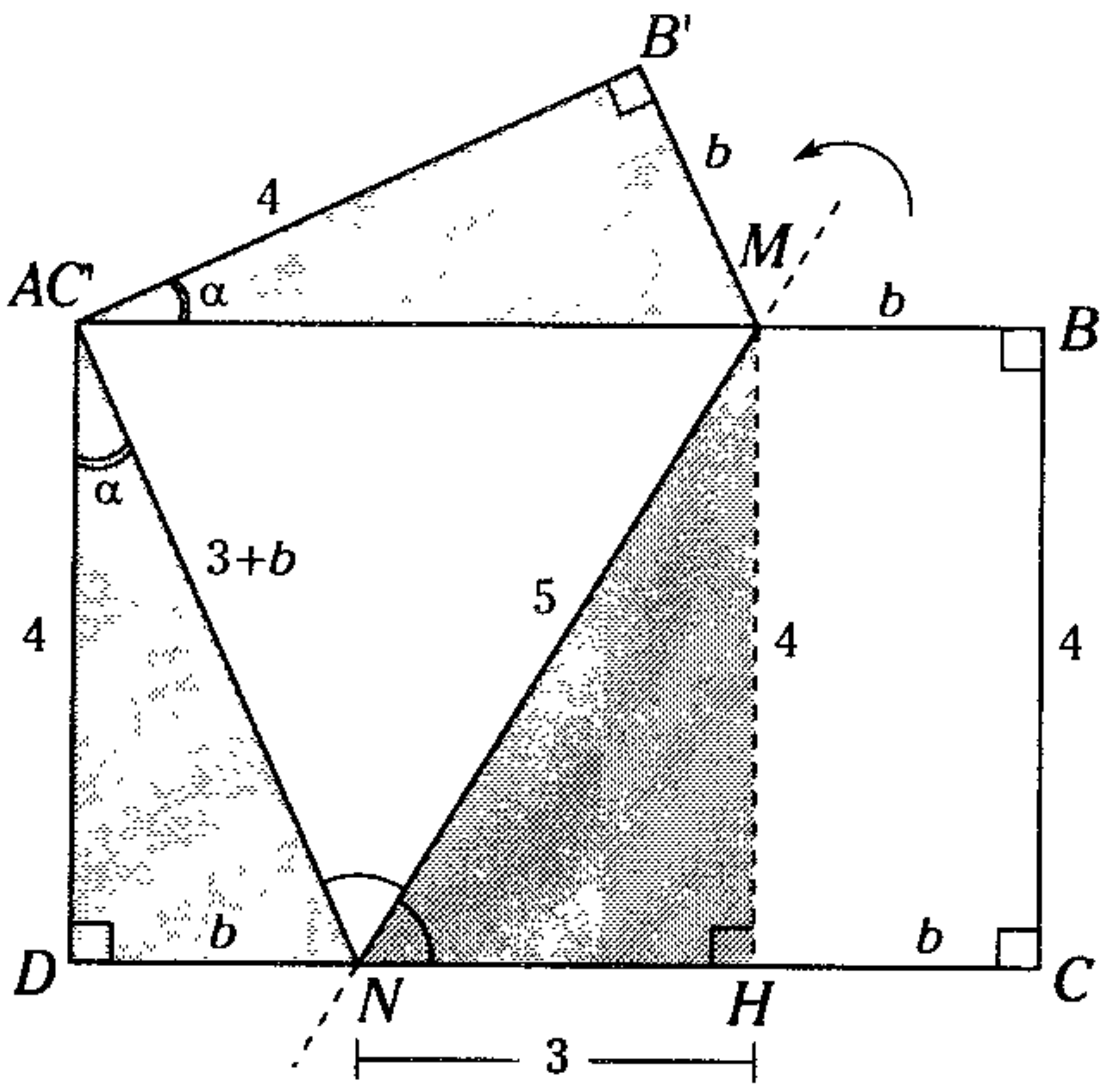
$\triangle P_2NQ$: $30^2 + x^2 = d^2$ (II)

De (I) y (II) se tiene

$\therefore\ x = 20$ codos

Resolución 2

Alfombras rectangulares persas



Al hacer coindicir el extremo C con A $\rightarrow$ $C' = A$

$NA = NC$ y $MB' = MB = b$

Por lo tanto $AB' = BC = 4$ dm

al trazar $\overline{MH} \perp \overline{DC}$, $HC = MB = b$

y en el $\triangle MHN$: Por el teorema de Pitágoras

$NH^2 + 4^2 = 5^2 \rightarrow NH = 3$

Como $NA = NC$ $\rightarrow$ $NA = 3 + b$

$\triangle C'B'M \cong \triangle ADN$ (A.L.A.) $\rightarrow DN = b$

$\triangle ADN$: teorema de Pitágoras

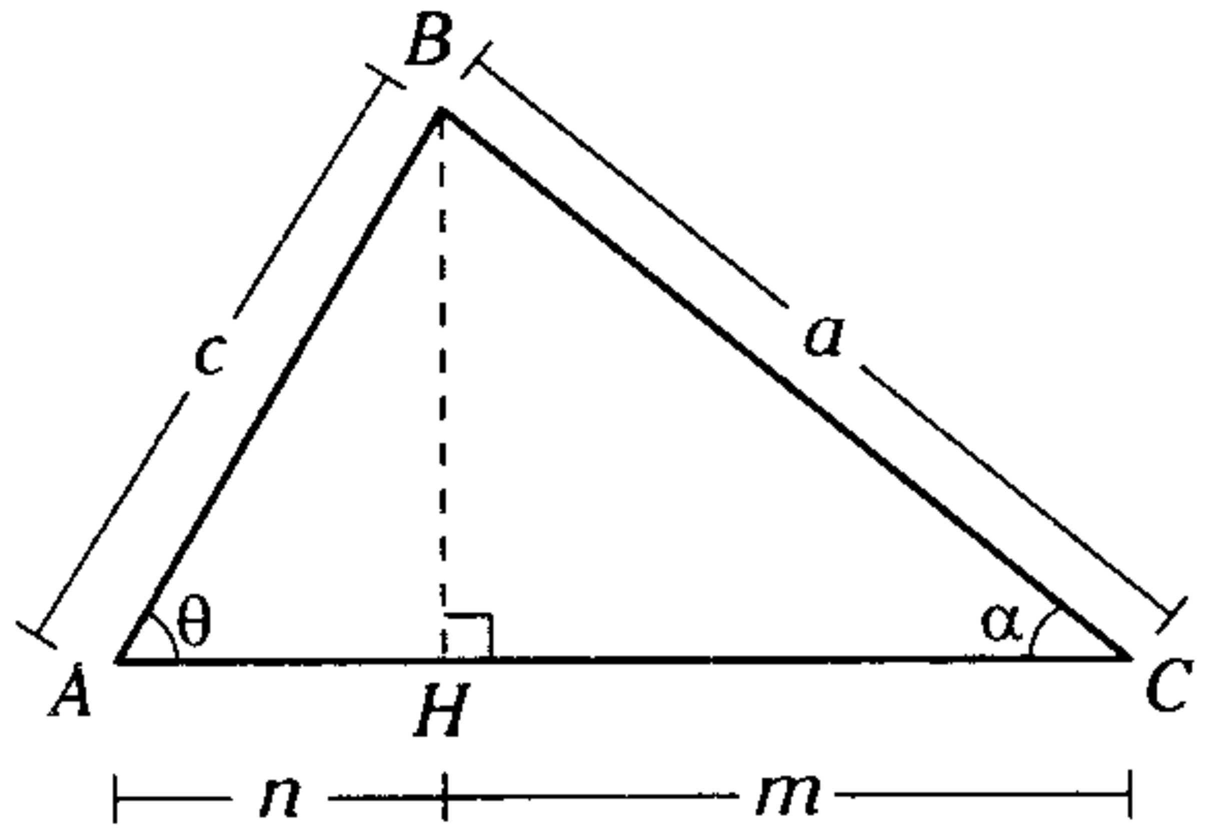
$(3+b)^2 = b^2 + 4^2$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

TEOREMA DE LAS PROYECCIONES

En todo triángulo, la diferencia de los cuadrados de las longitudes de dos lados es igual a la diferencia de los cuadrados de las longitudes de sus respectivas proyecciones ortogonales respecto al tercer lado.

Primer caso: Triángulo acutángulo



(a)

En la figura 15.62(a), $\theta < 90^\circ$ y $\alpha < 90^\circ$

$\overline{AH}$ y $\overline{HC}$: Proyecciones ortogonales de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respecto a $\overline{AC}$.

Se cumple

$$a^2 - c^2 = m^2 - n^2$$

Demostración

Por el Teorema de Pitágoras

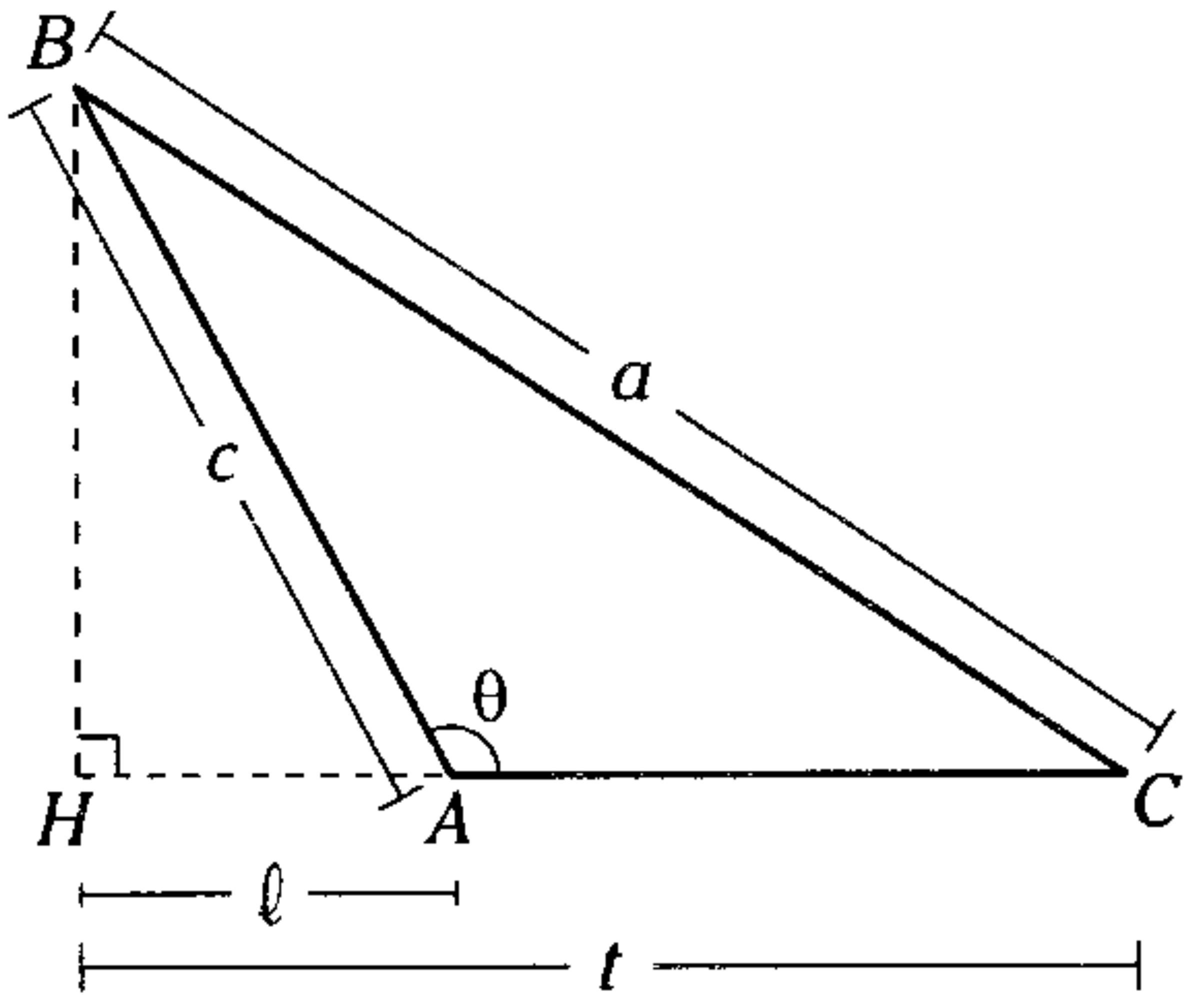
$\triangle BHC$: $a^2 = m^2 + (BH)^2$ (I)

$\triangle ABH$: $c^2 = n^2 + (BH)^2$ (II)

Restando (I) y (II)

$\therefore\ a^2 - c^2 = m^2 - n^2$

Segundo caso: Triángulo obtusángulo



(b)

Figura 15.62

En la figura 15.62(b), $\theta > 90^\circ$

$\overline{AH}$ y $\overline{HC}$: Proyecciones ortogonales de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respecto a $\overline{AC}$ respectivamente.

Se cumple

$$a^2 - c^2 = t^2 - \ell^2$$

Demostración

Por el teorema de Pitágoras

$\triangle BHC$: $a^2 = m^2 + (BH)^2$ (I)

$\triangle ABH$: $c^2 = n^2 + (BH)^2$ (II)

Restando (I) y (II)

$\therefore\ a^2 - c^2 = t^2 - \ell^2$

TEOREMA DE EUCLIDES

Primer caso

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado que se opone a la medida de un ángulo agudo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de las longitudes de uno de ellos y la proyección ortogonal del otro sobre aquel.

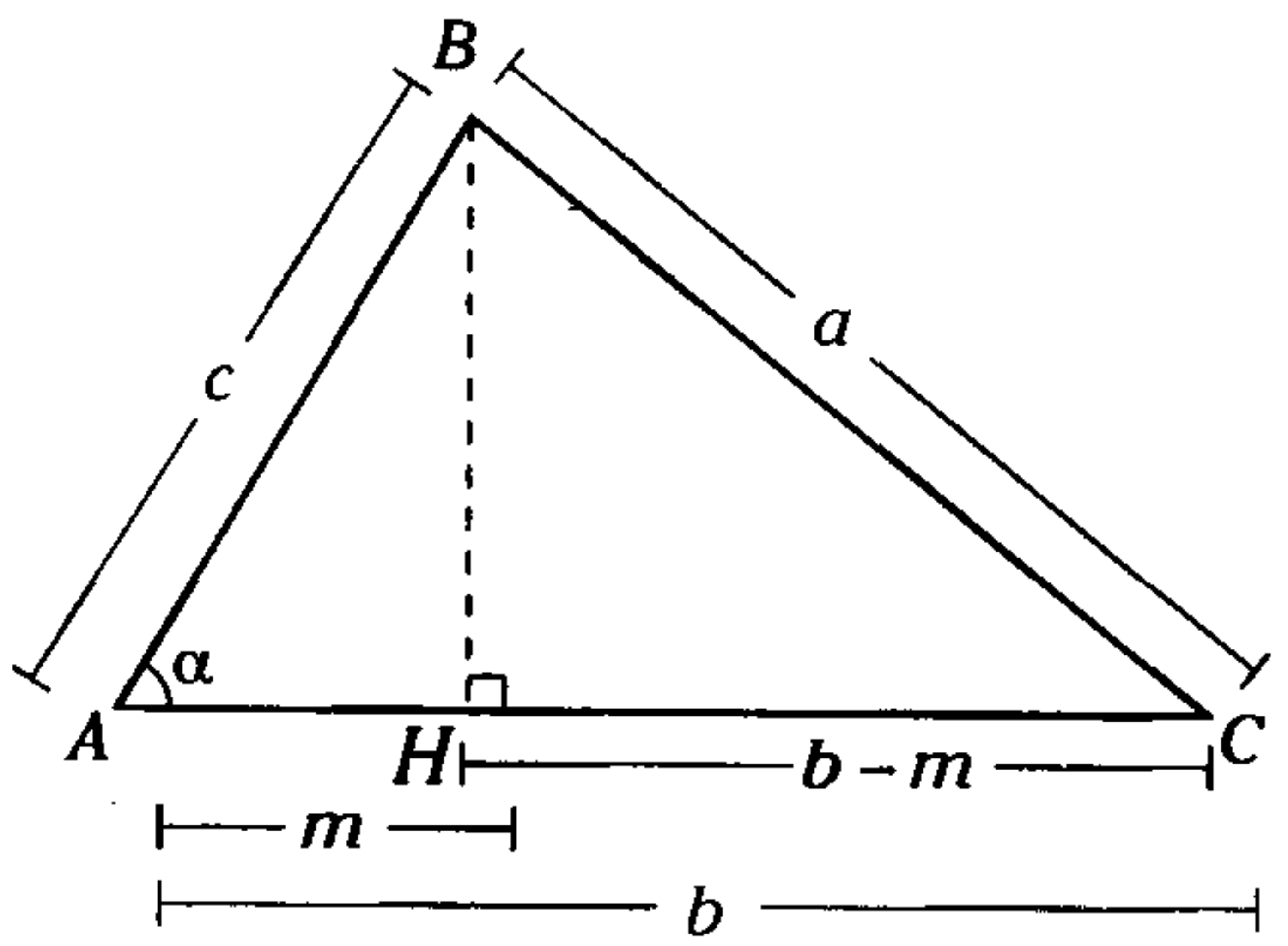


Figura 15.63

En la figura 15.63, $\alpha < 90°$

$\overline{AH}$: Proyección ortogonal de $\overline{AB}$ respecto a $\overline{AC}$

Se cumple

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Demostración

Por el teorema de las proyecciones

$\triangle ABC$: $a^2 - c^2 = (CH)^2 - m^2$ (I)

Como

$CH = b - m$ (II)

Reemplazando en (II) en (I)

$a^2 - c^2 = (b - m)^2 - m^2$

$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$

Segundo caso

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado que se opone a la medida de un ángulo obtuso, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados más el doble producto de las longitudes de uno de dichos aquel.

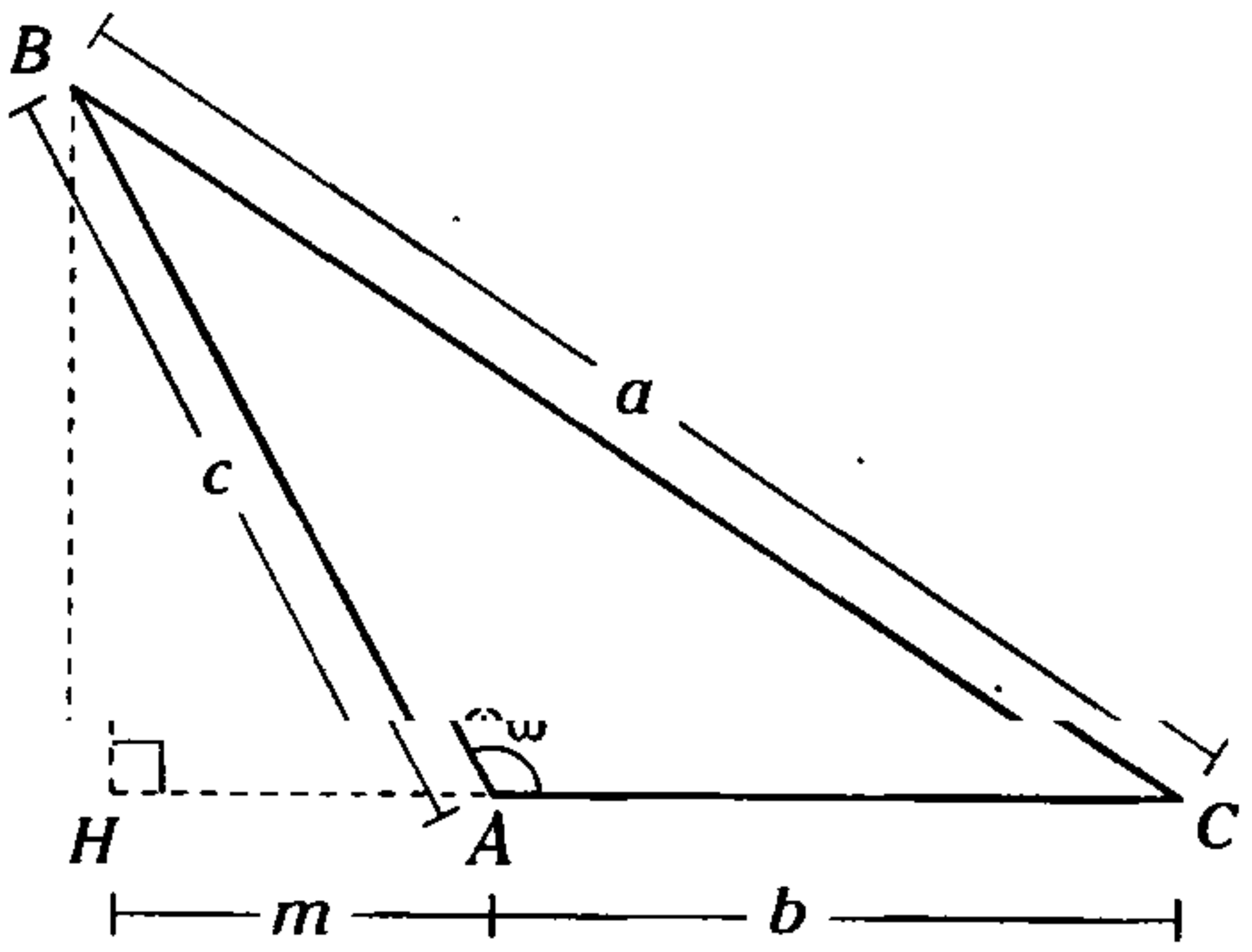


Figura 15.64

En la figura 15.64, $\omega > 90°$

$\overline{AH}$: Proyección ortogonal de $\overline{AB}$ respecto a $\overline{AC}$

Se cumple

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

Demostración

Por el teorema de las proyecciones

$\triangle ABC$: $a^2 - c^2 = (CH)^2 - m^2$ (I)

Como

$CH = b + m$ (II)

(II) en (I)

$a^2 - c^2 = (b + m)^2 - m^2$

$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$

TEOREMA DEL COSENO (o de Carnot)

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble del producto de las longitudes de dichos lados y el coseno de la medida del ángulo determinado por ellos.

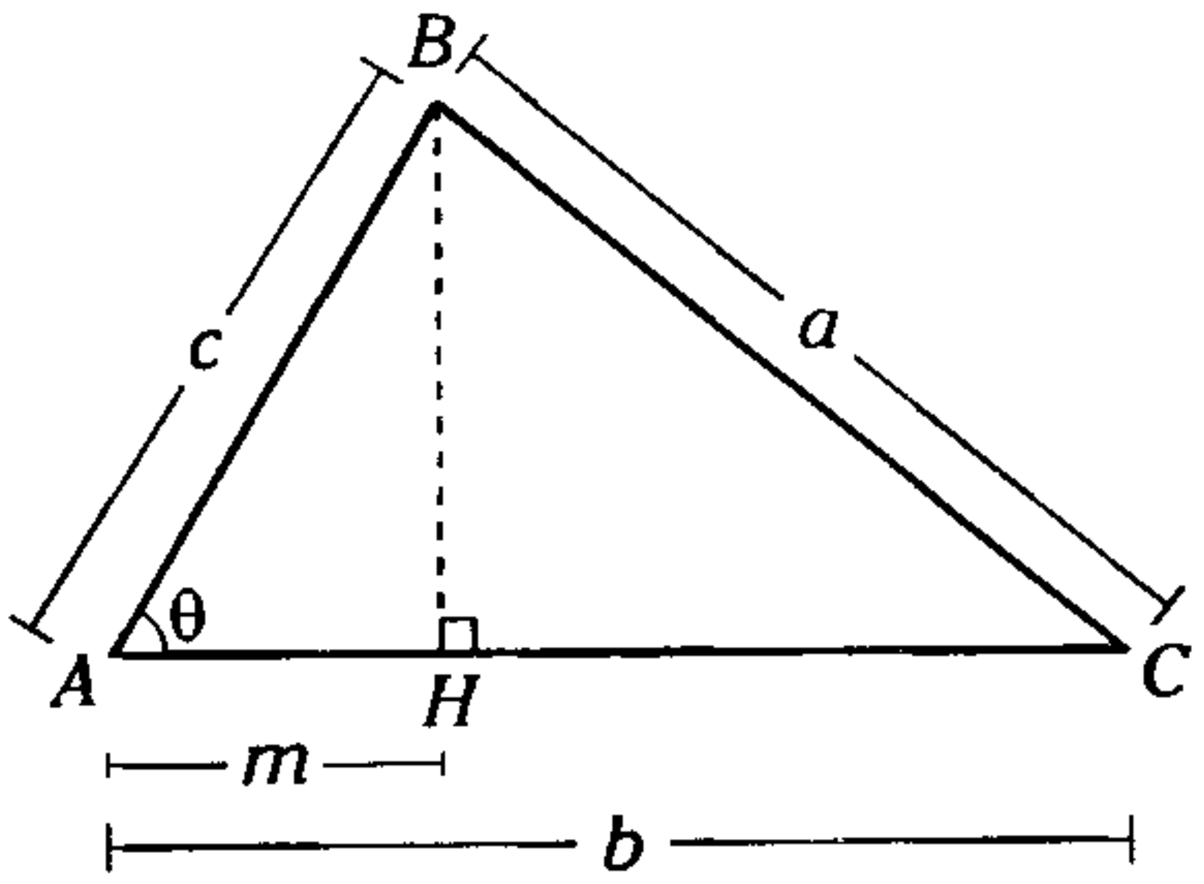


Figura 15.65

Demostración

Por el teorema de Euclides

$\triangle ABC$: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$ (I)

Pero en el ⊾AHB; $m = c.\cos\theta$

Reemplazando en (I)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\theta$$

En la figura 15.65,

Se cumple

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\theta}$$

Donde

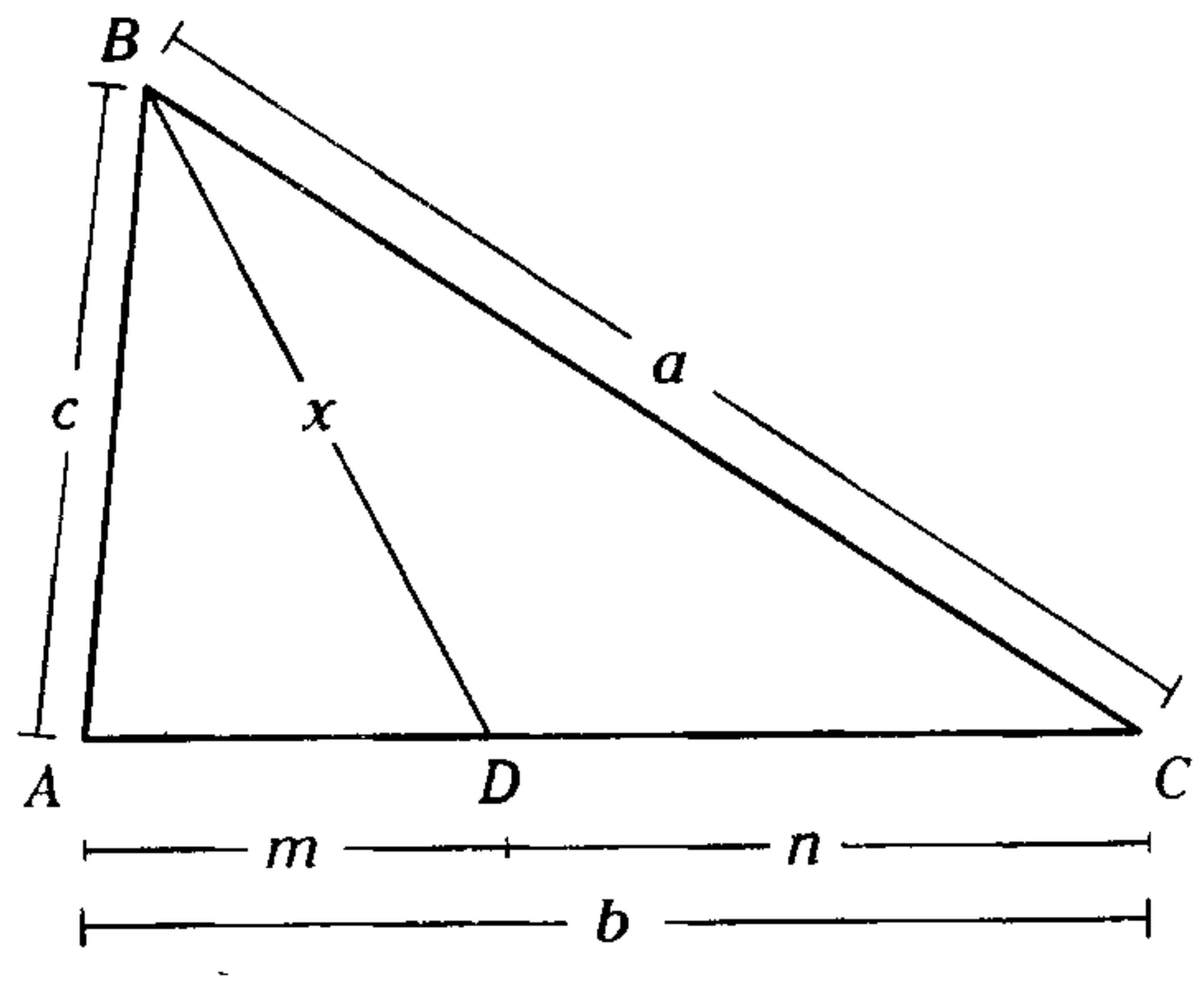
$0° < \theta < 180°$

Nota

Si el cuadrado de la longitud del mayor lado de un triángulo es menor, igual o mayor a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, entonces dicho triángulo será acutángulo, rectángulo u obtusángulo respectivamente.

TEOREMA DE STEWART

En todo triángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a una ceviana interior multiplicados con las longitudes de los segmentos parciales opuestos a dichos lados determinados por la ceviana en su lado relativo es igual al producto del cuadrado de la longitud de dicha ceviana con la longitud de su lado relativo más el producto de las longitudes de dicho lado y el de los segmentos parciales.



(a)

En la figura 15.66(a), $\overline{BD}$: Ceviana interior del $\triangle ABC$ relativa al lado AC.

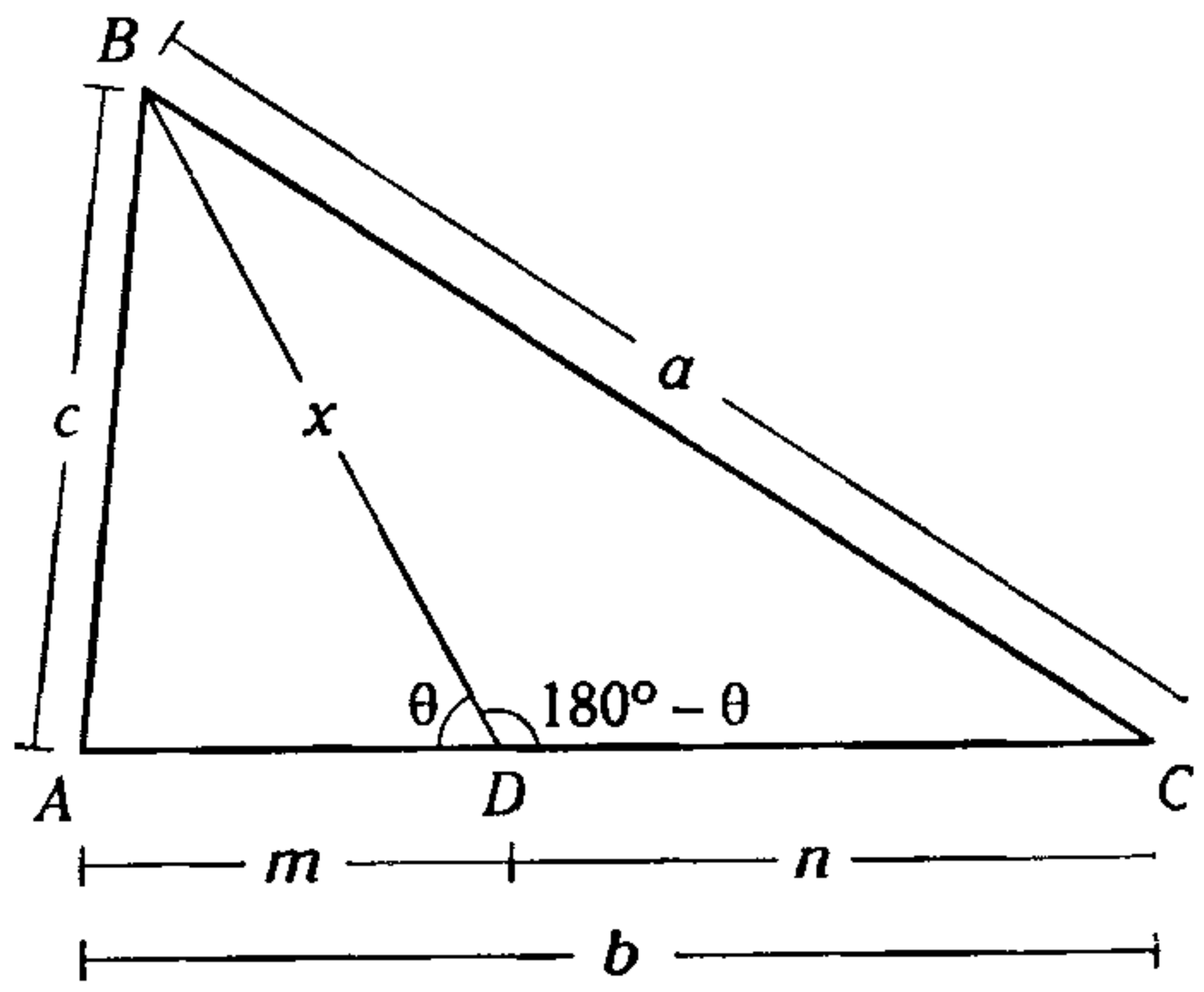
$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: Lados adyacentes a la ceviana interior BD.

$\overline{AD}$ y $\overline{DC}$: segmentos determinados por la ceviana interior BD en el lado AC.

Se cumple

$$\boxed{a^2m + c^2n = x^2b + bmn}$$

Demostración



(b)

Figura 15.66

Por el teorema de cosenos

$\triangle ABD$:

$$c^2 = x^2 + m^2 - 2xm.\cos\theta \qquad \text{(I)}$$

$\triangle BDC$:

$$a^2 = x^2 + n^2 - 2xn.\cos(180° - \theta) \qquad \text{(II)}$$

Como

$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$

Reemplazando y multiplicando (I) y (II) por n y m respectivamente se tiene

$$c^2n = x^2n + m^2n - 2xmn\,.\cos\theta \qquad \text{(III)}$$

$$a^2m = x^2m + n^2m - 2xmn(-\cos\theta) \qquad \text{(IV)}$$

Sumando (III) y (IV)

$$c^2n + a^2m = x^2(m+n) + mn(m+n)$$

En la figura 15.66(b)

$$m + n = b$$

$$\therefore\ c^2n + a^2m = x^2b + bmn$$

Nota

Cuando la ceviana es exterior se cumple

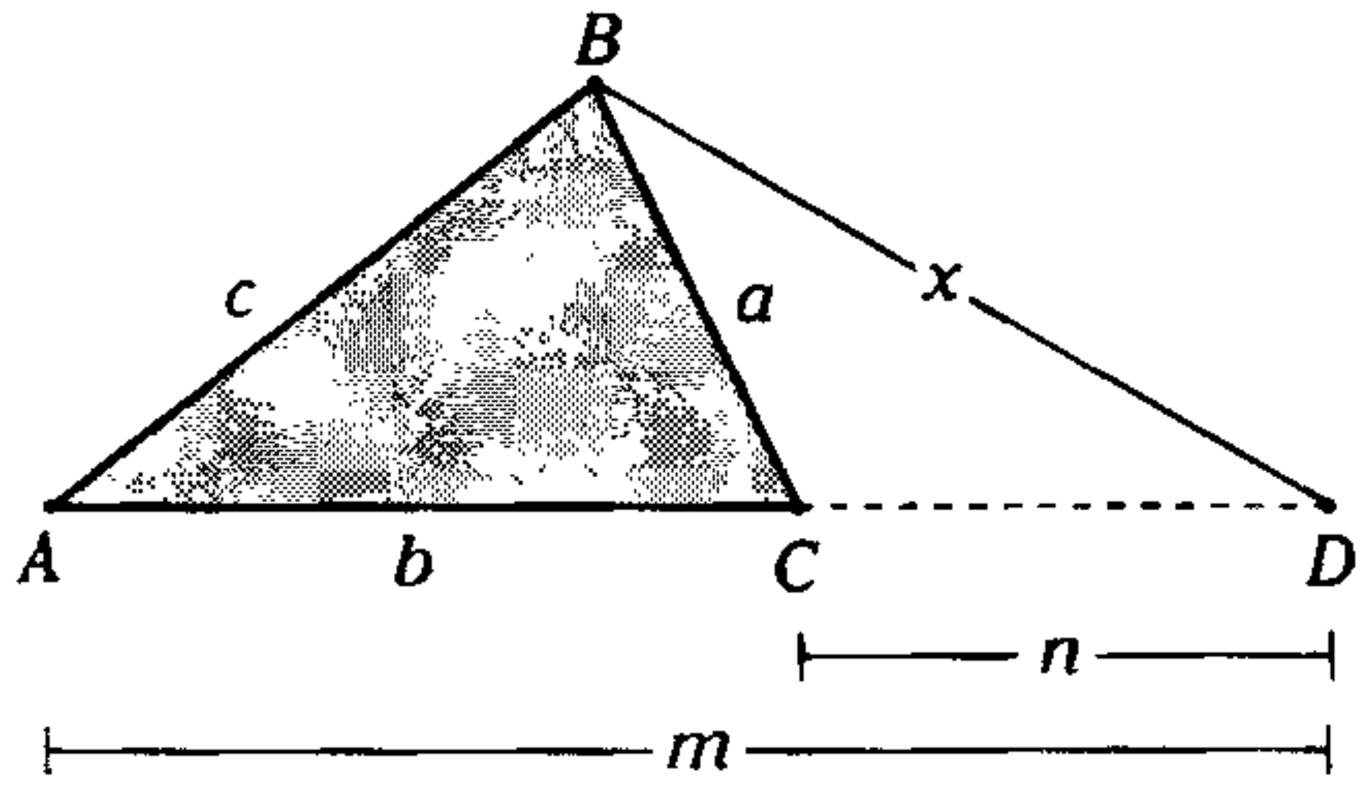


Figura 15.67

$$a^2m - c^2n = x^2b - bmn$$

Matthew Stewart nació el 15 de enero de 1717 en Born (Rothesay - Escocia) estudio en la Universidad de Maclaurin en Edimburgo, mantuvo correspondencia con Robert Simson. Falleció el 23 de enero de 1785 en Catrine Escocia.

TEOREMA DE CÁLCULO DE LA MEDIANA (Teorema de Apolonio)

En todo triángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados es igual al doble del cuadrado de la longitud de la mediana relativa al tercer lado más la mitad del cuadrado de la longitud de dicho tercer lado.

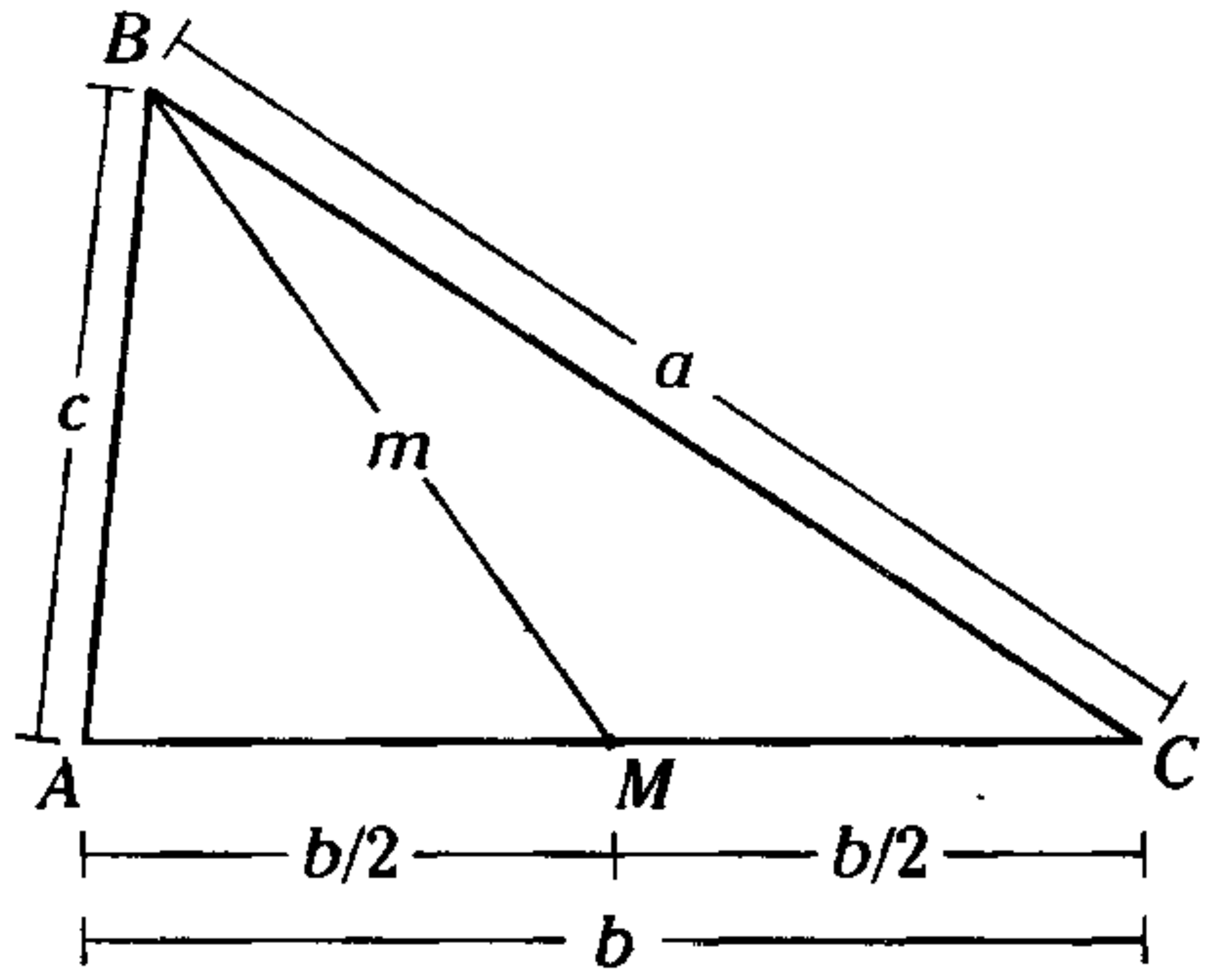


Figura 15.68

En la figura 15.68, $\overline{BM}$: Mediana relativa a $\overline{AC}$

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: Lados adyacentes a la mediana BM.

Se cumple

$$c^2 + a^2 = 2m^2 + \frac{b^2}{2}$$

Demostración

Del $\triangle ABC$: Por el teorema de Stewart

$$c^2\left(\frac{b}{2}\right) + a^2\left(\frac{b}{2}\right) = x^2(b) + \left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)b$$

$$\therefore\ c^2 + a^2 = 2m^2 + \frac{b^2}{2}$$

TEOREMA DE BOOTH

En todo triángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de sus tres medianas es igual a los tres cuartos de la suma de los cuadrados de las longitudes de sus tres lados.

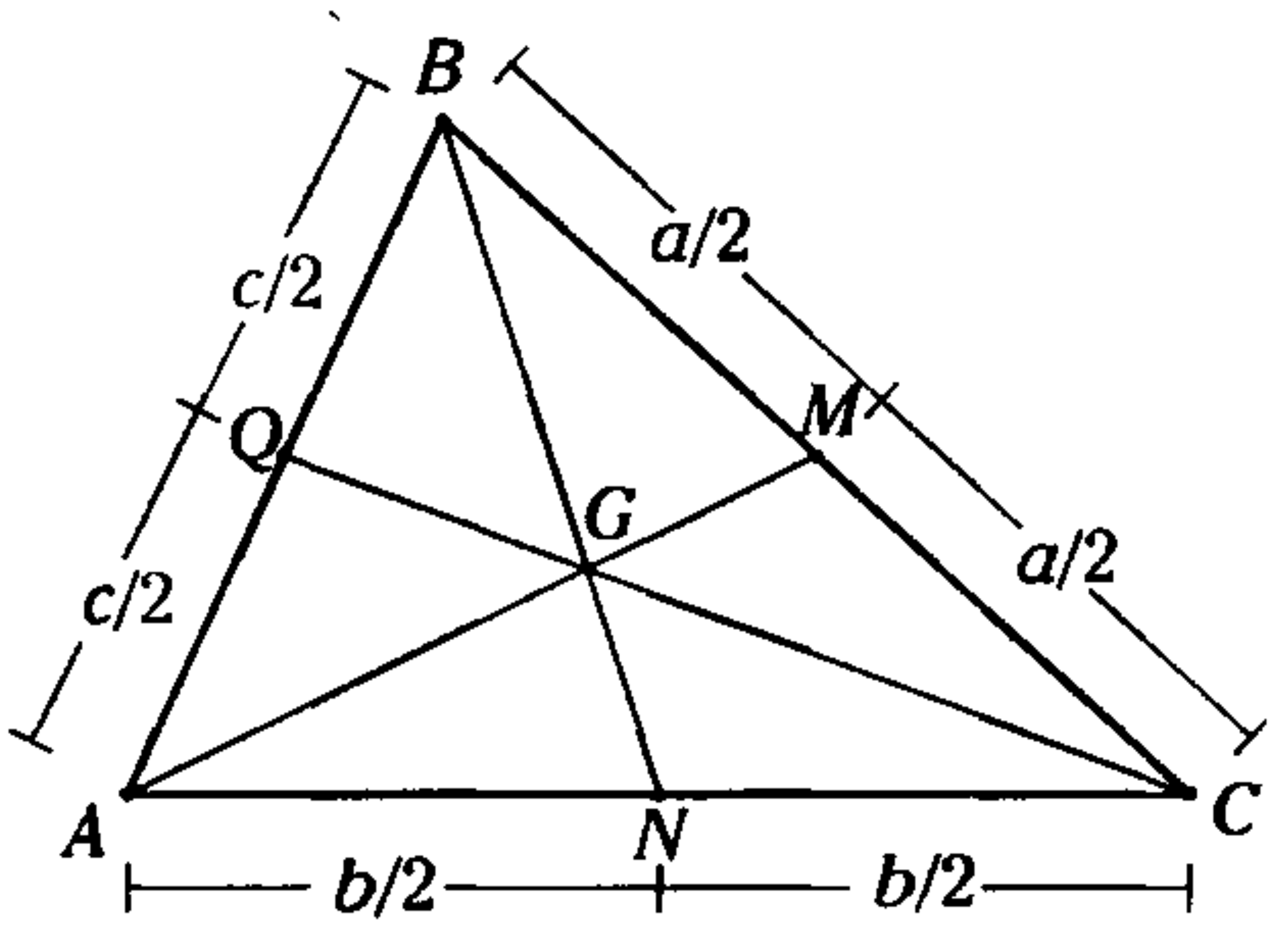


Figura 15.69

$\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CQ}$: medianas del $\triangle ABC$.
Sea $BC = a$, $AC = b$ y $AB = c$.
Se cumple

$$AM^2 + BN^2 + CQ^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Demostración
Del teorema de la mediana se cumple

$$c^2 + b^2 = 2(AM^2) + \frac{a^2}{2} \quad \text{(I)}$$

$$c^2 + a^2 = 2(BN^2) + \frac{b^2}{2} \quad \text{(II)}$$

$$a^2 + b^2 = 2(CQ^2) + \frac{c^2}{2} \quad \text{(III)}$$

Sumando (I), (II) y (III) se obtiene

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(AM^2 + BN^2 + CQ^2) + \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$\therefore\ AM^2 + BN^2 + CQ^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Nota

Como G: baricentro

$$\rightarrow AG = \frac{2}{3}AM;\ BG = \frac{2}{3}BN \text{ y } CG = \frac{2}{3}CQ$$

Reemplazando en el teorema anterior

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

(2do teorema de Booth)

TEOREMA DE LA PROYECCIÓN DE LA MEDIANA

En todo triángulo se cumple que el doble producto de las longitudes de la proyección ortogonal de una de sus medianas sobre su lado relativo y dicho lado, es igual a la diferencia de cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a dicha mediana.

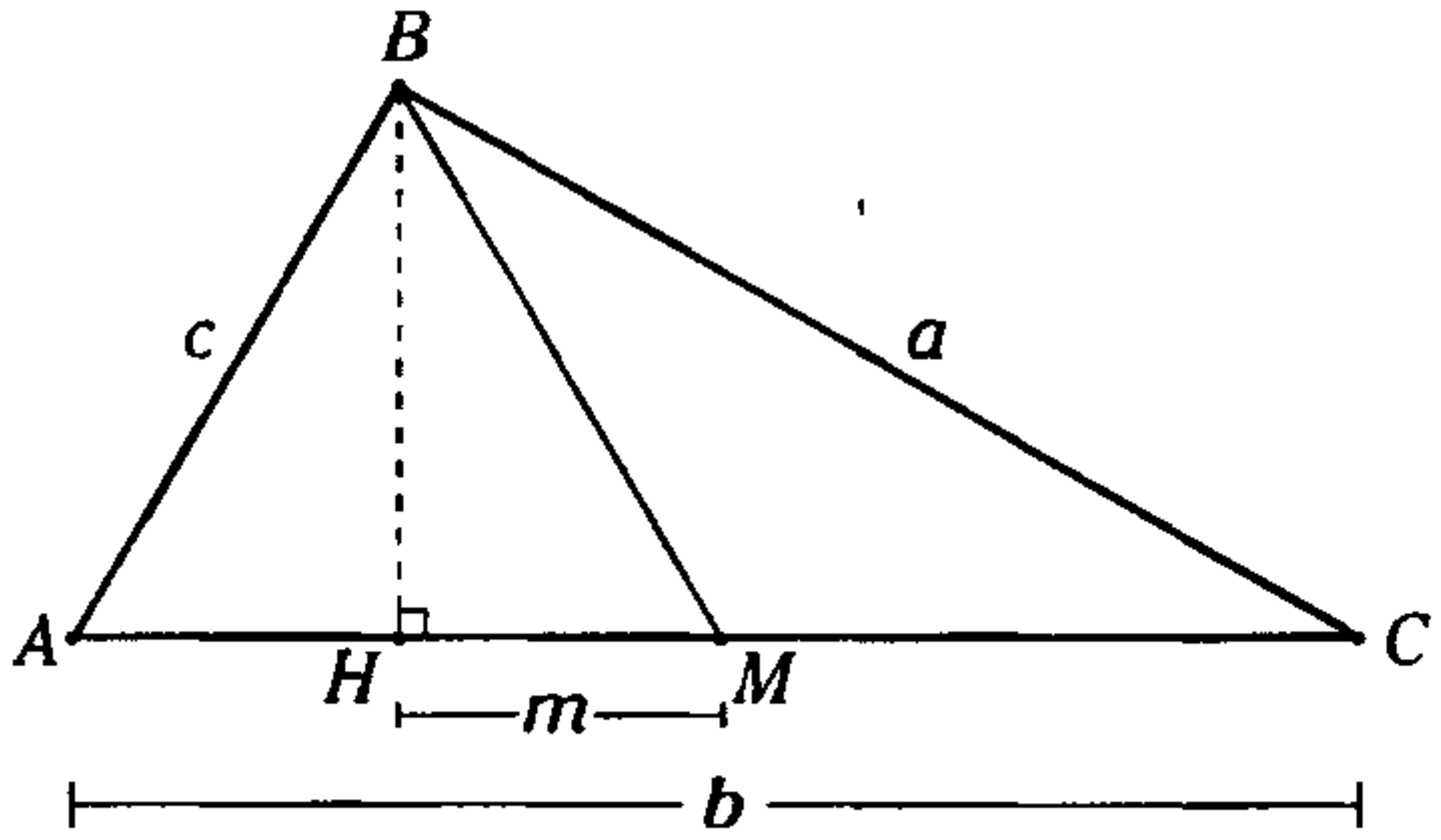


Figura 15.70

$\overline{BM}$: mediana relativa $\overline{AC}$
$\overline{HM}$: proyección ortogonal $\overline{BM}$ sobre $\overline{AC}$

$$2 . m . b = a^2 - c^2$$

Demostración
De la figura 15.70 $AM = MC = \dfrac{b}{2}$

$$\rightarrow AH = \frac{b}{2} - m \text{ y } CH = \frac{b}{2} + m$$

Del teorema de proyecciones

$$a^2-c^2=\left(\frac{b}{2}+m\right)^2-\left(\frac{b}{2}-m\right)^2$$

$$\therefore\ a^2-c^2=2.m.b$$

Nota

En el caso de que el triángulo sea obtusángulo, también se cumple el teorema anterior.

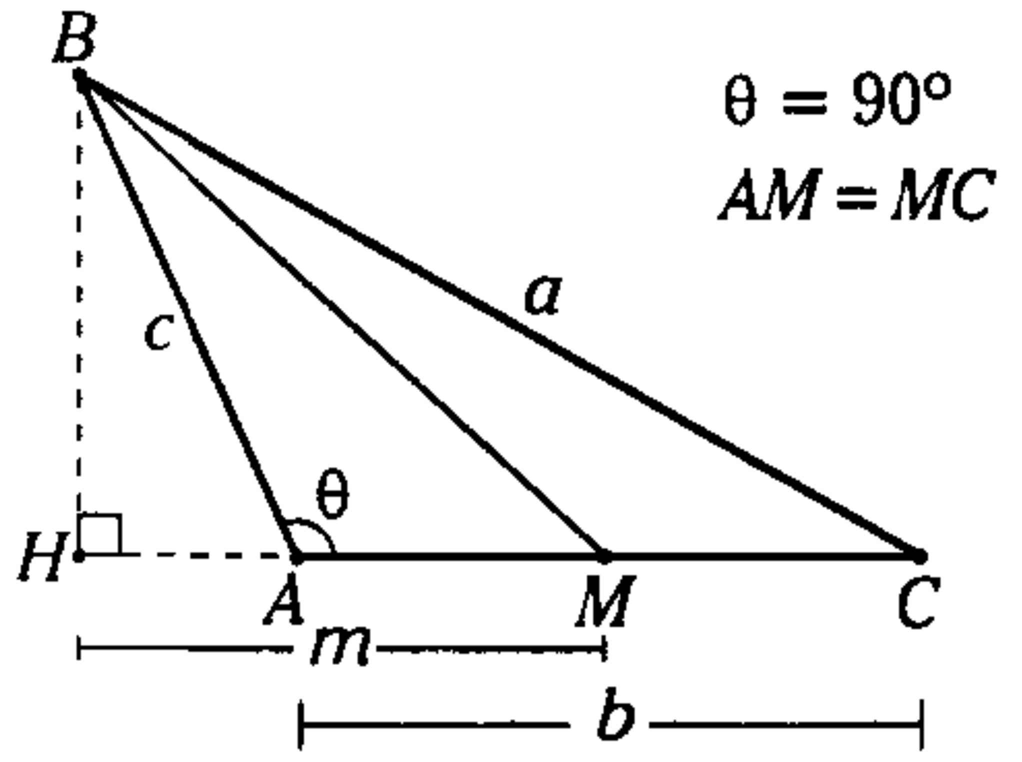
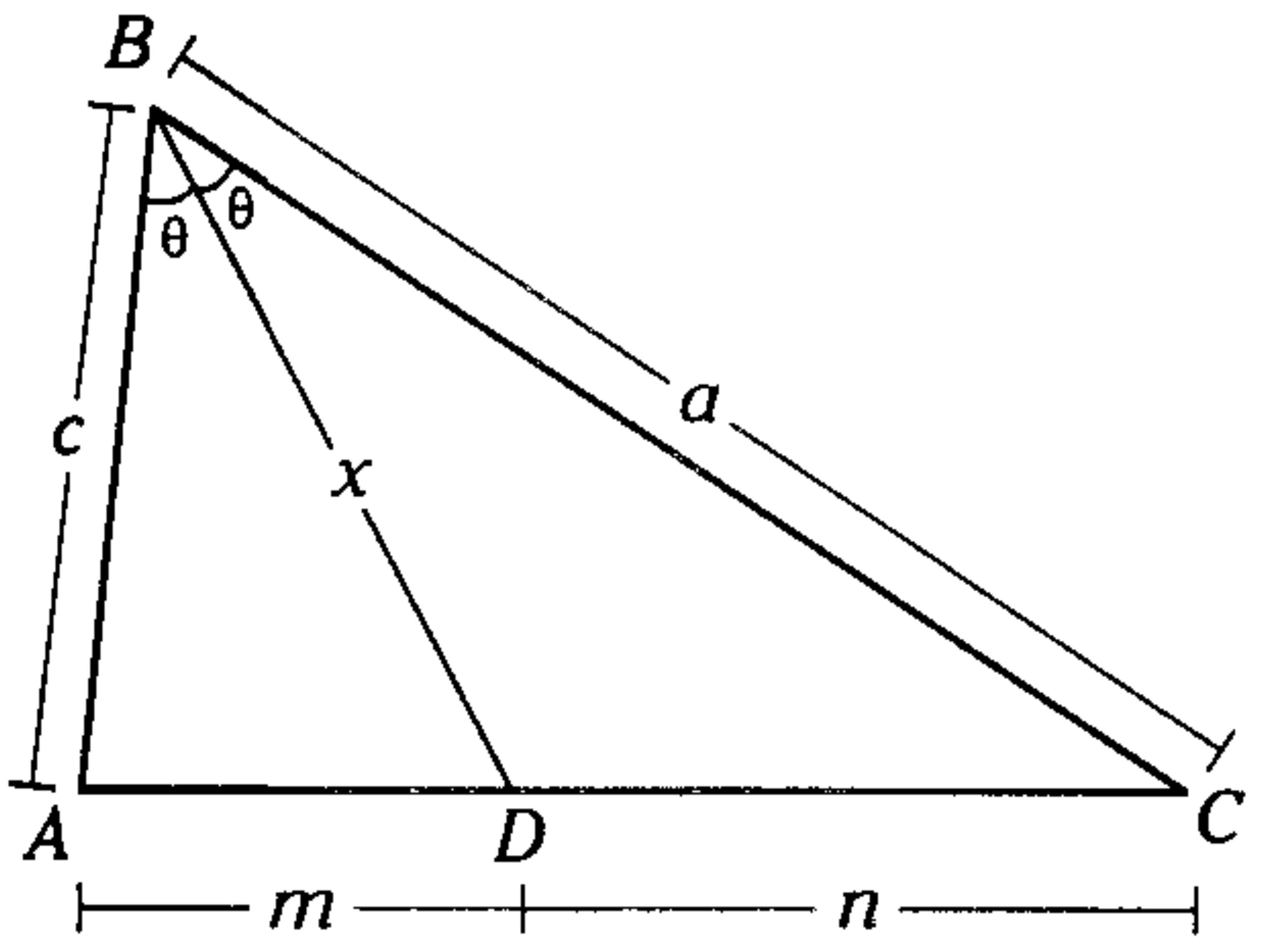


Figura 15.71

$$\boxed{a^2-c^2=2mb}$$

TEOREMA DEL CÁLCULO DE LA BISECTRIZ INTERIOR

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de la bisectriz interior es igual a la diferencia de los productos de las longitudes de los lados adyacentes a dicha bisectriz y los segmentos determinados por dicha bisectriz en el lado al cual es relativo.



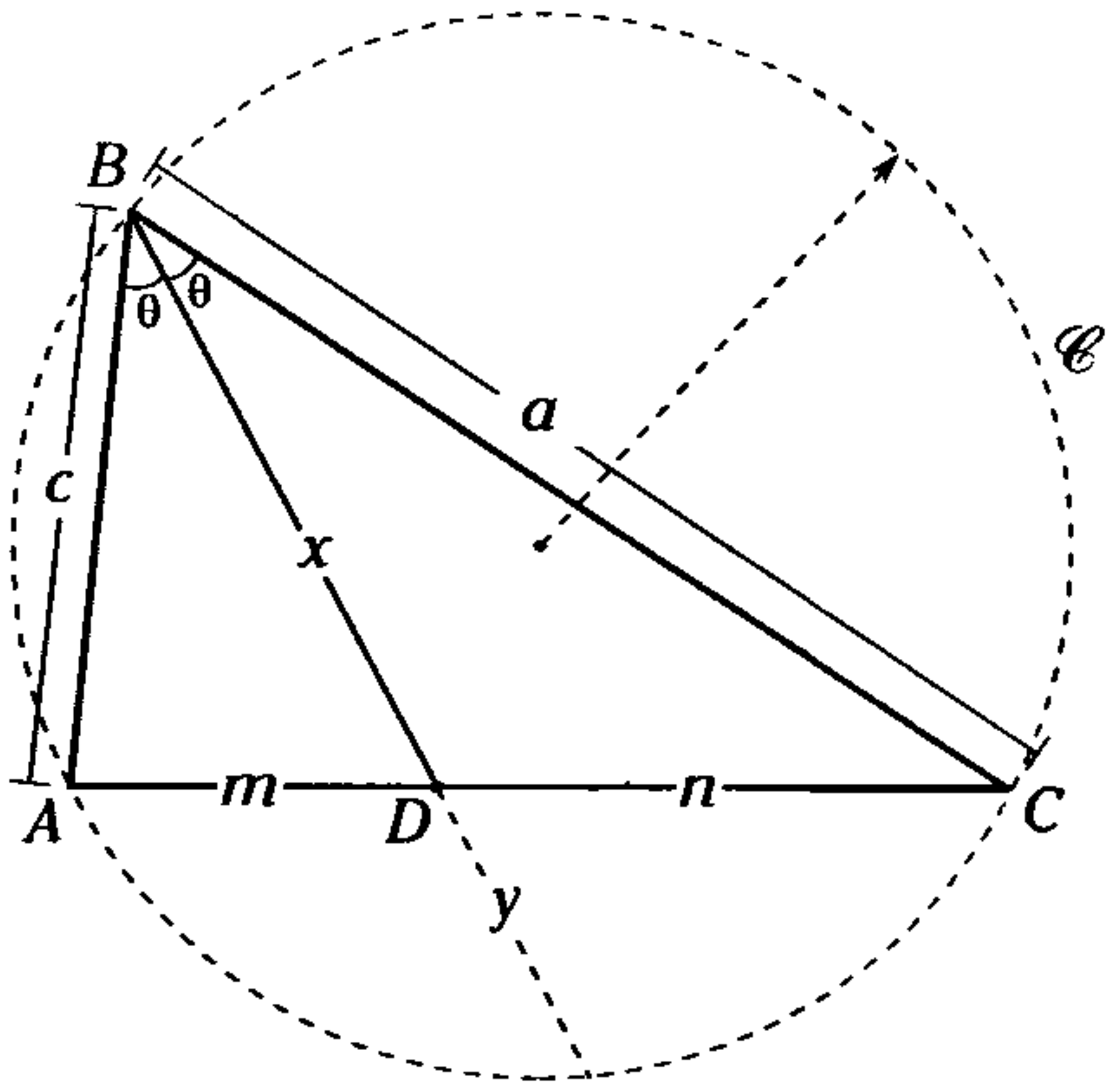
(a)

En la figura 15.72(a), $\overline{BD}$: Bisectriz interior del $\triangle ABC$ relativa al lado AC.

Se cumple

$$\boxed{x^2=ca-mn}$$

Demostración



(b)

Figura 15.72

Se traza la circunferencia $\mathscr{C}$, circunscrita al $\triangle ABC$.

Por el teorema de las isogonales en el $\triangle ABC$

$$ca=x(x+y)$$

$$ca=x^2+xy \qquad \text{(I)}$$

Del teorema de las cuerdas en $\mathscr{C}$

$$xy=mn \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

$$ca=x^2+mn$$

$$\therefore\ x^2=ca-mn$$

Nota

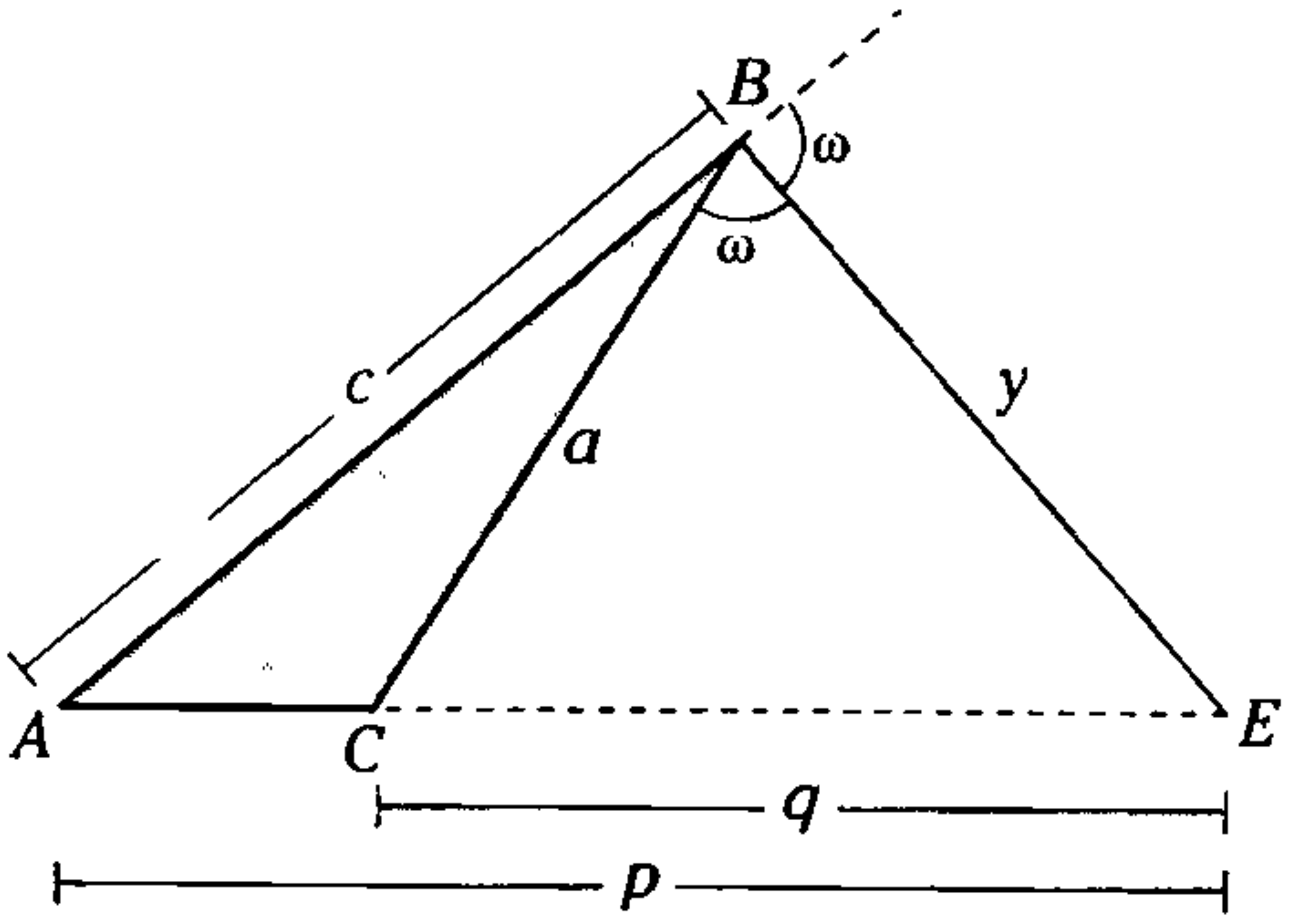
Otra manera de expresar el cálculo de la longitud de la bisectriz se desprende del teorema de Stewart. El cuadrado de la longitud de una bisectriz (W_b) se expresa como

$$W_b^2=c.a\left(1-\left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right)$$

donde $m=\dfrac{c.b}{c+a}$; $n=\dfrac{a.b}{c+a}$; $x=W_b$

TEOREMA DEL CÁLCULO DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de la bisectriz exterior (cuyos lados adyacentes a la bisectriz sean de diferente longitud) es igual a la diferencia de productos de las longitudes de los segmentos determinados por la bisectriz en el lado al cual es relativo y los lados adyacentes a dicha bisectriz.

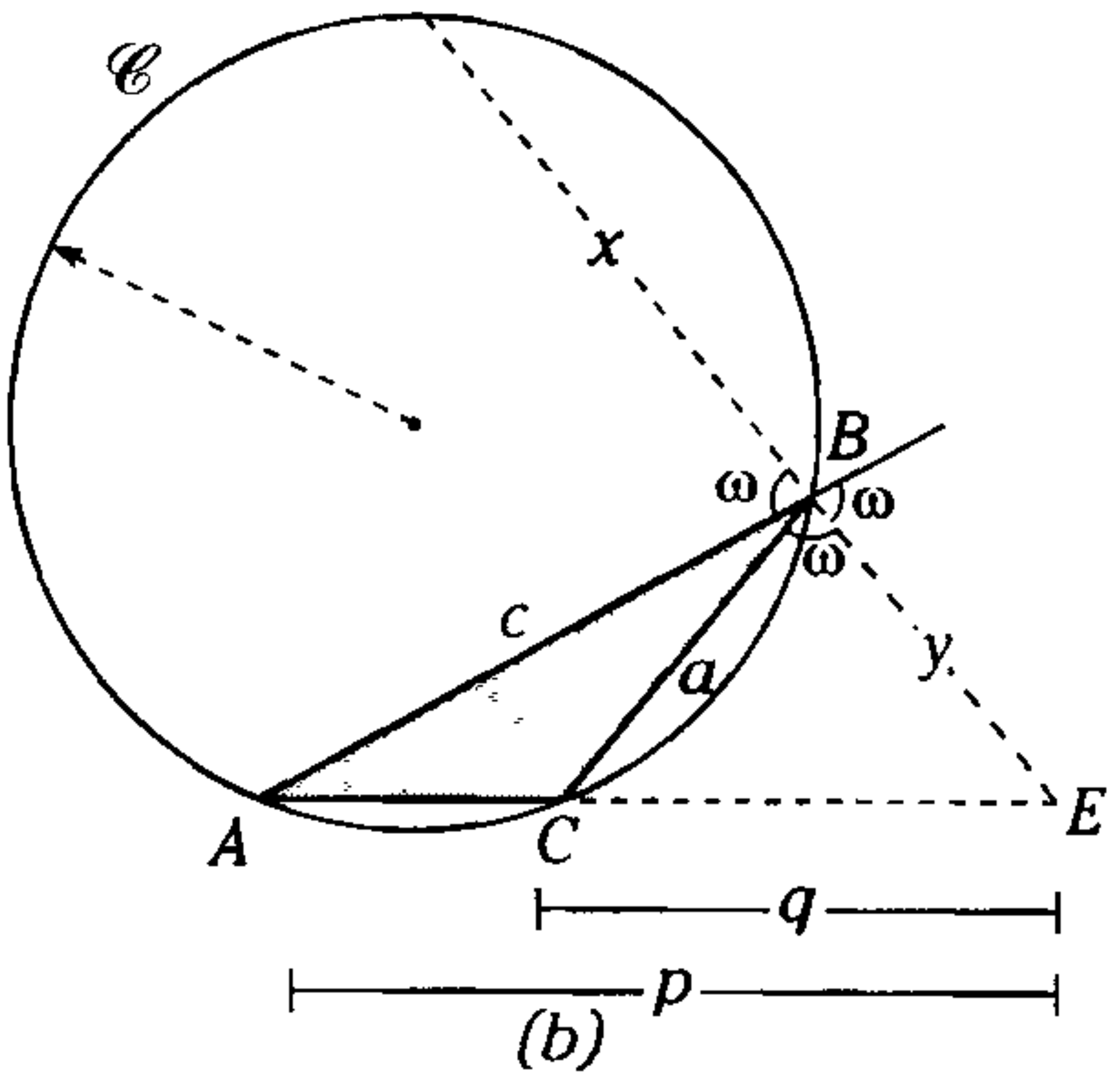


(a)

En la figura 15.73(a) $\overline{BE}$: Bisectriz exterior del $\triangle ABC$ relativa al lado AC.

Se cumple $\boxed{y^2 = pq - ca}$

Demostración



(b)

Figura 15.73

Se traza la circunferencia circunscrita $\mathscr{C}$ al $\triangle ABC$ y se prolonga $\overline{EB}$ hasta intersecar a $\mathscr{C}$ en Q.

Por el teorema de las isogonales en el $\triangle ABC$:

$$ca = xy \qquad \text{(I)}$$

Del teorema de las secantes en $\mathscr{C}$

$$(x+y)y = pq$$

$$xy + y^2 = pq$$

Despejando xy

$$xy = pq - y^2 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

$$ca = pq - y^2$$

$$\therefore \; y^2 = pq - ca$$

Nota

También de manera análoga al cálculo de la bisectriz interior, aplicando el teorema de Stewart. Para el caso de la ceviana exterior, el cuadrado de la longitud de la bisectriz exterior W_b se expresa como

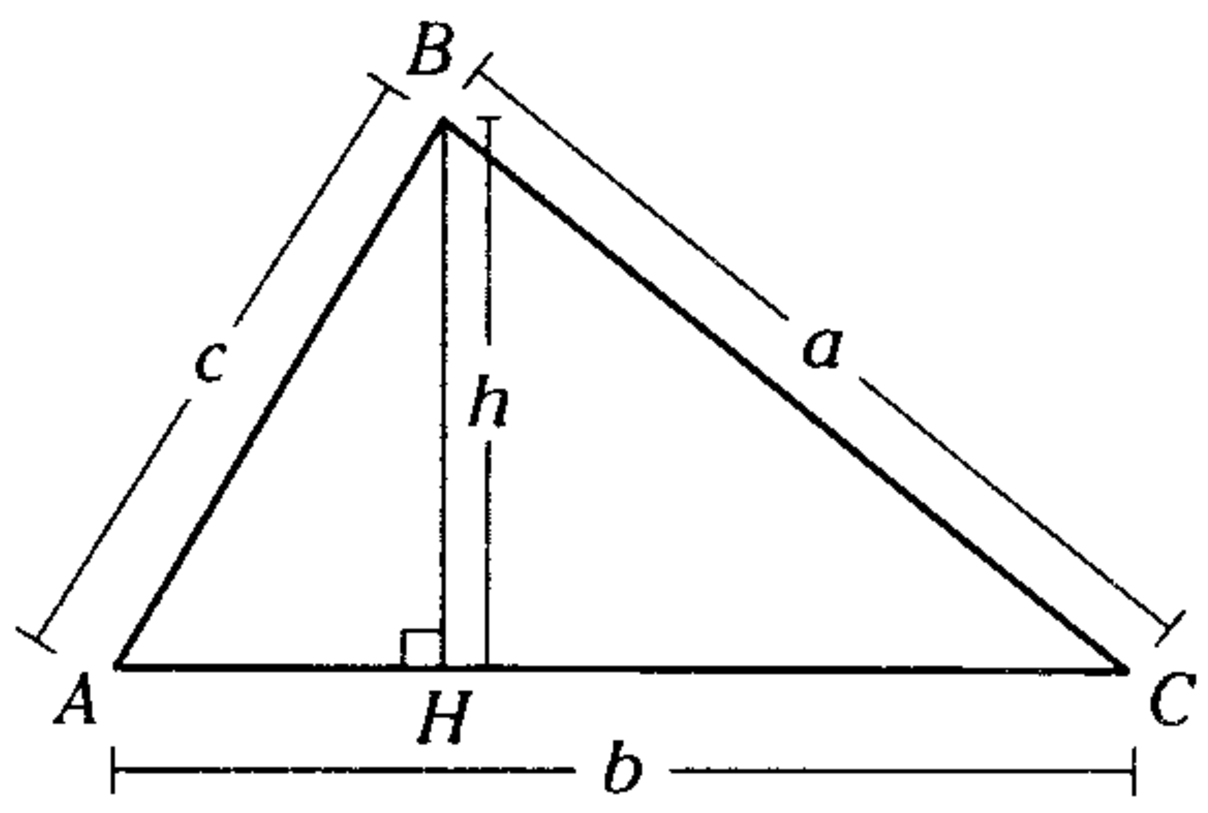
$$W_b^2 = c \cdot a\left(\frac{b^2}{(c-a)^2} - 1\right)$$

donde

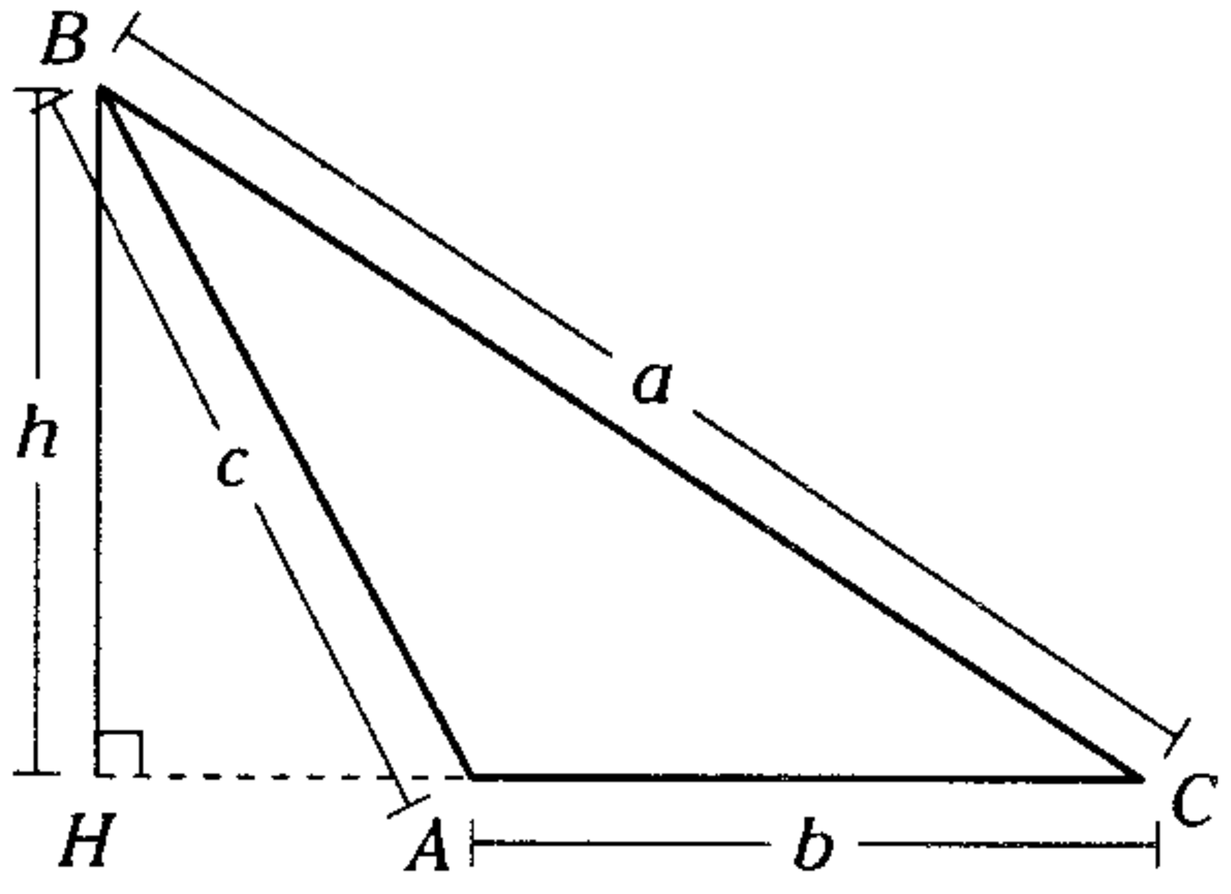
$$p = \frac{bc}{c-a};\; q = \frac{ab}{c-a};\; y = W_b$$

TEOREMA DEL CÁLCULO DE LA ALTURA (Teorema de Herón)

En todo triángulo, la longitud de una altura es igual al doble de la inversa de la longitud del lado al cual es relativa multiplicado con la raíz cuadrada de los productos entre el semiperímetro de la región limitada por dicho triángulo y la diferencia de dicho semiperímetro con la longitud de cada uno de los lados.



(a)



(b)

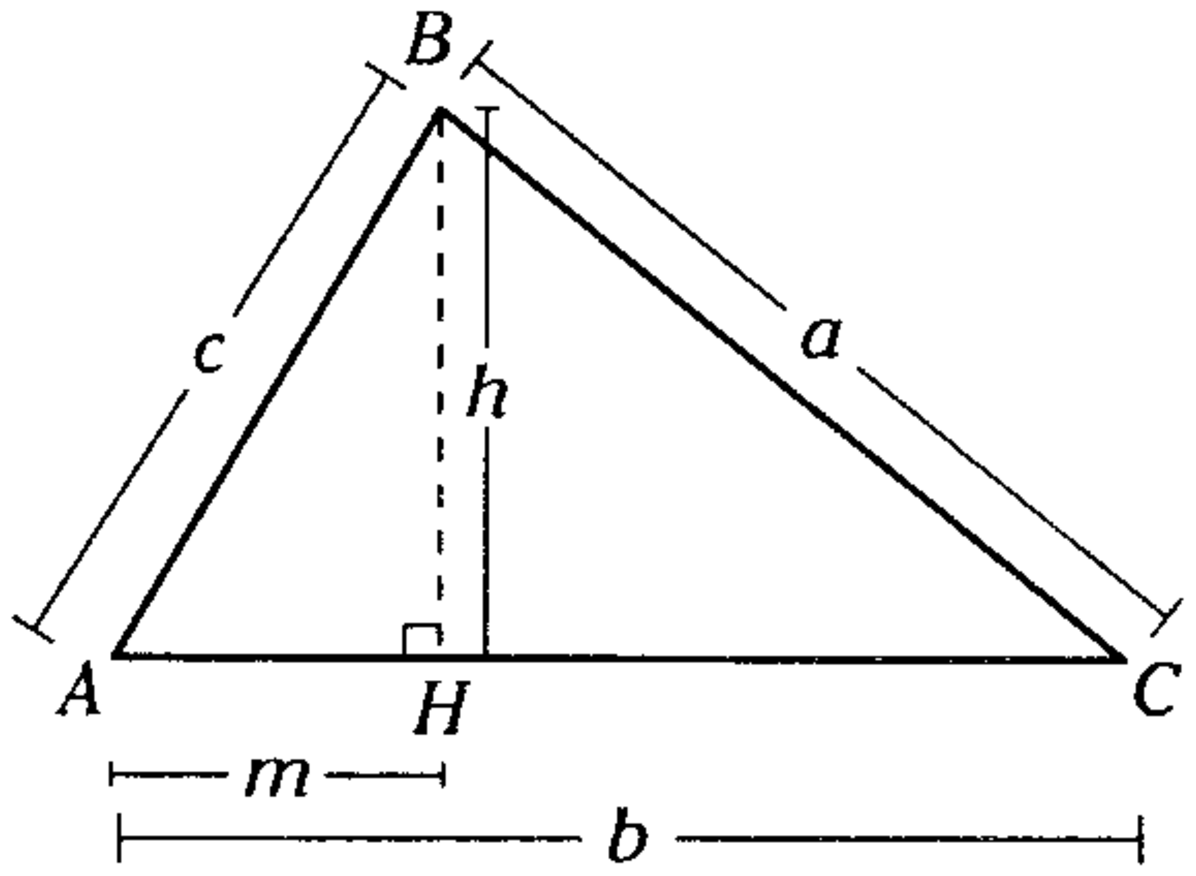
En la figura, $\overline{BH}$: altura relativa al lado AC del triángulo ABC (acutángulo u obtusángulo).
Se cumple

$$h=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p: semiperímetro de la región triangular ABC

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

Demostración



(c)

Figura 15.74

Por el teorema de Pitágoras

⊿AHB: $h^2=c^2-m^2$ (I)

Por el teorema de Euclides

$\triangle ABC$: $a^2=b^2+c^2-2bm$

Despejando m

$$m=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}$$

Luego, elevando al cuadrado

$$m^2 = \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2} \qquad \text{(I)}$$

Reemplazando (II) en (I)

$$h^2 = c^2 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2}$$

$$\rightarrow \quad h^2 = \frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2}$$

Luego, por diferencia de cuadrados

$$\rightarrow \quad h^2 = \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2}$$

Pero

$$(b+c)^2 = b^2+2bc+c^2 \text{ y } (b-c)^2 = b^2-2bc+c^2$$

$$\rightarrow \quad h^2 = \frac{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)}{4b^2}$$

Aplicando diferencia de cuadrados

$$\rightarrow \quad h^2 = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}{4b^2} \qquad \text{(III)}$$

pero

$$2p = a+b+c$$

entonces

$$b+c-a = a+b+c-2a$$

$$\rightarrow \quad b+c-a = 2p-2a = 2(p-a) \qquad \text{(IV)}$$

Análogamente

$$a+b-c = 2p-2c = 2(p-c) \qquad \text{(V)}$$

$$a+c-b = 2p-2b = 2(p-b) \qquad \text{(VI)}$$

Reemplazando (IV), (V) y (VI) en (III)

$$h^2 = \frac{(2p)2(p-a)2(p-c)2(p-b)}{4b^2}$$

$$\therefore \quad h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

LECTURA

EULER Y SU FECUNDIDAD. NUNCA NADIE CREÓ TANTA MATEMÁTICA

El prolífico Leonard Euler estableció los fundamentos del análisis matemático, sistematizó la geometría analítica y simplificó las notaciones matemáticas que aún usamos hoy.

Entre su ingente obra – decenas de volúmenes –, Euler eclipsó la labor de Clairaut, que había iniciado el traspaso de los métodos de la geometría bidimensional al caso tridimensional.

Se ha dicho que Leonard Euler es el autor de la tercera parte de toda la producción matemática existente a lo largo de la historia; esto no es de extrañar si pensamos que en toda su vida escribió unas 40 000 páginas. Disfrutando con las matemáticas, supo profundizar en sus distintas ramas, abrir nuevos campos y aplicar su saber en áreas tan diversas como la astronomía, mecánica, óptica, acústica, tecnología, cartografía y demografía. También nos dejó una obra de divulgación científica extraordinariamente curiosa, en la que toca una amplia variedad de temas con singular maestría: *Cartas a una princesa de Alemania*, que fue publicada en 1768 y 1772; considerada como un clásico del género, es, por cierto, la obra más leída de su autor.

El siglo XVIII conoció un gran avance en Matemáticas

A lo largo del siglo XVIII, las matemáticas experimentaron un avance trascendental, especialmente en cálculo diferencial e integral, en geometría analítica y en álgebra, con el estudio de las ecuaciones de cuarto grado y superiores, así con la teoría de números complejos incluidos. Al mismo tiempo se desarrollaron sus aplicaciones prácticas a las ciencias, sobre todo en el campo de la física, y aparecieron numerosas obras de divulgación y enseñanza. En esta época predomina sobre todas la ingente obra de Euler, que realizó un estudio sistemático en el que abarca todo el complejo campo de las matemáticas puras y aplicadas, explotando hasta el extremo los métodos analíticos de Descartes, Newton y Leibniz.

Primer tratamiento completo del álgebra

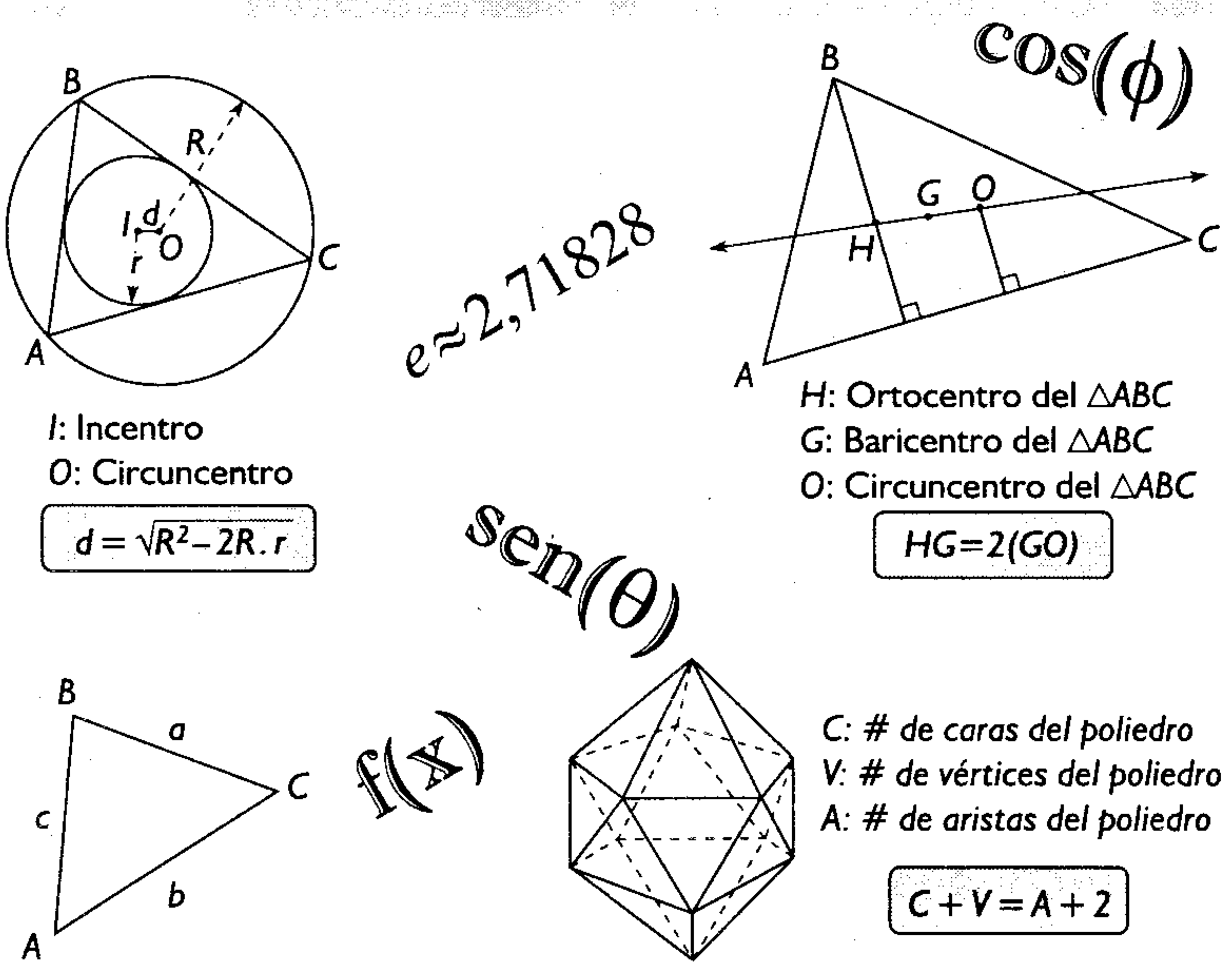
Leonard Euler aceptó todos los retos planteados por Fermat (1601 - 1665) y dio respuesta satisfactoria a todos menos a uno, el llamado último teorema, que sería resuelto apenas en el siglo XX. El más famoso de los textos de Euler es el *Introductio in analysis infinitorum - Introducción al análisis de los infinitos* -, publicado en 1748, en el que establece los fundamentos del análisis matemático. Además, en esa obra, realizó el primer tratamiento completo del álgebra y la geometría analítica, la teoría de ecuaciones y la trigonometría. Fue allí donde abordó las superficies tridimensionales (la fórmula de Euler resume la relación entre el número de caras, vértices y aristas en un poliedro) y demostró que las secciones cónicas (circunferencia, elipse, hipérbola, parábola) se representan mediante ecuaciones de segundo grado.

Aun los que no son expertos en el tema pueden saber que Euler contribuyó en gran medida a simplificar las notaciones matemáticas, introdujo, entre otros, el uso del símbolo 'e' para la base de los logaritmos naturales o neperianos (en 1727), de la expresión $f(x)$ para las funciones (1734) y del símbolo 'i' (la raíz cuadrada de menos uno) para la unidad de los números imaginarios (1777).

También fue el primero en demostrar que 'e' es un número irracional, es decir, que tiene un número infinito de cifras (2,71828...), el primero en utilizar las abreviaturas que hoy utilizamos para expresar las razones trigonométricas (sen, cos, ...), y quien consagró y popularizó el uso del famoso símbolo para expresar la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Asimismo, comenzó a utilizar las letras minúsculas a, b, c para los lados de un triángulo, y las mayúsculas para los vértices y ángulos A, B, C opuestos a cada uno de los lados.

En matemáticas, el nombre de Euler aparece por todas partes. Los estudiantes de la materia aprenden - al menos oyen hablar de - ecuaciones de Euler, ángulos de Euler, indicador de Euler, periodo de Euler, característica de Euler, circuitos de Euler, fórmula de Euler, polinomios de Euler, número de Euler, teorema de Euler, identidad de Euler, función de Euler, algoritmos de Euler, secuencia de Euler, constante de Euler, integrales eulerianas, problema de Euler, circunferencia de Euler, recta de Euler y curva de Euler ... y la relación no está completa. Es evidente que resulta difícil optar por uno de los aportes de este prolífico genio a la historia de la ciencia.

Los aportes de Leonard Euler a la Matemática



BIOGRAFÍA

LEONARD EULER (Basilea, 1707 - San Petersburgo, 1783)

Nació el 15 de abril de 1707 en Suiza y murió el 18 de setiembre de 1783 en Rusia. Euler fue hijo de un clérigo, que vivía en los alrededores de Basilea. Su talento natural para las matemáticas se evidenció pronto por el afán y la facilidad con que dominaba los elementos, bajo la tutela de su padre.

A una edad temprana fue enviado a la Universidad de Basilea, donde atrajo la atención de Juan Bernoulli. Motivado por un maestro, así maduró rapidamente, a los 17 años de edad, cuando se graduó doctor, provocó grandes aplausos con un discurso probatorio, el tema del cual era una comparación entre los sistemas cartesiano y newtoniano.

Su padre deseaba que ingresará en el sagrado ministerio, por lo cual orientó a su hijo hacia el estudio de la Teología, pero en cambio el padre de Bernoulli fue transigente con sus ideas cuando vio que el talento de su hijo iba en otra dirección.

Leonard fue autorizado a reanudar sus estudios favoritos y, a la edad de 19 años, envió dos disertaciones a la Academia de París, una sobre arboladura de barcos, y la otra sobre la filosofía del sonido. Estos ensayos marcan el comienzo de su espléndida carrera.

Por esta época decidió dejar su país nativo,a consecuencia de una aguda decepción, al no lograr un profesorado vacante en Basilea. Así, Euler partió en 1727 (año de la muerte de Newton) a San Petersburgo, para reunirse con sus amigos, los jovenes Bernoulli, que le habían precedido allí algunos años antes.

En el camino hacia Rusia, se enteró de que Nicolás Bernoulli había caído victima del duro clima nórdico; y el mismo día que puso pie sobre suelo ruso murió la emperatriz Catalina, acontecimiento que amenazó con la disolución de la Academia, cuya fundación ella había dirigido. Euler, desanimado, estuvo a punto de abandonar toda esperanza de una carrera intelectual y alistarse en la marina rusa. Pero, felizmente para las matemáticas, Euler obtuvo la cátedra de filosofía natural en 1730, cuando tuvo lugar un cambio en el sesgo de los asuntos públicos. En 1733 sucedió a su amigo Daniel Bernoulli, que deseaba retirarse, y el mismo año se casó con Mademoiselle Gsell, una dama suiza, hija de un pintor que había sido llevado a Rusia por Pedro el Grande.

Dos años más tarde, Euler dio una muestra insigne de su talento, cuando efectuó en tres días la resolución de un problema que la Academia necesitaba urgentemente, pese a que se le juzgaba insoluble en menos de varios meses de labor. Pero el esfuerzo realizado tuvo por consecuencia la pérdida de la vista de un ojo.

En el verano de 1741, el rey Federico el Grande invitó a Euler a residir en Berlín. Esta invitación fue aceptada, y Euler vivió en Alemania hasta 1766. La reina madre, que siempre había tenido un gran interés en conversar con hombres ilustres nunca logró llevarle a una conversación que no fuera de monosílabos.

KONINGSBERGA

Un día, cuando le preguntó el motivo de esto, Euler replicó: *señora, es porque acabó de llegar de un país donde se ahorca a todas las personas que hablan.*

Su madre, vivió también en Berlín durante 11 años, recibiendo asiduas atenciones de su hijo y disfrutando del placer del verle universalmente estimado y admirado.

Un hecho que habla mucho en favor de la estima que se tenía de Euler, es cuando el ejercito ruso invadió Alemania en 1760 y saqueó una granja perteneciente a Euler, y el acto llegó al conocimiento del general, la pérdida fue inmediatamente remediada, y a ello añadió un obsequio de 4 000 florines, hecho por la emperatriz Isabel cuando se entero del suceso.

En 1766 Euler volvió a San Petersburgo, para pasar allí el resto de sus días, pero poco después de su llegada perdió la vista del otro ojo. No obstante sus discípulos e hijos copiaron luego su obra y escribieron sus memorias. Se recuerda que en una oración, cuando desde sus discípulos, al realizar la suma de una series de diecisiete términos, no estaban de acuerdo con los resultados en una unidad de la quincuagésima cifra significante, se recurrió a Euler. Este repasó el cálculo mentalmente, y su decisión resultó ser correcta.

En 1771, cuando estalló un gran fuego en la ciudad, llegando hasta la casa de Euler, un compatriota de Basilia, Peter Grimm, se arrojó a las llamas, descubrió al hombre ciego, y lo salvó llevándolo sobre sus hombros.

Se pudo rescatar algunos libros, Euler continúo su trabajo durante 12 años, hasta el día de su muerte, a los 76 años de edad.

La apacibilidad de ánimo y la moderación, así como la sencillez de sus costumbres fueron sus características. Su hogar era su alegría, y le gustaban los niños. Pese a su desgracia, fue animoso y alegre. poseyó abundante energía; como ha atestiguado su discípulo M.Fuss, *su piedad era racional y sincera;* su *devoción, ferviente.*

Problema 1

En la región exterior relativa a $\overline{BC}$, de un triángulo ABC, se ubica el punto Q, tal que la altura $\overline{BH}$ interseca a $\overline{AQ}$, en P. Si m$\sphericalangle AQC = 90°$, $AB = 6$, $BC = 8$, $AP = 3$ y $PQ = 2$, calcule AC.

A) $6\sqrt{2}$ B) 7 C) $2\sqrt{14}$

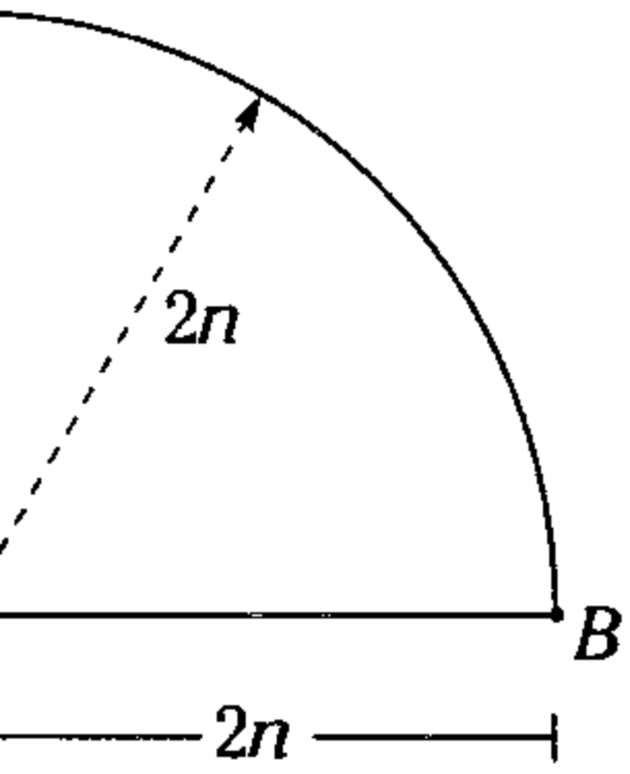
D) $\sqrt{58}$ E) 6

Problema 2

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O, se ubican los puntos C y D, en el $\overset{\frown}{AB}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, tal que $AB = 4(AD)$ y $2(AC)^2 + (OB)^2 = 144$. Halle CD.

A) 5 B) 6 C) 8

D) 9 E) 10



15.76

$)^2 + (OB)^2 = 144$

ediana

(I)

(II)

CLAVE B

Resolución

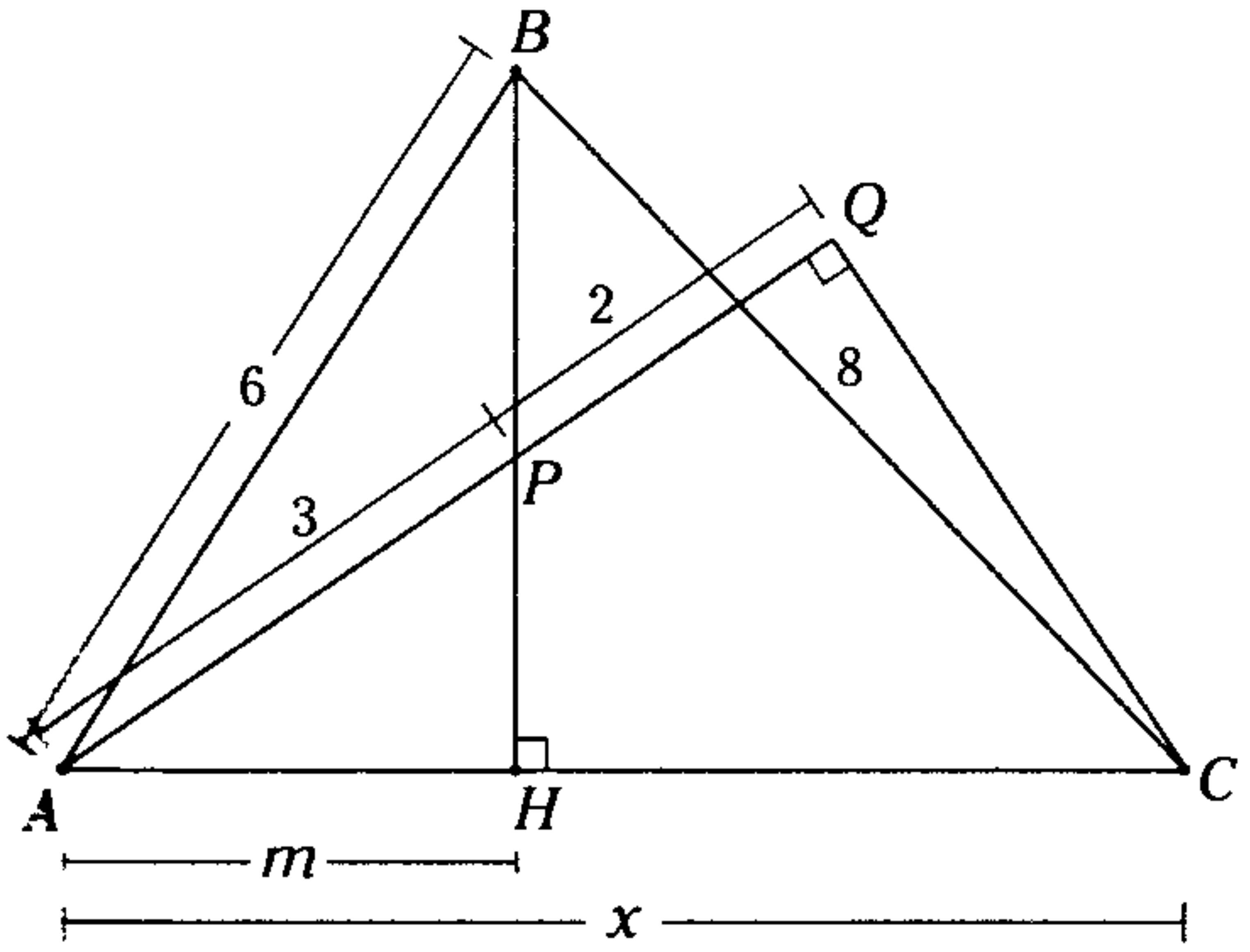


Figura 15.75

Piden $AP = x$

$\triangle ABC$: teorema Euclides

$$8^2 = 6^2 + x^2 - 2xm \qquad \text{(I)}$$

Se observa que $\triangle PQCH$: es inscriptible

Por el teorema de la secante

$$x(m) = 5(3) = 15 \qquad \text{(II)}$$

(II) en (I)

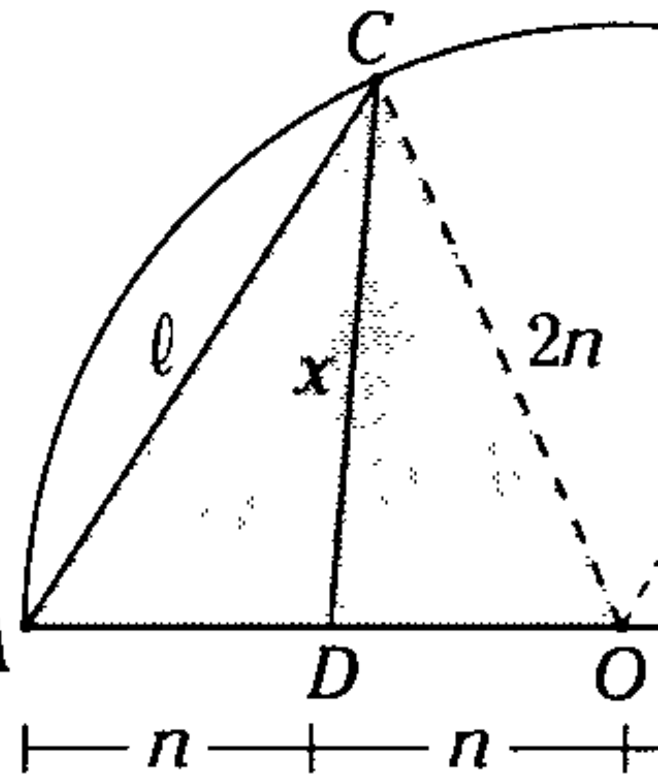
$$64 = 36 + x^2 - 2(15)$$

$$x^2 = 58$$

$$\therefore\ x = \sqrt{58}$$

CLAVE D

Resolución



Figura

Piden $CD = x$

Datos $AB = 4(AD)$ y $2(AC$

Sea $AD = n \rightarrow AB = 4n$

$\triangle ACO$: teorema de la me

$$\ell^2 + (2n)^2 = 2x^2 + \frac{(2n)^2}{2}$$

$$\ell^2 + 4n^2 = 2x^2 + 2n^2$$

$$\ell^2 + 2n^2 = 2x^2$$

Del dato

$$2(\ell)^2 + (2n)^2 = 144$$

$$2\ell^2 + 4n^2 = 144$$

$$\ell^2 + 2n^2 = 72$$

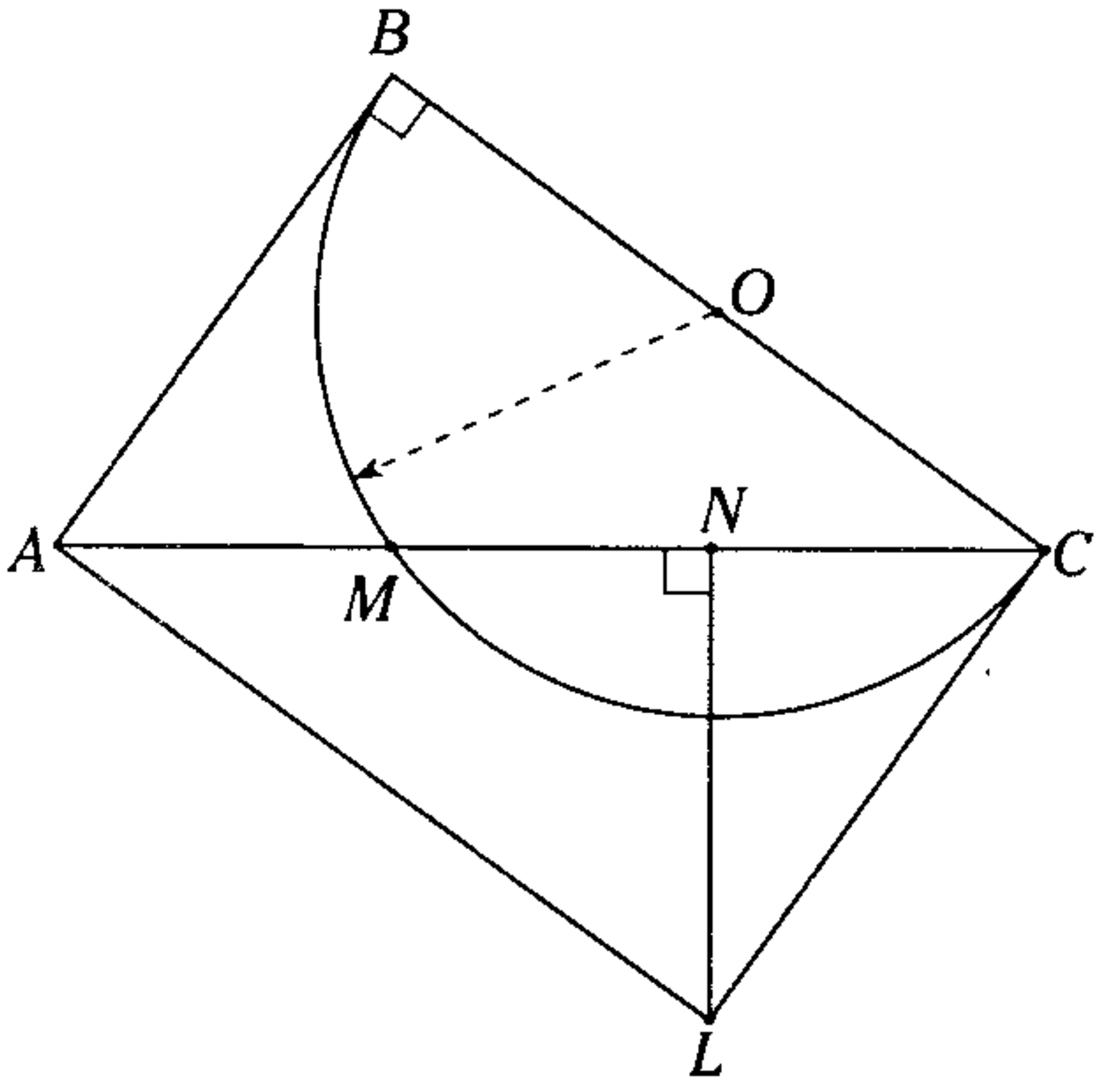
De (I) y (II)

$$2x^2 = 72$$

$$\therefore\ x = 6$$

Problema 3

De la figura, $MN=NC$, $AL=13$ y $LC=12$. Calcule AB.



A) 6 B) 5 C) 7
D) 4 E) 3

Resolución

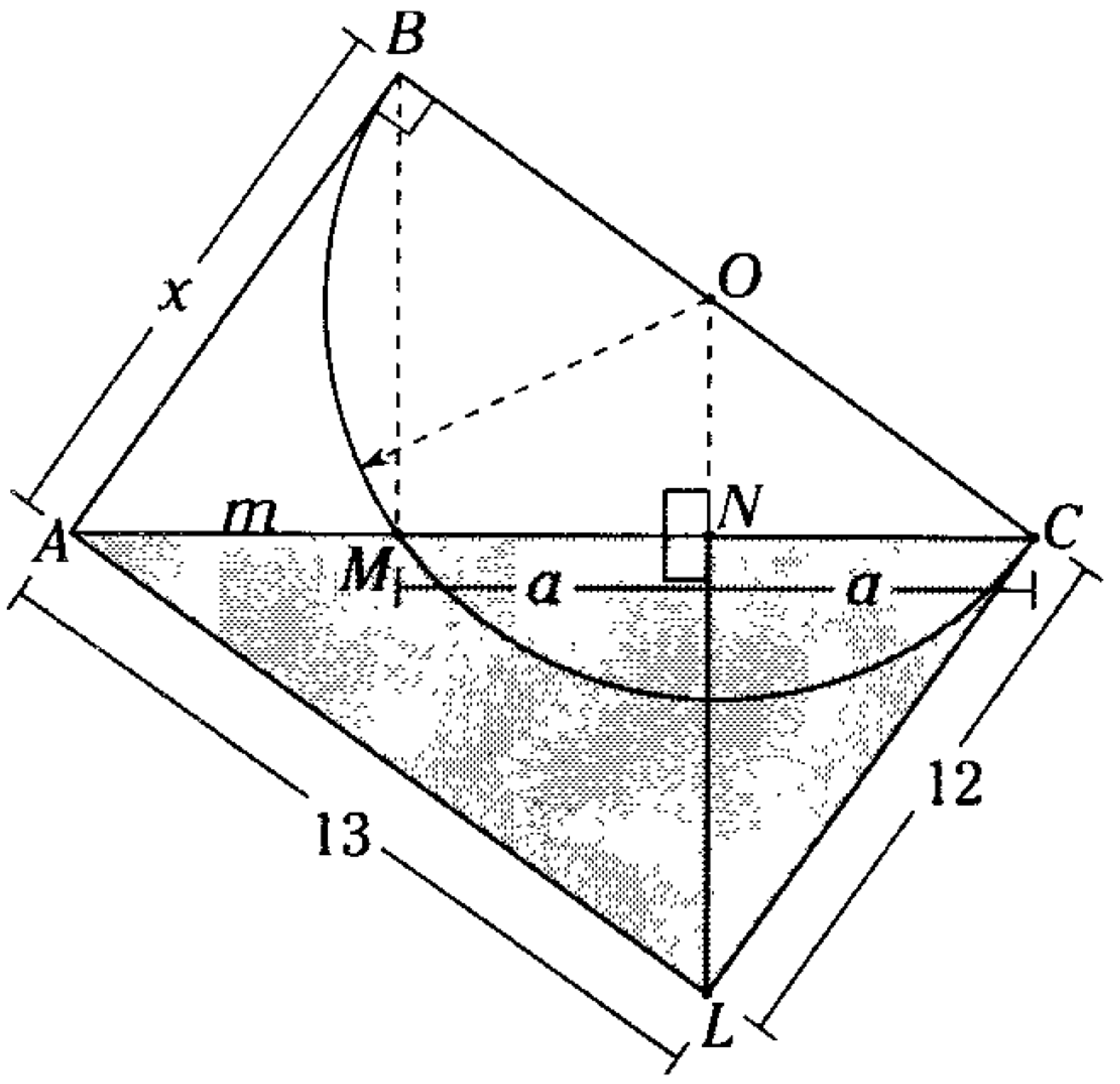


Figura 15.77

Piden $AB=x$

◺ABC: por teorema

$x^2=(m+2a)m$ (I)

$\triangle ALC$: por el teorema de las proyecciones

$(m+a)^2-a^2=13^2-12^2$

$m^2+a^2+2ma-a^2=169-144$

$(m+2a)m=25$ (II)

De (I) = (II)

$x^2=25$

$\therefore\ x=5$

CLAVE B

Problema 4

En un trapecio rectángulo $ABCD$, recto en C y D, se ubica Q en AD, $\overline{BQ}$ se prolonga hasta el punto S, tal que m∢BAS = 90°, m∢QBC = m∢ABQ, $BS=6$ y $(AS).(CD)=6$. Calcule QS.

A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$
D) $3\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{2}$

Resolución

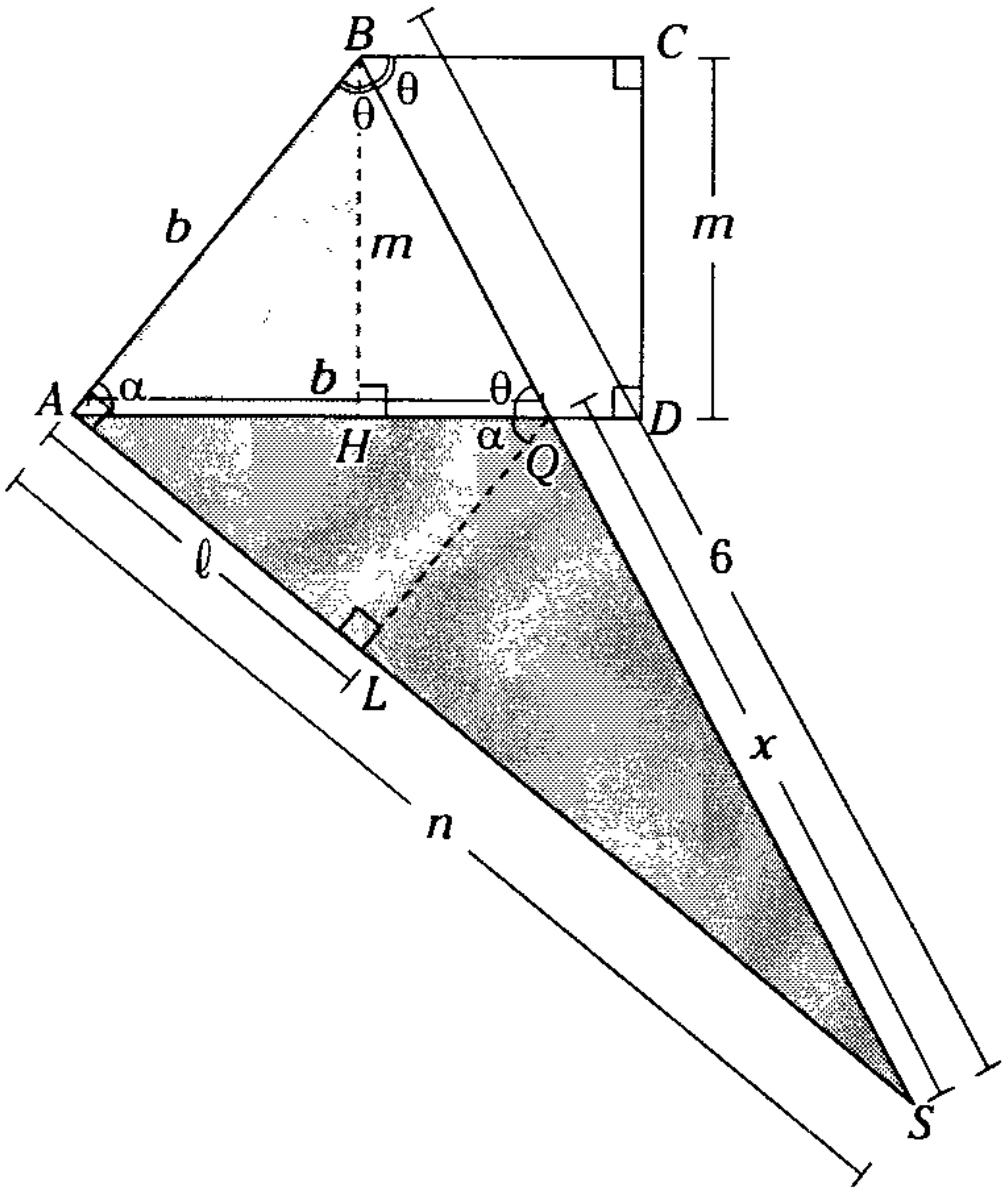


Figura 15.78

Piden $QS=x$

Dato $(AS).(CD)=6\ \rightarrow\ n\,.\,m=6$

$\triangle AQS$: del teorema de Euclides

$x^2=b^2+n^2-2(n)(\ell)$ (I)

Se traza $\overline{BH}\perp\overline{AD}$

$\triangle BHA \cong \triangle ALQ$ (A.L.A.)

$\rightarrow m = \ell$ (II)

$\triangle BAS$: teorema de Pitágoras

$b^2 + n^2 = (BS)^2 = 6^2$ (III)

(III) y (II) reemplazamos en (I)

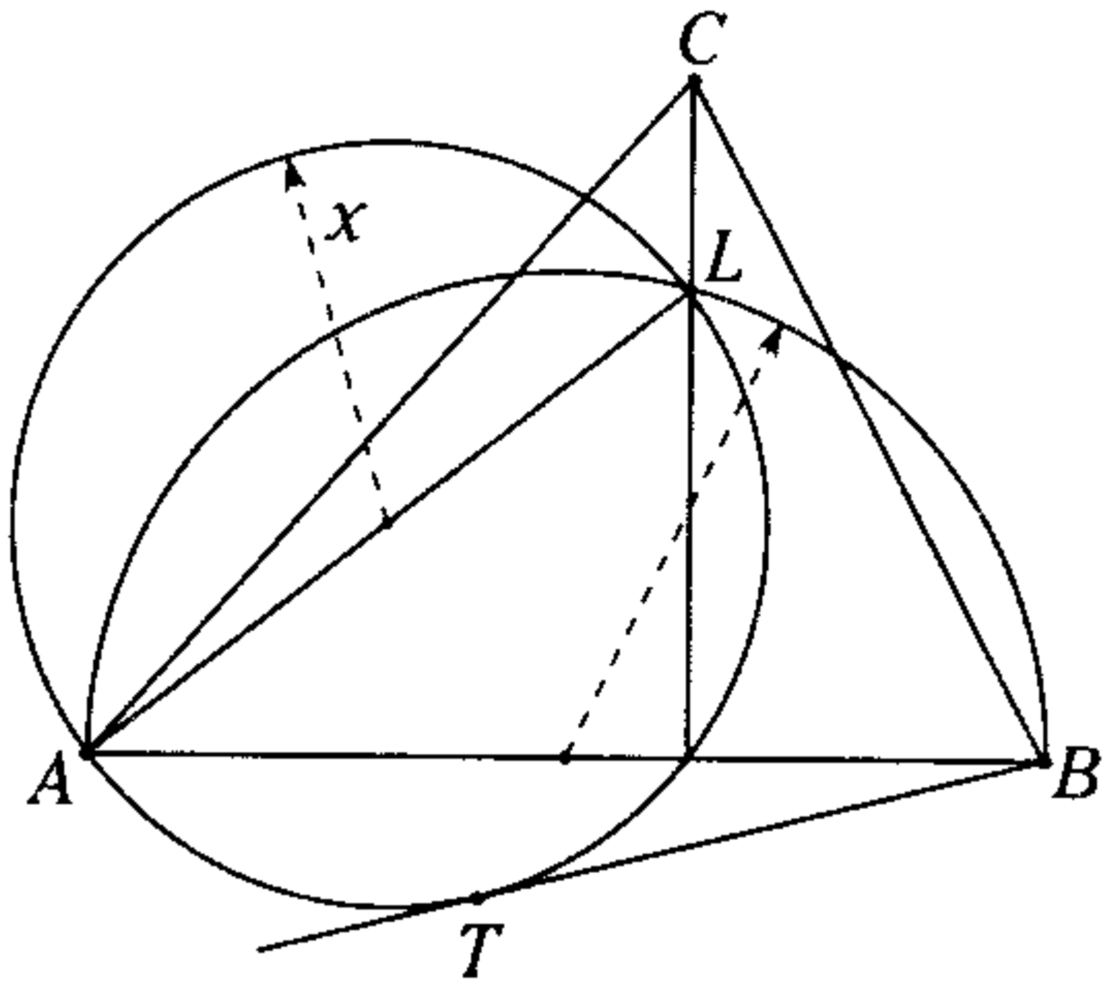
$x^2 = 6^2 - 2(6) \rightarrow x^2 = 36 - 12$

$\therefore x = 2\sqrt{6}$

CLAVE C

Problema 5

De la figura, T es punto de tangencia, $AC^2 - BC^2 = 22$ y $TB = 6$. Halle x.



A) $\sqrt{58}$ B) $\sqrt{14}$ C) $\sqrt{58}/2$

D) $\sqrt{57}/2$ E) $\sqrt{13}$

Resolución

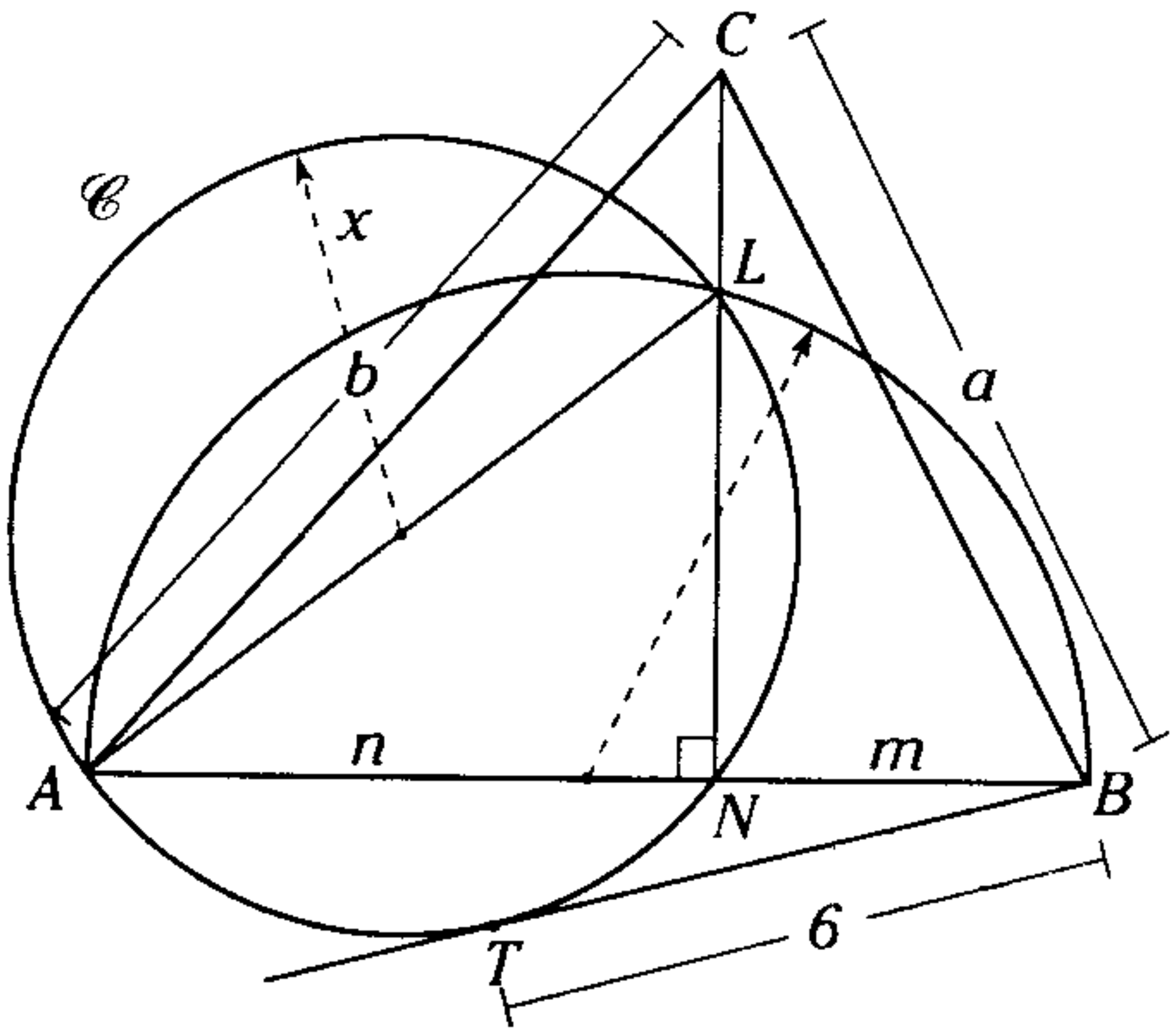


Figura 15.79

Piden x

Dato $b^2 - a^2 = 22$

Como

$\overline{AL}$: diámetro de $\mathscr{C} \rightarrow m\measuredangle CNA = 90°$

En la semicircunferencia: por teorema

$(2x)^2 = (m+n)n$ (I)

$\triangle ACB$: teorema de proyecciones

$b^2 - a^2 = n^2 - m^2 = 22$ (II)

En $\mathscr{C}$: teorema de la tangente

$(n+m)m = 6^2$

$nm + m^2 = 36$ (III)

Sumando (II) y (III)

$n^2 + mn = 58$

$n(m+n) = 58$ (IV)

(IV) en (I)

$4x^2 = 58$

$\therefore x = \frac{\sqrt{58}}{2}$

CLAVE C

Problema 6

Una circunferencia $\mathscr{C}$ se encuentra inscrita en un cuadrado $ABCD$, la diagonal $\overline{AC}$ interseca a dicha circunferencia en P y Q ($P \in \overline{AQ}$) y $\mathscr{C} \cap \overline{BP} = \{L\}$. Calcule AL si $CD = \ell$.

A) $\ell\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{4}}$ B) $\ell\sqrt{\frac{4-\sqrt{2}}{3}}$ C) $\ell\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{3}}$

D) $\ell\sqrt{\frac{4-\sqrt{2}}{4}}$ E) $\ell\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}$

Resolución

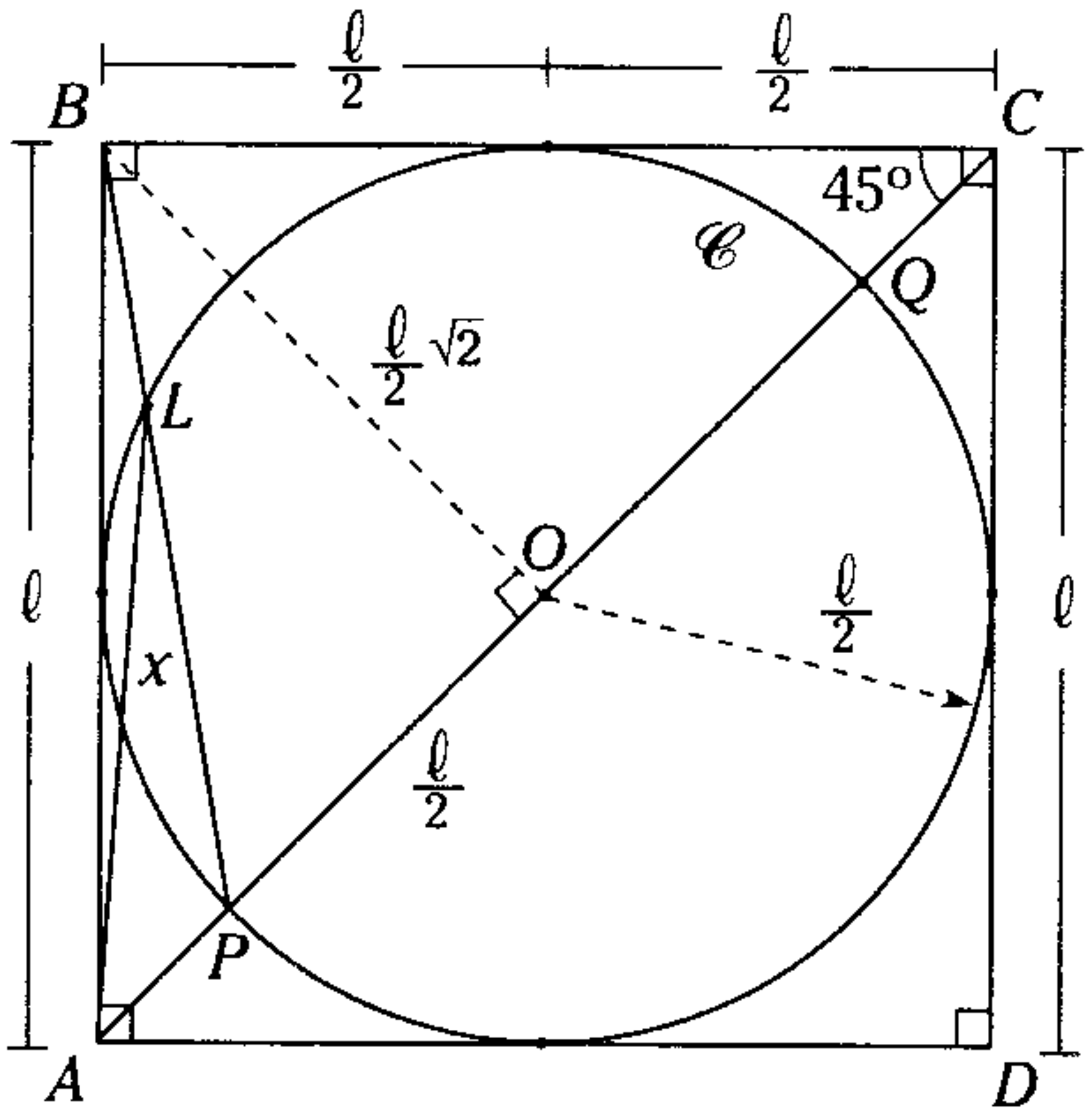


Figura 15.80

Piden $AL = x$

$\triangle BOP$: teorema de Pitágoras

$$BP^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\sqrt{2}\right)^2 \rightarrow BP = \frac{\ell}{2}\sqrt{3}$$

En la circunfencia $\mathscr{C}$: teorema de la tangente

$$\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = (BP)(BL)$$

$$\frac{\ell^2}{4} = \frac{\ell}{2}\sqrt{3}(BL)$$

$$\rightarrow BL = \frac{\ell\sqrt{3}}{6} \text{ y } LP = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$$

$\triangle ABP$: teorema de Stewart

$$x^2\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{3}\right) = \ell^2\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{\ell}{2}\sqrt{2} - \frac{\ell}{2}\right)^2\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{6}\right) - \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{6}\right)\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \ell^2\frac{\sqrt{3}}{3} + \ell^2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{6} - \ell^2\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$x^2 = 2\ell^2\left(\frac{1}{3} + \frac{3-2\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{12}\right)$$

$$x^2 = 2\ell^2\left(\frac{4+3-2\sqrt{2}-1}{12}\right)$$

$$x = \ell\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{3}}$$

CLAVE C

Problema 7

Se tiene un nonágono regular $ABCDEFGHI$, si $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AE} = \{P\}$, $\overline{AE} \cap \overline{BG} = \{Q\}$ y $(PE)(QG) - (PB)(AQ) = 16$, calcule EH.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 4,5 E) 5

Resolución

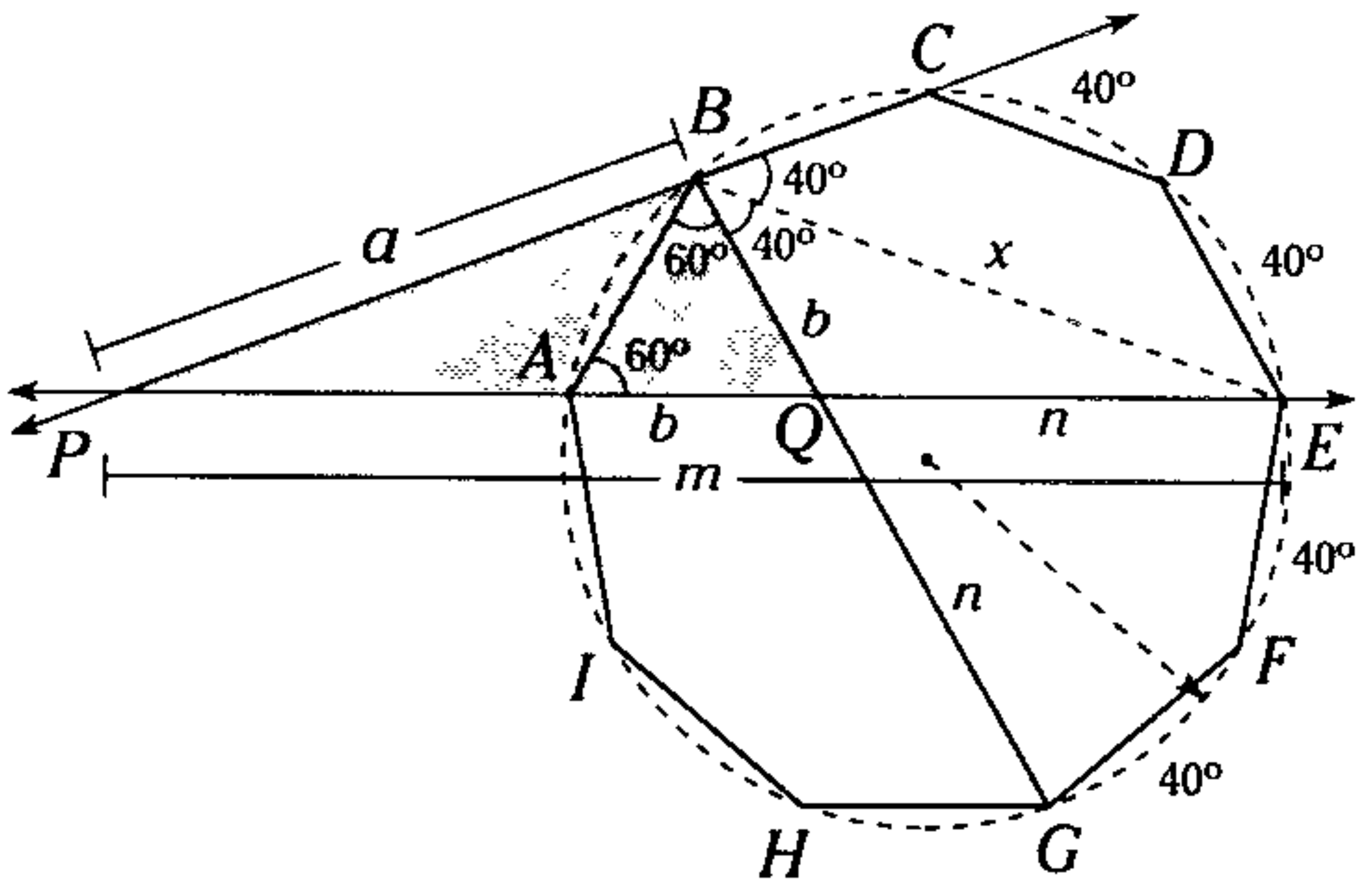


Figura 15.84

Piden $EH = x$

Dato $(PE)(QG) - (PB)(AQ) = 16$

$$mn - ab = 16 \qquad \text{(I)}$$

Al inscribir al nonágono regular en una circunferencia, los arcos que subtienden sus lados miden $\frac{360°}{9} = 40°$.

Al trazar $\overline{BE}$, se observa m$\sphericalangle CBE$ = m$\sphericalangle EBG$ = 40°, además $m\widehat{EFH} = m\widehat{BCE} = 120°$ entonces $BE = EH = x$.

$\triangle ABQ$: equilátero: $AQ = BQ = b$

$$m\widehat{ABE} = m\widehat{BAG} = 160°$$

$$\rightarrow AE = BG = b + n \text{ y } QE = n$$

En el $\triangle PBQ$: teorema de la bisectriz exterior

$$x^2 = mn - ab \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II)

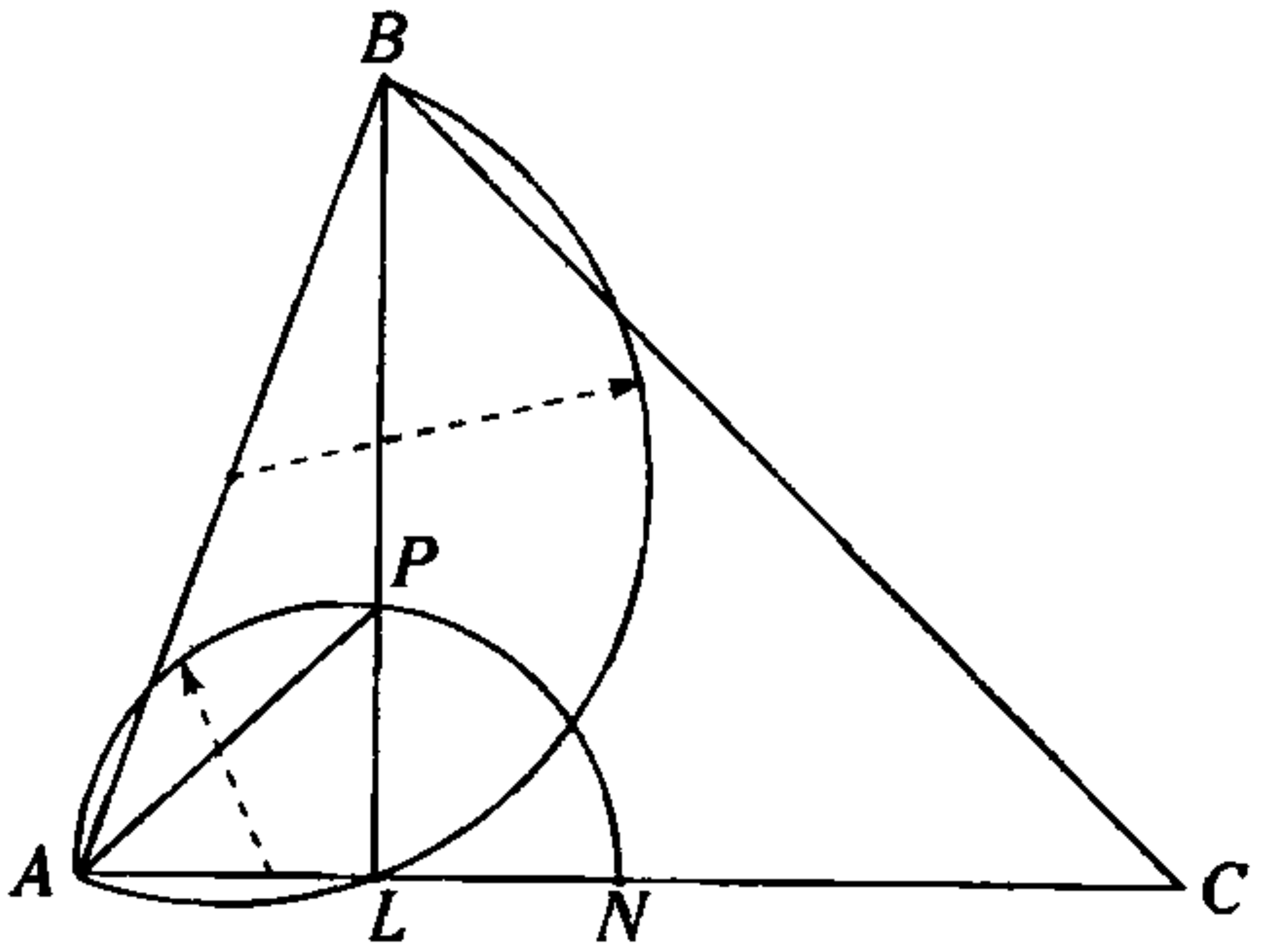
$$x^2 = 16$$

$$\therefore \quad x = 4$$

CLAVE C

Problema 8

De la figura, $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 16$, $AN = NC$. Calcule AP.



A) 2 B) 2,5 C) 3
D) 3,5 E) 4

Resolución

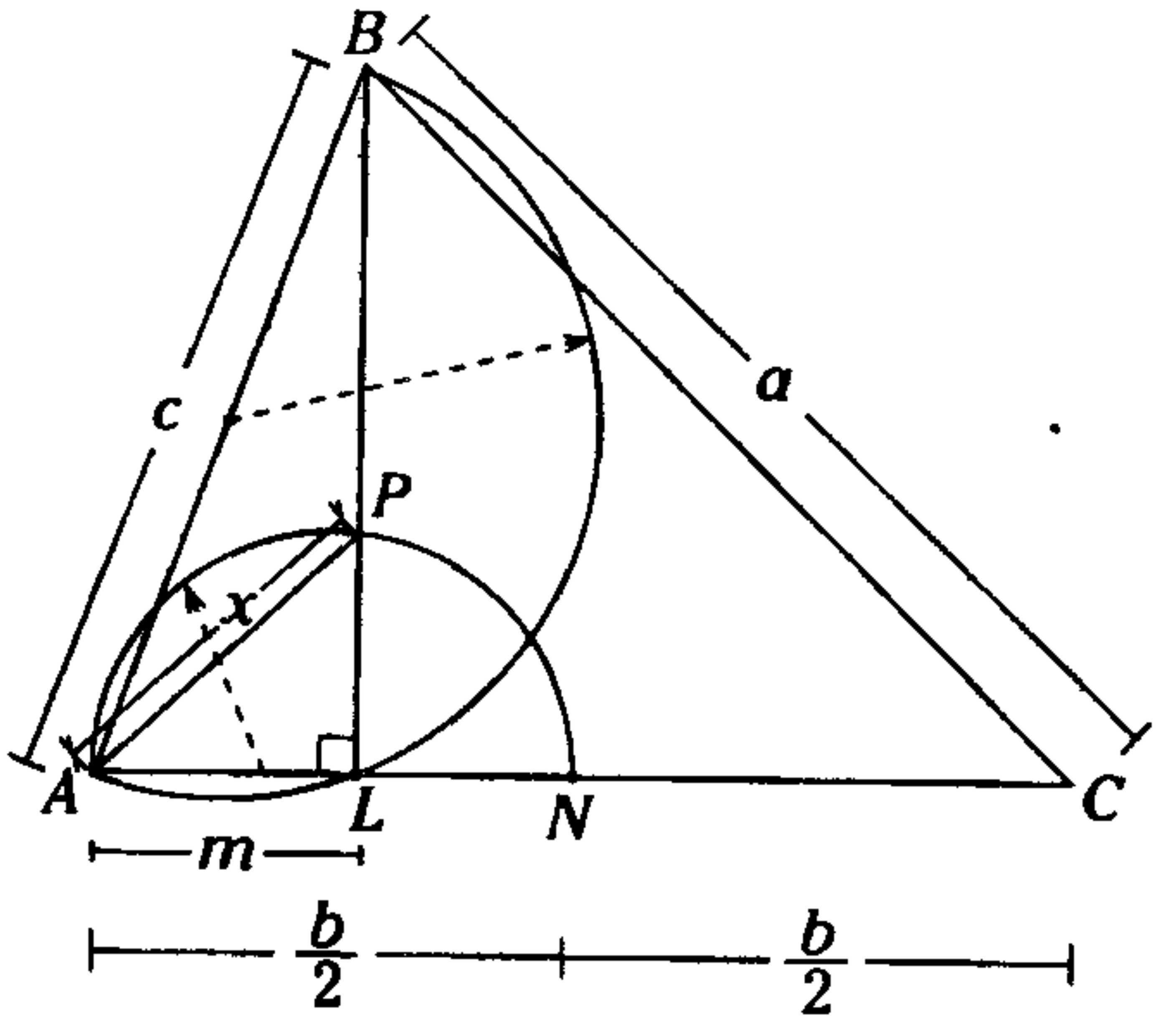


Figura 15.82

Piden $AP = x$

Dato: $c^2 + b^2 - a^2 = 16$

En la semicircunferencia mayor $m\sphericalangle BLA = 90°$
($\overline{AB}$: diámetro)

En la semicircunferencia menor: teorema

$$x^2 = \left(\frac{b}{2}\right)m \quad \rightarrow \quad 2x^2 = bm \qquad \text{(I)}$$

$\triangle ABC$: teorema de Euclides

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2b(m) \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II)

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2(2x^2)$$

$$4x^2 = c^2 + b^2 - a^2$$

$$4x^2 = 16$$

$$\therefore \quad x = 2$$

CLAVE A

Problema 9

En un triángulo ABC, se traza la mediana BM ($\sphericalangle AMB$ es obtuso) y en el triángulo AMB se traza la altura AH, tal que $BM = 2(MH)$, $AH = 4$ y $BC = 2\sqrt{5}$. Calcule BM.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

Resolución

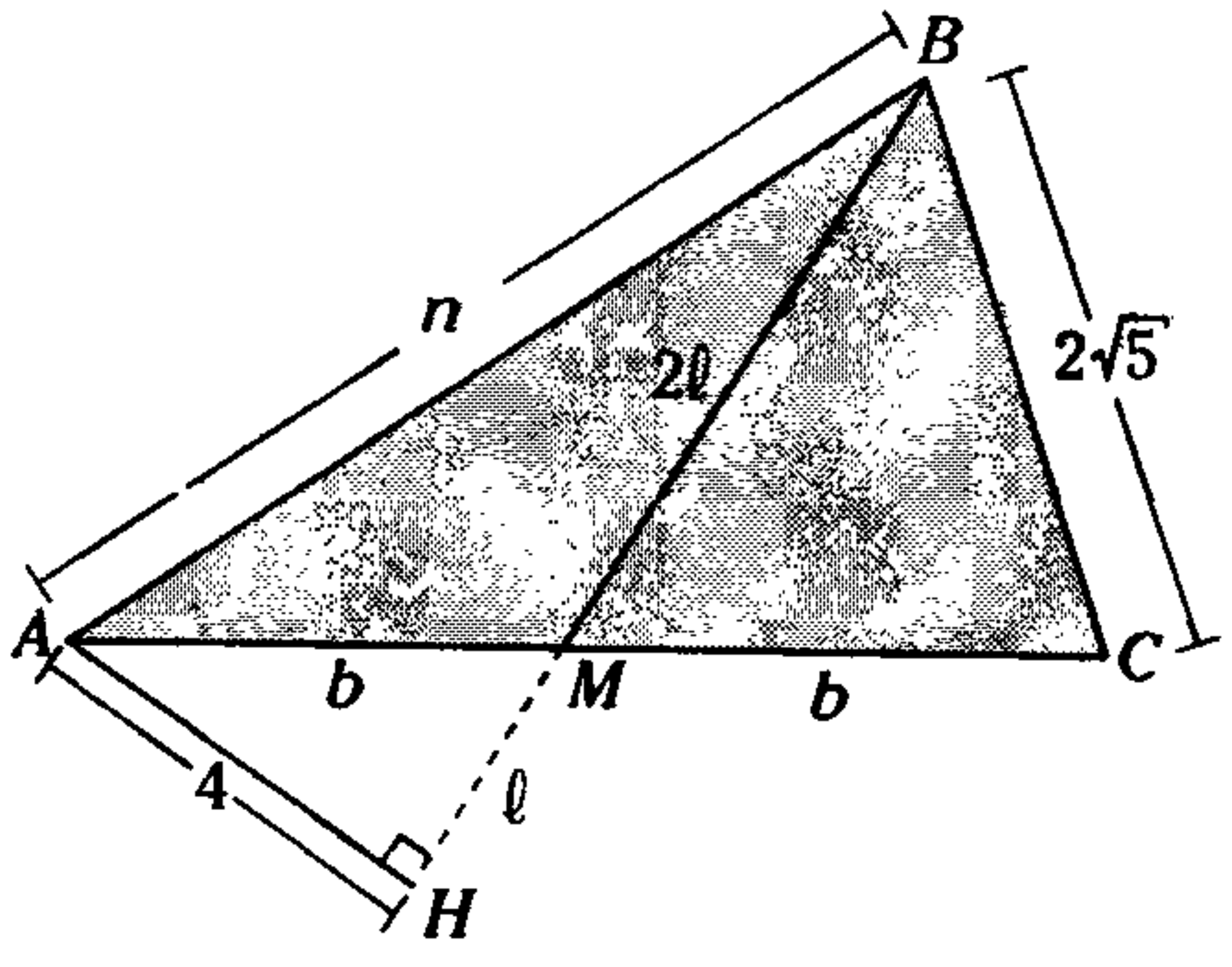


Figura 15.83

Piden $BM = 2\ell$

Del dato

$$BM = 2(MH)$$

$$2\ell = 2(MH) \rightarrow MH = \ell$$

$\triangle ABC$: teorema de la mediana

$$n^2 + (2\sqrt{5})^2 = 2(2\ell)^2 + \frac{(2b)^2}{2}$$

$$n^2 + 20 = 8\ell^2 + 2b^2 \qquad \text{(I)}$$

⊿AHB: teorema de pitágoras

$$n^2 = 4^2 + (3\ell)^2$$

$$n^2 = 16 + 9\ell^2 \qquad \text{(II)}$$

⊿AHM: teorema de Pitágoras

$$4^2 + \ell^2 = b^2 \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (II), (III) en (I)

$$16 + 9\ell^2 + 20 = 8\ell^2 + 2\ell^2 + 32$$

$$\ell^2 = 4$$

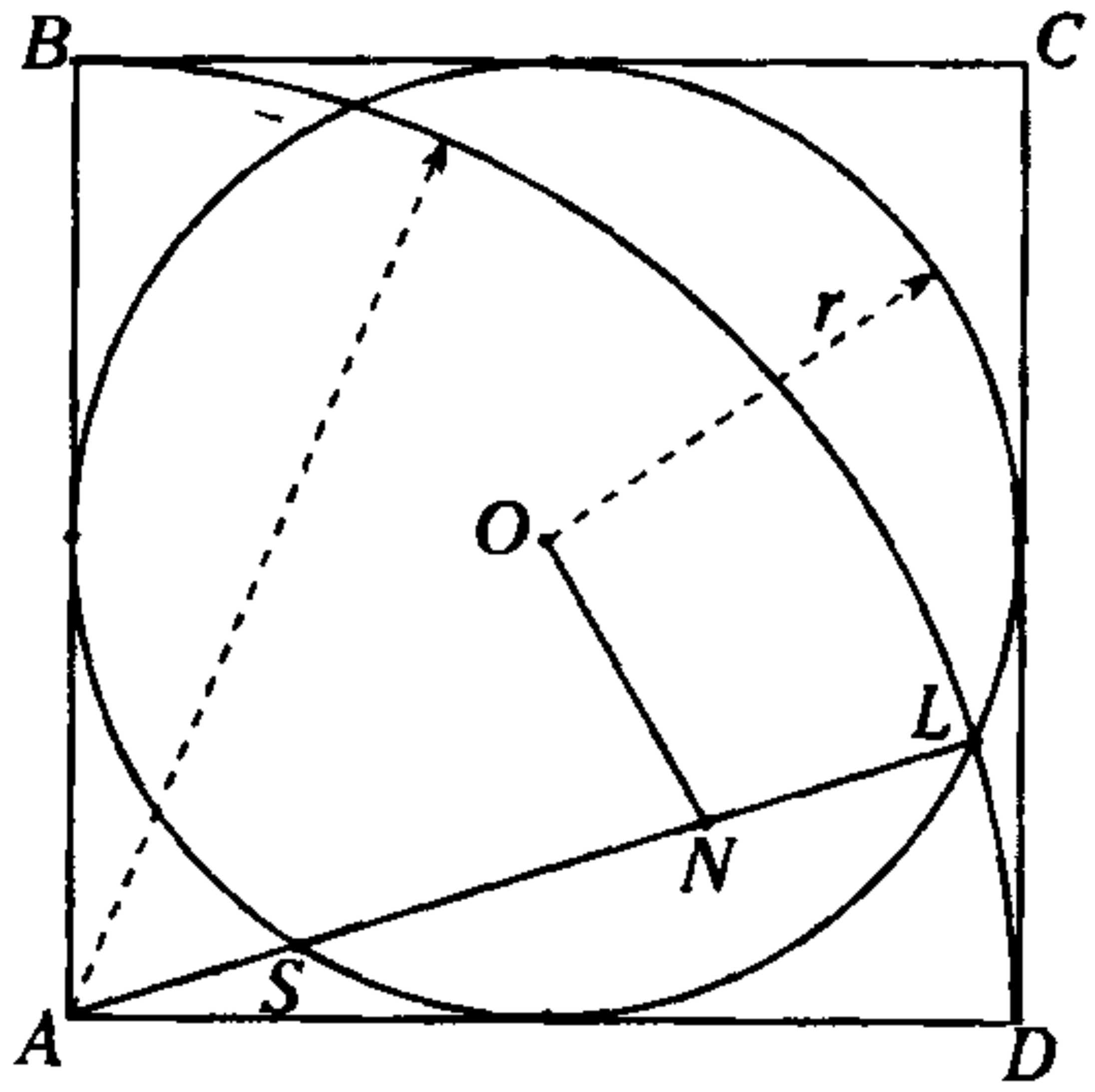
$$\rightarrow \ell = 2$$

$$\therefore BM = 4$$

CLAVE D

Problema 10

En la figura, $ABCD$ es un cuadrado y $2(AS) = SN$. Calcule ON.



A) $r\sqrt{2}/3$ B) $3r\sqrt{2}/7$ C) $r\sqrt{2}/2$

D) $r\sqrt{2}/5$ E) $r\sqrt{2}/4$

Resolución

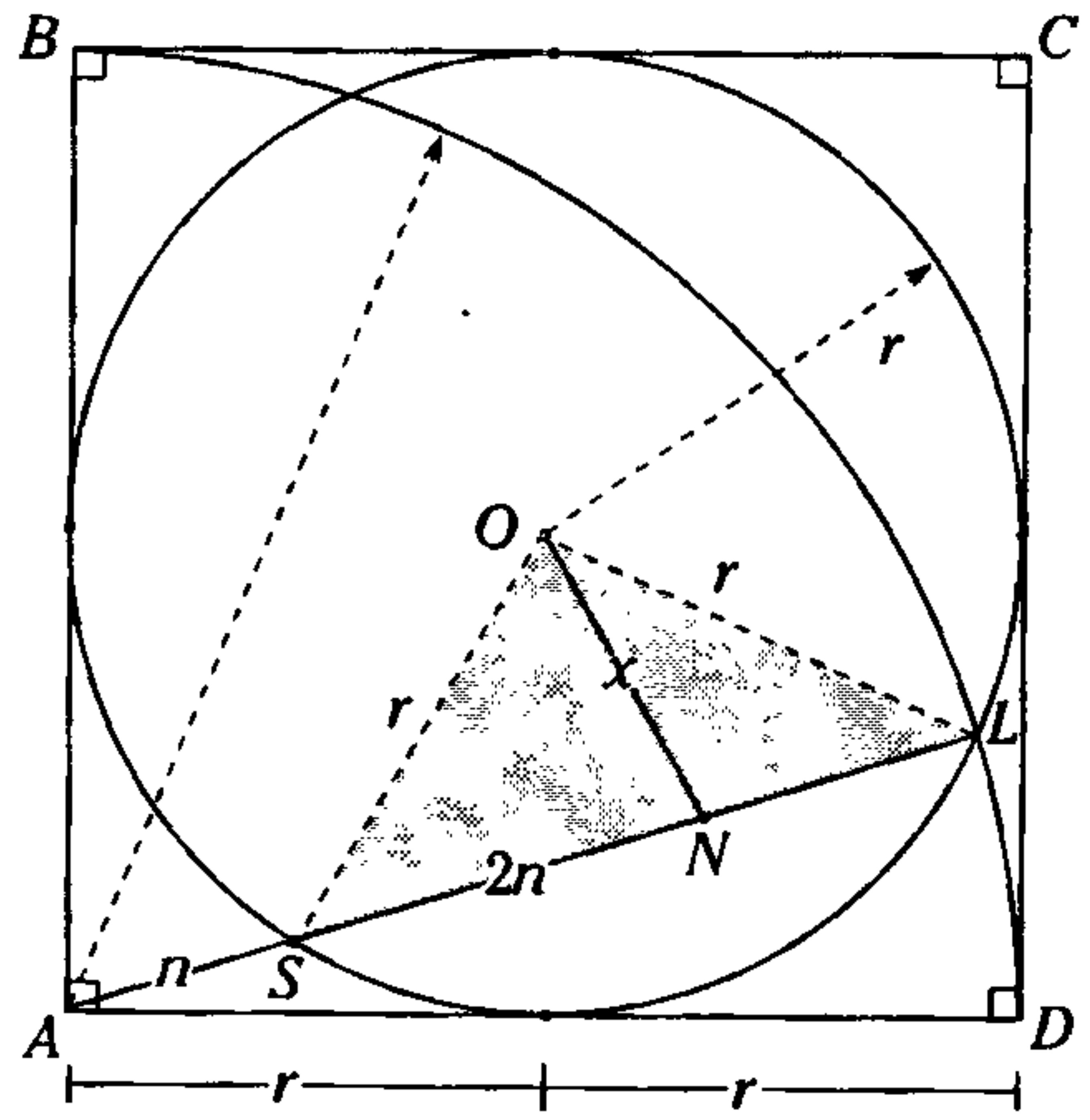


Figura 15.84

Piden $NO = x$

Se trazan $\overline{OS}$ y $\overline{OL}$

Del dato $SN = 2(AS)$,

sea $AS = n \rightarrow SN = 2n$

$\triangle SOL$: teorema de Stewart (caso especial)

$$x^2 = (r)(r) - (SN)(NL) \qquad \text{(I)}$$

En la circunferencia: teorema de la tangente

$$(r)^2 = 2r(n)$$

$$\rightarrow n = \frac{r}{2} \text{ y } NL = \frac{r}{2}$$

Reemplazando en (I)

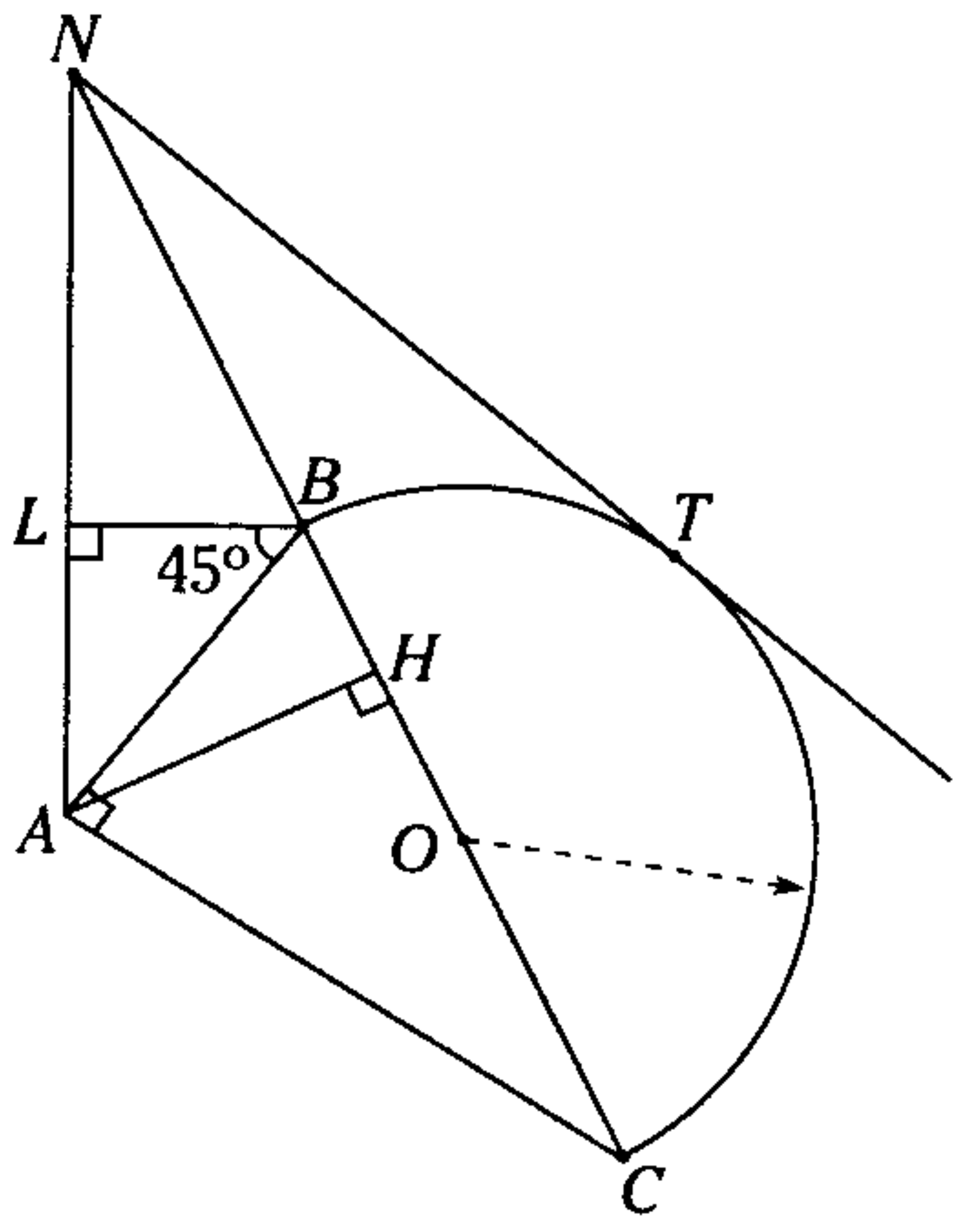
$$x^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)(r)$$

$$\therefore x = r\frac{\sqrt{2}}{2}$$

CLAVE C

Problema 11

De la figura, T es punto de tangencia, $(AH)(OC) = 8$ y $NT = 2\sqrt{10}$. Calcule NA.



A) $\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{5}$ C) 4
D) $2\sqrt{6}$ E) 5

Resolución

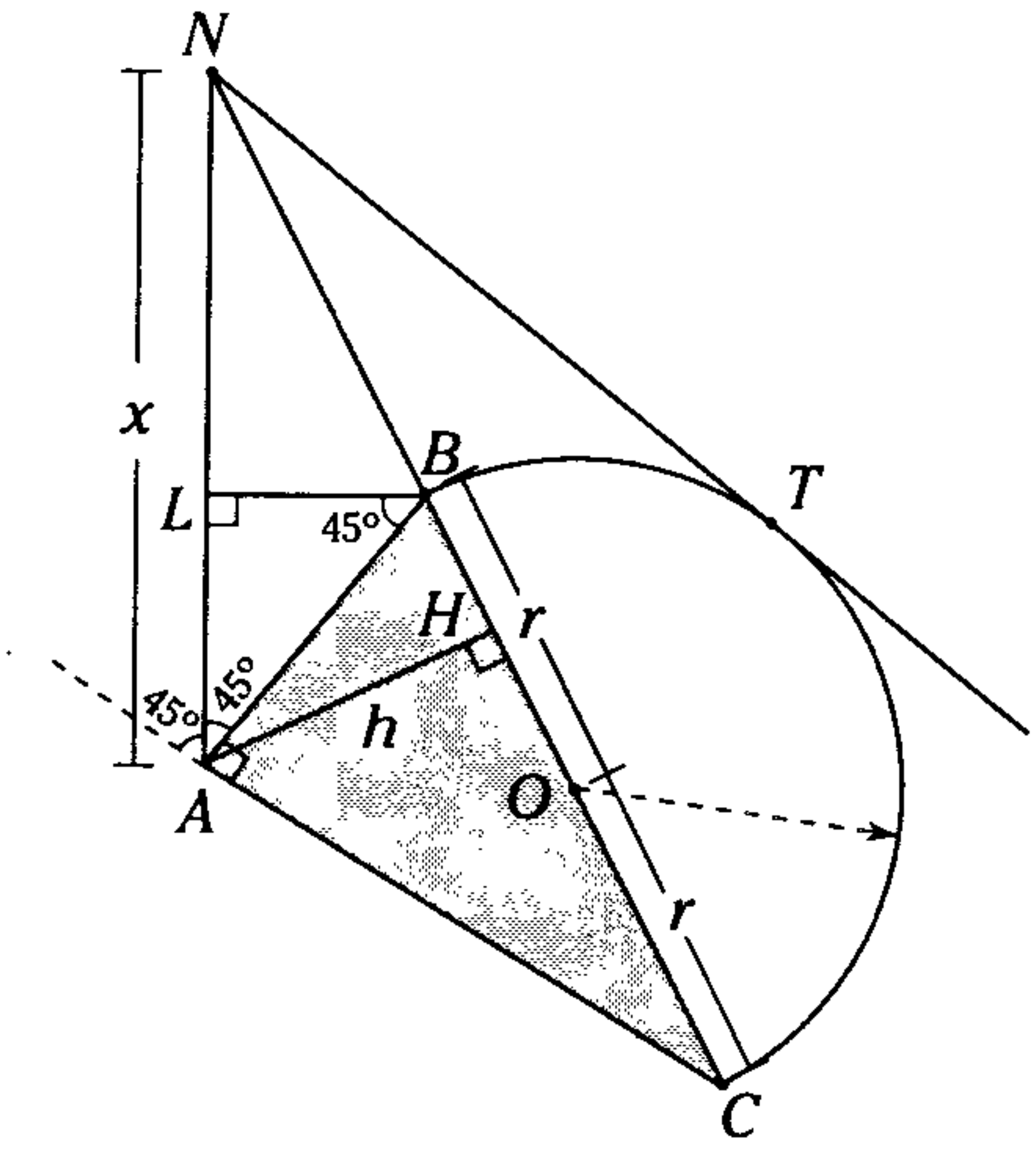


Figura 15.85

Piden $NA = x$

Datos: $(AH)(OC) = h(r) = 8$

⊾BAC: teorema de la bisectriz exterior

$$x^2 = (NC)(NB) - (AC)(AB) \qquad \text{(I)}$$

Por teorema de la tangente

$$\left(2\sqrt{10}\right)^2 = (NC)(NB) \qquad \text{(II)}$$

⊾BAC: teorema

$$(AC)(AB) = 2r(h) = 16 \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando en (II) y (III) en (I)

$$x^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 - 16$$

$$x^2 = 40 - 16$$

$$x^2 = 24$$

$$\therefore \quad x = 2\sqrt{6}$$

CLAVE D

Problema 12

En un cuadrilátero circunscrito $ABCD$, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ en M, N y P respectivamente. La prolongación de $\overline{NP}$ interseca a $\overleftrightarrow{AD}$ en Q. Si $MC = 8$, $PQ = \sqrt{34}$, la m$\sphericalangle ABC = 120°$ y la m$\sphericalangle ADC = 90°$, calcule la distancia del punto N al punto medio de $\overline{MC}$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1
D) 1,2 E) 1,5

Resolución

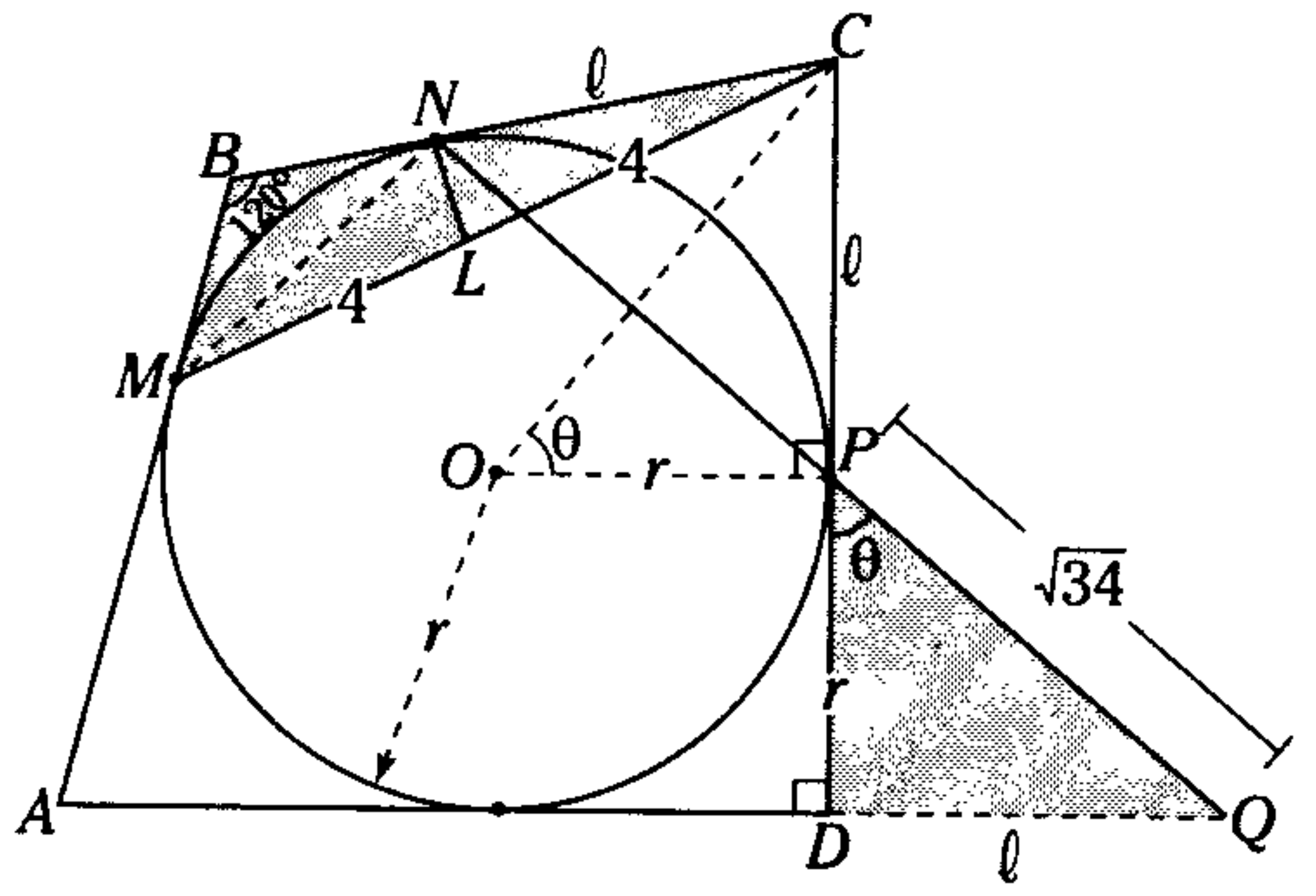


Figura 15.86

Piden $NL = x$

De la figura, $PD = r$

Como $m\overset{\frown}{MN} = 60° \rightarrow MN = r$

$⊿COP \cong ⊿QPD$ (A.L.A.)

$\rightarrow DQ = \ell$

$⊿PDQ$: Teorema de Pitágoras

$$\sqrt{34}^2 = r^2 + \ell^2 \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle MNC$: Teorema de la mediana

$$r^2 + \ell^2 = 2x^2 + \frac{8^2}{2} \qquad \text{(II)}$$

(I) en (II)

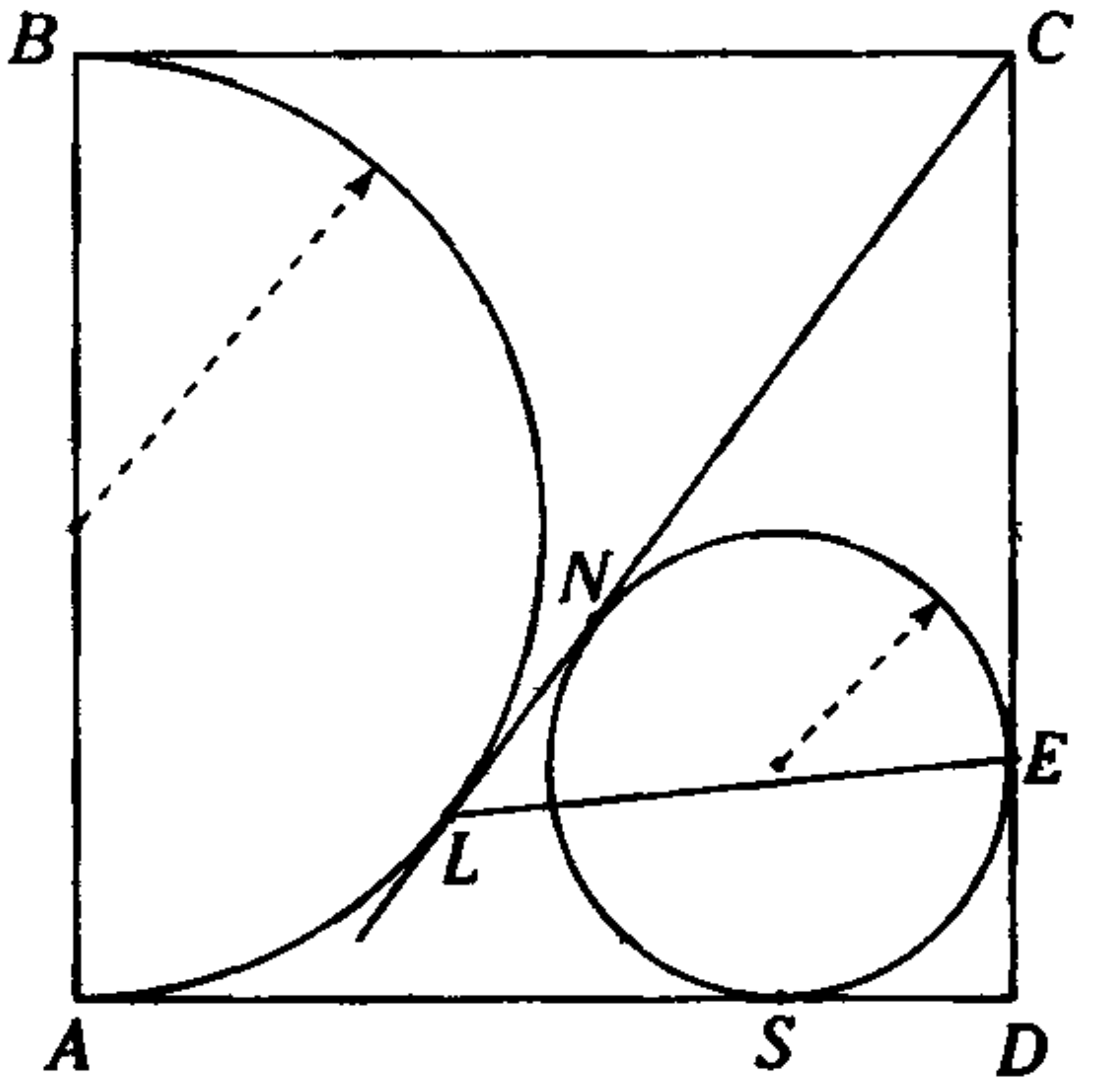
$$34 = 2x^2 + 32$$

$$\therefore\ x = 1$$

CLAVE C

Problema 13

De la figura, que se muestra L, N, E y S son puntos de tangencia, $ABCD$ es un cuadrado y $CD = 4$. Calcule LE.



A) $7\sqrt{5}/3$ B) $9\sqrt{5}/5$ C) $2\sqrt{5}$

D) $7\sqrt{5}/2$ E) $6\sqrt{5}/5$

Resolución

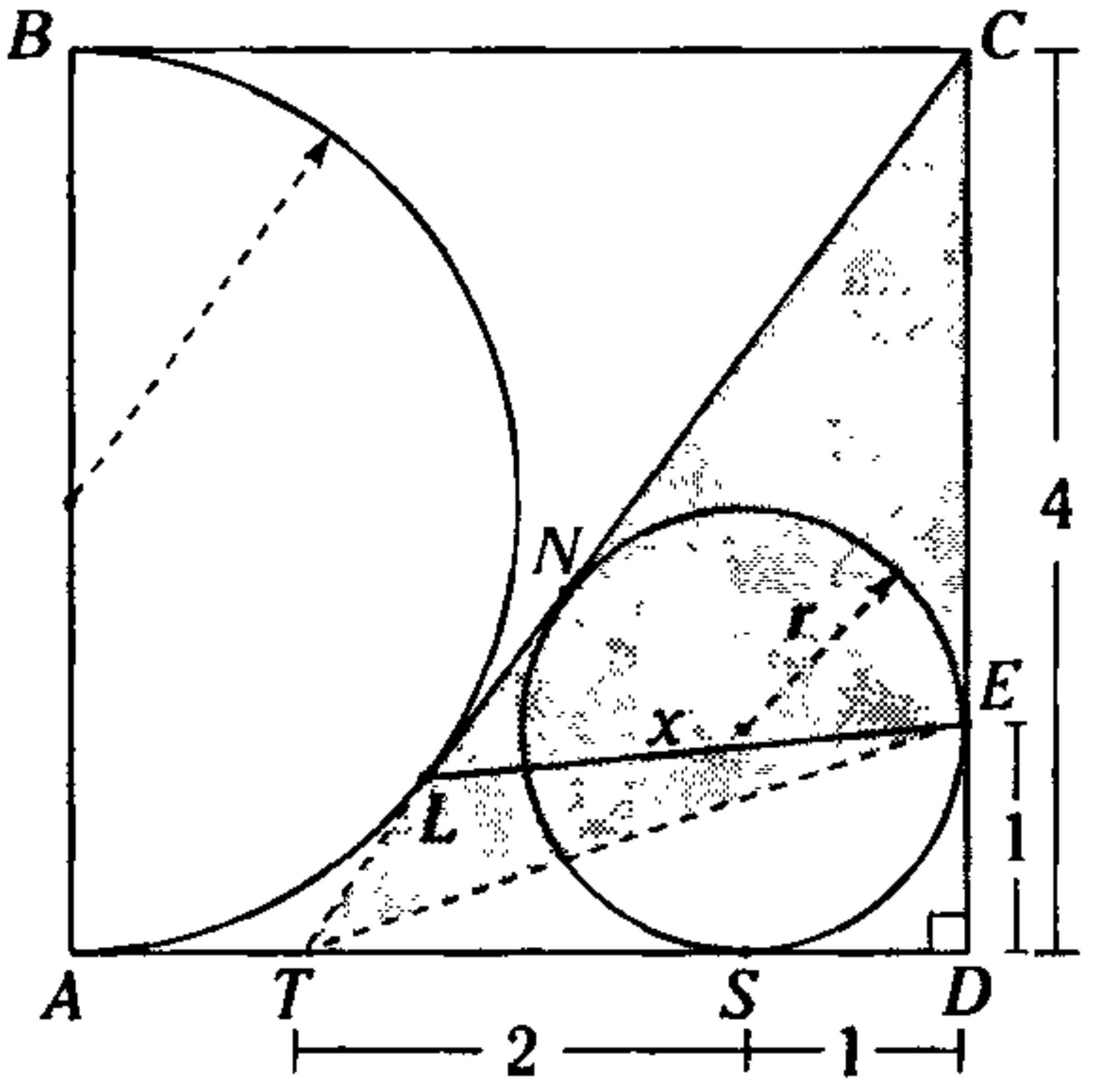
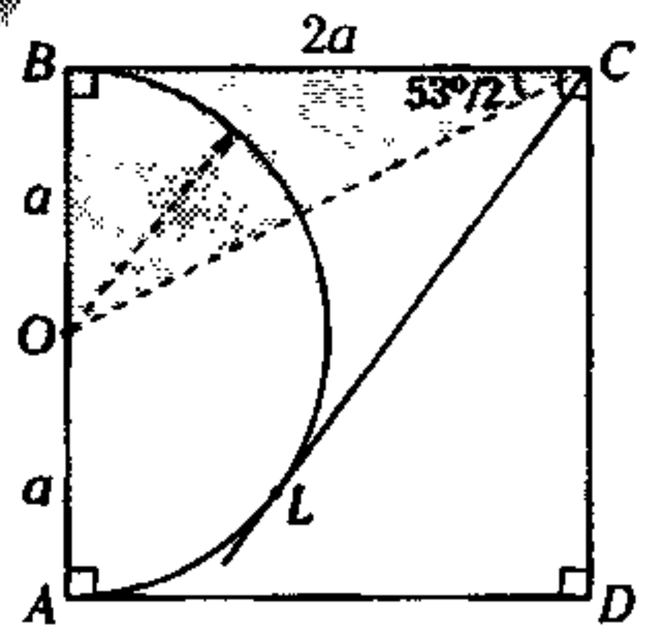


Figura 15.87

Nota



Si $ABCD$ es un cuadrado

$⊿CBO$: Not. $\frac{53°}{2}$; $\frac{127°}{2}$

$\rightarrow m\sphericalangle BCO = \frac{53°}{2}$

Figura 15.88

Piden $LE = x$

De lo anterior: $m\sphericalangle BCL = 53°$

$\rightarrow m\sphericalangle DCL = 37°$

$⊿DCT$: Por teorema de Poncelet, $r = 1$

Propiedad $DE = DS = 1$

$⊿EDT$: $ET = \sqrt{10}$

Como $DT = 3 \rightarrow TL = AT = 1$

$\triangle CET$: teorema de Stewart

$$x^2(5) = 4^2(1) + \sqrt{10}^2(4) - (1)(4)(5)$$

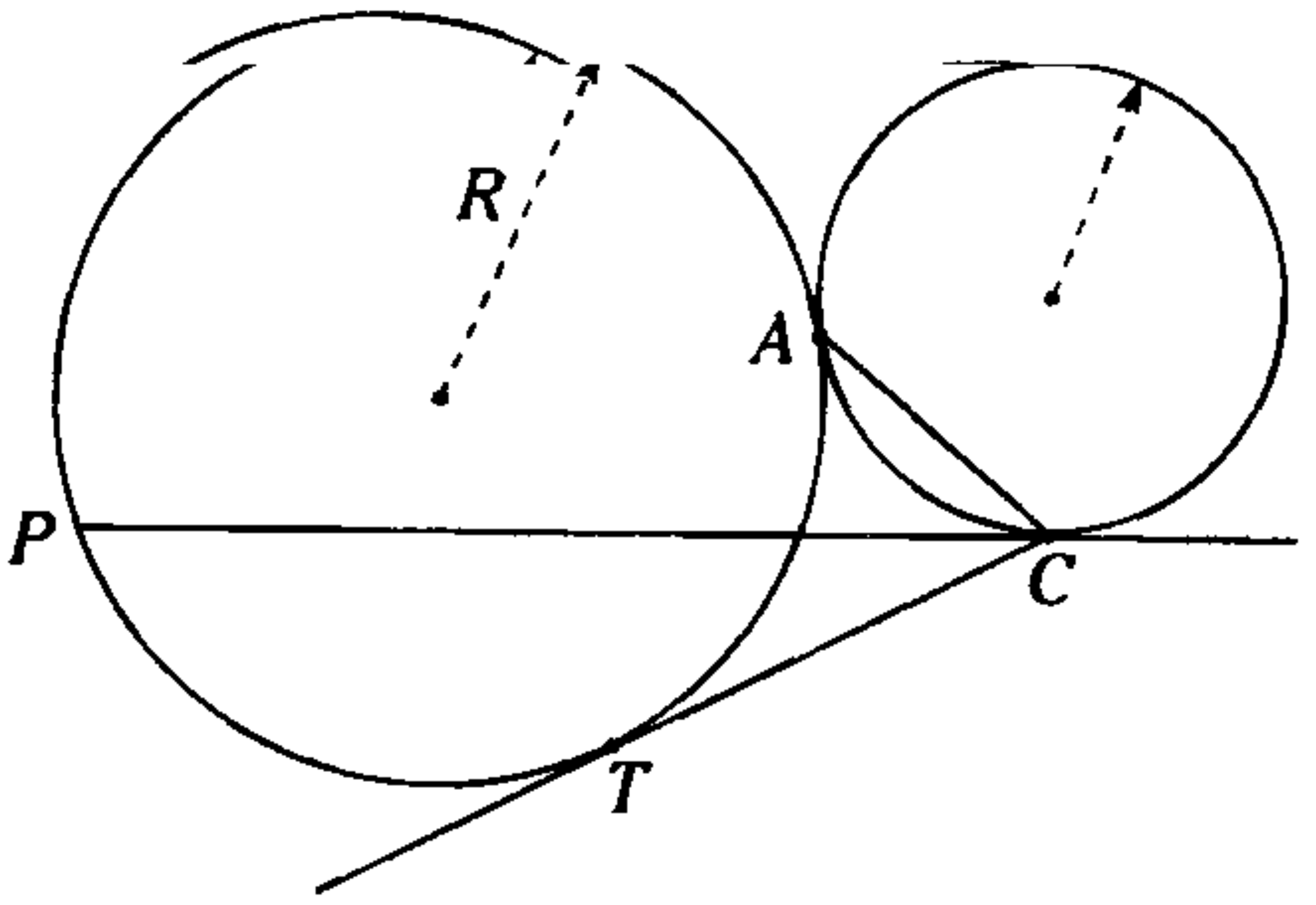
$$5x^2 = 16 + 40 - 20$$

$$\therefore\ x = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

CLAVE E

Problema 14

De la figura, mostrado A, C y T son puntos de tangencia. Si el producto de la distancia de A a $\overleftrightarrow{PC}$ con R es b^2 y $CT=3b$, calcule AC.



A) $\sqrt{2}\,b$ B) $2\sqrt{2}\,b$ C) $\sqrt{7}\,b$

D) $\sqrt{5}\,b$ E) $\dfrac{3}{4}\sqrt{6}\,b$

Resolución

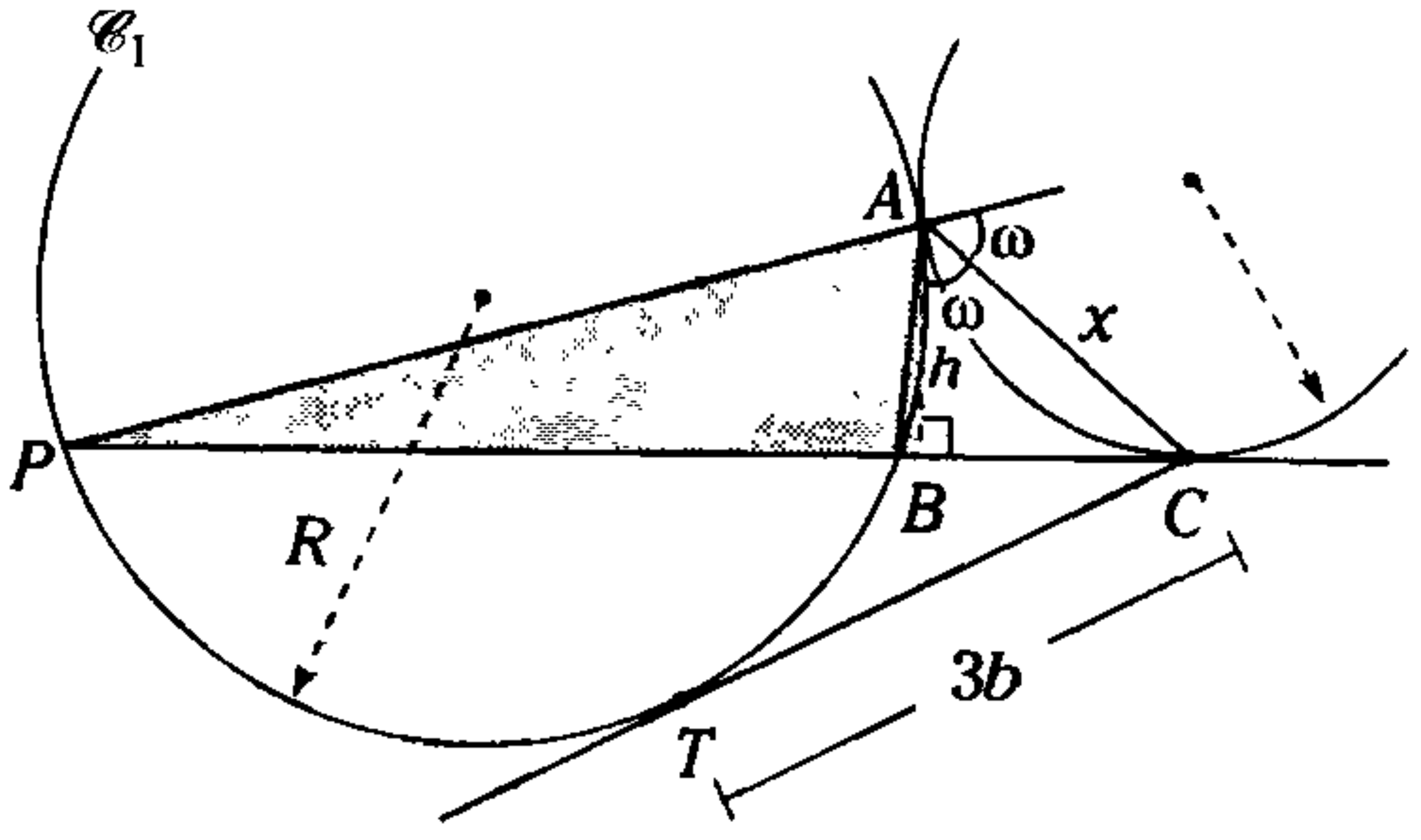


Figura 15.89

Nota

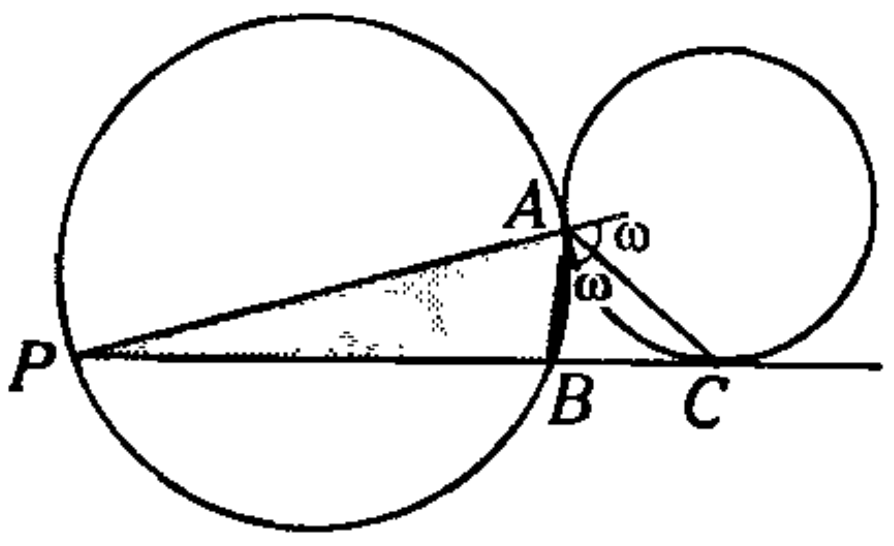


Figura 15.90

Se sabe: $\overline{AC}$: bisectriz exterior del $\triangle PAB$.

Piden $AC=x$

Dato $(h)(R)=b^2$

Apoyándonos de la nota anterior: $\overline{AC}$ bisectriz exterior

$\triangle PAB$: teorema bisectriz exterior

$$x^2=(PC)(BC)-(PA)(AB) \qquad (I)$$

$\triangle PAB$: teorema producto de dos lados

$$(PA)(AB)=2(R)(h)=2b^2 \qquad (II)$$

En la $\mathscr{C}_1$: teorema de la tangente

$$(3b)^2=(PC)(BC) \qquad (III)$$

Reemplazando (II) y (III) en (I)

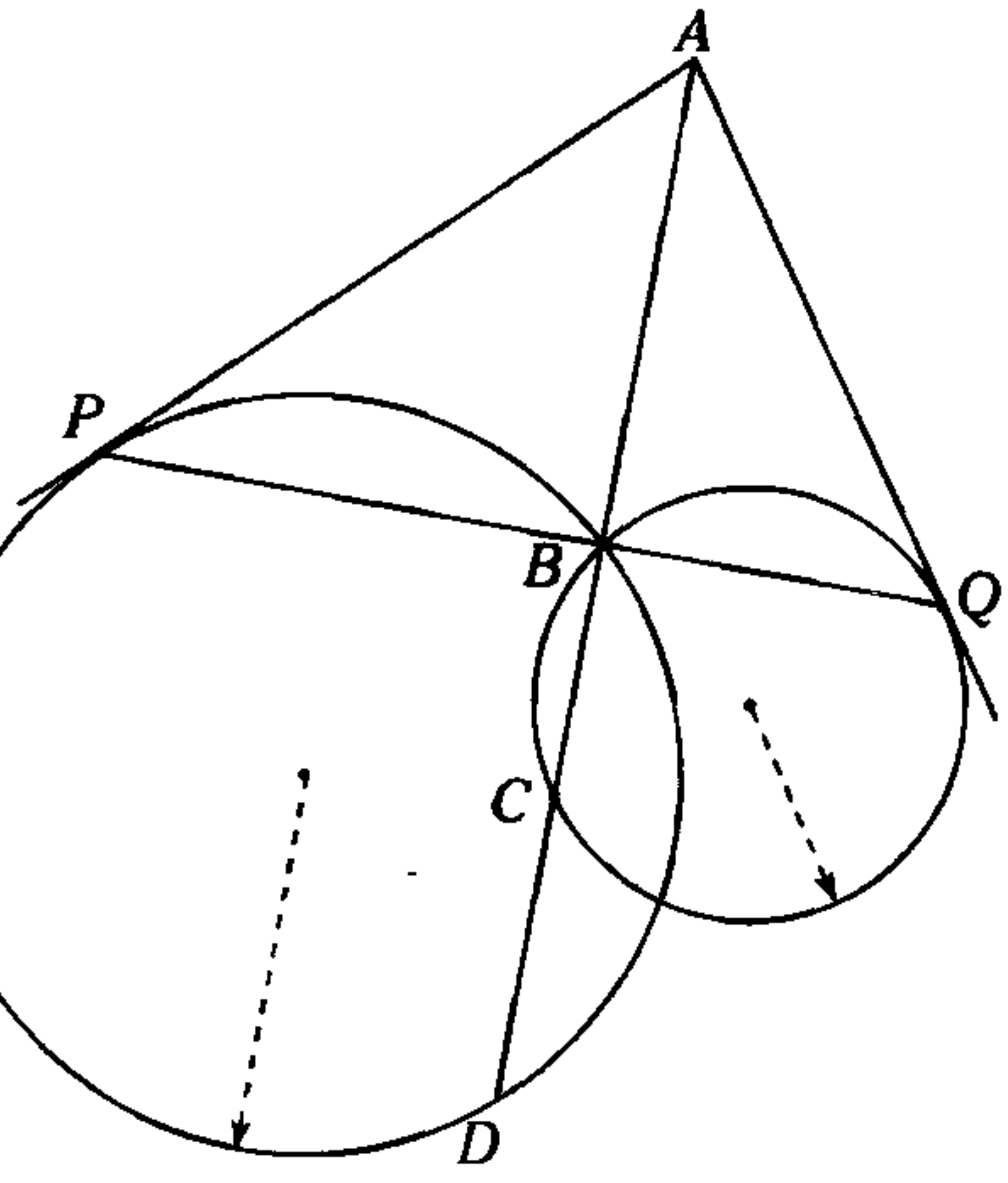
$$x^2=(3b)^2-2b^2$$

$$\therefore\ x=\sqrt{7}\,b$$

CLAVE C

Problema 15

En la figura, P y Q son puntos de tangencia, $CD=2(BC)=2(AB)$, $PB=5$ y $BQ=3$. Calcule AB.



A) $2\sqrt{15/13}$ B) $2\sqrt{17/15}$

C) $2\sqrt{18/5}$

D) $2\sqrt{15/7}$ E) $\sqrt{13/7}$

Resolución

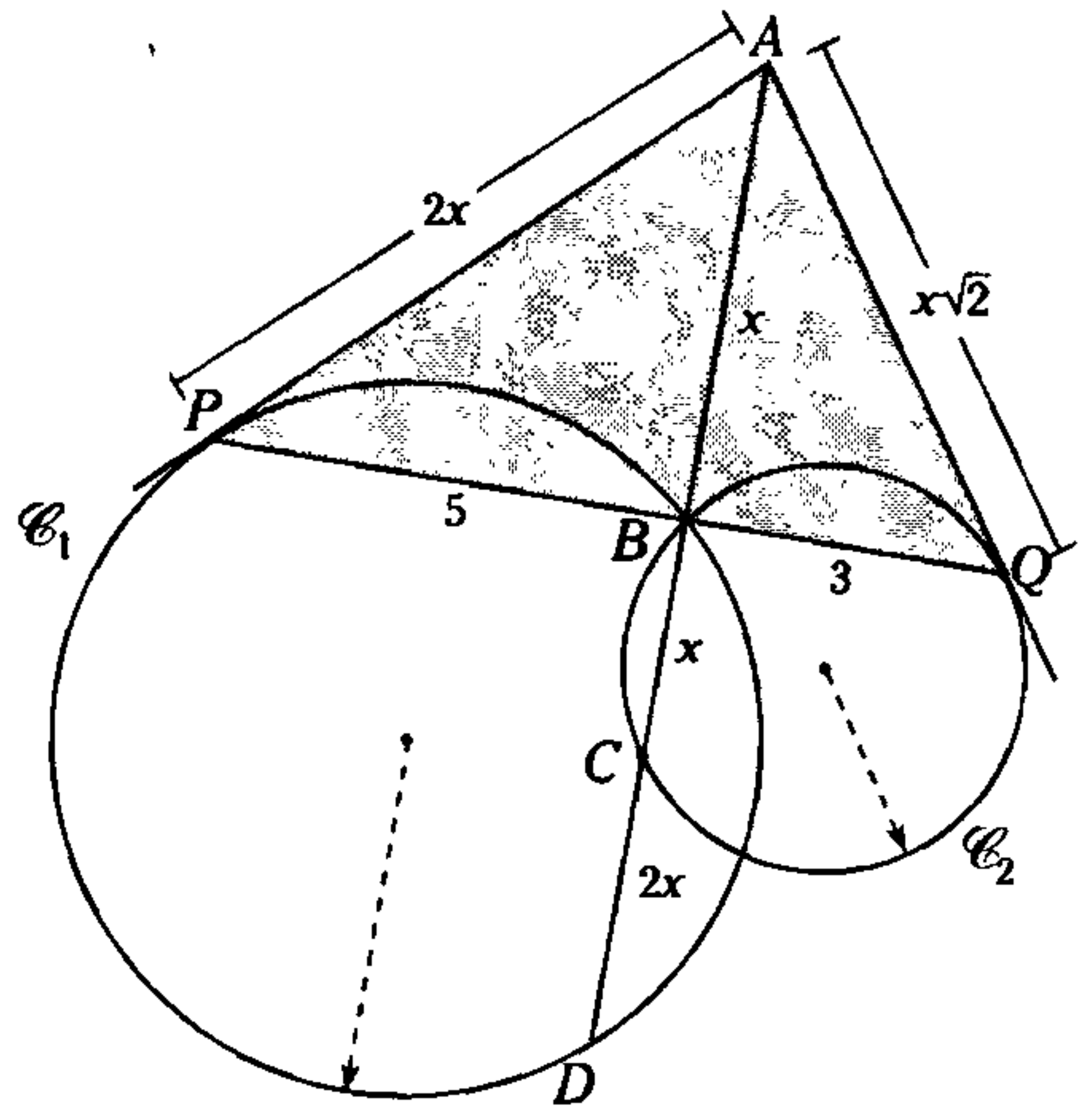


Figura 15.91

Piden $AB=x$

Como

$$CD=2(BC)=2(AB)$$

$$\rightarrow\ CD=2x\ \text{y}\ BC=AB=x$$

En $\mathscr{C}_1$: teorema de la tangente

$$AP^2=4x(x)$$

$$\rightarrow\ AP=2x$$

En $\mathscr{C}_2$: teorema de la tangente

$$AQ^2=2x(x)$$

$$\rightarrow\ AQ=x\sqrt{2}$$

$\triangle PAQ$: teorema de Stewart

$$(2x)^2(3)+\left(x\sqrt{2}\right)^2(5)=x^2(8)+(5)(3)(8)$$

$$12x^2+10x^2=8x^2+120$$

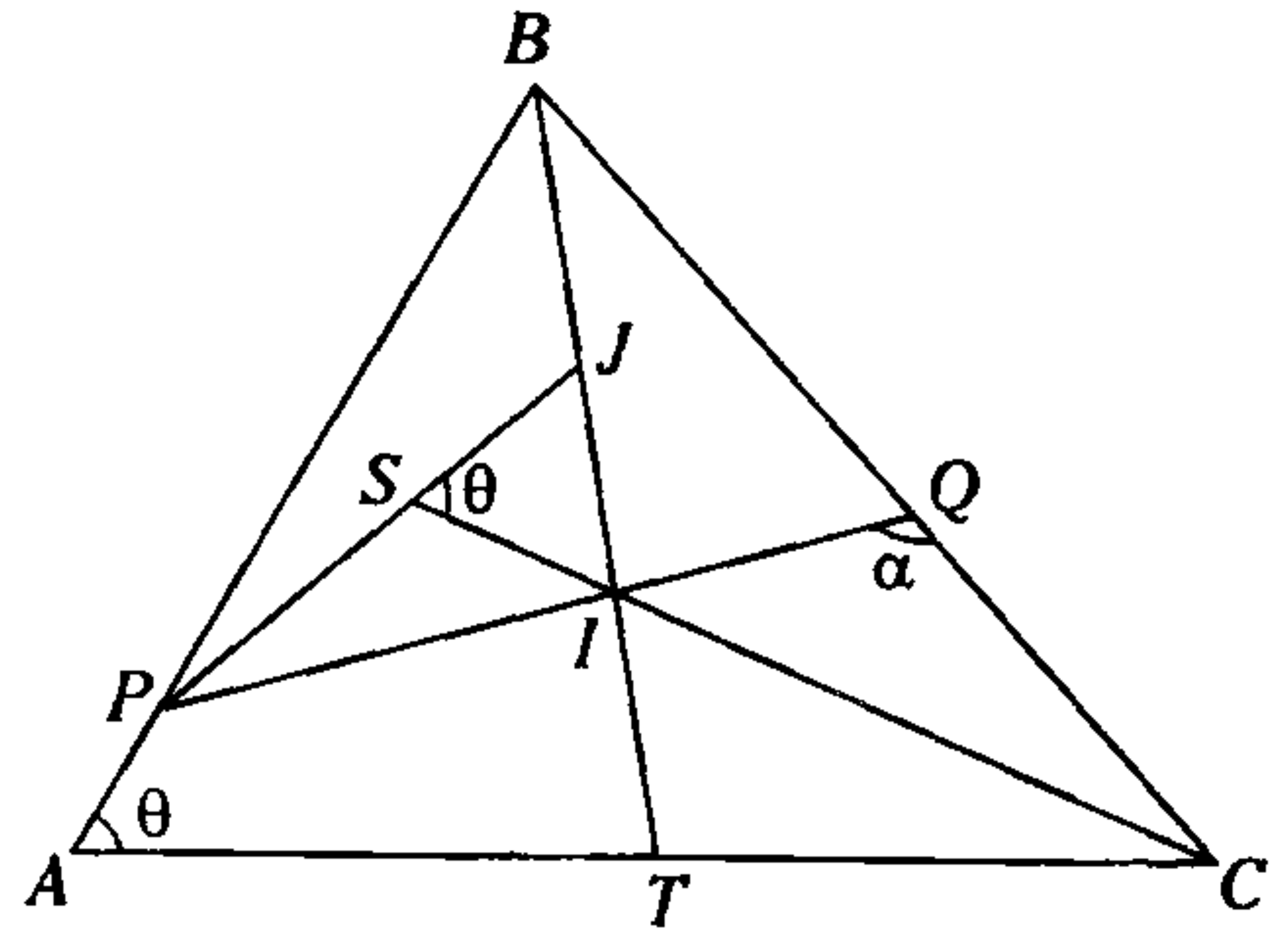
$$14x^2=120$$

$$\therefore\quad x=2\sqrt{\frac{15}{7}}$$

CLAVE D

Problema 16

De la figura, I es incentro del triángulo ABC, $(SI)(IC)=5$, $BJ=2$, $TI=1{,}5$ y $\theta+\alpha=180°$. Calcule $(PB)(BQ)$.



A) 9 B) 10 C) 12
D) 13 E) 14

Resolución

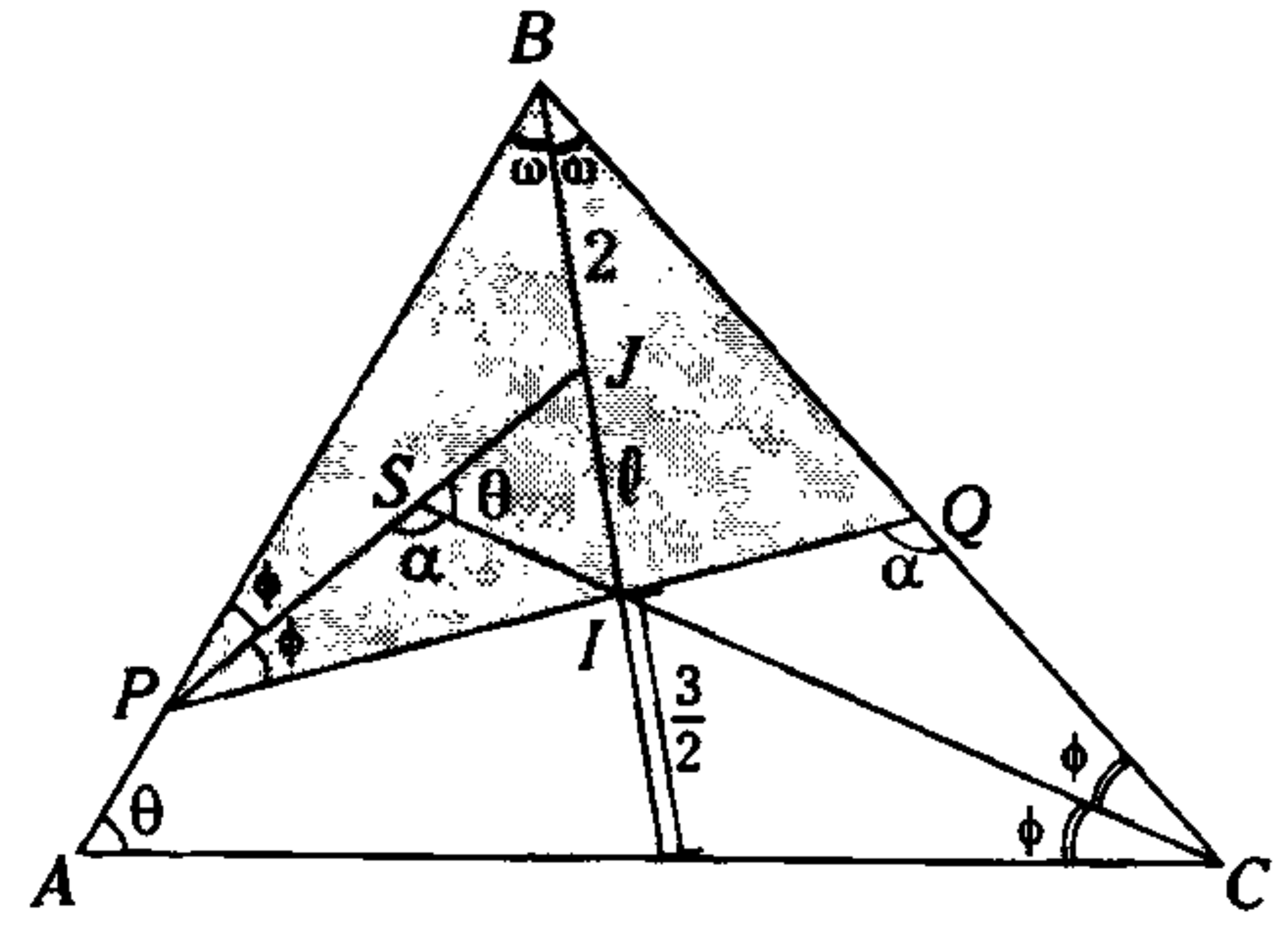


Figura 15.92

Piden $(PB)(BQ)$

Del dato $\theta+\alpha=180°$

$$\rightarrow\ m\measuredangle PSI=\alpha$$

⩓: $m\measuredangle SPI=m\measuredangle QCI=\phi$

Como $m\measuredangle PAC=m\measuredangle ISC=\theta$

$\rightarrow$ $APSC$: ⏢ inscriptible

Por lo cual, $m\measuredangle ACS=m\measuredangle BPS=\phi$

$\triangle PBQ \sim \triangle CBA$ (A.A.A.)

$$\frac{2}{2+\ell}=\frac{2+\ell}{\frac{7}{2}+\ell}$$

$$7+2\ell=\ell^2+4\ell+4$$

$$\ell^2+2\ell-3=0$$

$$\ell \quad +3$$
$$\ell \quad -1$$

$$\rightarrow \ \ell=1$$

$\triangle PBQ$: teorema del cálculo de la bisectriz interior

$$(2+\ell)^2=(PB)(BQ)-(PI)(IQ) \qquad (I)$$

Por ~ $\triangle$: $(SI).(IC)=5=(PI).(IQ)$

En (I)

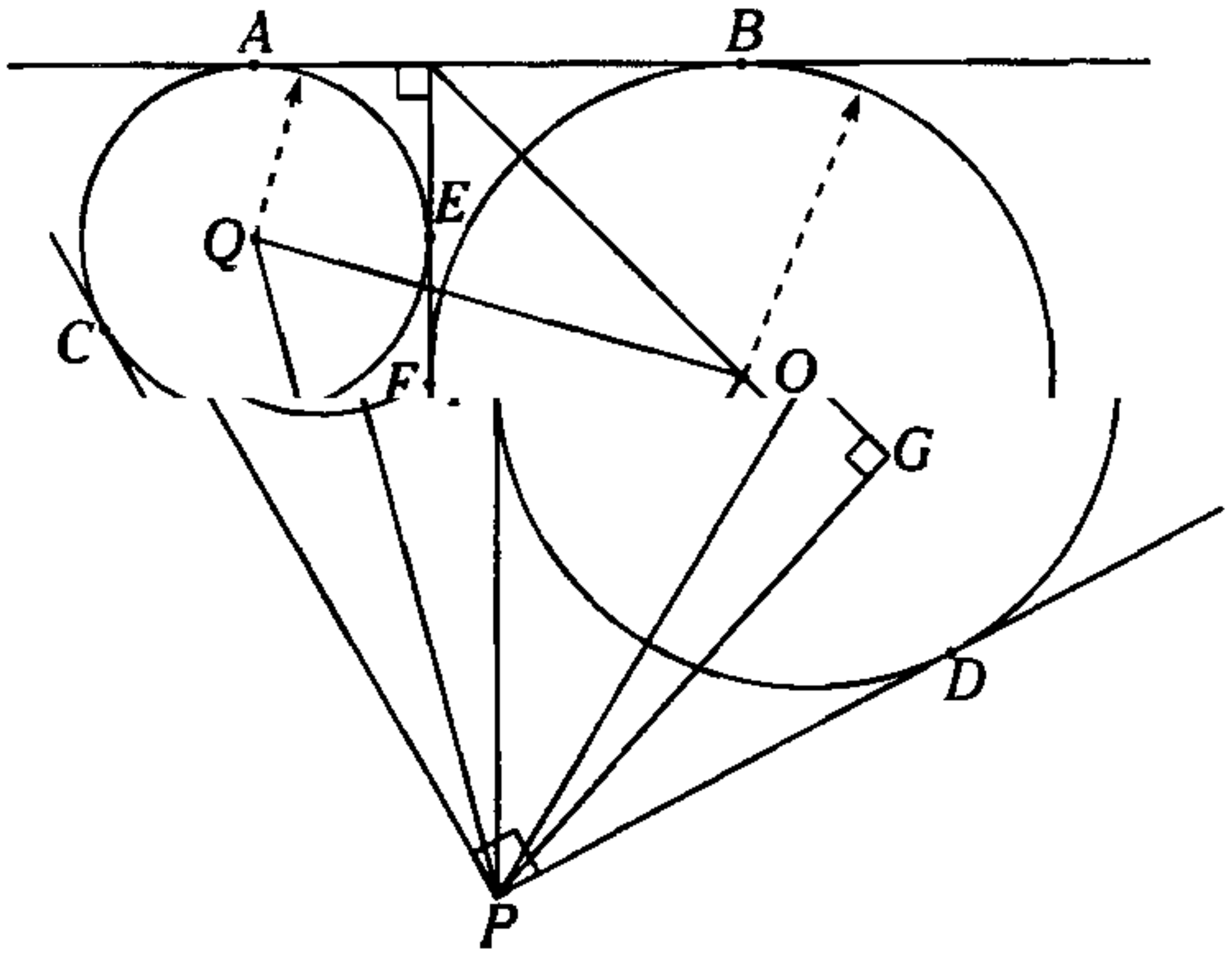
$$(2+1)^2=(PB)(BQ)-(5)$$

$$\therefore \ (PB)(BQ)=14$$

CLAVE E

Problema 17

De la figura, A, B, C, D, E, F son puntos de tangencia, $OP=13$, $OQ=14$ y $QP=15$. Calcule PG.



A) 5 B) 12 C) 4
D) 8 E) 6

Resolución

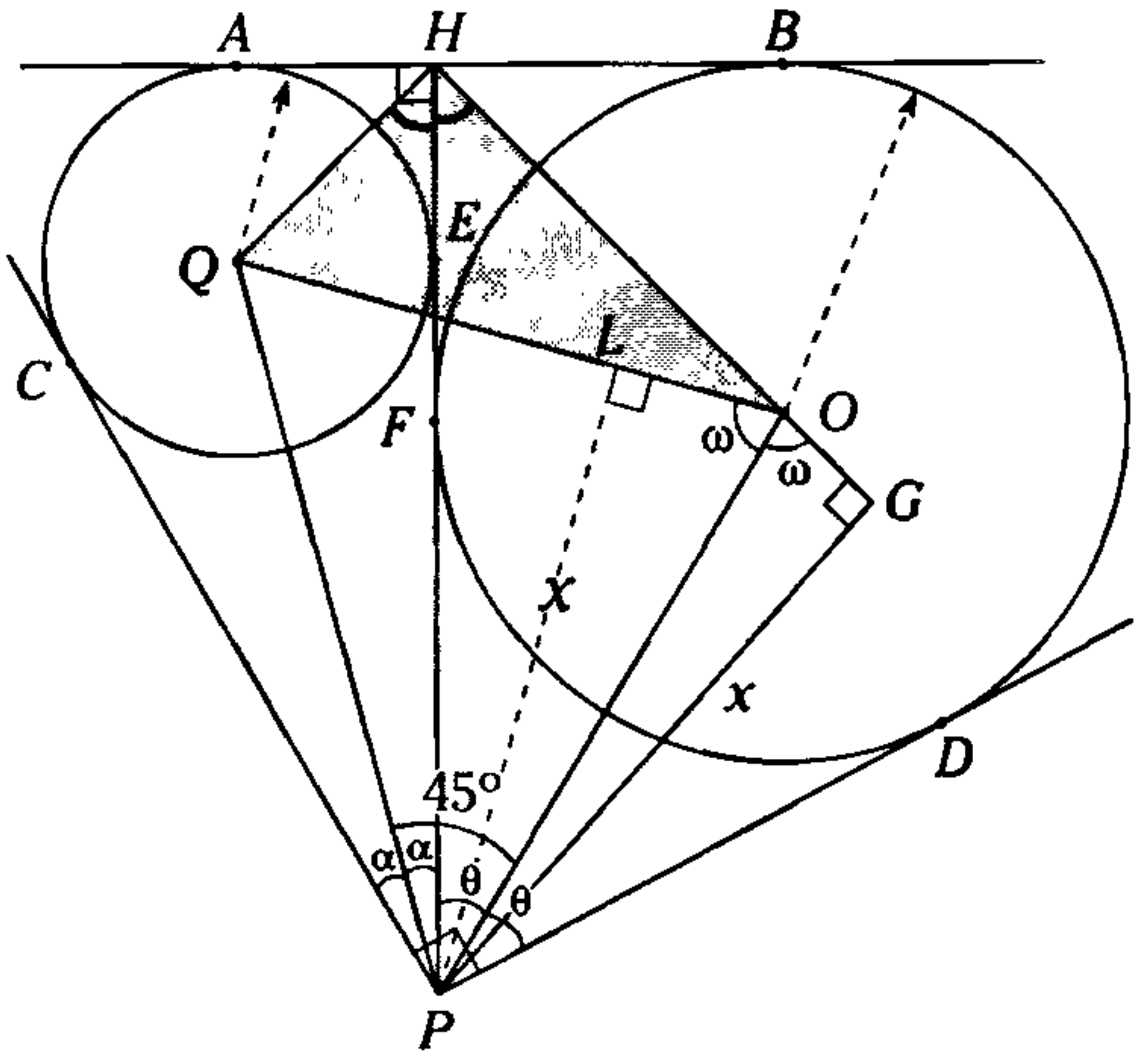


Figura 15.93

Piden $PG=x$

Podemos notar que $\overrightarrow{PQ}$: bis.$\measuredangle CPE$, $\overrightarrow{PO}$: bis.$\measuredangle DPE$

En P: $2\alpha+2\theta=90°$

$$\rightarrow \ \alpha+\theta=45°$$

En $\triangle QHO$: $\overrightarrow{HP}$: bisectriz del $\measuredangle QHO$ y como

$m\measuredangle QPO=45°$

$\rightarrow$ P: es excentro del $\triangle QHO$

Por lo cual $PL=PG=x$ (teorema de la bisectriz de un ángulo)

$\triangle QPO$: Aplicando el teorema de Herón

$$x=\frac{2}{14}\sqrt{21(8)(7)(6)}$$

$$x=\frac{1}{7}\sqrt{21\times4\times2\times7\times3\times2}$$

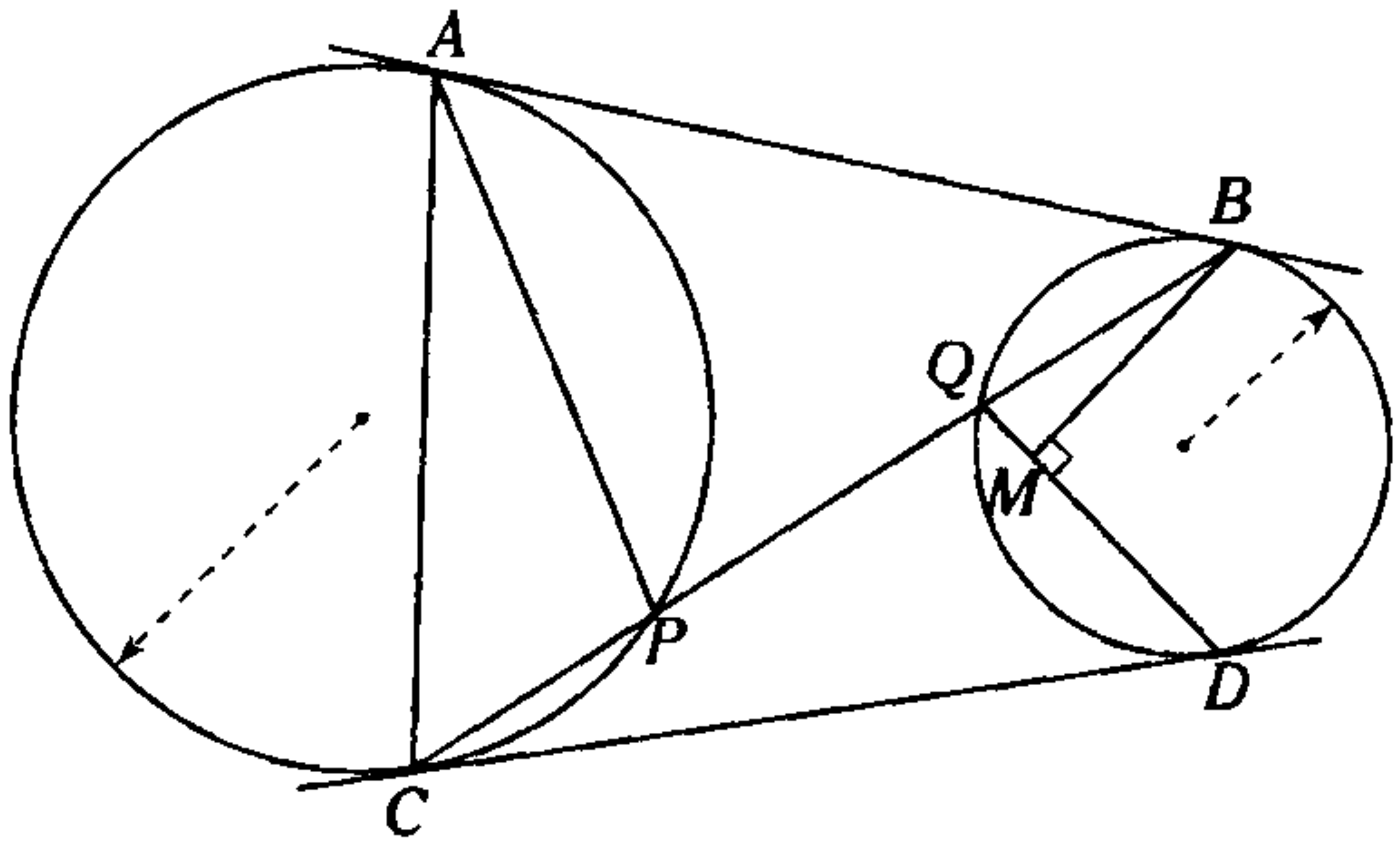
$$x=\frac{1}{7}\times21\times4$$

$$\therefore \ x=12$$

CLAVE B

Problema 18

De la figura, A, B, C y D son puntos de tangencia, $AC = 8$, $AP = 6$ y $QB = 4$. Halle BM.



A) 4 B) $\sqrt{17}$ C) $\sqrt{15}$
D) $\sqrt{19}$ E) $2\sqrt{6}$

Resolución

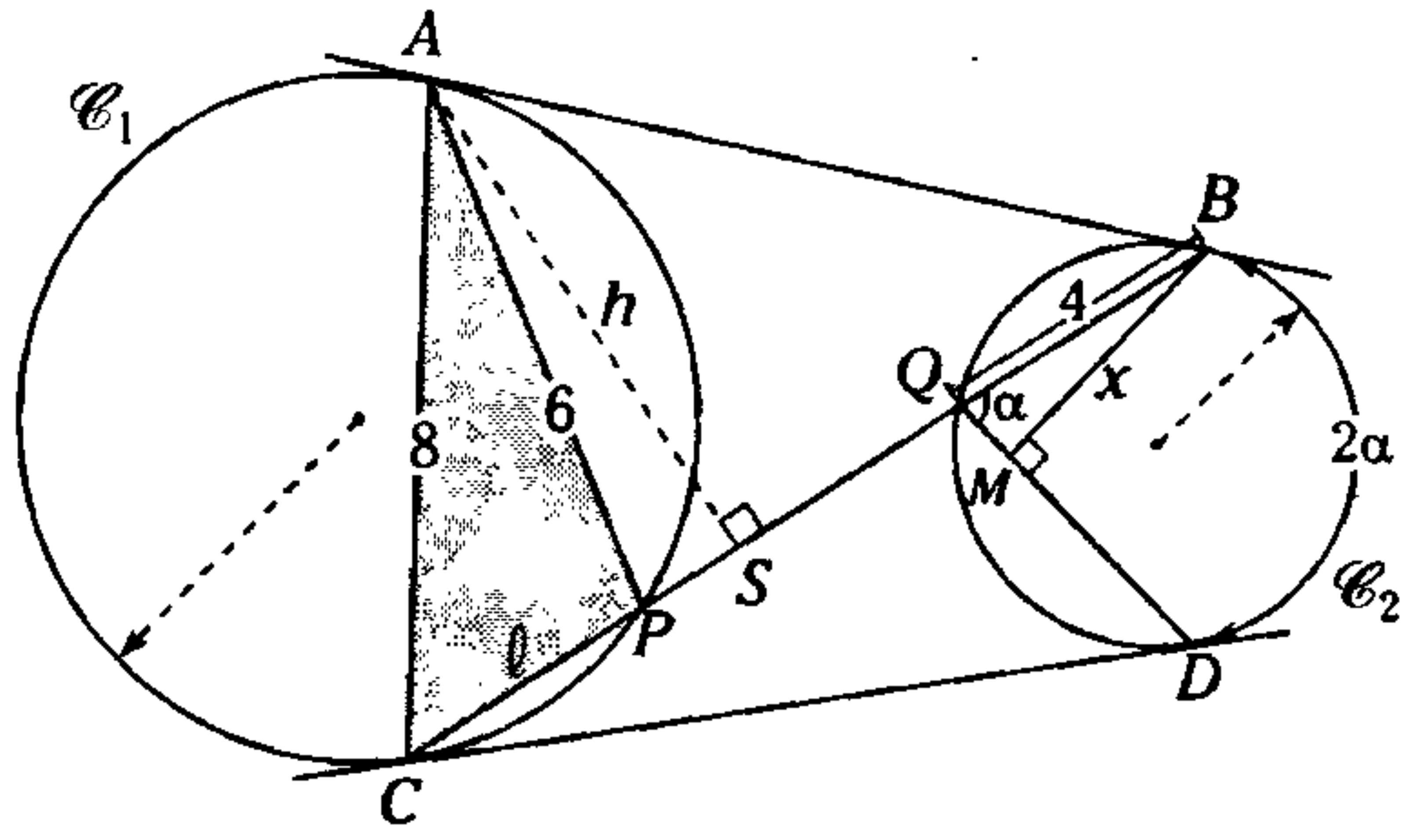


Figura 15.94

Piden $BM = x$

Se sabe $m\measuredangle APQ = m\measuredangle BQD = \alpha$

$\triangle ASP \sim \triangle BMQ$ (A.A.A.)

$$\frac{h}{x} = \frac{6}{4} \rightarrow h = \frac{3}{2}x \qquad \text{(I)}$$

$\mathscr{C}_1$: teorema de la tangente

$$(AB)^2 = (CB)(PB) \qquad \text{(II)}$$

$\mathscr{C}_2$: teorema de la tangente

$$(CD)^2 = (CB)(CQ) \qquad \text{(III)}$$

De (II) y (III), sabiendo que $AB = CD$

$$\rightarrow PB = CQ$$

$$PQ + 4 = \ell + PQ \rightarrow \ell = 4$$

$\triangle APC$: teorema de Herón

$$h = \frac{2}{4}\sqrt{\left(\frac{18}{2}\right)(1)(3)(5)}$$

De (I)

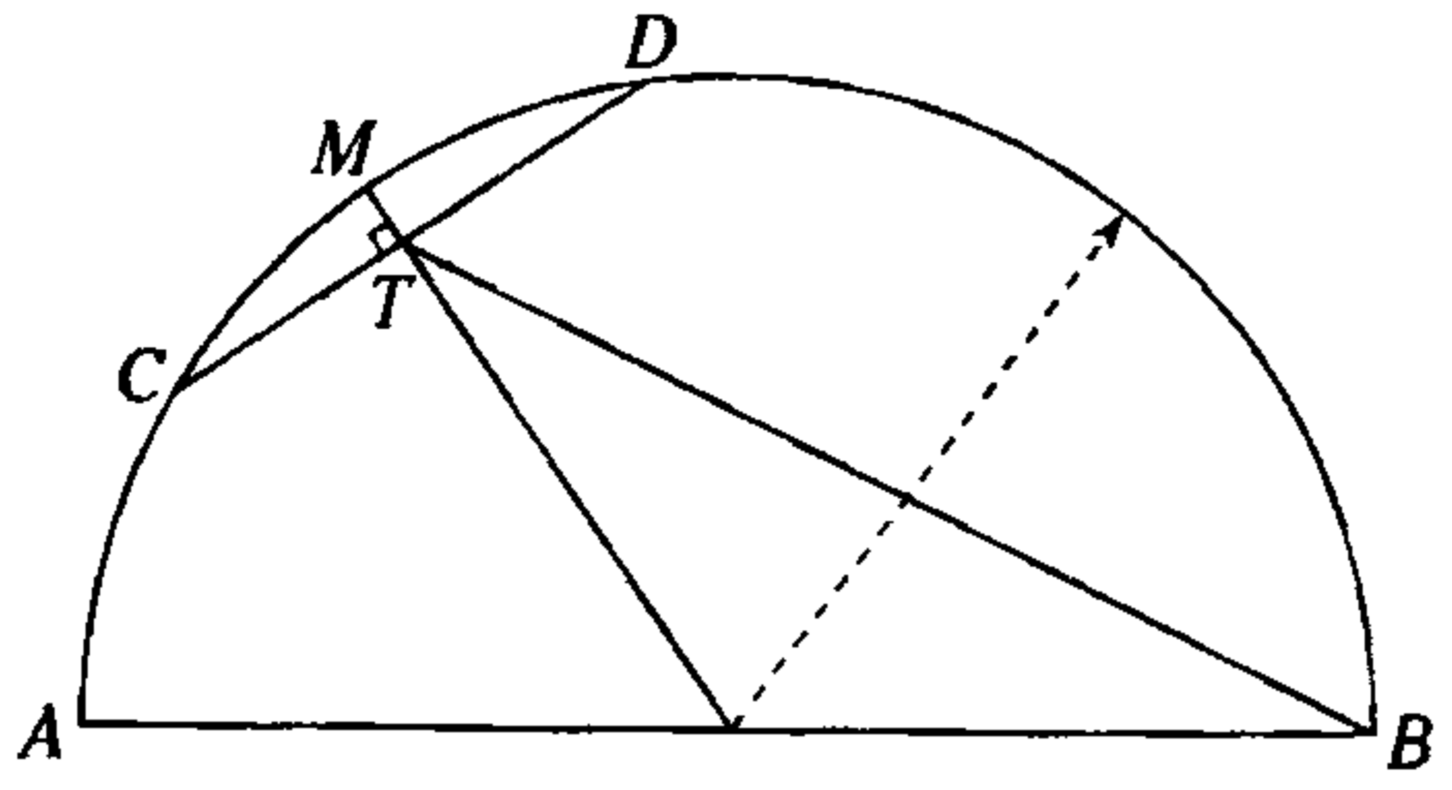
$$\frac{3}{2}x = \frac{2}{4}(3)\sqrt{15}$$

$$\therefore \; x = \sqrt{15}$$

CLAVE C

Problema 19

De la figura, $m\widehat{CM} = m\widehat{MD}$, $CD = 4$, $AB = 4\sqrt{5}$ y $(AC)^2 + (AD)^2 = 48$. Calcule TB.



A) $\sqrt{13}$ B) $2\sqrt{13}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{15}$

Resolución

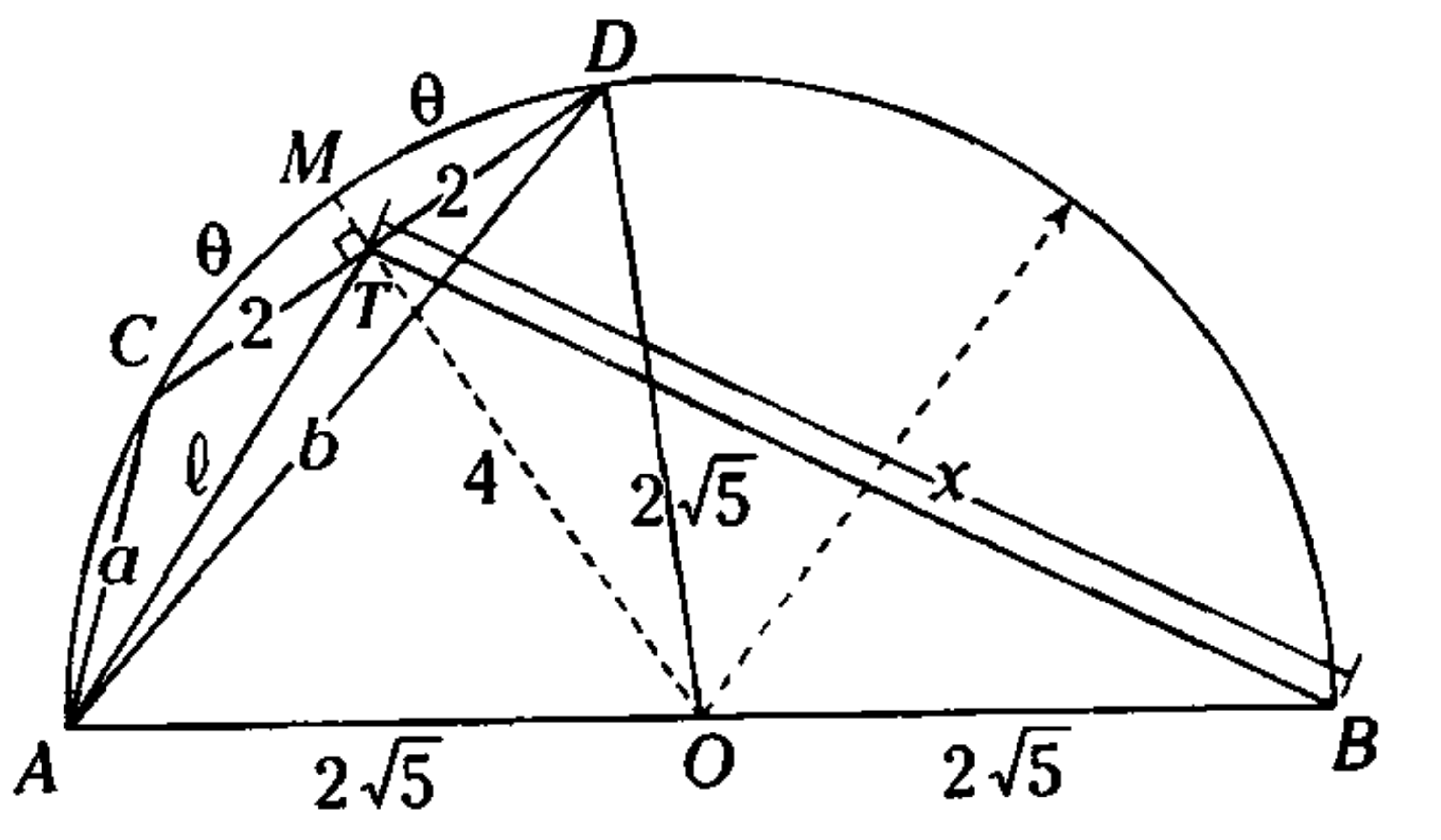


Figura 15.95

Piden $TB = x$

Dato $a^2 + b^2 = 48$

Como

$$m\widehat{CM} = m\widehat{MD} = \theta \text{ y } \overline{MT} \perp \overline{CD}$$

$$\rightarrow CT = TD = 2$$

⊾DTO: $TO = 4$

△CAD: teorema de la mediana

$$a^2 + b^2 = 2(\ell)^2 + \frac{4^2}{2}$$

Reemplazando y simplificando

$$\rightarrow 24 = \ell^2 + 4 \rightarrow \ell^2 = 20$$

△ATB: teorema de la mediana

$$x^2 + \ell^2 = 2(4)^2 + \frac{(4\sqrt{5})^2}{2}$$

$$x^2 + 20 = 32 + 40$$

$$\therefore x = 2\sqrt{13}$$

CLAVE B

Problema 20

Se tiene un triángulo ABC, inscrito en una circunferencia, luego se trazan la altura $\overline{BH}$, la cuerda BL que interseca a $\overline{AC}$ en T y la altura $\overline{CE}$ del triángulo TCL, tal que $TE = 2(EL)$, $AH = 4$, $m\widehat{AB} = m\widehat{AL}$ y $(BC)(CL) = 45$. Calcule CT.

A) 6 B) 5 C) 4
D) 3 E) 2

Resolución

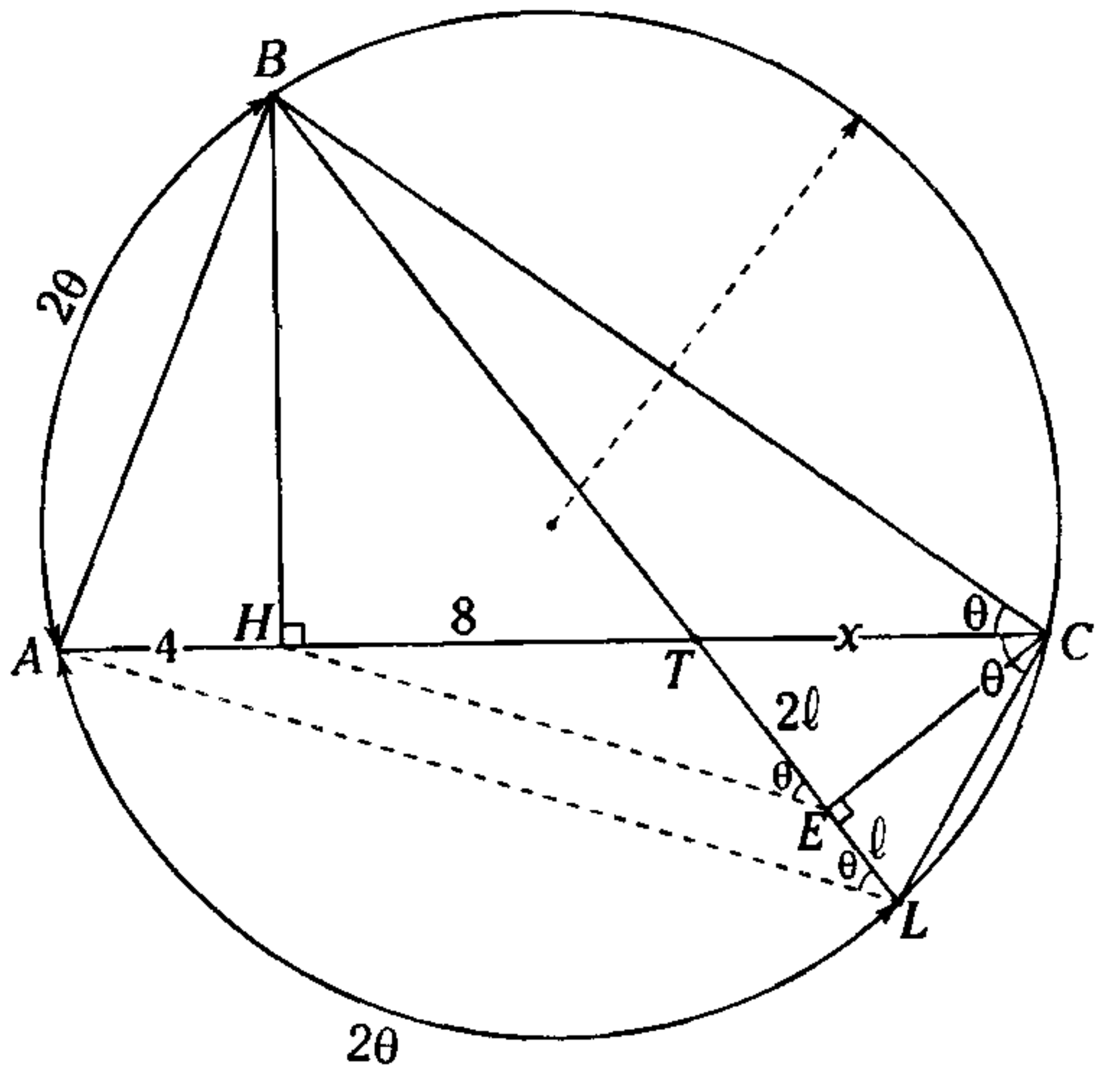


Figura 15.96

Piden $CT = x$

Datos

- $m\widehat{AB} = m\widehat{AL} = 2\theta$
- $(BC)(CL) = 45$
- $TE = 2(EL)$, sea $EL = \ell \rightarrow ET = 2\ell$

△BCL: teorema de la bisectriz interior

$$x^2 = (BC)(CL) - (BT)(TL) \qquad \text{(I)}$$

Al trazar AL: sabemos $m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle BLA = \theta$

Al trazar $\overline{HE}$: Se forma $BCEH$: ⏢ Inscriptible

Se puede notar $\overline{HE} \parallel \overline{AL}$

△ATL: Por corolario del teorema de Tales

$$\frac{HT}{4} = \frac{2\ell}{\ell} \rightarrow HT = 8$$

En la circunferencia: teorema de las cuerdas

$$x(12) = (BT)(TL)$$

Reemplazando en (I)

$$x^2 = (45) - 12x$$

$$x^2 + 12x - 45 = 0$$

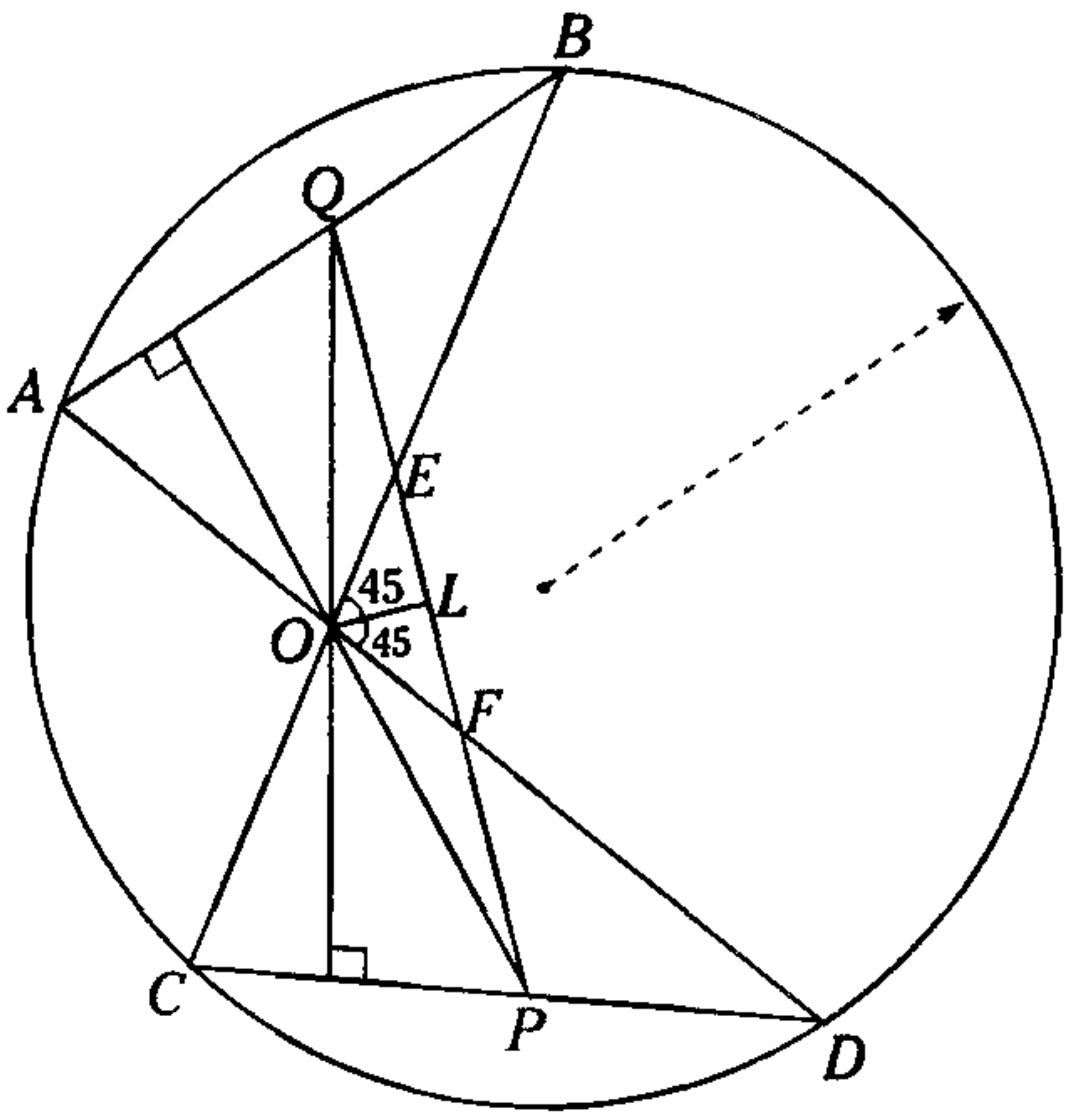
$$(x + 15)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 3$$

CLAVE D

Problema 21

En la figura, $(AB)(CD)=400$ y $(LE)(LF)=69$. Halle $(OE)(OF)+(LQ)(LP)$.



A) 178 B) 269 C) 131

D) 169 E) 231

Resolución

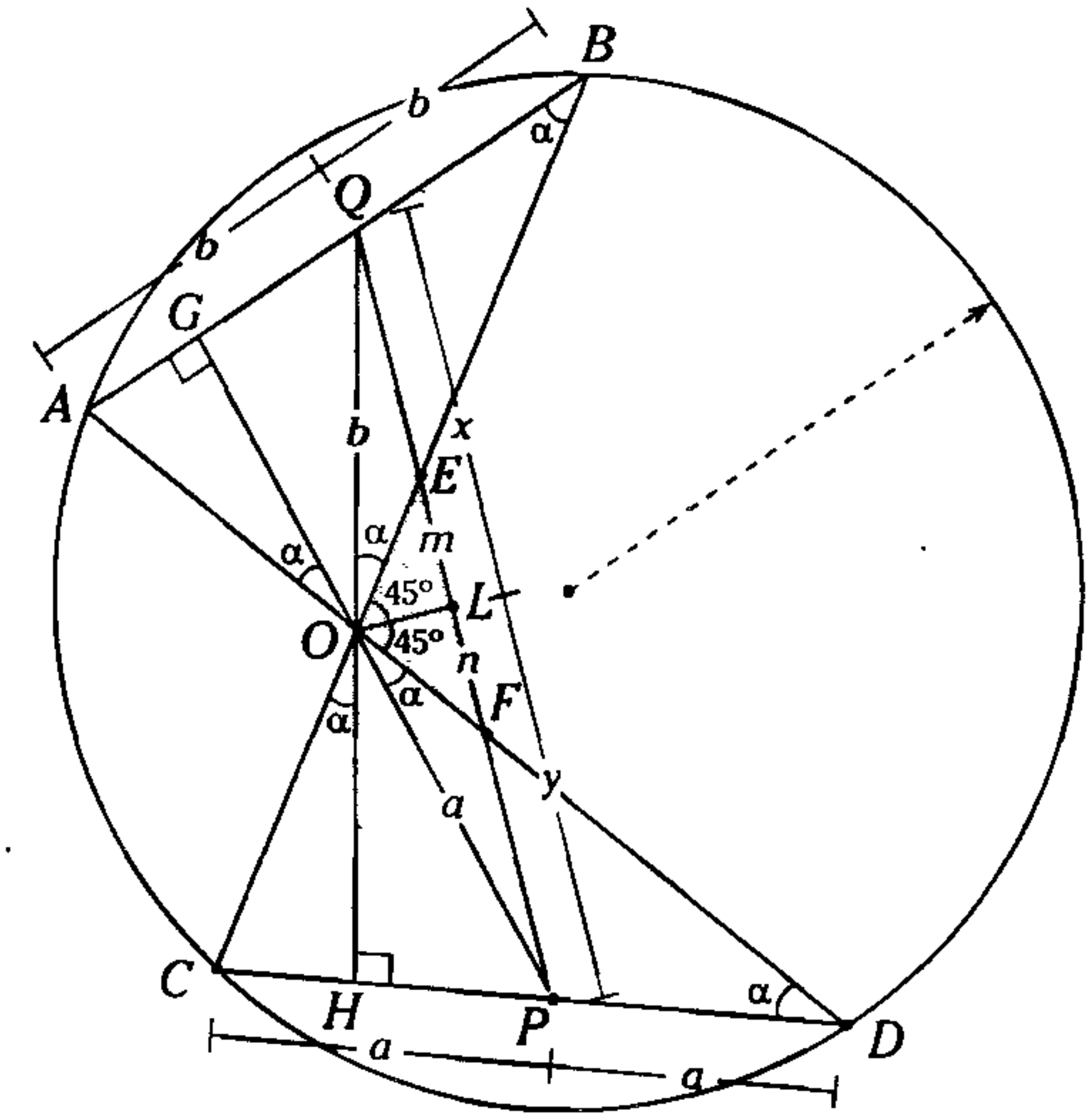


Figura 15.97

Piden $(OE)(OF)+(LQ)(LP)$

Datos

$(AB)(CD)=400$

$(2a)(2b)=400$

$\rightarrow\ ab=100$

$(LE).(LF)=69$

$\rightarrow\ m.n=69$

Sea $m\sphericalangle ABC=\alpha$

$\rightarrow\ m\sphericalangle ADC=\alpha$

⊾COD: $m\sphericalangle COH=m\sphericalangle ODC=\alpha$

⊾AOB: $m\sphericalangle AOG=m\sphericalangle ABO=\alpha$

Entonces podemos notar que $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son medianas relativas a las hipotenusas de los triángulos rectángulos COD y AOB.

$\triangle QOP$: por el teorema del cálculo de la bisectriz interior

$$(OL)^2=(OQ)(OP)-xy \qquad \text{(I)}$$

$\triangle EOF$: por el teorema del cálculo de la bisectriz interior

$$(OL)^2=(OE)(OF)-mn \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I) y (II)

$(OQ)(OP)-xy=(OE)(OF)-mn$

$\rightarrow\ (OQ)(OP)+mn=(OE)(OF)+xy$

De la figura $OQ=a$ y $OP=b$

$\rightarrow\ ab+mn=(OE)(OF)+xy$

$100+69=(OE)(OF)+xy$

Pero de la figura se tiene $x.y=(LQ)(LP)$

$\therefore\ (OE)(OF)+(LQ)(LP)=169$

CLAVE D

1. **Las mellizas de Arquímedes**
Sin duda uno de los problemas más interesantes de las relaciones métricas en triángulos oblicuángulos es el planteado por Arquímedes (287 - 212 a.n.e.), nacido en Siracusa en la Isla de Sicilia.

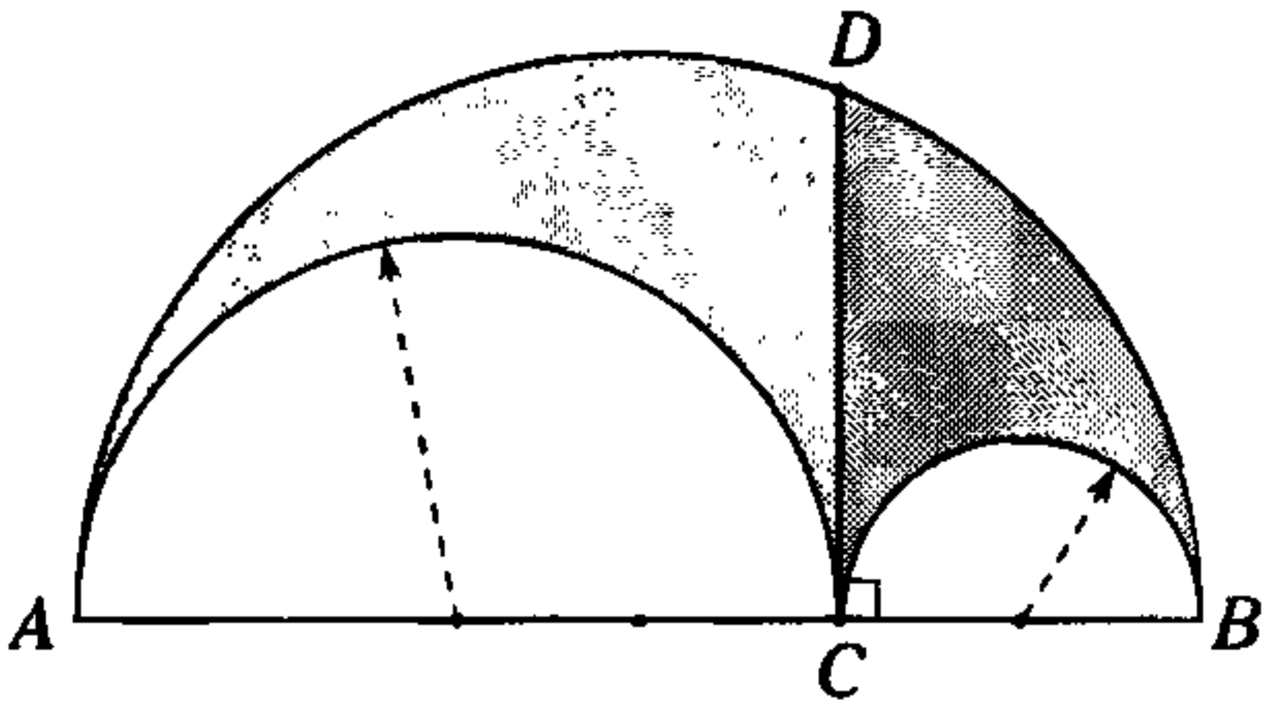


Figura (a)

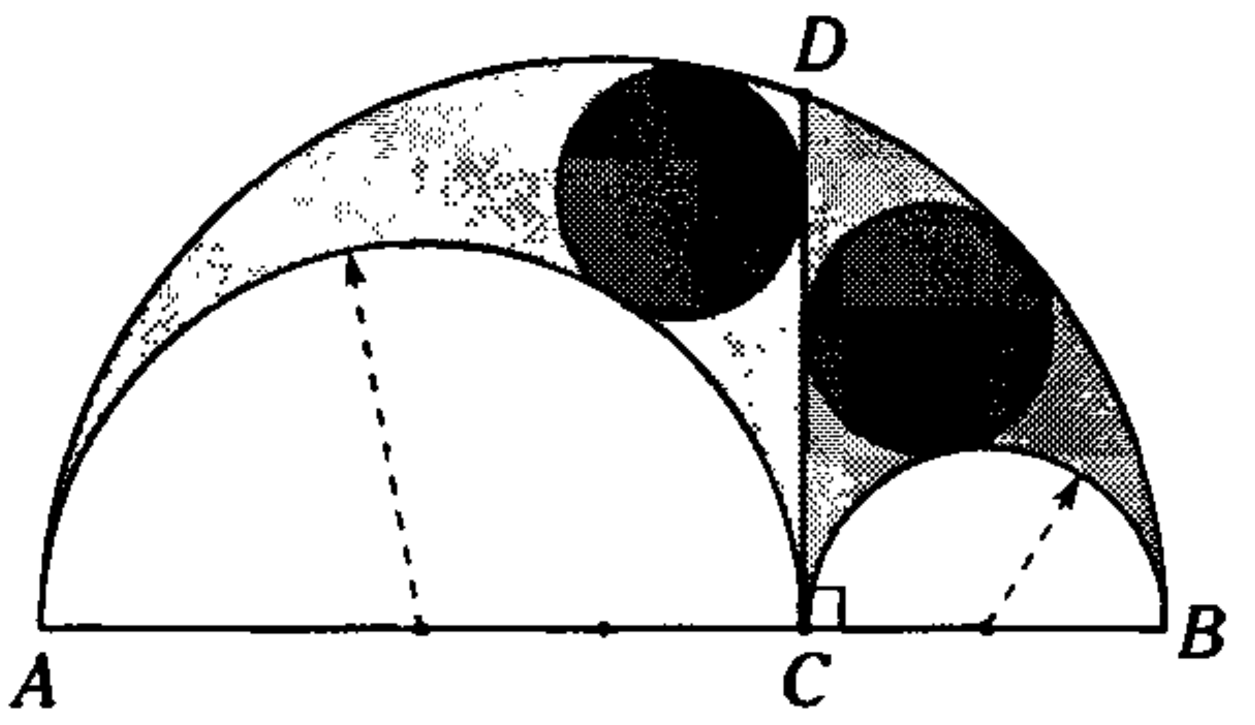
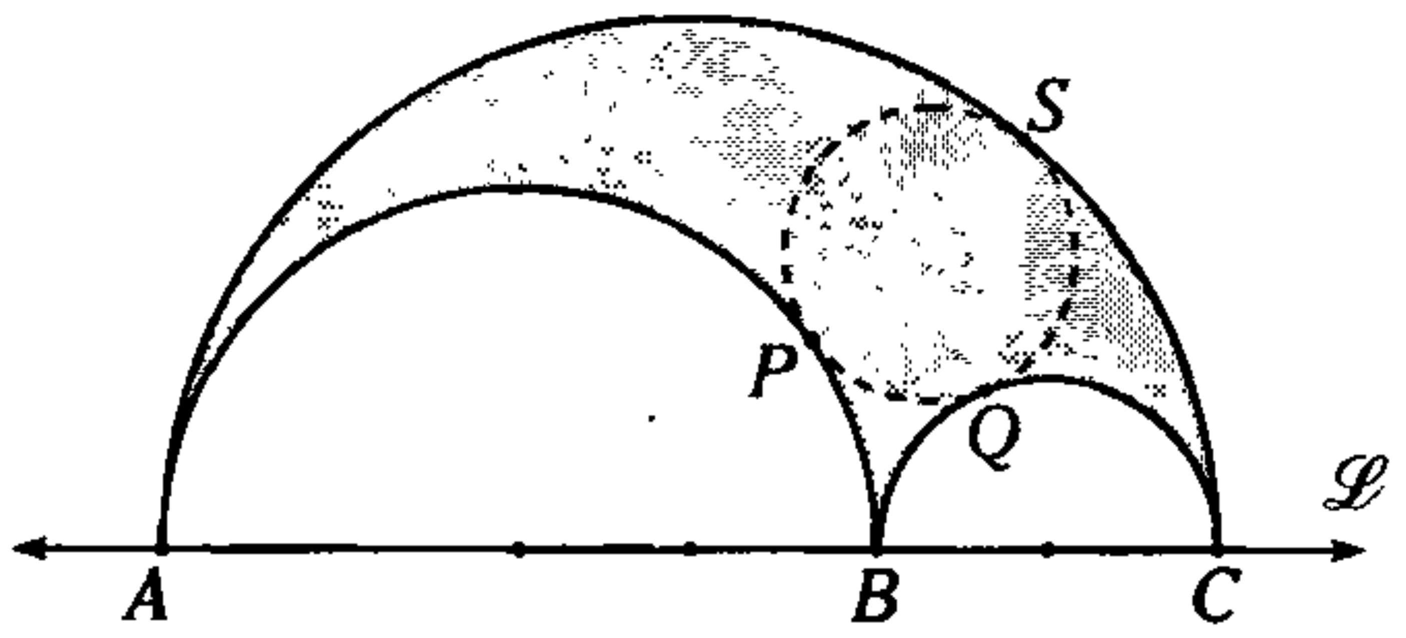


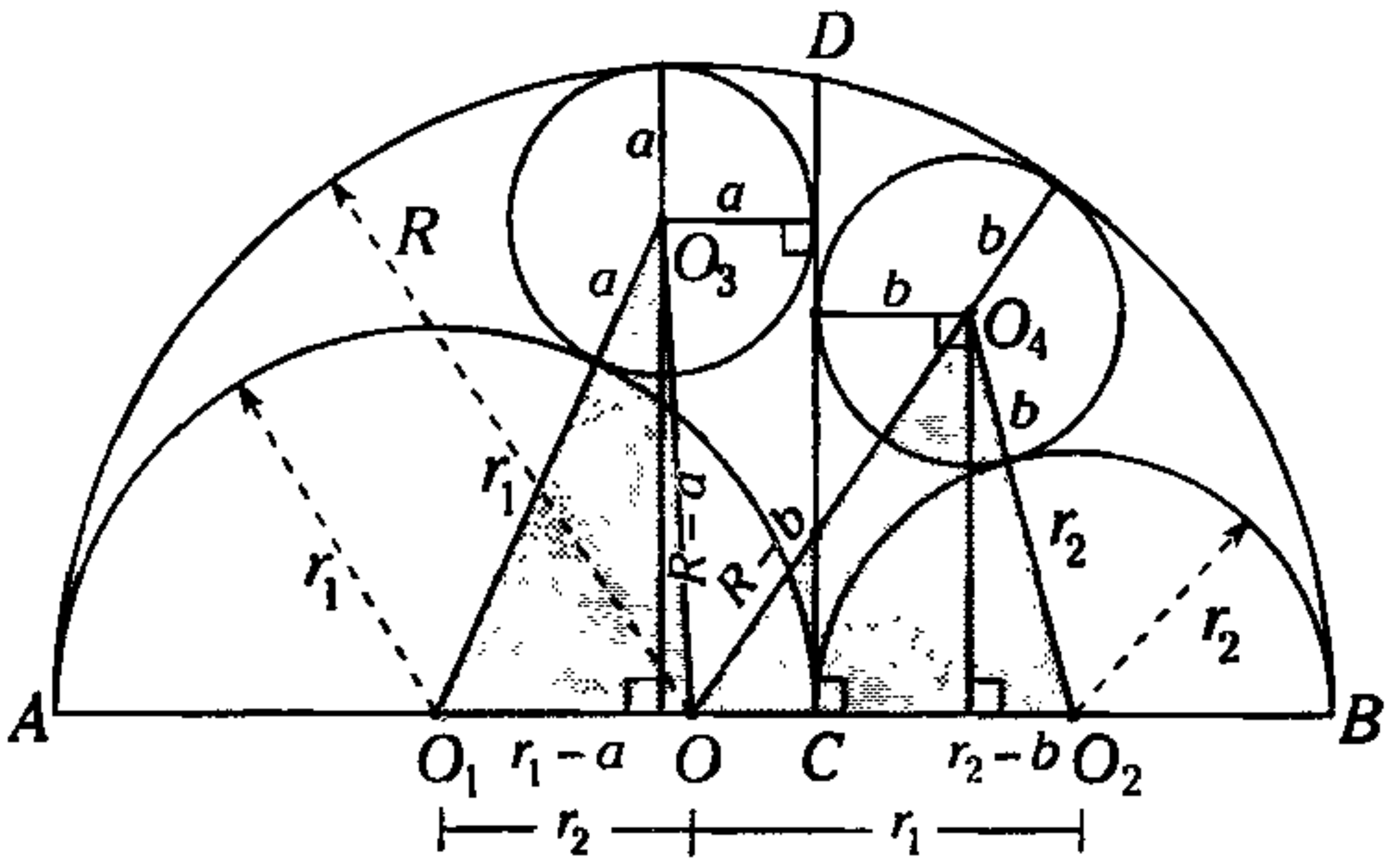
Figura (b)

Para todo el punto D de la semicircunferencia, como se muestra en la figura (a). Al trazar $\overline{DC}$ perpendicular a $\overline{AB}$, ($\overline{AB}$: Diámetro) y trazar semicircunferencias con diámetro $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ respectivamente. Las circunferencias inscritas en los triángulos mixtilineos ADC y BDC son congruentes a los cuales se les llama los círculos mellizos de Arquímedes. figura (b)
¿Podrías demostrar lo planteado por Arquímedes?

2. En una recta donde se ubican los puntos A, B y C, se trazan las semicircunferencias de diámetros AB, BC y AC hacia un mismo semiplano, determinando un triángulo curvilíneo ABC (árbelos) como el mostrado en la figura. Construya con regla y compás los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el triángulo curvilíneo ABC.



Resolución 1



Sea D un punto cualquiera de la semicircunferencia y sea $AC = 2r_1$ y $CB = 2r_2$, entonces $AB = 2R = 2r_1 + 2r_2$,
por lo tanto $R = r_1 + r_2$,
luego en los triángulos OO_1O_3 y OO_2O_4
al aplicar el teorema de Euclides en los triángulos O_1O_3O y OO_4O_2 respectivamente tenemos

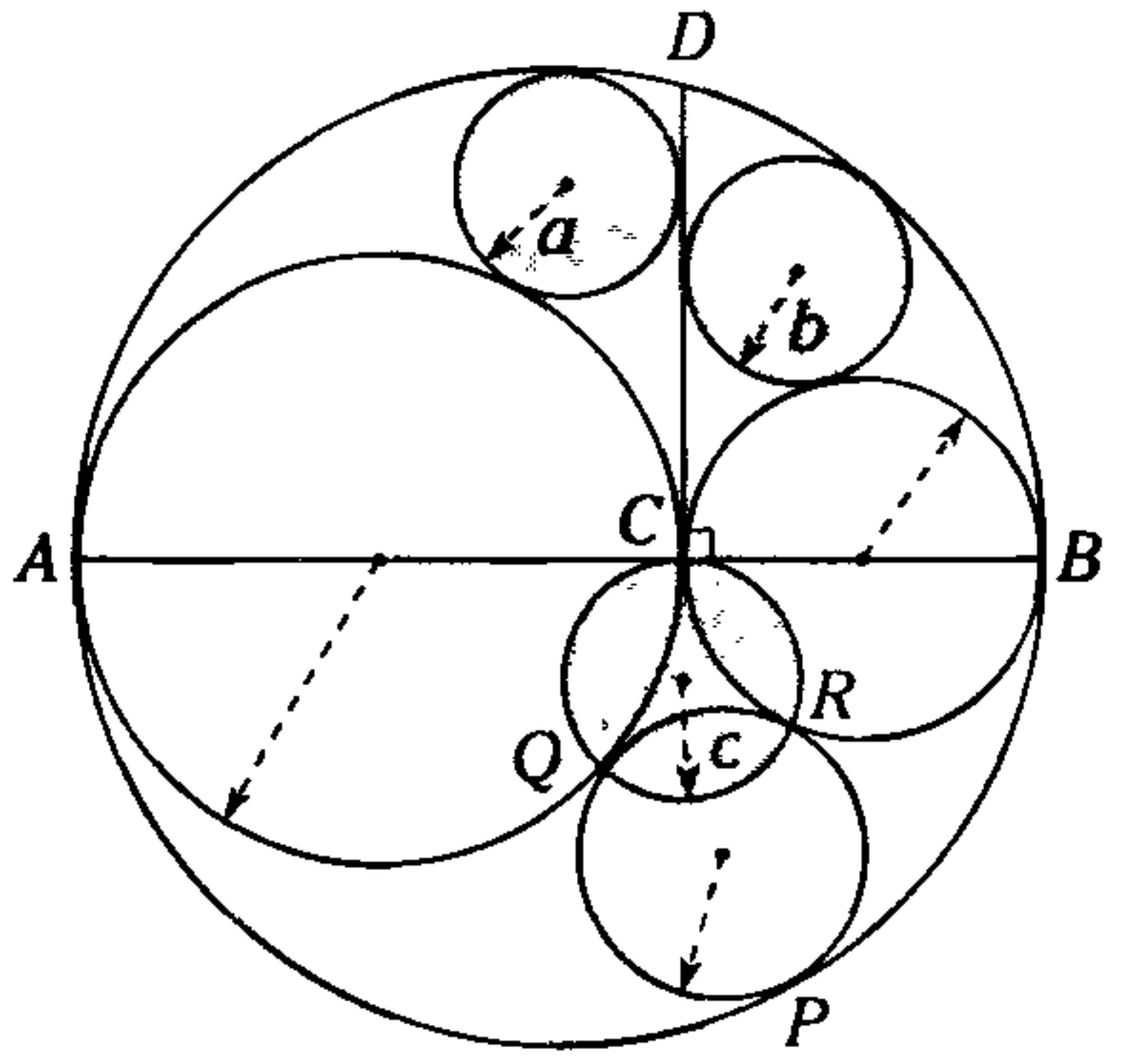
$$(R-a)^2 = (r_1 + a)^2 + r_2^2 - 2(r_1 - a)r_2 \text{ y}$$
$$(R-b)^2 = (r_2 + b)^2 + r_1^2 - 2(r_2 - b)r_1$$

Como $R = r_1 + r_2$ al reemplazar en las ecuaciones anteriores y operando encontraremos que $a = b$.

Por lo tanto, independientemente de la ubicación de D siempre y cuando pertenezca al $\overset{\frown}{AC}$ la circunferencia inscrita en los triángulos mixtilíneos ADC y BDC son congruentes.

El inicio de una familia numerosa

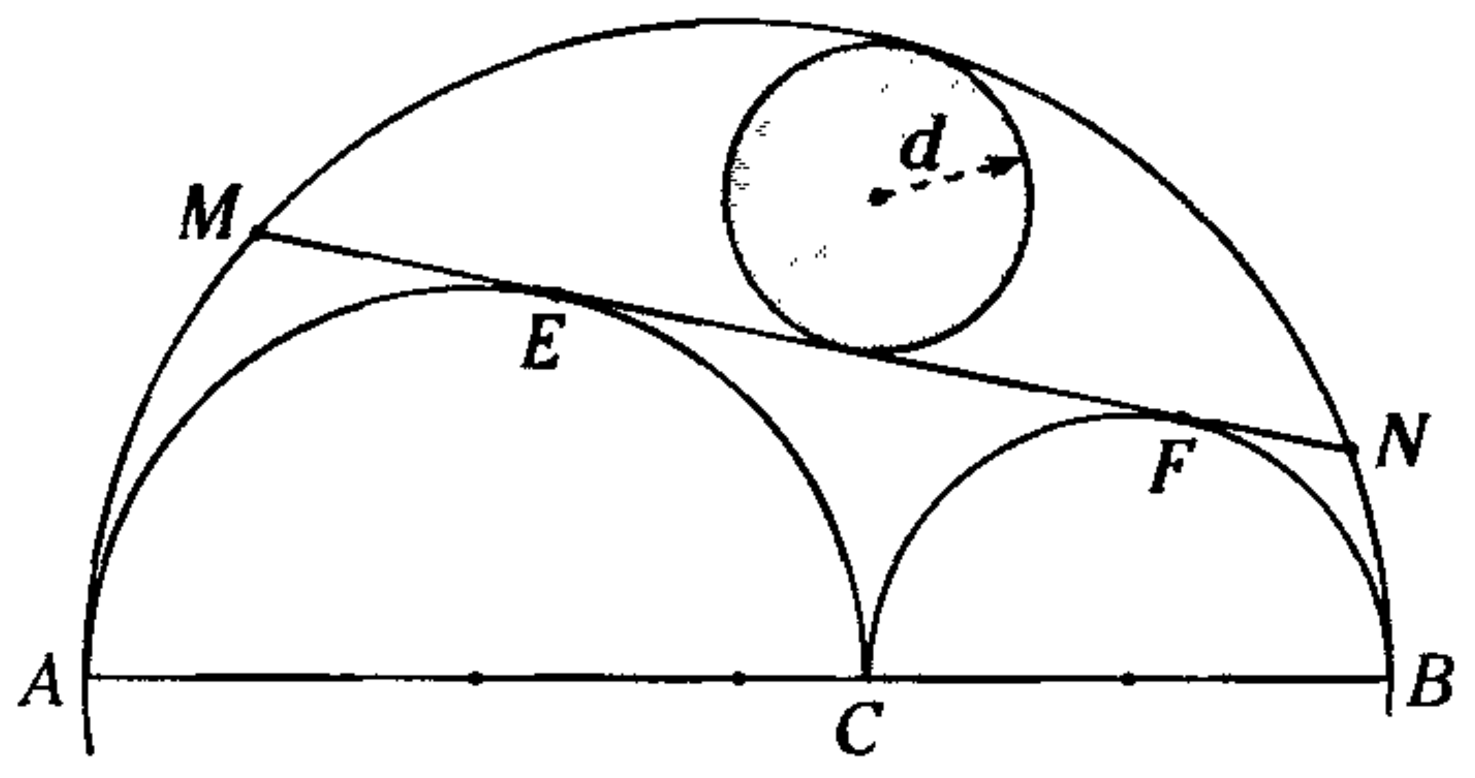
En 1974, Leon Bankoff publicó en el *Mathematics Magazine* un artículo titulado "¿Son realmente mellizos los círculos de Arquímedes?" El título estaba justificado: Bankoff encontró un tercer círculo relacionado con el árbelos que tenía el mismo radio que los dos primeros. He aquí la figura.



Si se completará las circunferencias y se trazara una circunferencia tangente a las anteriores en P, Q y R respectivamente, entonces la circunferencia que pasa por C, Q y R es también congruente con las dos del caso anterior.

En la misma revista en 1999, se publicó un extenso artículo titulado *Esos ubicuos círculos arquimedianos* de cuatro autores Dodge, Schoch, Woo y Xiu, en el que se incluye una demostración de que el radio de ese tercer círculo coincide con los de los dos primeros, con lo cual ya tendríamos **trillizos**.

La familia de círculos de Arquímides ha aumentado espectacularmente. Bankoff encontró pronto un cuatrillizo.



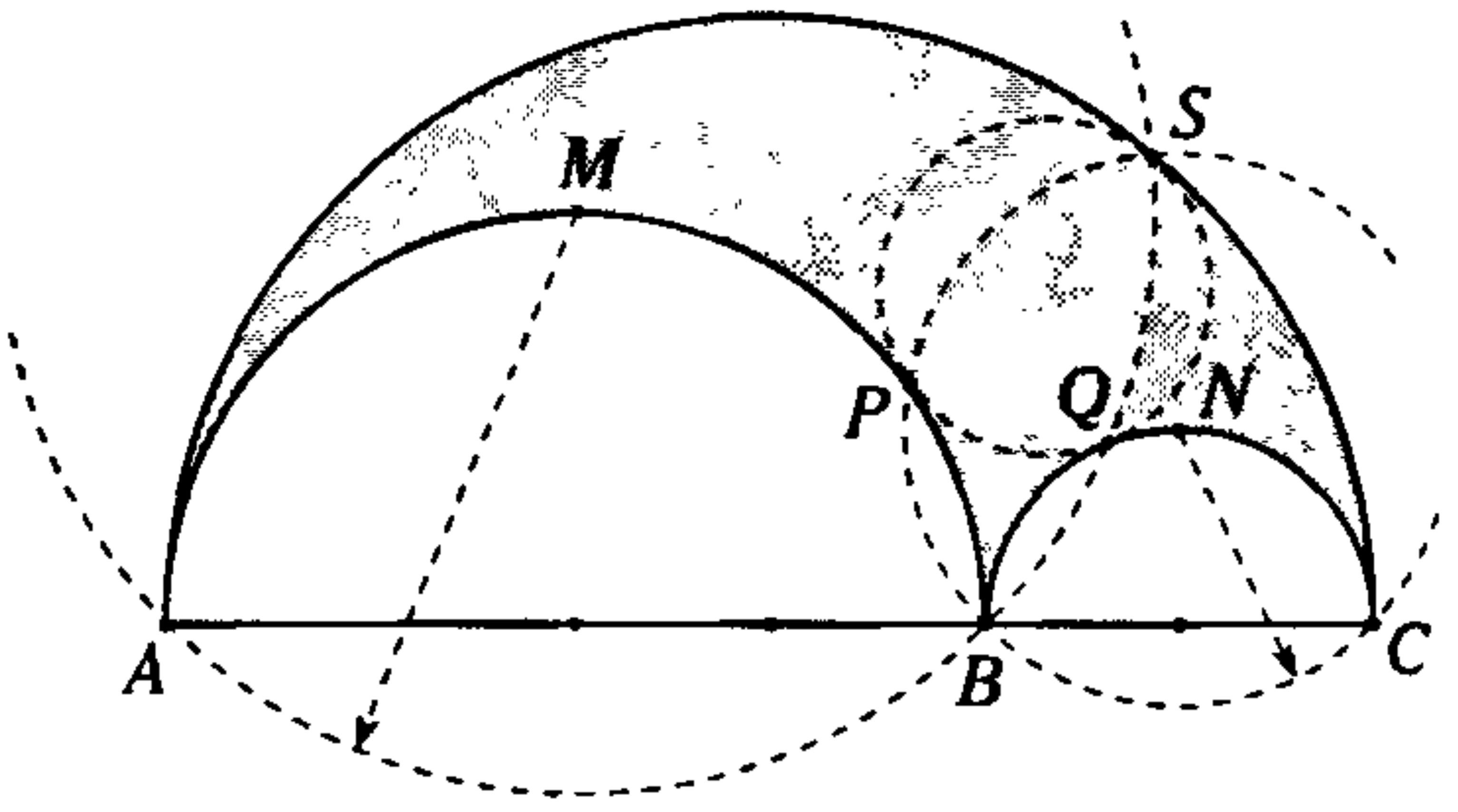
Si E y F son puntos de tangencia, $d = a = b = c$

d: radio del círculo máximo inscrito en el segmento circular MN.

A partir del cuatrillizo han seguido apareciendo nuevos círculos notables, hasta formar una familia infinita. En el artículo del *Mathematics Magazine* de 1999 citado en la bibliografía se encuentran descritos muchos de ellos.

Resolución 2

Leon Bankoff encontró un procedimiento muy ingenioso para encontrar (con el compás) los puntos de tangencia del círculo inscrito en el árbelos con los arcos que lo forman.



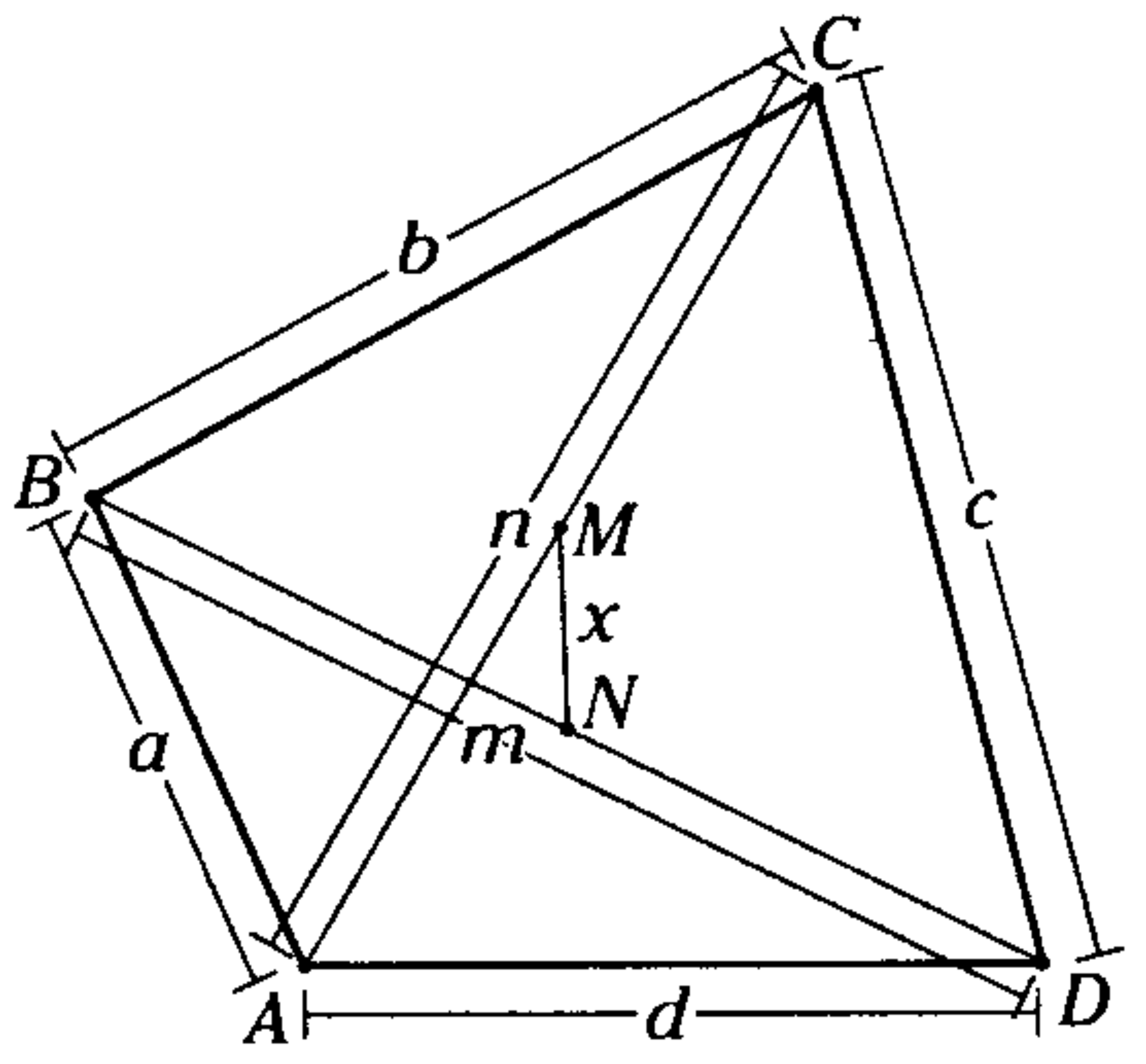
Circunferencias $ABQS$ y $CBPS$ de centros M y N respectivamente. Si M y N son los puntos medios de los arcos AB y BC, con centro en M y radio MA se traza una circunferencia que pasa por A, B, Q y S con centro en N y radio NC se traza otra circunferencia que pasa por C, B, P y S. Los tres puntos de tangencia buscados son P, Q y S.

El círculo inscrito en el árbelos es el circunscrito a PQS.

RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

TEOREMA DE EULER

En todo cuadrilátero, la suma de los cuadrados de las longitudes de sus cuatro lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus diagonales mas cuatro veces el cuadrado de la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.



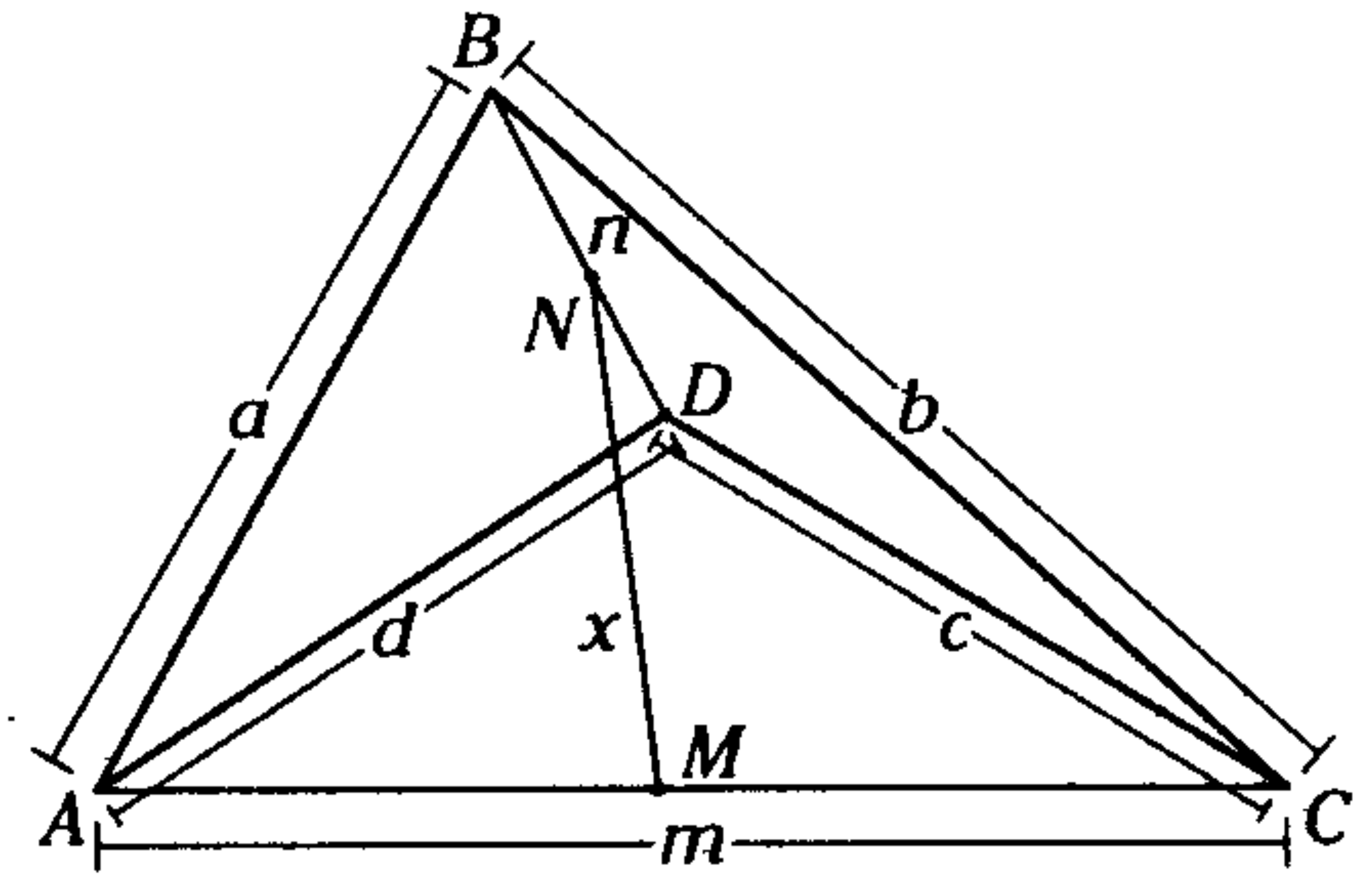
(a)

En la figura 15.98(a) , ◻ABCD: convexo.

Si *M* y *N* son puntos medios de las diagonales *AC* y *BD* respectivamente.

Se cumple

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2 + 4x^2$$



(b)

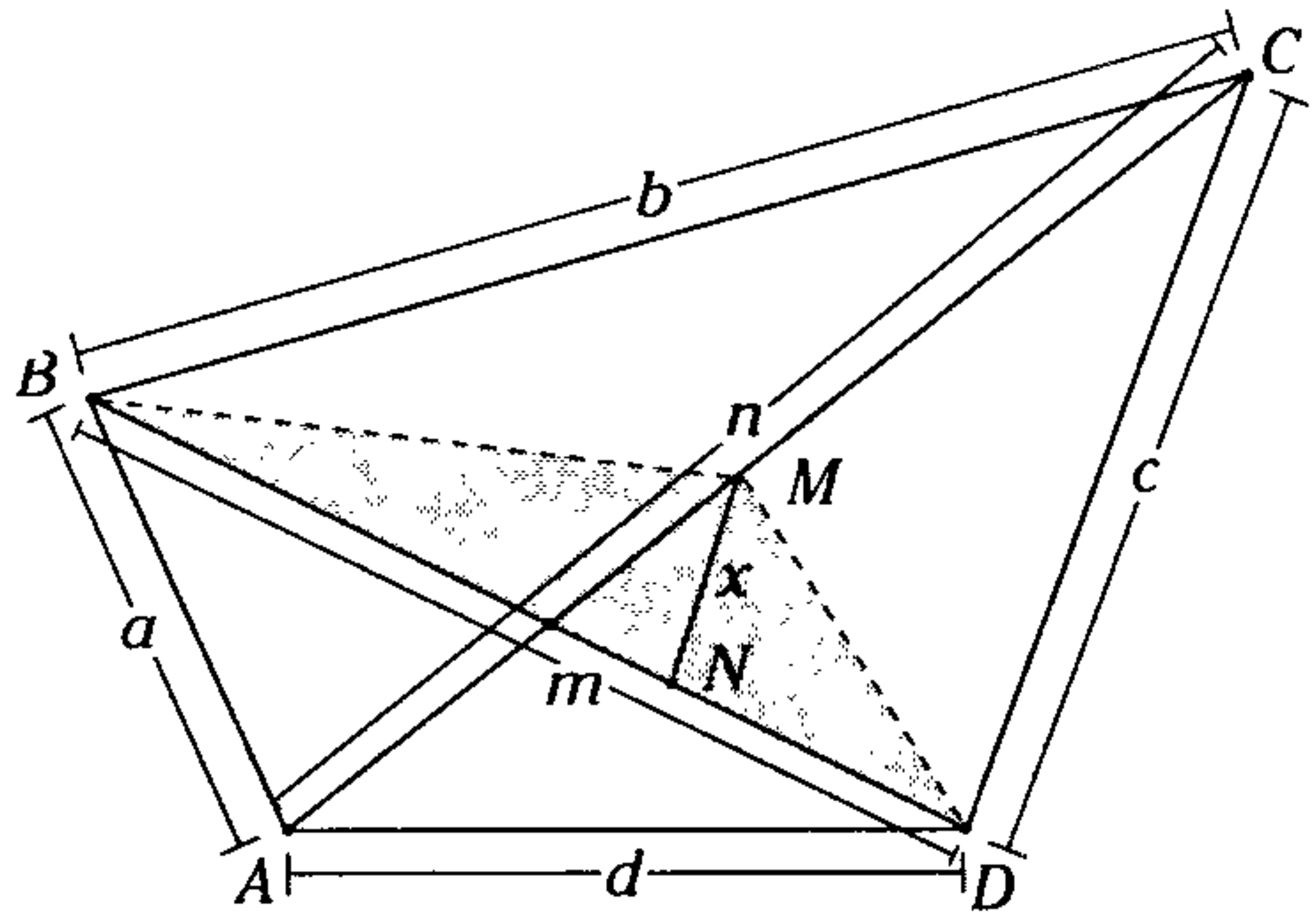
En la figura 15.98(b), ◻ABCD: no convexo.

Si *M* y *N* son puntos medios de las diagonales *AC* y *BD* respectivamente.

Se cumple

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2 + 4x^2$$

Demostración



(c)

Figura 15.98

Por el teorema de la mediana

$$\triangle ABC: a^2 + b^2 = 2(BM)^2 + \frac{n^2}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$\triangle ACD: c^2 + d^2 = 2(DM)^2 + \frac{n^2}{2} \qquad \text{(II)}$$

Sumando (I) y (II)

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2((MB)^2 + (DM)^2) + n^2 \quad \text{(III)}$$

Por teorema de la mediana

$$\triangle BMD: (BM)^2 + (DM)^2 = 2x^2 + \frac{m^2}{2} \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazando (IV) en (III)

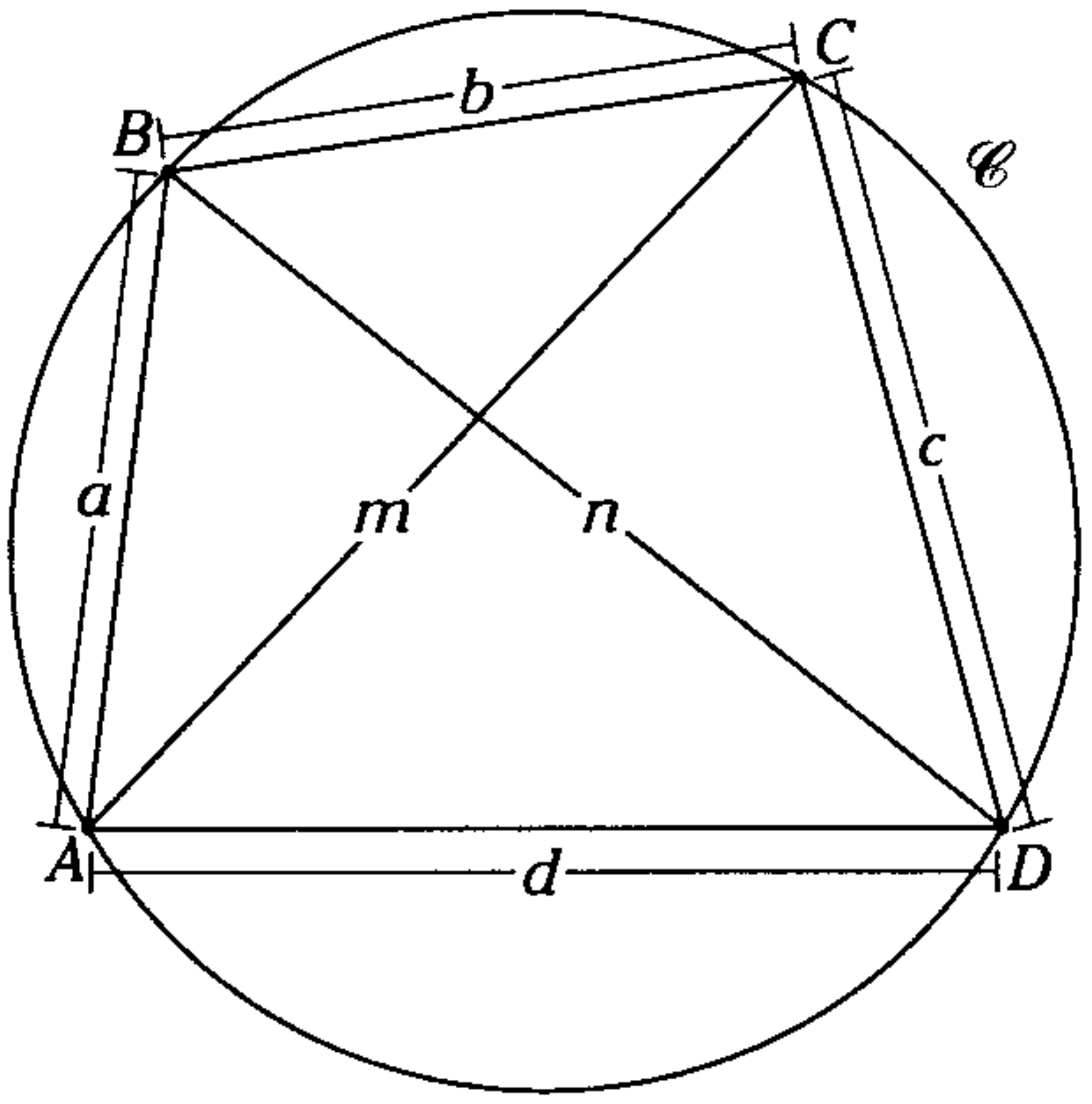
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(2x^2 + \frac{m^2}{2}) + n^2$$

$$\therefore \quad \boxed{a^2 + b^2 + c^2 + d = m^2 + n^2 + 4x^2}$$

- Para el caso de cuadrilátero no convexo, la demostración es análoga.

TEOREMA DE PTOLOMEO

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible, el producto de las longitudes de sus diagonales es igual a la suma de los productos de las longitudes de sus lados opuestos.



(a)

$\square ABCD$: inscrito en la circunferencia $\mathscr{C}$

$AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $AD = d$

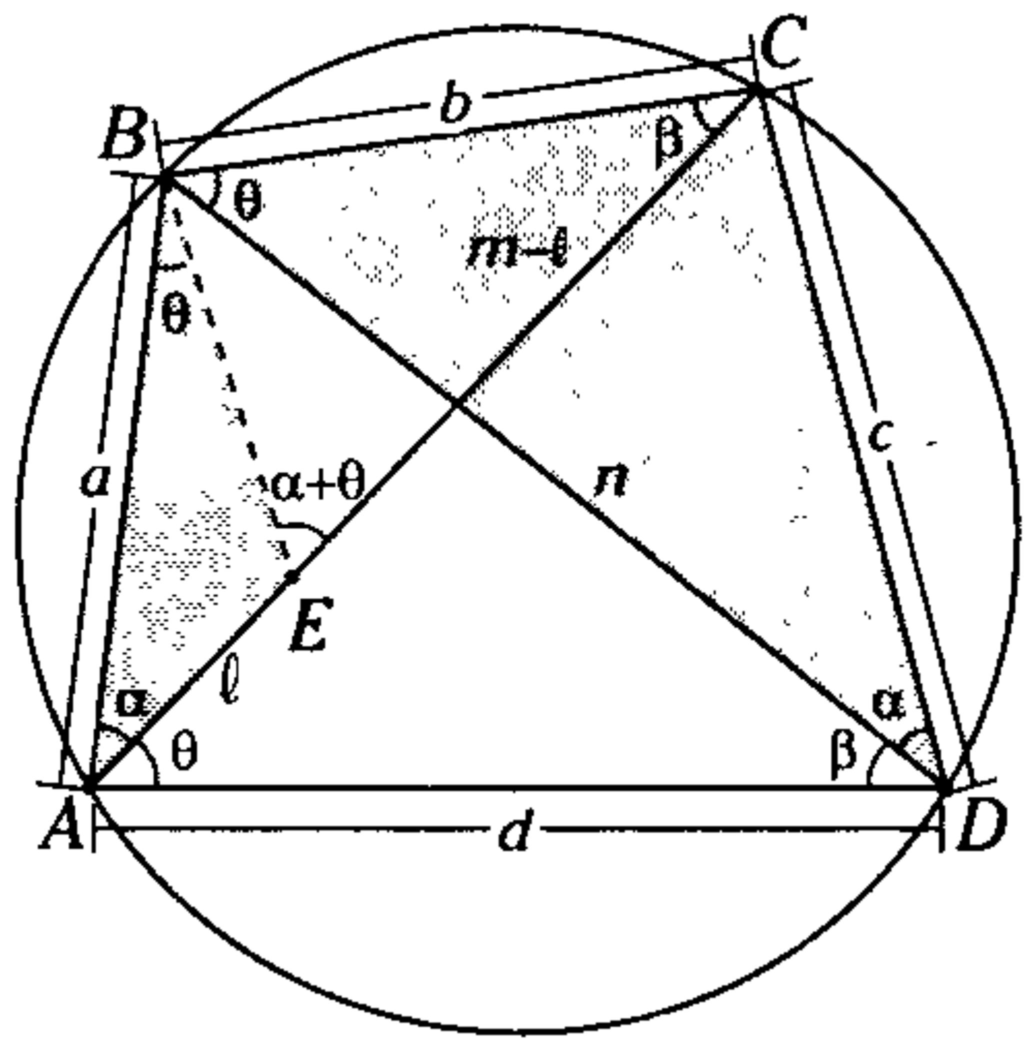
$AC = m$ y $BD = n$

Se cumple

$$\boxed{m.n = a.c + b.d}$$

Demostración

De las diversas demostraciones de este teorema existentes en la bibliografía, damos la siguiente, incluida en el libro *Modern College Geometry*, de David R. Davis, Addison-Wesley, 1949.



(b)

Trazamos $\overline{BE}$; tal que m$\measuredangle ABE$ = m$\measuredangle DBC = \theta$

Si $AE = \ell \;\rightarrow\; EC = m - \ell$

$\triangle ABE \sim \triangle DBC$ (A.A.A.)

$$\frac{\ell}{c} = \frac{a}{n} \;\rightarrow\; a.c = n.\ell \qquad \text{(I)}$$

$\triangle EBC \sim \triangle ABD$ (A.A.A.)

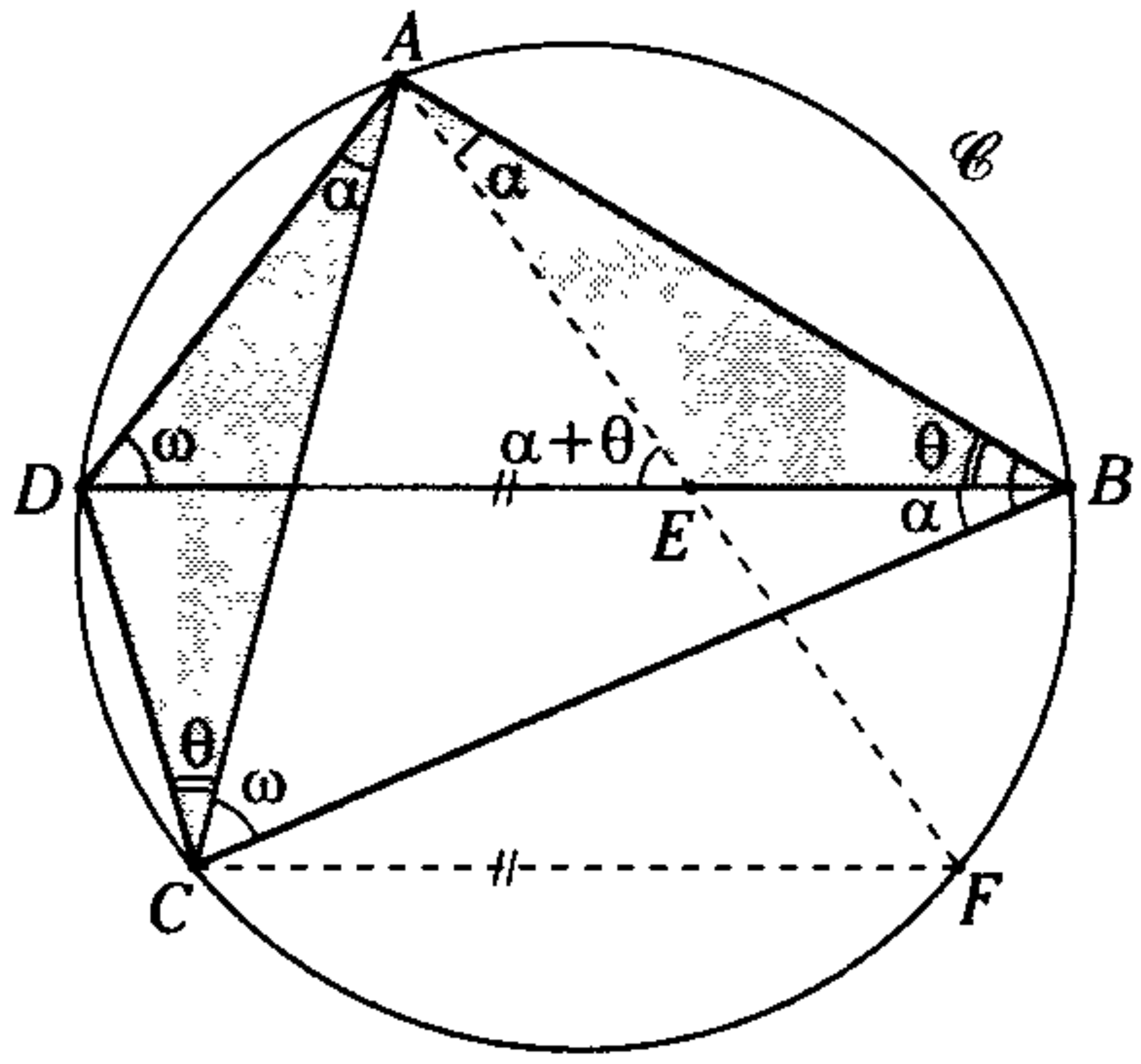
$$\frac{b}{n} = \frac{m-\ell}{d} \;\rightarrow\; b.d = n(m - \ell) \qquad \text{(II)}$$

Sumando (I) y (II)

$$a.c + b.d = n.\ell + n.m - n.\ell$$

$$\therefore \quad \boxed{m.n = a.c + b.d}$$

Otro método de la demostración del teorema de Ptolomeo



(c)

Figura 15.99

Sea $ABCD$ el cuadrilátero inscrito en $\mathscr{C}$. Trazamos el segmento CF de manera que $\overline{CF}//\overline{DB}$. Entonces los triángulos ABE y ACD son semejantes y

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{DC} \rightarrow AB\,.\,DC = AC\,.\,BE \qquad \text{(I)}$$

También son semejantes los triángulos ADE y ACB

$$\frac{AD}{AC}=\frac{ED}{CB} \rightarrow DA\,.\,DC = AC\,.\,ED \qquad \text{(II)}$$

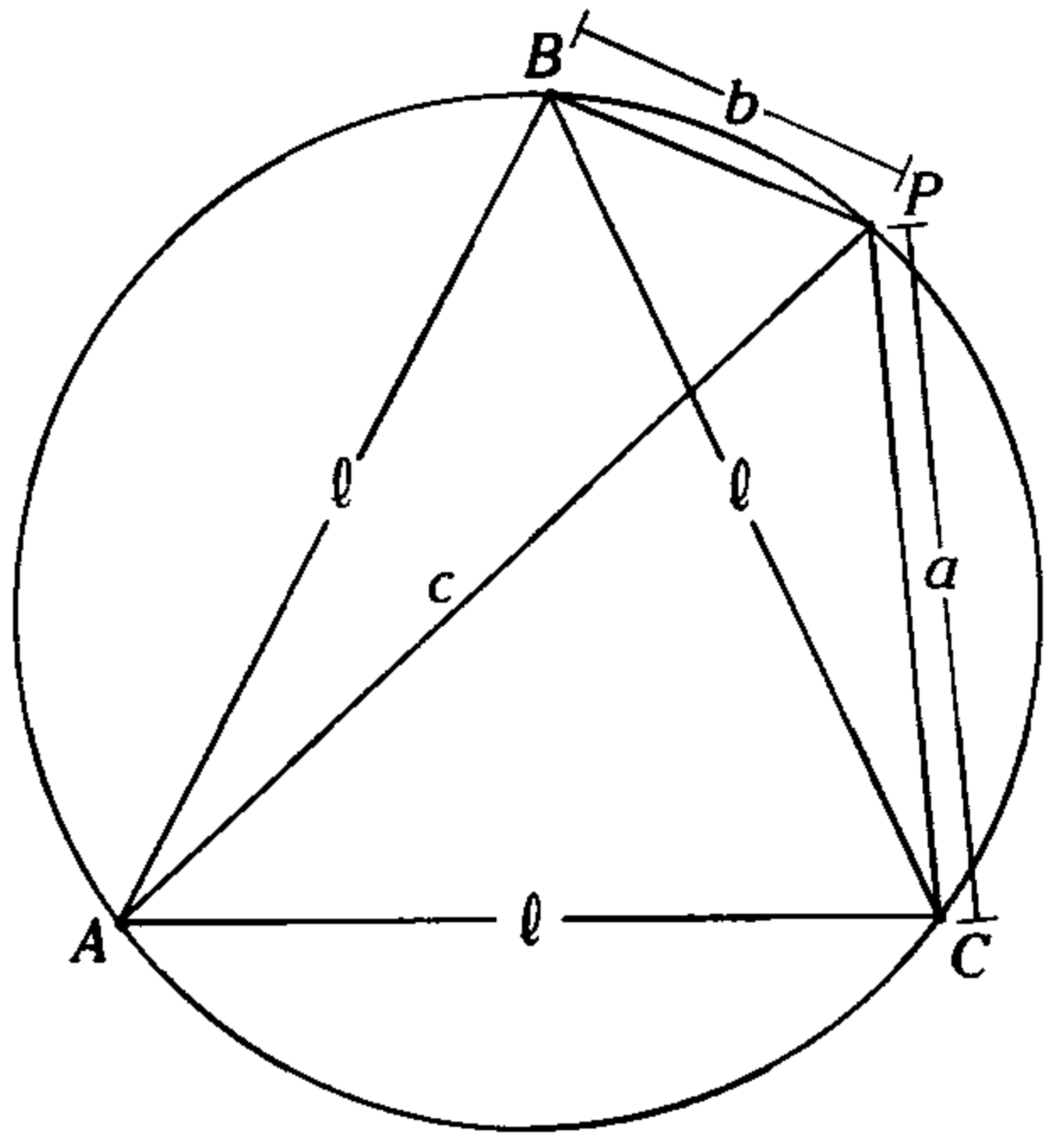
Sumando miembro a miembro (I) y (II) obtenemos

$$AB.DC + DA.CB = AC(BE+ED) = AC.BD$$

$$\rightarrow AC.BD = AB.CD + AD.BC$$

TEOREMA DE CHADÚ

En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia o inscriptible, tal que tres vértices son los vértices de un triángulo equilátero, entonces la distancia del cuarto vértice al vértice más alejado es igual a la suma de las distancias de este a los otros dos vértices del triángulo equilátero.



(a)

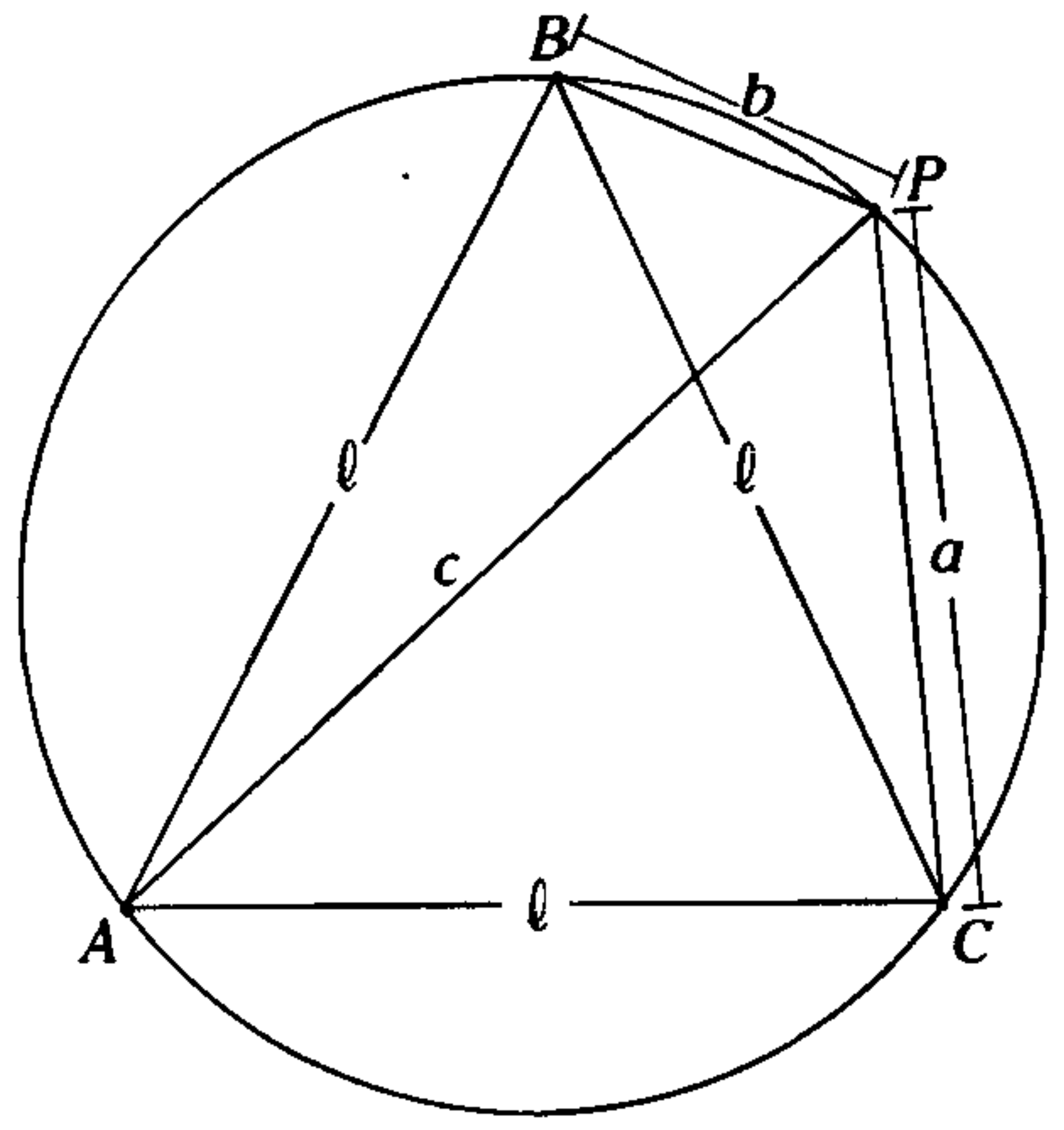
A, B y C son vértices del triángulo equilátero ABC y P el cuarto vértice del cuadrilátero inscrito $CABP$.

Se cumple que

$$PA = PC + PB$$

$$\rightarrow \boxed{c = a + b}$$

Demostración



(b)

Figura 15.100

En el cuadrilátero inscrito $ABPC$: del teorema de Ptolomeo

$$c\,.\,\ell = a\,.\,\ell + b\,.\,\ell$$

Cancelando ℓ

Luego

$$\therefore \boxed{c = a + b}$$

Teorema

El cuadrado de la longitud del lado de un triángulo equilátero es igual a la semisuma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera de su circunferencia circunscrita, a los vértices de dicho triángulo.

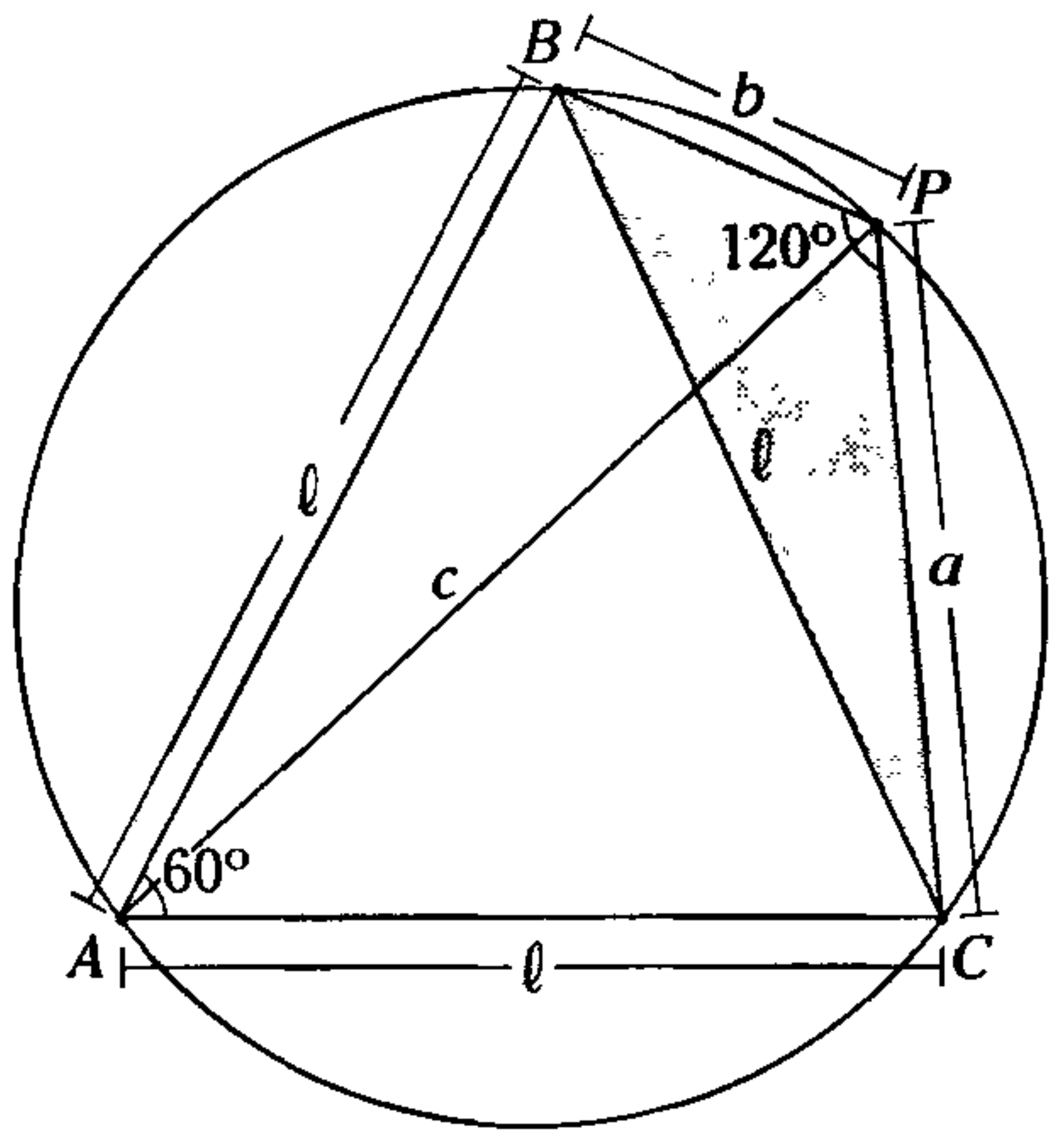


Figura 15.101

Si el $\triangle ABC$ es equilátero

se cumple

$$\ell^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Demostración

En el $\triangle BPC$: teorema de cosenos

$$\ell^2=a^2+b^2-2ab\cos 120°$$

$$\ell^2=a^2+b^2-2ab\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\ell^2=a^2+b^2+ab \qquad \text{(I)}$$

Se sabe por teorema de Chadú

$$c=a+b$$

Elevando al cuadrado

$$c^2=a^2+b^2+2ab$$

$$\rightarrow\ ab=\frac{c^2-a^2-b^2}{2} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

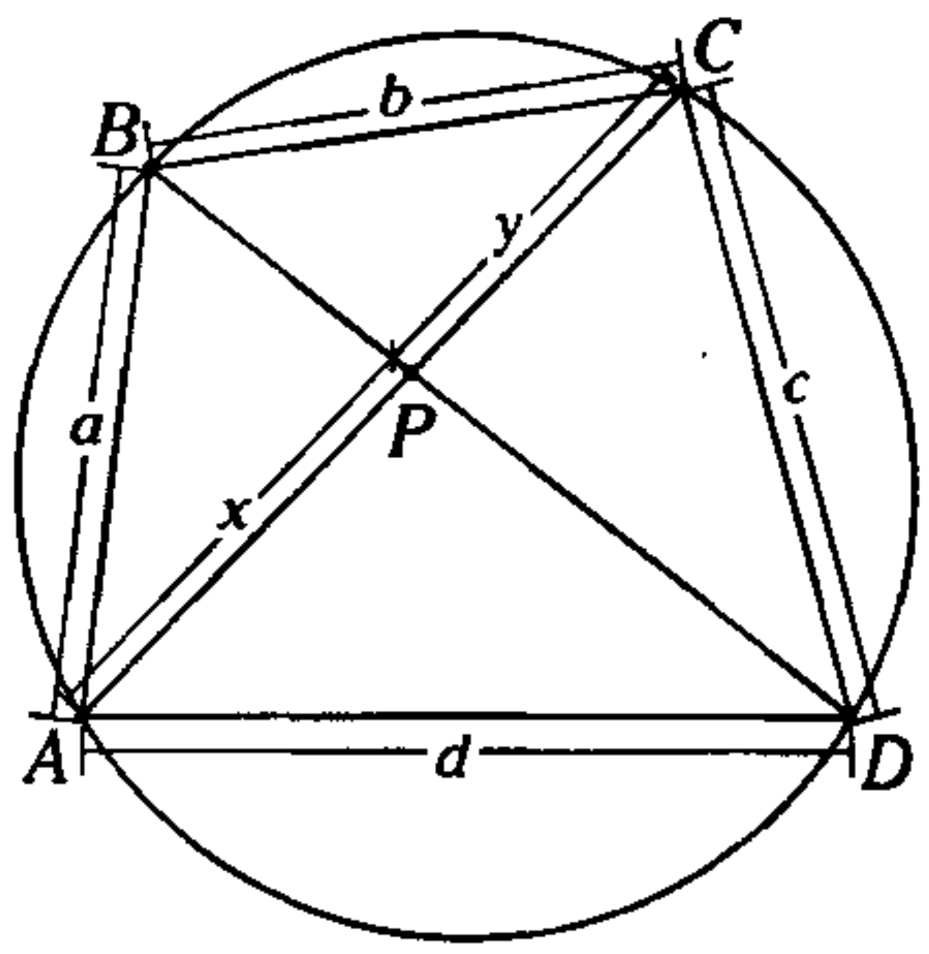
$$\ell^2=a^2+b^2+\frac{c^2-a^2-b^2}{2}$$

$$2\ell^2=2a^2+2b^2+c^2-a^2-b^2$$

$$\therefore\ \ell^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

TEOREMA DE PACKEIN

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible en una circunfererencia, la razón de las longitudes de los segmentos determinados sobre una de las diagonales al intersecarse con la otra diagonal es igual a la razón de los productos de las longitudes de los lados que concurren a los extremos de dicha diagonal respectivamente.



(a)

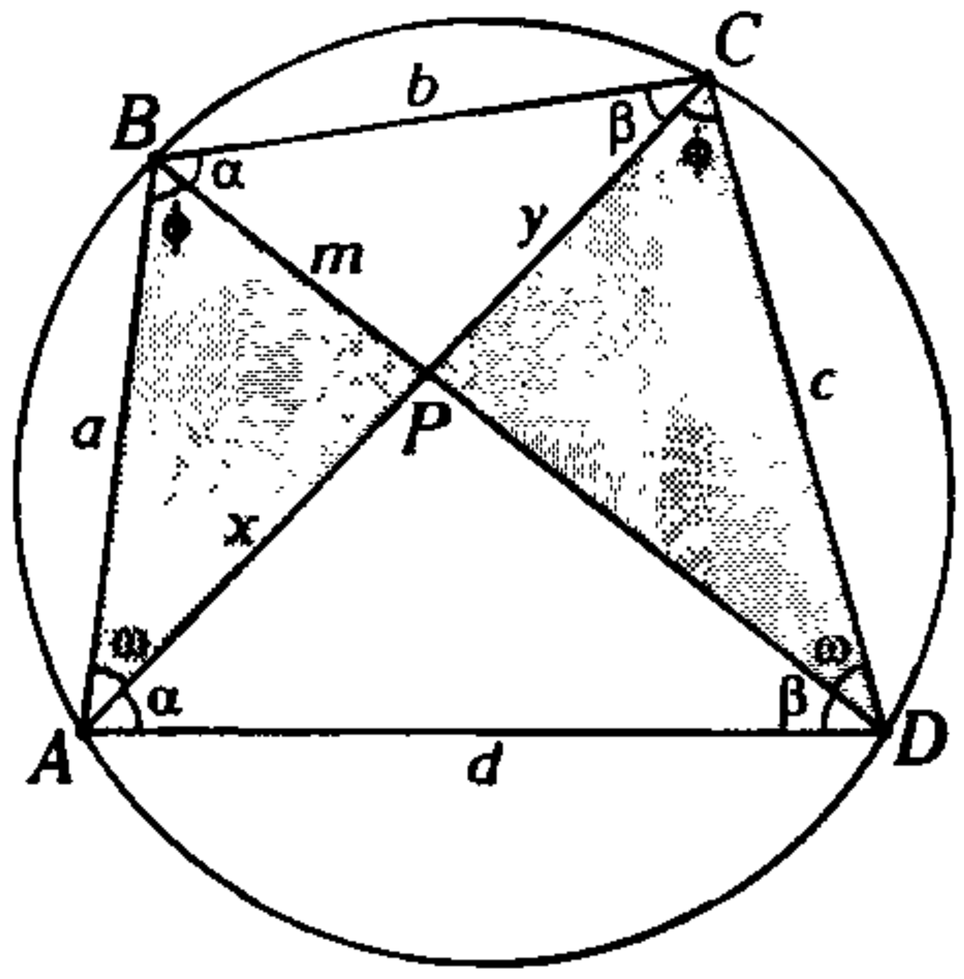
En la figura 15.102(a) , ⏢ *ABCD*: inscrito en la circunferencia

$AP=x,\ PC=y$

Se cumple

$$\frac{x}{y}=\frac{ad}{bc}$$

Demostración



(b)

Figura 15.102

De la figura 15.102(b)
$\triangle APD \sim \triangle BPC$ (A.A.A.)

$$\frac{x}{m}=\frac{d}{b} \rightarrow x=m\frac{d}{b} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle CPD \sim \triangle BPA$ (A.A.A.)

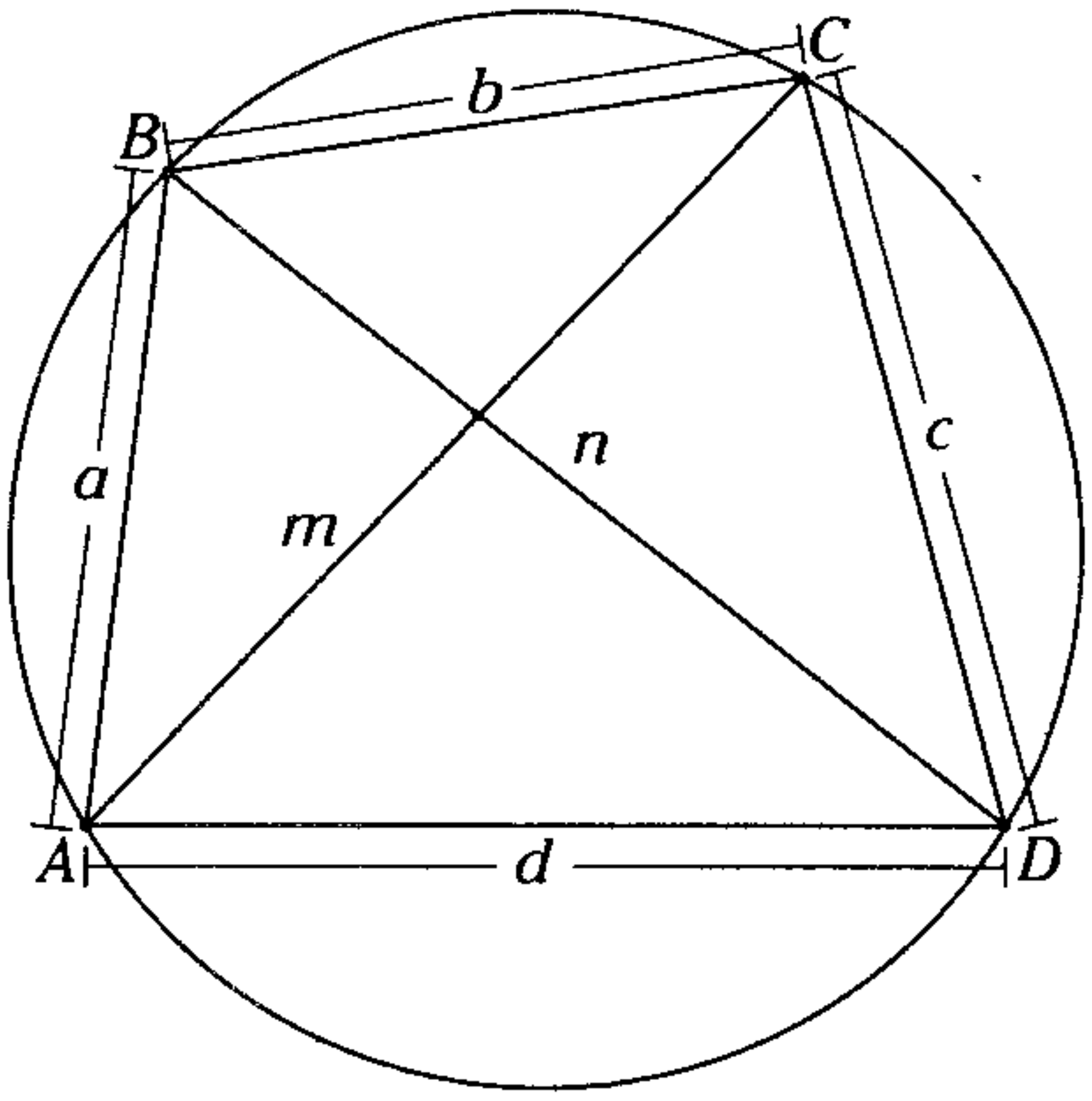
$$\frac{y}{m}=\frac{c}{a} \rightarrow y=\frac{mc}{a} \qquad \text{(II)}$$

Al dividir las ecuaciones (I) y (II) obtenemos

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{ad}{bc}}$$

TEOREMA DE VIETTE
(Segundo teorema de Ptolomeo)

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible en una circunferencia, la razón de las longitudes diagonales es igual a la razón de la suma de los productos de las longitudes de los lados que concurren a los extremos de cada diagonal respectivamente.



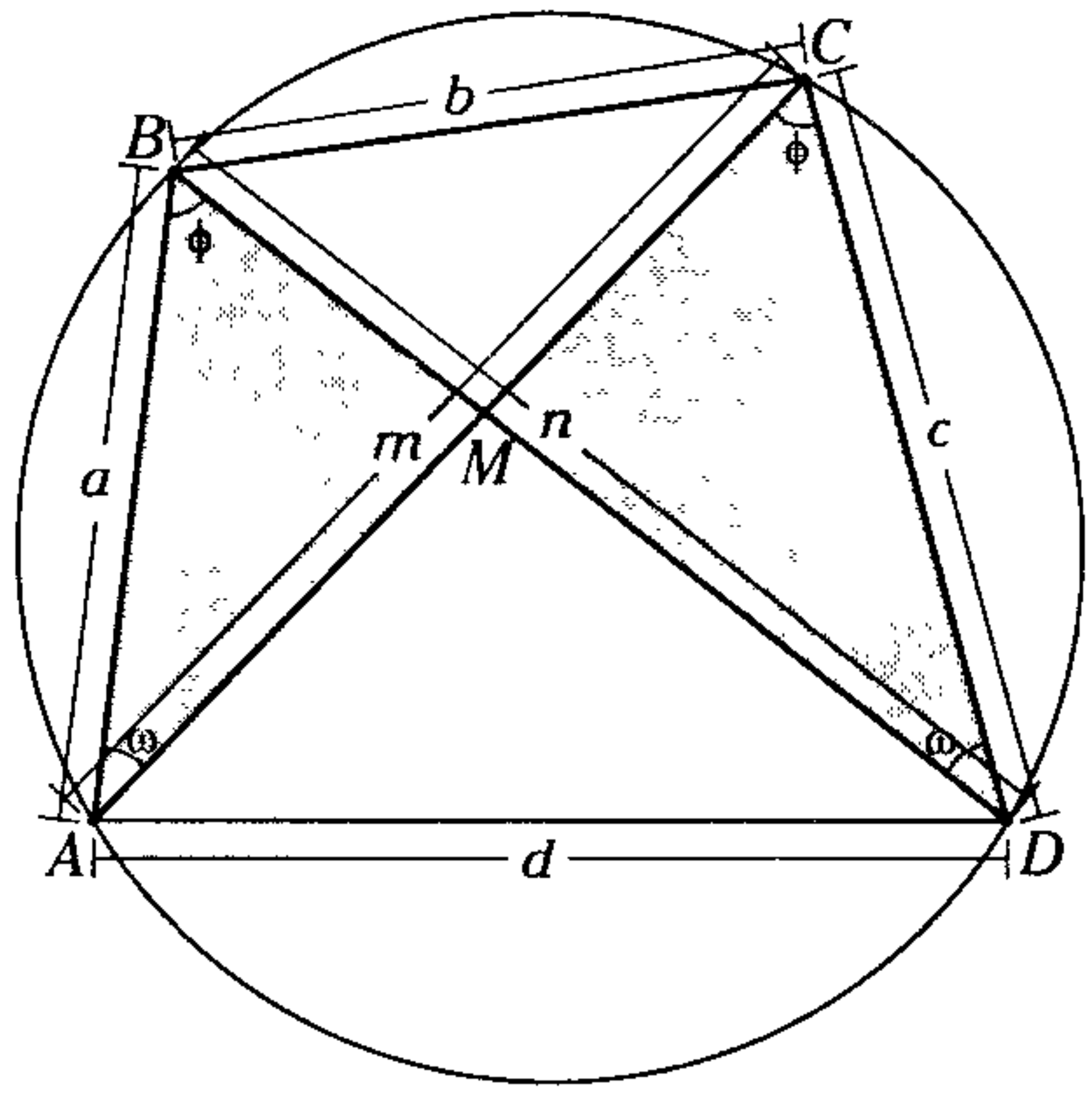
(a)

En la figura 15.103(a), $\square ABCD$: inscrito en la circunferencia.
$AC=m$ y $BD=n$

Se cumple

$$\boxed{\frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{ab+cd}}$$

Demostración



(b)

En la figura 15.103(b)

$CM+MA=m$ y $BM+MD=n$

Por el teorema de Packein

$$\frac{CM}{MA}=\frac{bc}{ad} \rightarrow \frac{CM+MA}{MA}=\frac{bc+ad}{ad} \qquad \text{(I)}$$

Análogamente

$$\frac{BM}{MD}=\frac{ab}{cd} \rightarrow \frac{BM+MD}{MD}=\frac{ab+cd}{cd} \qquad \text{(II)}$$

Al dividir las ecuaciones (I), (II)

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{MD}{MA}\right)=\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{bc+ad}{ab+cd}\right) \qquad \text{(III)}$$

Como $\triangle ABM \sim \triangle DCM$ (A.A.A.)

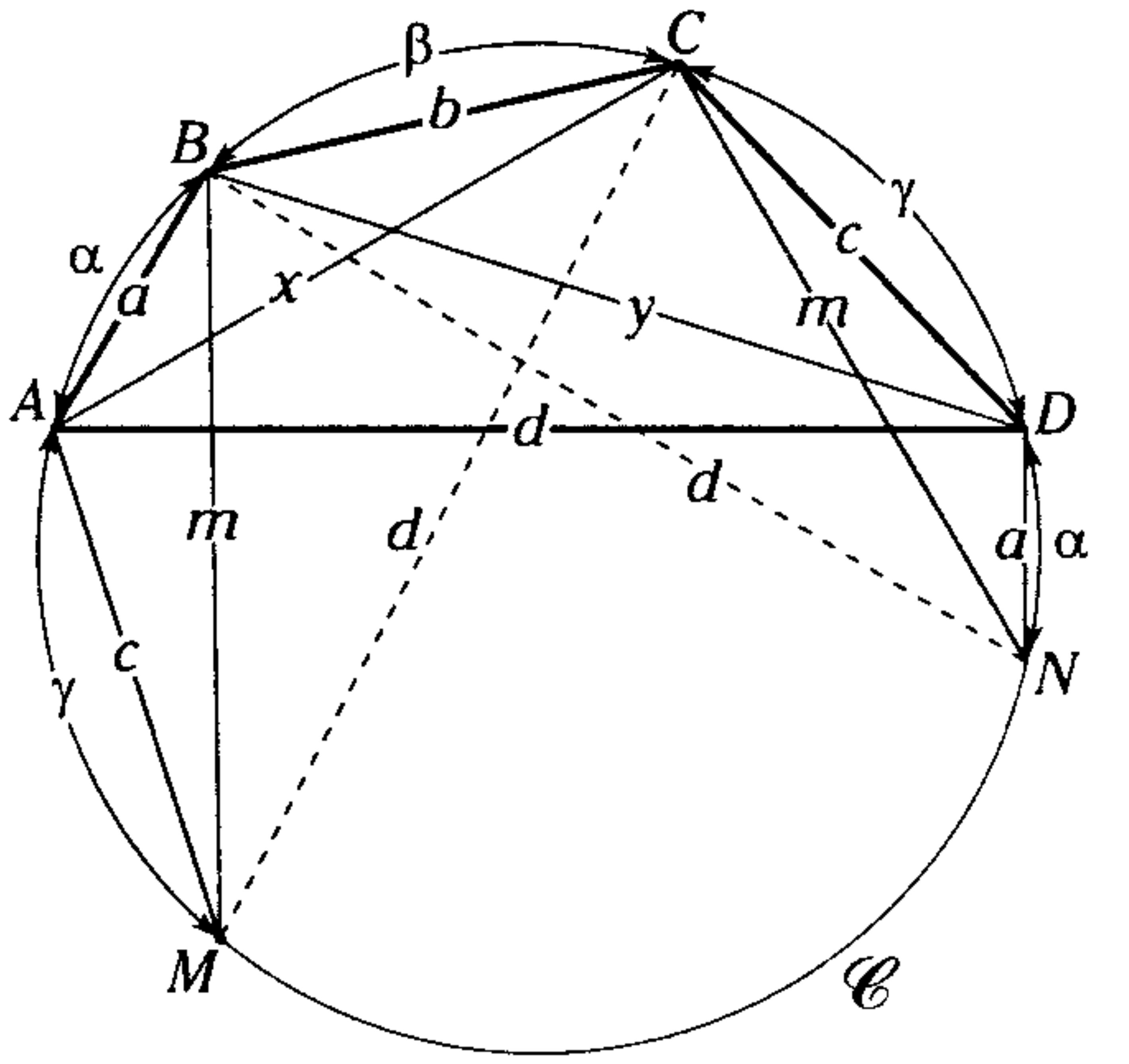
$$\frac{MA}{MD}=\frac{a}{c} \rightarrow \frac{MD}{MA}=\frac{c}{a}$$

Reemplazando en (III)

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{c}{a}\right)=\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{bc+ad}{ab+cd}\right)$$

$$\therefore \boxed{\frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{ab+cd}}$$

Otro método de la demostración del teorema de Viette



(c)

Figura 15.103

En el cuadrilátero $ABCD$: inscrito en $\mathscr{C}$

$$\frac{x}{y}=\frac{a.d+b.c}{a.b+c.d}$$

Se ubica M y N en $\mathscr{C}$ tal que

$m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{CD} = \gamma$

$\rightarrow\ AM = CD = c$

$m\overset{\frown}{DN} = m\overset{\frown}{AB} = \alpha$

$\rightarrow\ DN = AB = \alpha$

$\therefore\ BM = CN = m$ y $MC = BH = AD = d$

luego del teorema de Ptolomeo para

$\square MABC$: $m.x = a.d + b.c$ (I)

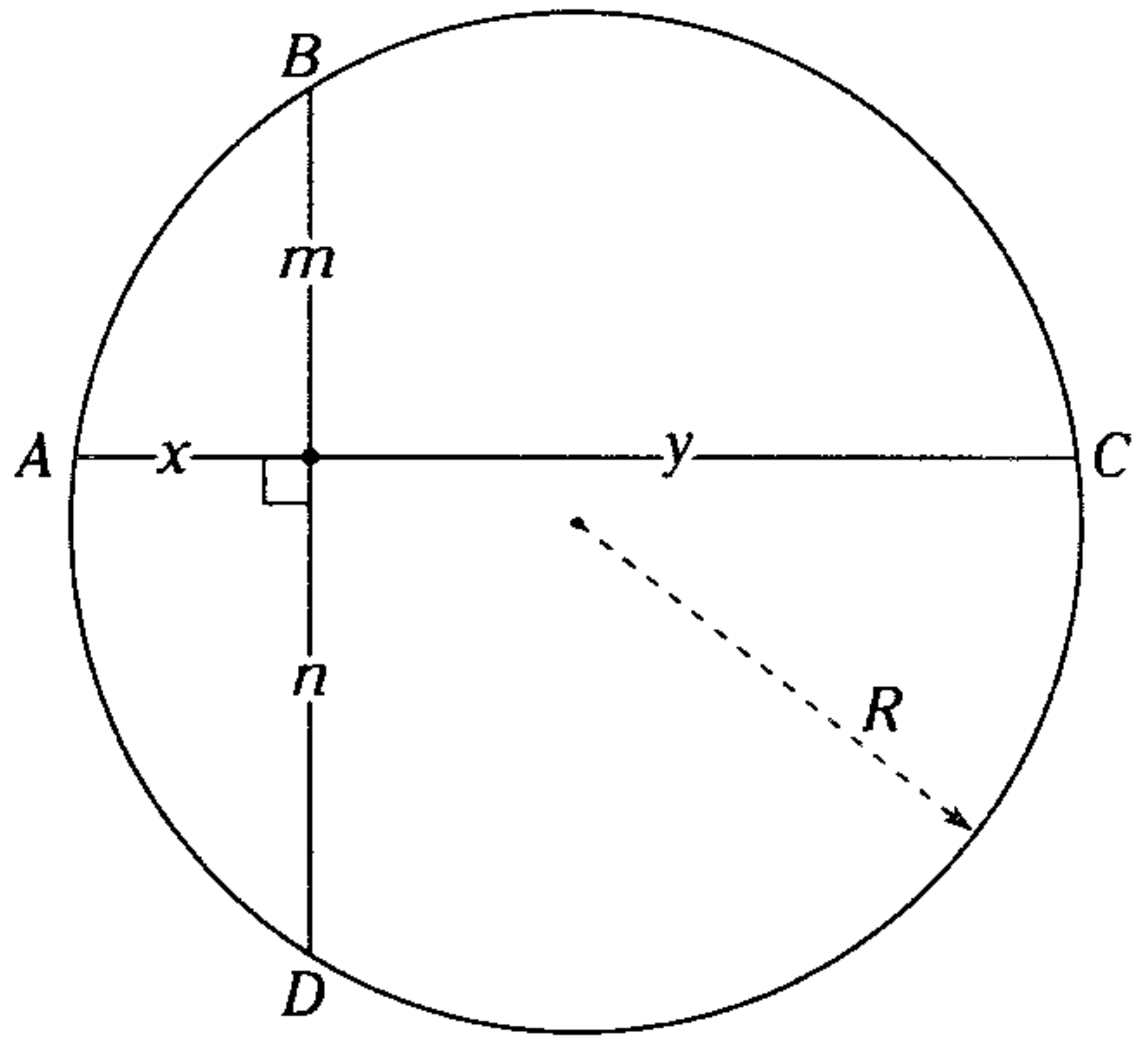
$\square NBCD$: $m.y = a.b + c.d$ (II)

De (I) ÷ (II)

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{a.d+b.c}{a.b+c.d}}$$

TEOREMA DE FAURE

En una circunferencia, la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos en dos cuerdas que se intersecan perpendicularmente es igual al cuadrado de la longitud del diámetro.



(a)

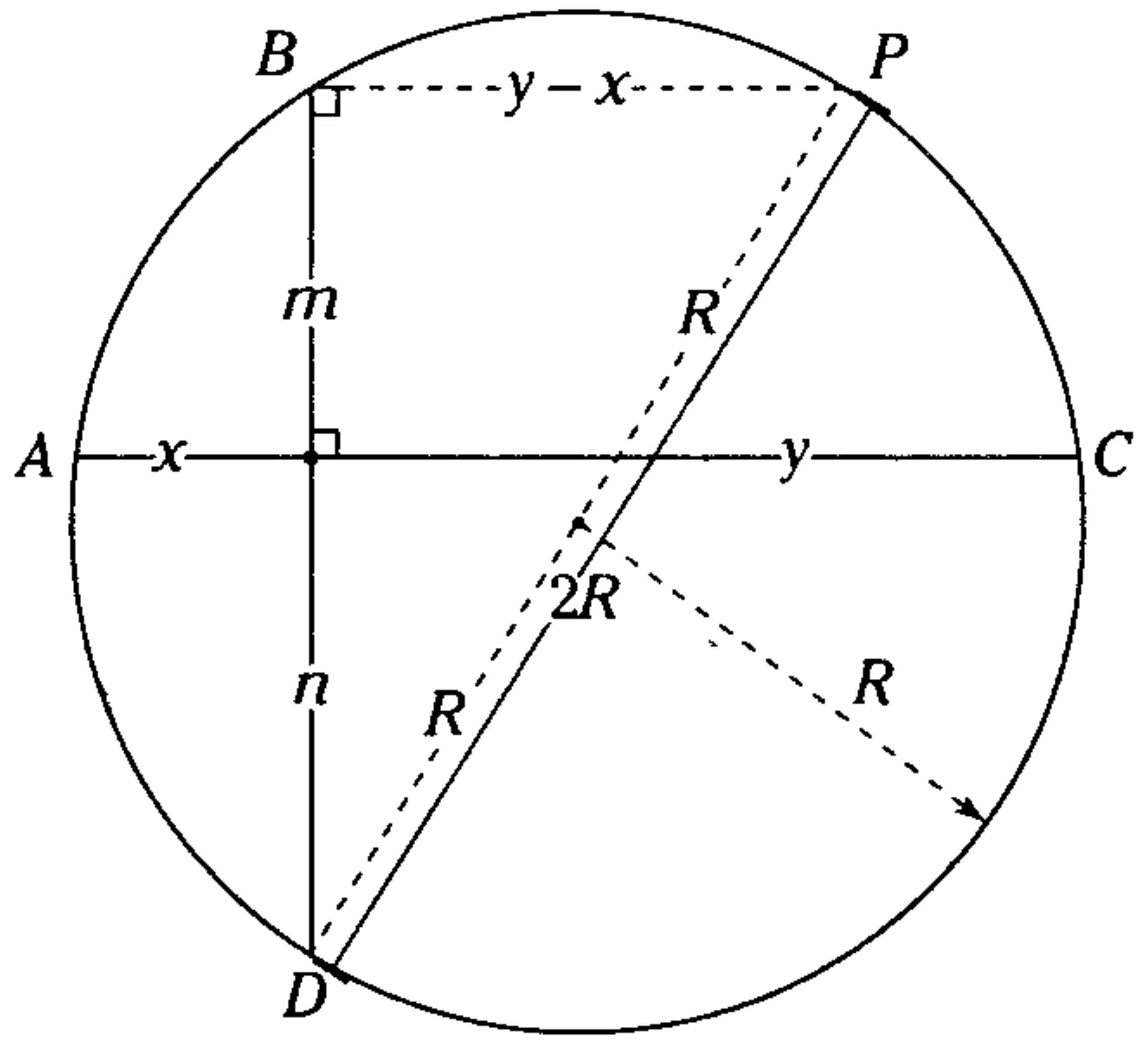
De la figura 15.104(a), R: Radio de la circunferencia

Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Se cumple

$$\boxed{x^2+m^2+y^2+n^2=4R^2}$$

Demostración



(b)

Figura 15.104

Se traza el diámetro DP, luego se une B y P

Por teorema $BP = y-x$

Por el teorema de Pitágoras

$\triangle DBP$: $(2R)^2 = (m+n)^2 - (y-x)^2$

$$4R^2 = m^2 + n^2 + 2mn - y^2 + 2xy - x^2 \qquad \text{(I)}$$

Por el teorema de las cuerdas

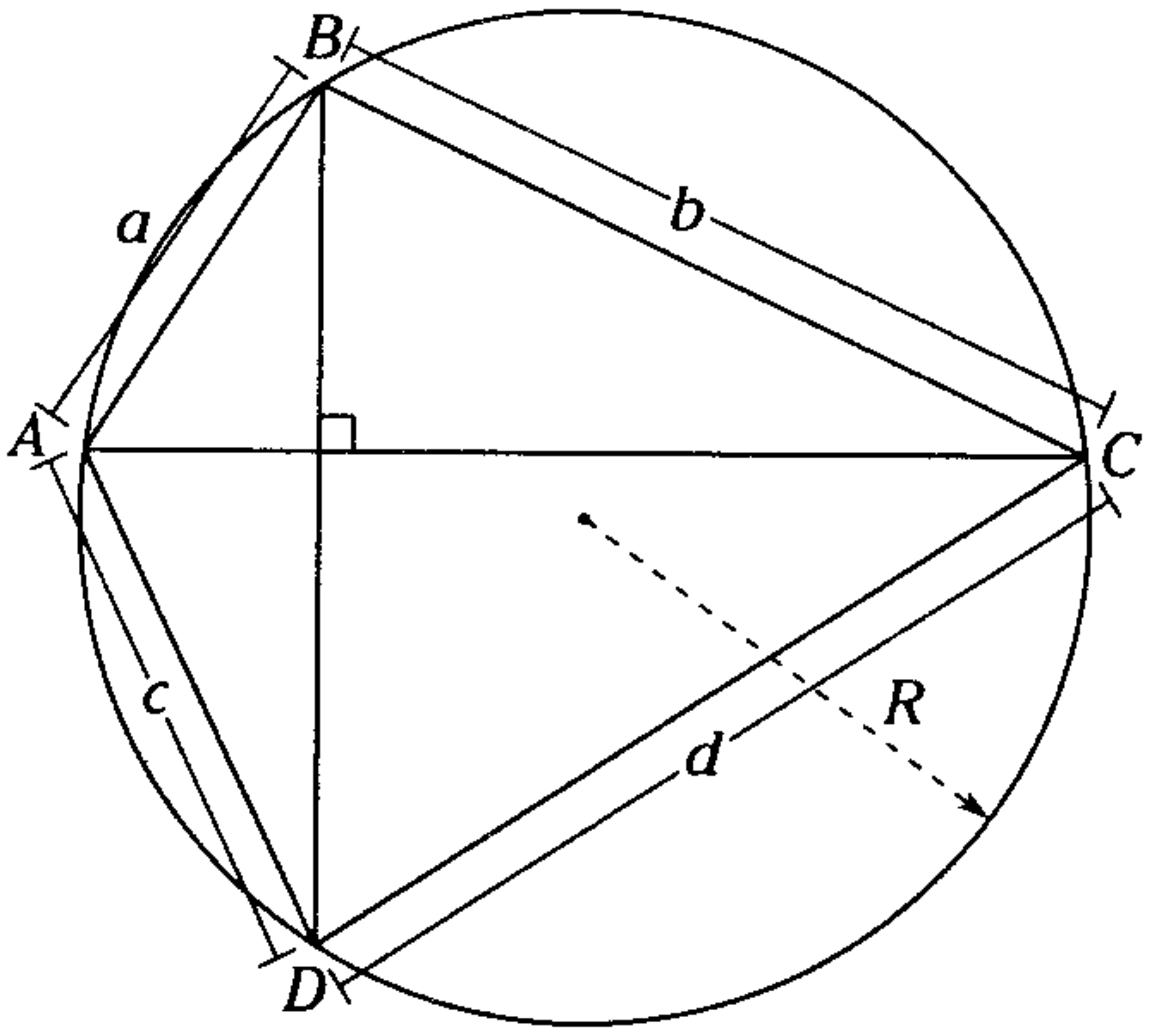
$$xy = mn \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

$$\boxed{x^2 + m^2 + y^2 + n^2 = 4R^2}$$

TEOREMA DE ARQUÍMEDES

En un cuadrilátero de diagonales perpendiculares inscrito en una circunferencia, la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados opuestos son iguales al cuadrado del diámetro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero.



(a)

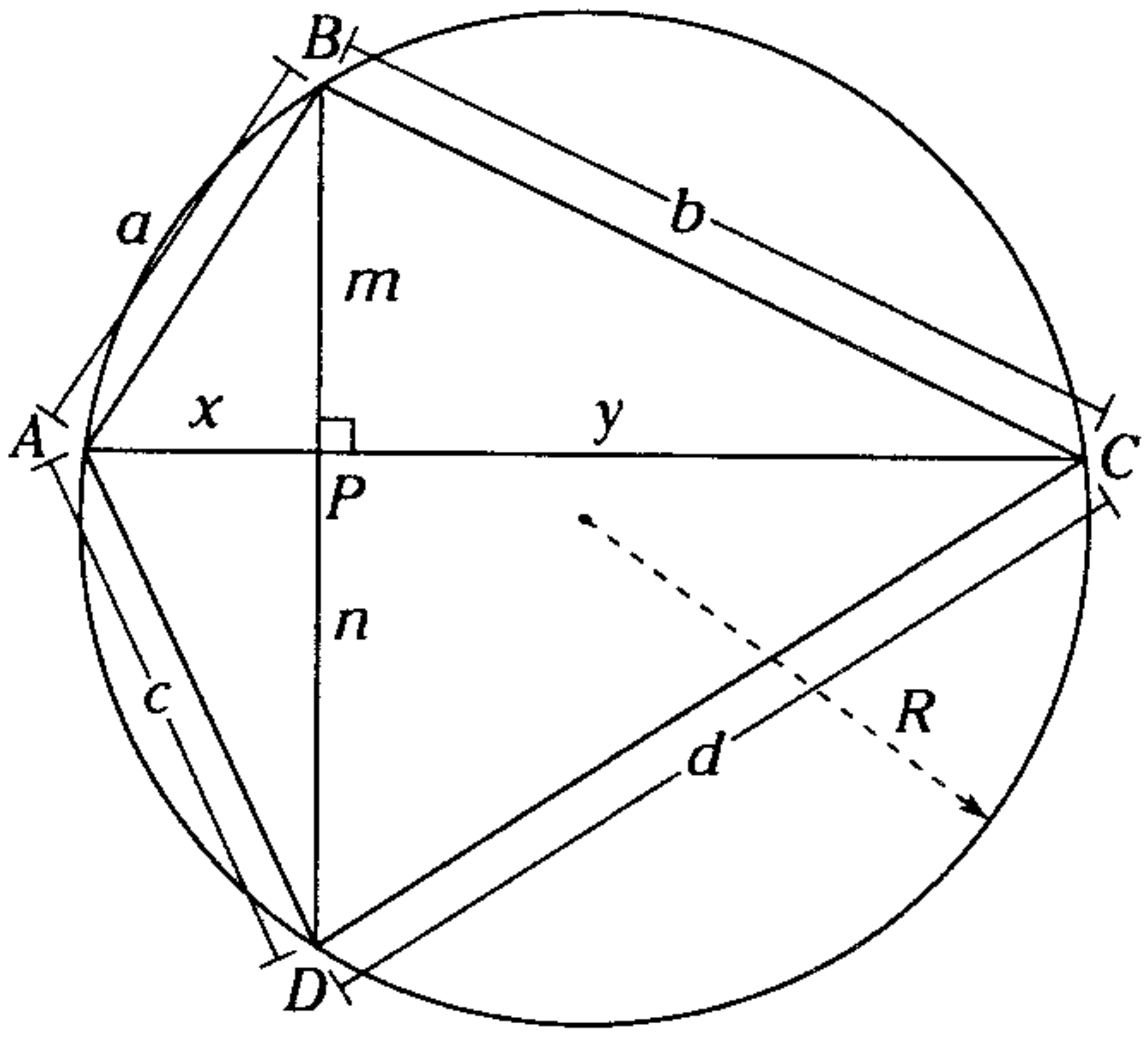
En la figura 15.105(a), R: Radio de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $ABCD$

Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Se cumple

$$\boxed{a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 4R^2}$$

Demostración



(b)

Figura 15.105

De la figura 15.105(b)

Por el teorema de Pitágoras

$\triangle APB$: $a^2 = x^2 + m^2$ (I)

$\triangle DPC$: $d^2 = y^2 + n^2$ (II)

Al sumar las ecuaciones (I) y (II)

$$a^2 + d^2 = x^2 + y^2 + n^2 + m^2$$

Del teorema de Faure

$$x^2 + m^2 + y^2 + n^2 = 4R^2 \qquad \text{(IV)}$$

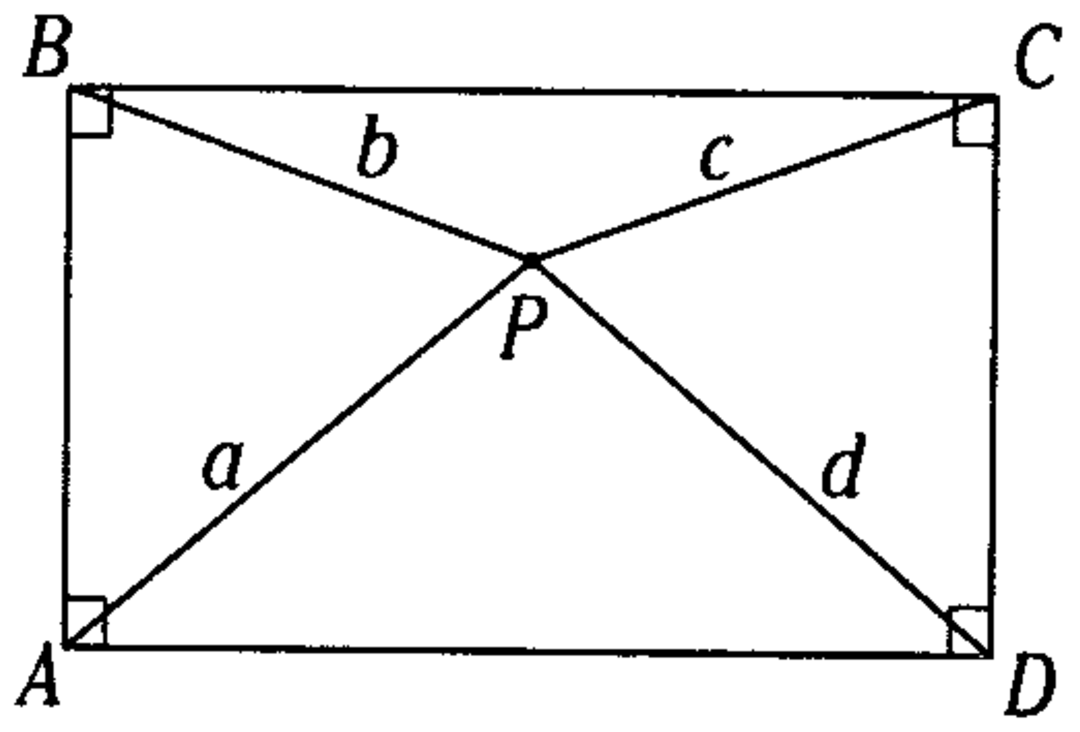
Reemplazando

$$\rightarrow \boxed{a^2 + d^2 = b^2 + c^2 = 4R^2}$$

TEOREMA DE MARLEN

En un rectángulo, la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera a sus vértices opuestos son iguales.

1.



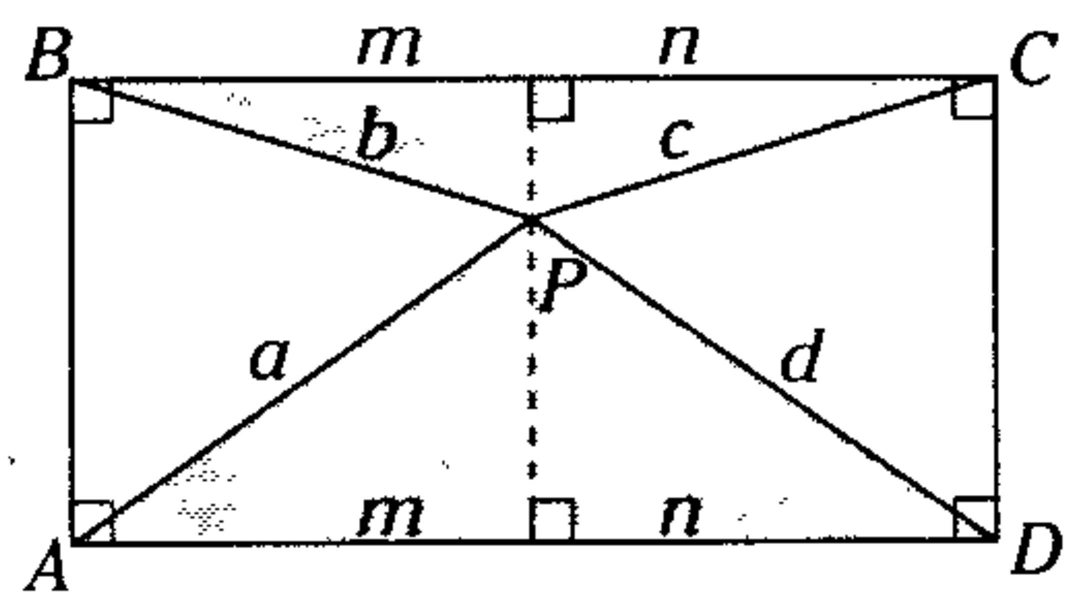
(a)

En la figura 15.106(a), P es un punto interior del rectángulo $ABCD$.

Se cumple

$$a^2+c^2=b^2+d^2$$

Demostración



(b)

Figura 15.106

Por teorema de las proyecciones

$\triangle BPC$: $b^2-c^2=m^2-n^2$

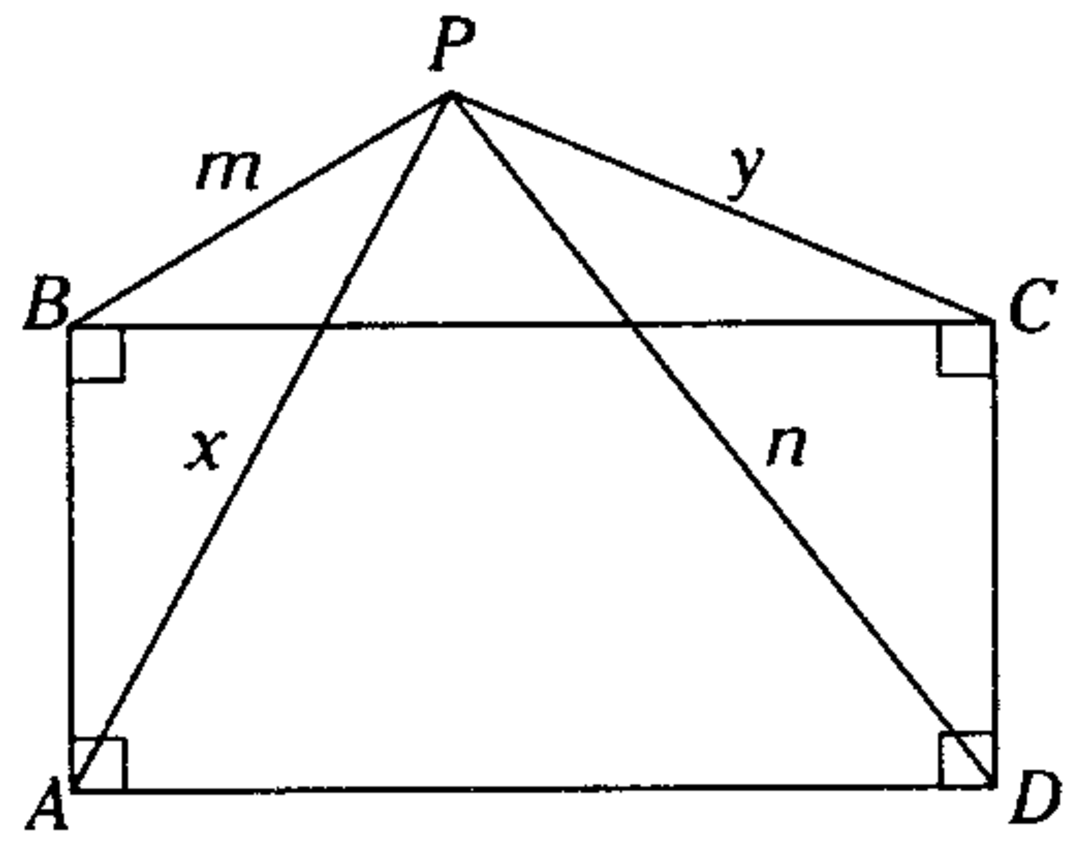
$\triangle APD$: $a^2-d^2=m^2-n^2$

Al igualar obtenemos

Luego: $a^2-d^2=b^2-c^2$

$$a^2+c^2=b^2+d^2$$

2.



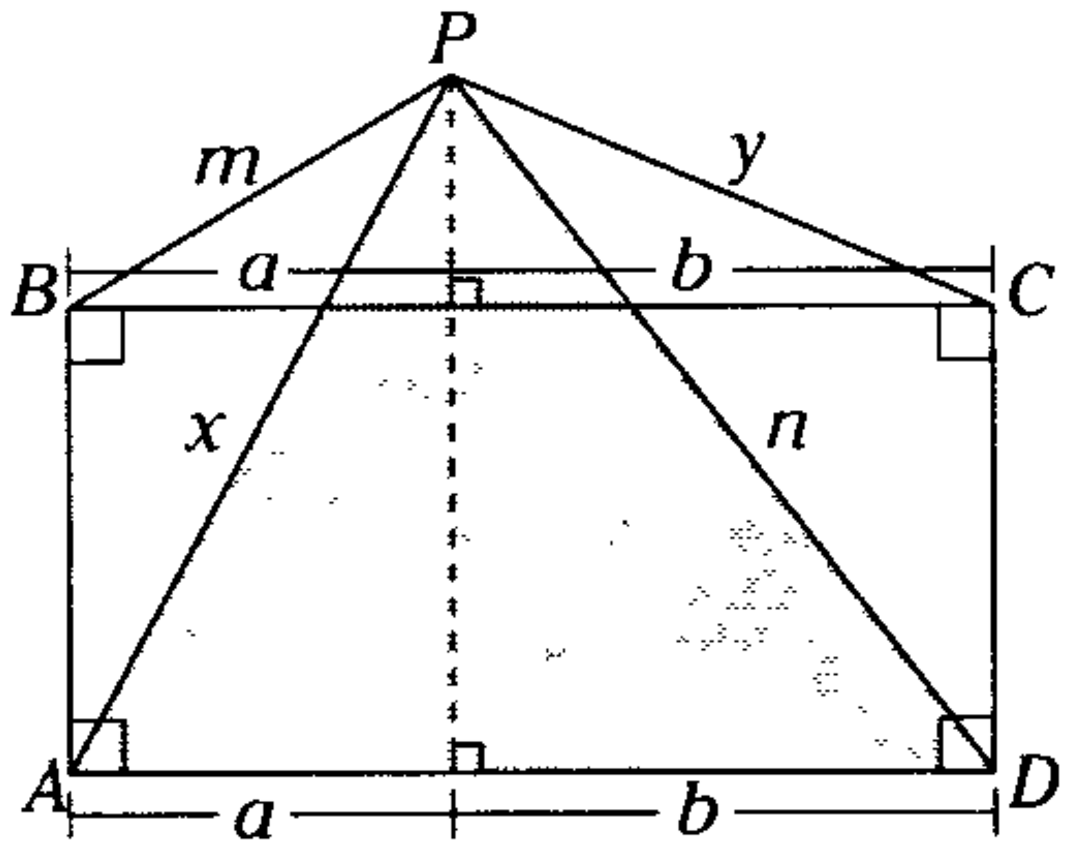
(a)

En la figura 15.107(a), P es un punto exterior del rectángulo $ABCD$.

Se cumple

$$x^2+y^2=m^2+n^2$$

Demostración



(b)

Figura 15.107

Por teorema de las proyecciones

$\triangle BPC$: $m^2-y^2=a^2-b^2$

$\triangle APD$: $x^2-n^2=a^2-b^2$

Al igualar obtenemos

$x^2-n^2=m^2-y^2$

$$\rightarrow \quad x^2+y^2=m^2+n^2$$

Observación

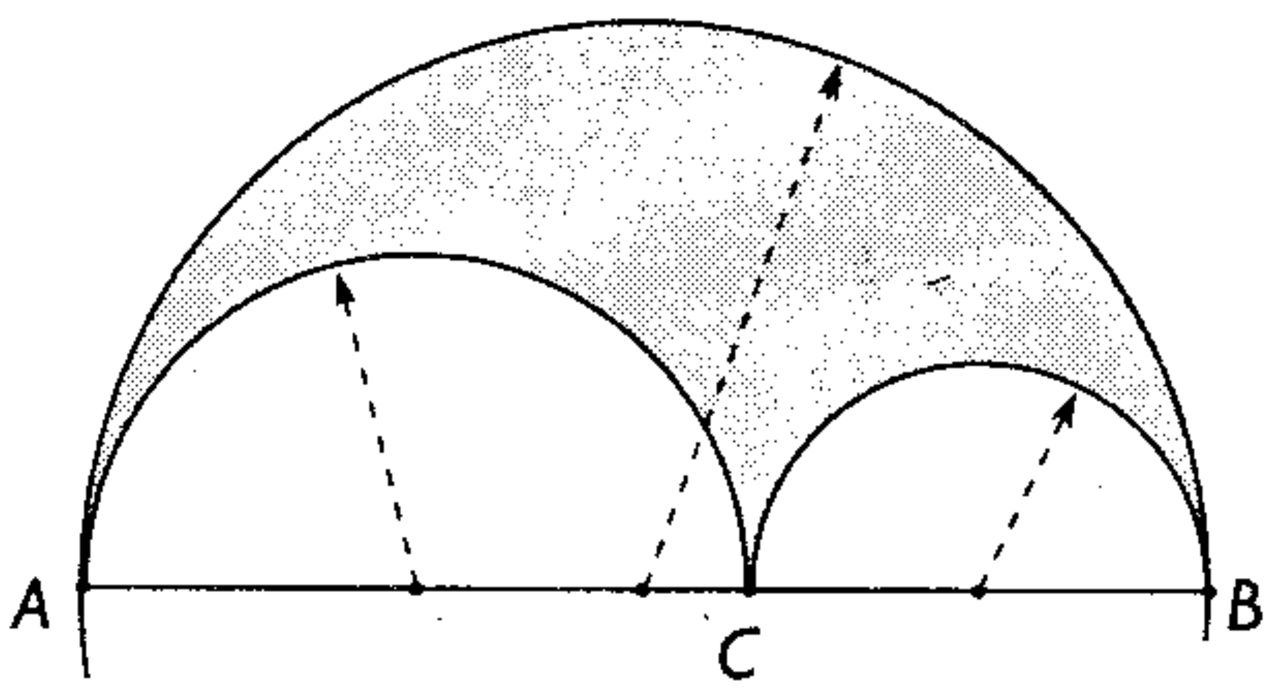
- El teorema de Marlen también se puede aplicar a un cuadrado.
- El punto P puede ubicarse en cualquier parte del plano que contiene al rectángulo, incluso el teorema se sigue cumpliendo si P está en el espacio (fuera del plano que contiene al rectángulo).

LECTURA

LA CUCHILLA DEL ZAPATERO (αρβεγωσ = árbelos)

El triángulo curvilíneo formado por tres semicircunferencias mutuamente tangentes, con sus centros alineados sobre la misma recta era conocida entre los antiguos griegos como "árbelos", que significa "cuchilla de zapatero", por su similitud con la que utilizan esos profesionales para cortar cuero. Según parece fue Arquímedes el que primero la estudió y posteriormente, fue también tratada por Pappus, Vieta, Descartes, Fermat, Newton, Steiner y McKay, y ya en el siglo XX, por (¡como no!) Víctor Thebault, Leon Bankoff (el dentista de California), Clayton W. Dodge, Tomas Schoch, Peter Y. Woo y Paul Yiu (estos dos últimos son los editores de una excelente revista virtual de Geometría, Forum Geometricorum).

Consideramos un segmento *AB* y sea *C* un punto cualquiera de su interior. Trazando, en un mismo semiplano, los semicírculos de diámetros *AB*, *AC* y *CB* se obtiene el árbelos:



Se pueden encontrar en Internet páginas dedicadas al árbelos:

http://www.biola.edu/academics/undergrad/match/woopy/arbelos.htm

aunque las bellas imágenes animadas que en ella se incluyen no pueden imprimirse lamentablemente.

Quien no tema visitar una página en holandés puede ver

http://www.pandd.demon.nl/arbelos.htm

donde están demostradas muchas propiedades de esta configuración.

FUENTE: BELLOT ROSADO, Francisco. *Lección de preparación olímpica*. Revista Escolar de la Olimpiada iberoamericana de Matemática.

LECTURA

TRIÁNGULOS ISÓSCELES Y SEUDOISÓSCELES

En 1840, C.L. Lehmus (1780-1863), profesor en Berlín, escribió a J. Steiner (1796-1863) pidiéndole una demostración "puramente geométrica" de la solución al siguiente problema.

Si un triángulo tiene dos bisectrices de igual longitud, ¿es isósceles?

Algún tiempo después, Steiner estudió los casos de las bisectrices interiores y exteriores y demostró el que se conoce como **Teorema de Steiner-Lehmus**: *si las bisectrices interiores de un triángulo son de igual longitud, el triángulo es isósceles.*

Una demostración directa de este resultado se da mediante el Teorema de Stewart ya que el cuadrado de la longitud de una bisectriz interior se expresa como

$$w_b^2 = ca\left[1-\left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right]$$ así que igualando esta expresión a

$$w_c^2 = ab\left[1-\left(\frac{c}{a+b}\right)\right]$$ se obtiene

$$a(2p)\left[(2p)\left(a^2+bc\right)+2abc\right](b-c)=0 \quad \text{donde} \quad 2p = a+b+c$$

Así que es claro que $b = c$ y el triángulo es isósceles.

En Crux Mathematicorum, 1976, p.19-24 se publica un excelente artículo sobre el teorema de Steiner-Lehmus, con numerosas referencias cuando la revista todavía tenía el título de Eureka.

Igualmente es natural preguntarse que ocurriría si dos simedianas tiene igual longitud.

Ya Lemoine en Mathesis 2 demuestra que una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea isósceles es que tenga dos simedianas de igual longitud.

La relación entre la mediana y la simediana trazadas desde un vértice esta dada por

$$S_a = \frac{2bc}{b^2+c^2}\,.\,m_a$$

analogamente

$$S_b = \frac{2ac}{a^2+c^2}\,.\,m_b$$

de la igualdad

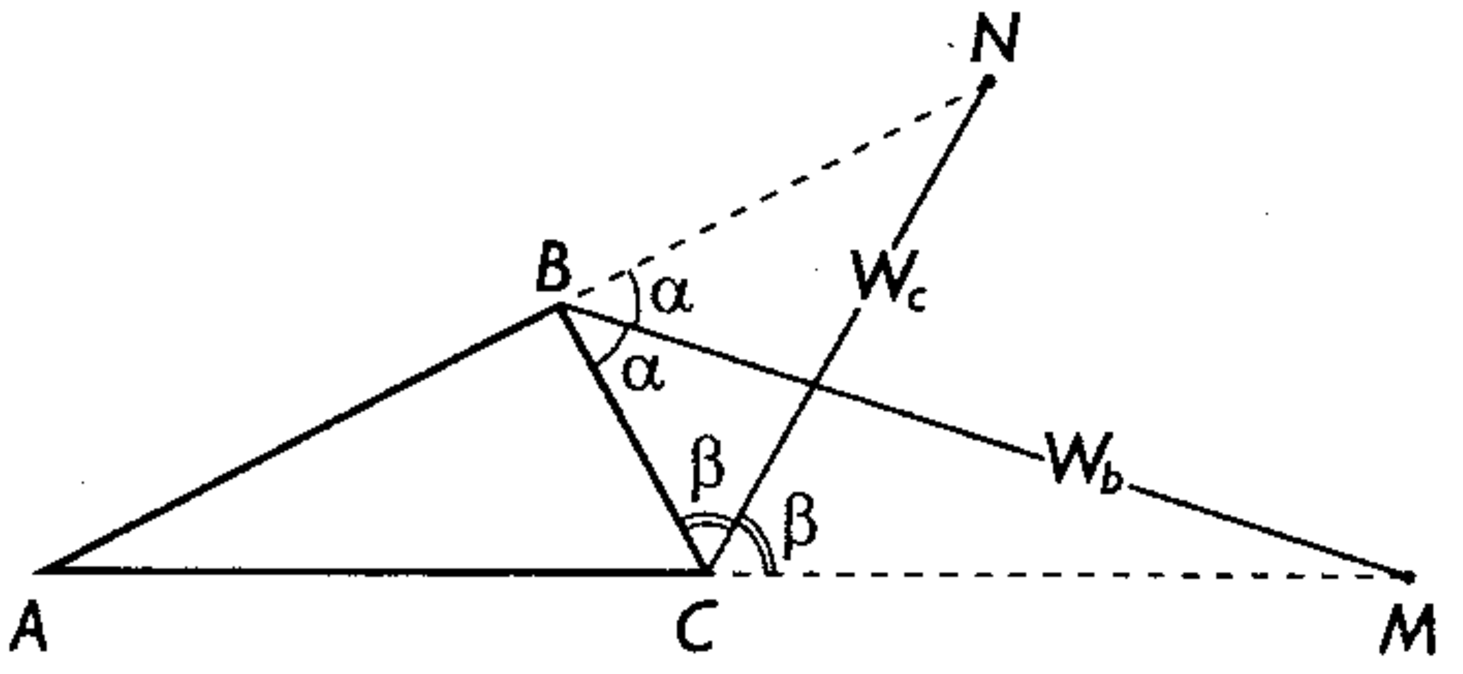
$$S_a = S_b$$

donde

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}} \qquad y \qquad m_b = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}}$$

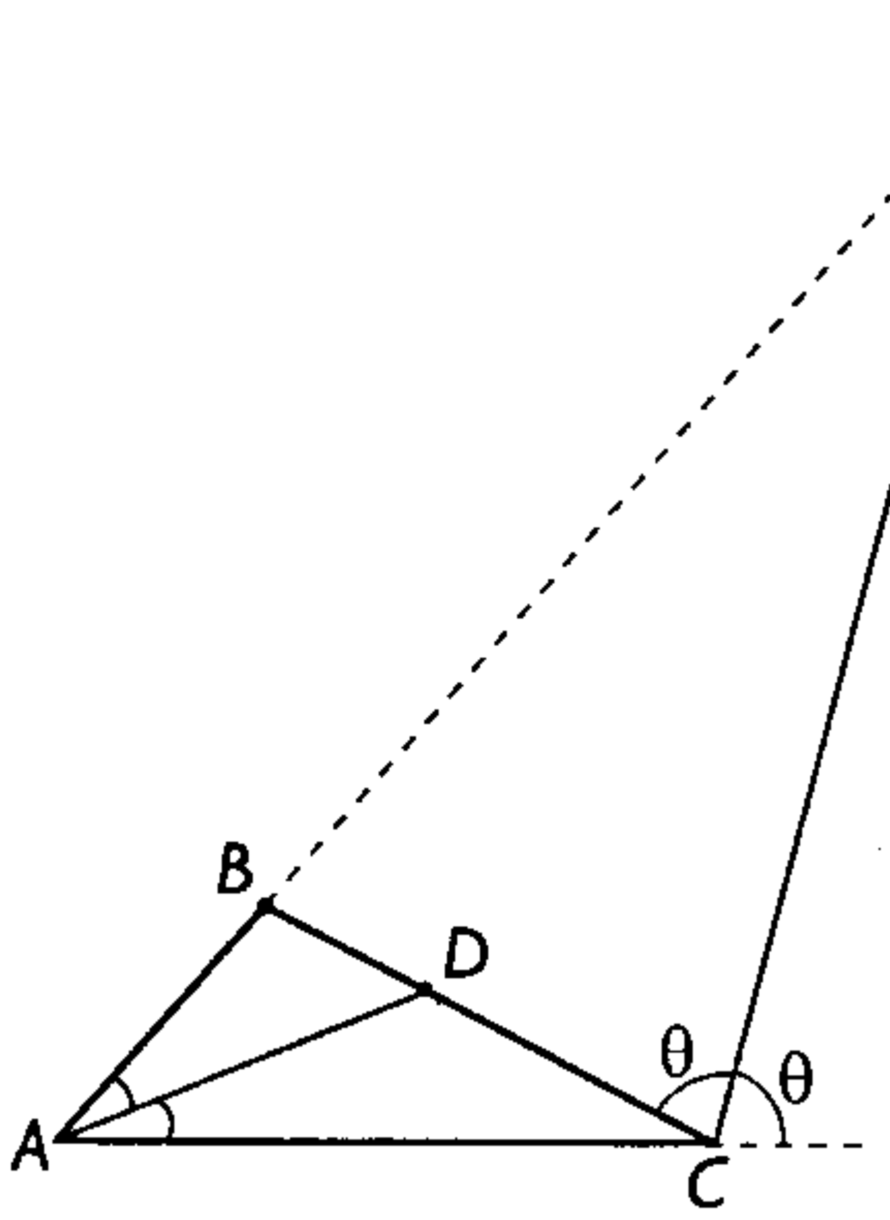
de donde se deduce la conclusión.

Los triángulos no isósceles con bisectrices exteriores de igual longitud se llaman seudoisósceles, nombre dado por M. Alauda en l'Intermediaire desMathematiques (1849).



Si $AB \neq BC$ y $W_c = W_b$ entonces el $\triangle ABC$ es un triángulo seudoisósceles.

Es natural preguntarse que ocurrirá si en un triángulo una bisectríz interior y una bisectríz exterior tienen igual longitud.



$\overline{AD}$: bisectriz interior

$\overline{CE}$: bisectriz exterior

Si $AD = CE$ y $m\sphericalangle BAC = \phi$

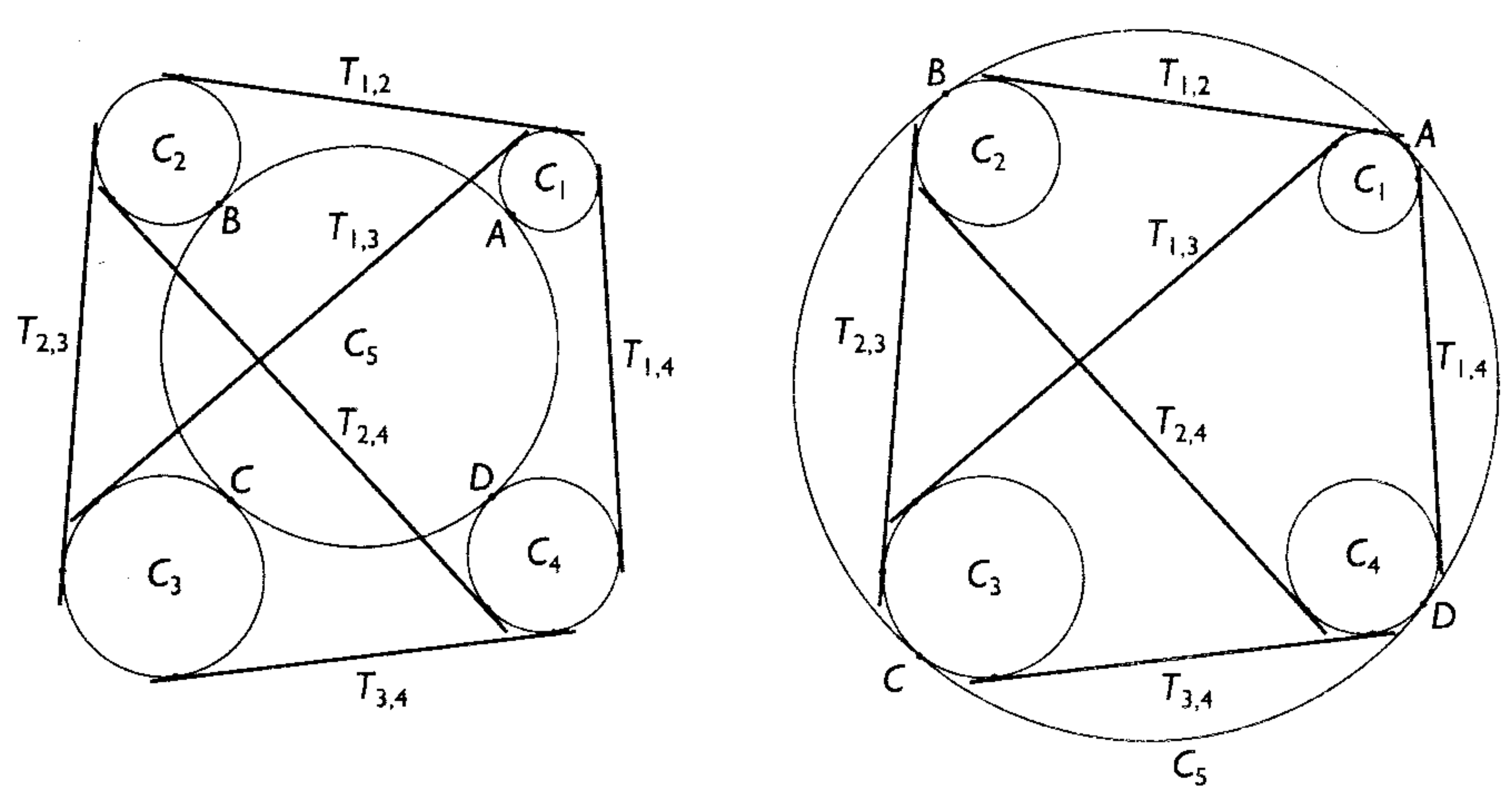
Jordi Dou probo que si $AD = CE$ entonces $\phi < \approx 30{,}21435°$ y Shailesh Shirali dio un modo de obtener infinitos triángulos con la propiedad requerida y dio como ejemplo el triángulo de (30°; 30°; 120°)

FUENTE: BELLOT ROSADO, Francisco. *Triángulos especiales*. Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática.

LA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PTOLOMEO

El geómetra irlandés John Casey (1820-1891) publicó en Dublin en 1881 un famoso libro titulado *A sequel to the first six books of the Elements of Euclid* (La consecuencia de lo seis primeros libros de los Elementos de Euclides), título posteriormente abreviado hasta *A sequel to Euclid*. En el que incluye la generalización del primer teorema de Ptolomeo, y en una nota al pie en su página 104 dice textualmente: Esta extención del teorema de Ptolomeo apareció por primera vez en un artículo mío en los Proceedings of the Royal Irish Academy, 1866. El enunciado es el siguiente: Si las circunferencias $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_4$ son tangentes a una quinta circunferencia $\mathscr{C}_5$ (o recta) en ese orden. Entonces si llamamos Tij a la longitud de la tangente exterior común a $\mathscr{C}_i$ y $\mathscr{C}_j$, se cumple la relación

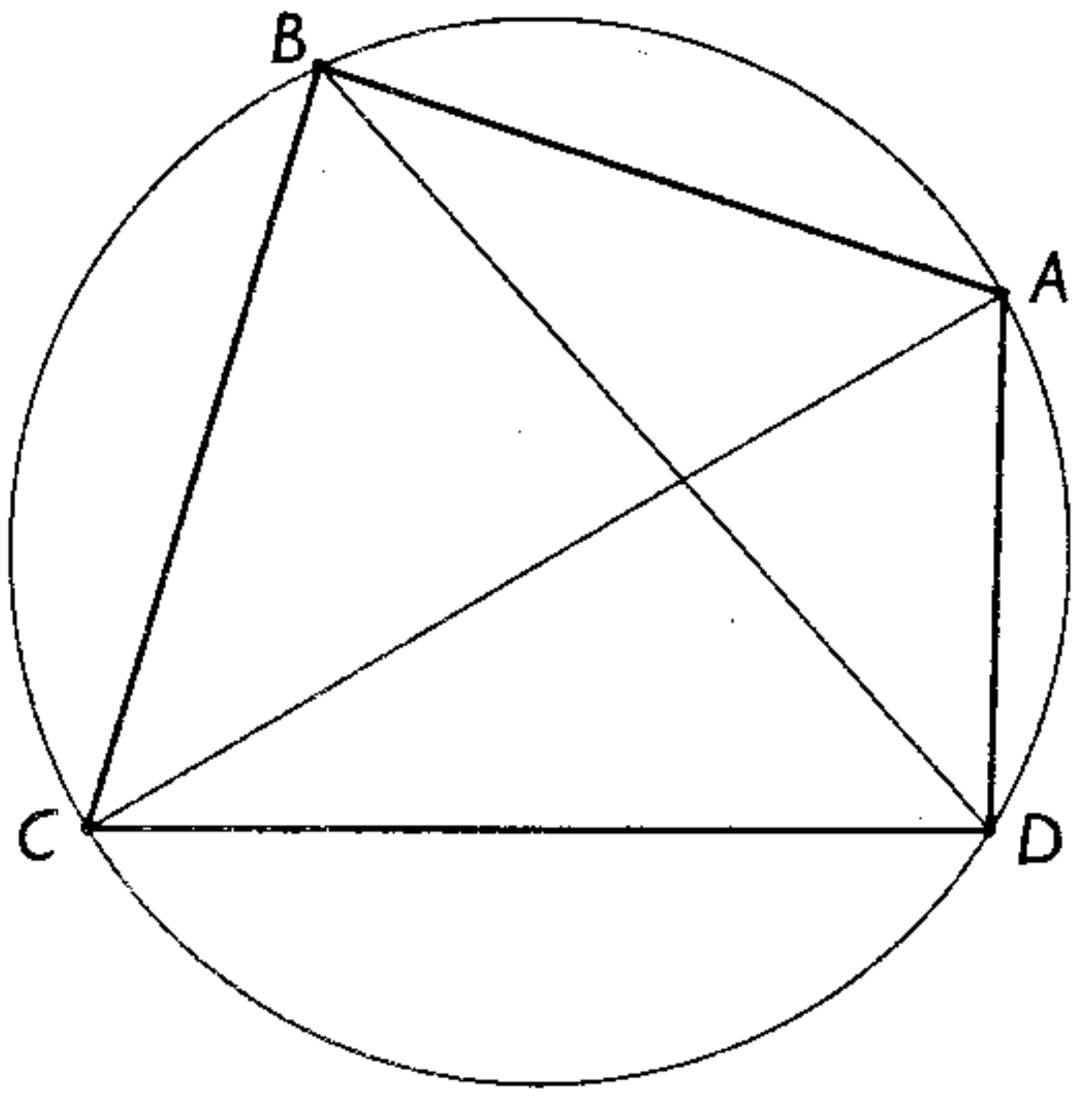
$$T_{1,2} \cdot T_{3,4} + T_{1,4} \cdot T_{2,3} = T_{1,3} \cdot T_{2,4}$$



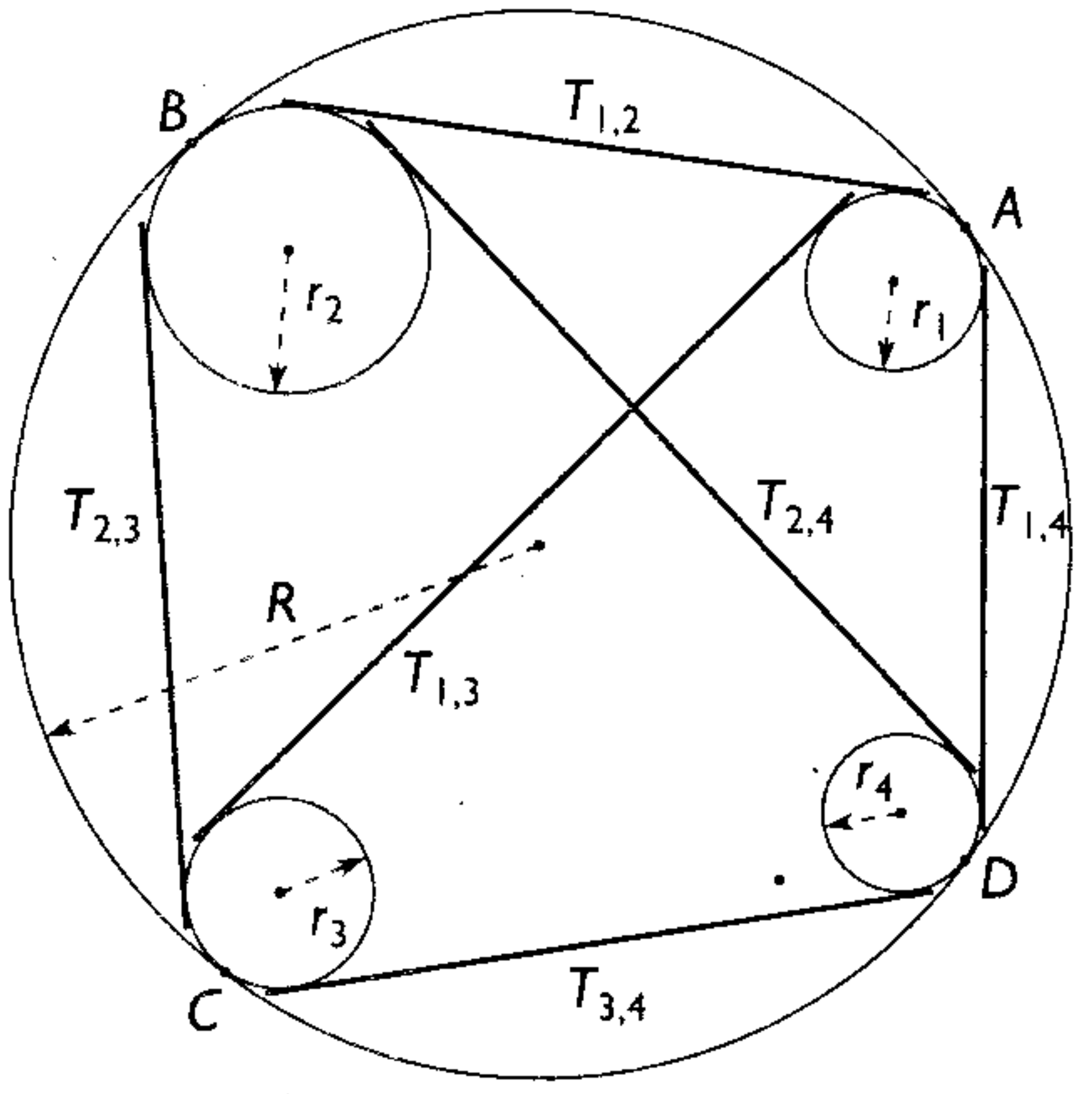
Si las cuatro circunferencias degeneran en puntos *A*, *B*, *C* y *D*, obtenemos el teorema de Ptolomeo. Casey expresa una condición necesaria y suficiente para que cuatro circunferencias sean tangentes a una quinta circunferencia y una demostración de la suficiencia se puede encontrar en el ejercicio II.240 (página 330-334) del excelente libro de Igor Shariguin *Problemas de Geometría. Planimetría*, Ed. Mir, Moscú 1989. Es realmente notable disponer de una demostración del recíproco del teorema de Casey en un libro tan popular como el de Shariguin, dado que anteriormente había sido probado con restricciones.

Generalización del segundo teorema de Ptolomeo (Teorema de Viette)

Escribiendo el segundo teorema de Ptolomeo en la forma:



Se demuestra que



$$\frac{T_{1,2}\times T_{1,4}\left(R-r_3\right)+T_{2,3}\times T_{3,4}\left(R-r_1\right)}{T_{1,2}T_{2,3}\left(R-r_4\right)+T_{1,4}\times T_{3,4}\left(R-r_2\right)}=\frac{T_{1,3}}{T_{2,4}}$$

FUENTE: BELLOT ROSADO, Francisco. *Lección de preparación olímpica*. Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática. Número 1 (mayo - junio 2002).

LECTURA

EL TEOREMA DE DESCARTES O TEOREMA DE LAS CUATRO CIRCUNFERENCIAS

Descartes, en noviembre de 1643, consideró un problema ligeramente distinto. En su correspondencia con la princesa Isabel, esposa del rey de Bohemia, estudia el caso de tres circunferencias tangentes exteriores entre sí dos a dos, y una cuarta circunferencia tangente a las tres primeras.

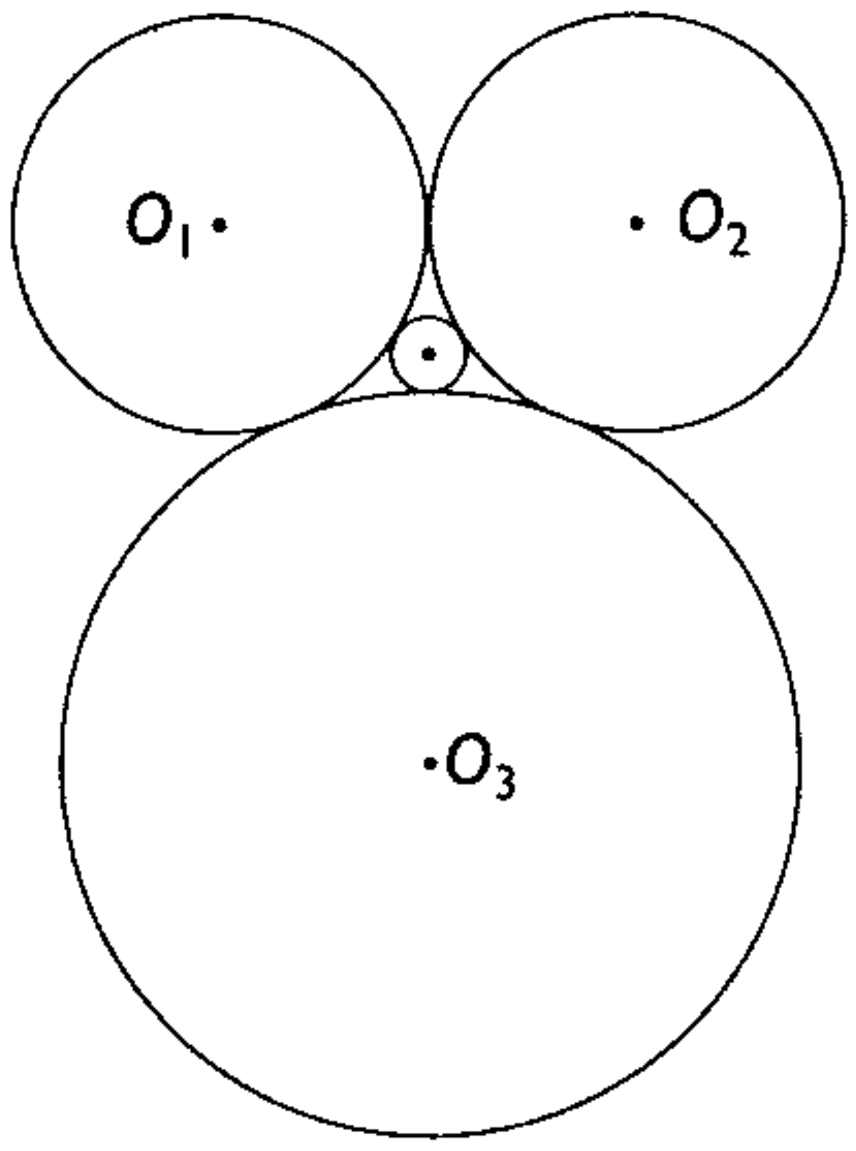


Figura (1)

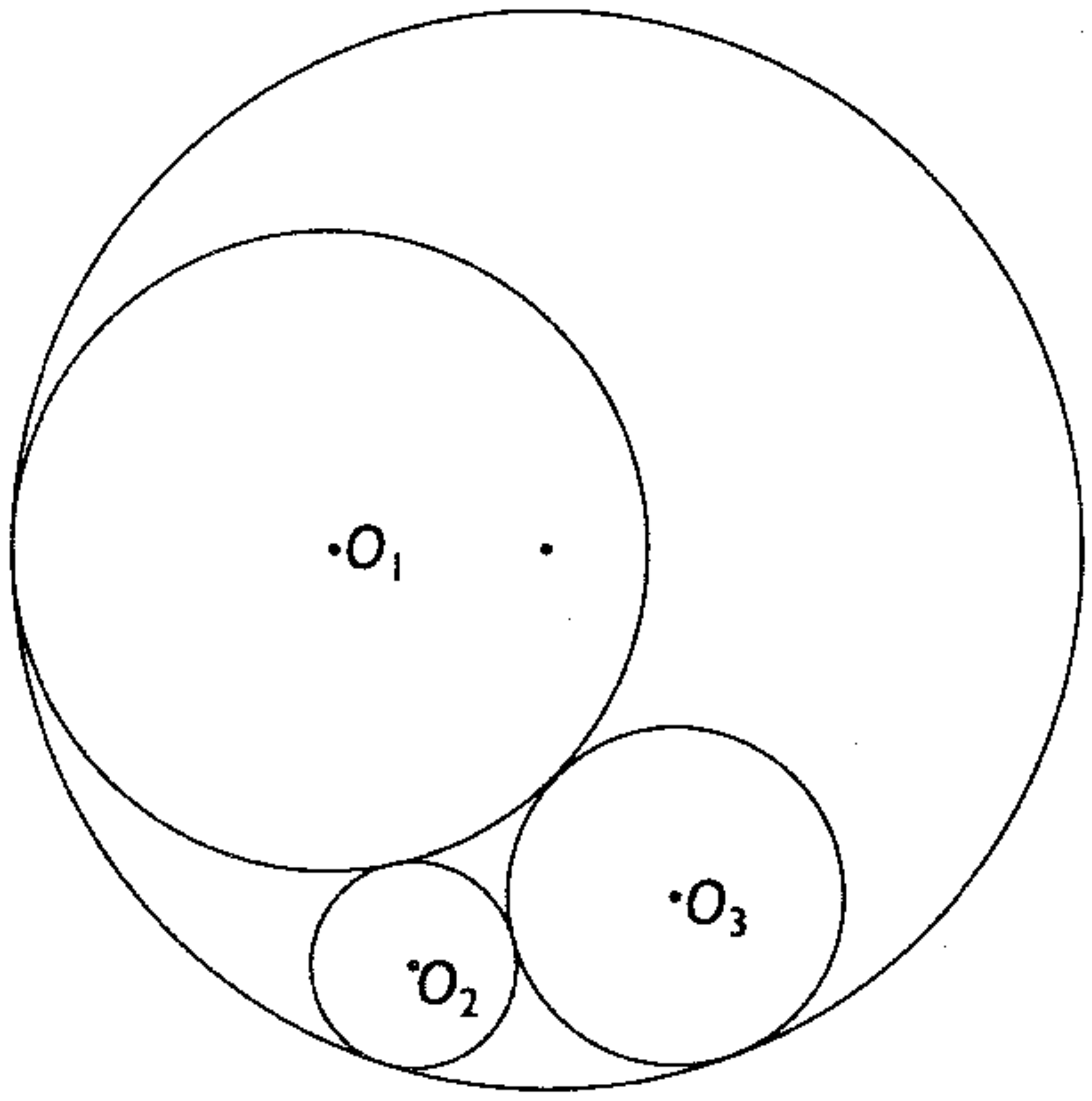


Figura (2)

El teorema de Descartes se expresa de forma sencilla usando el concepto de curvatura de un círculo. En principio, definimos la curvatura de un círculo como el inverso de su radio: $\varepsilon = 1/r$.

En el caso de cuatro circunferencias mutuamente tangentes, si todos los contactos son externos, entonces convendremos en que todas las curvaturas son positivas, pero si una circunferencia encierra a las demás, entonces a este le asignaremos curvatura negativa.

Llamamos entonces ε_1, ε_2, ε_3 y ε_4 a las curvaturas de cuatro circunferencias mutuamente tangentes, el teorema de Descartes afirma que se cumple la relación

$$2\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2\right)=\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4\right)^2$$

Este resultado que se había perdido fue redescubierto en 1937 por el premio nobel de Química Sir Frederic Soddy, quien lo extendió al caso de esferas en el espacio, e incluso publicó en la revista Nature un poema alusivo, titulado The kiss precise.

Descartes hablaba en su carta solo de la situación mostrada en la figura (1), pero es válido también para la figura (2).

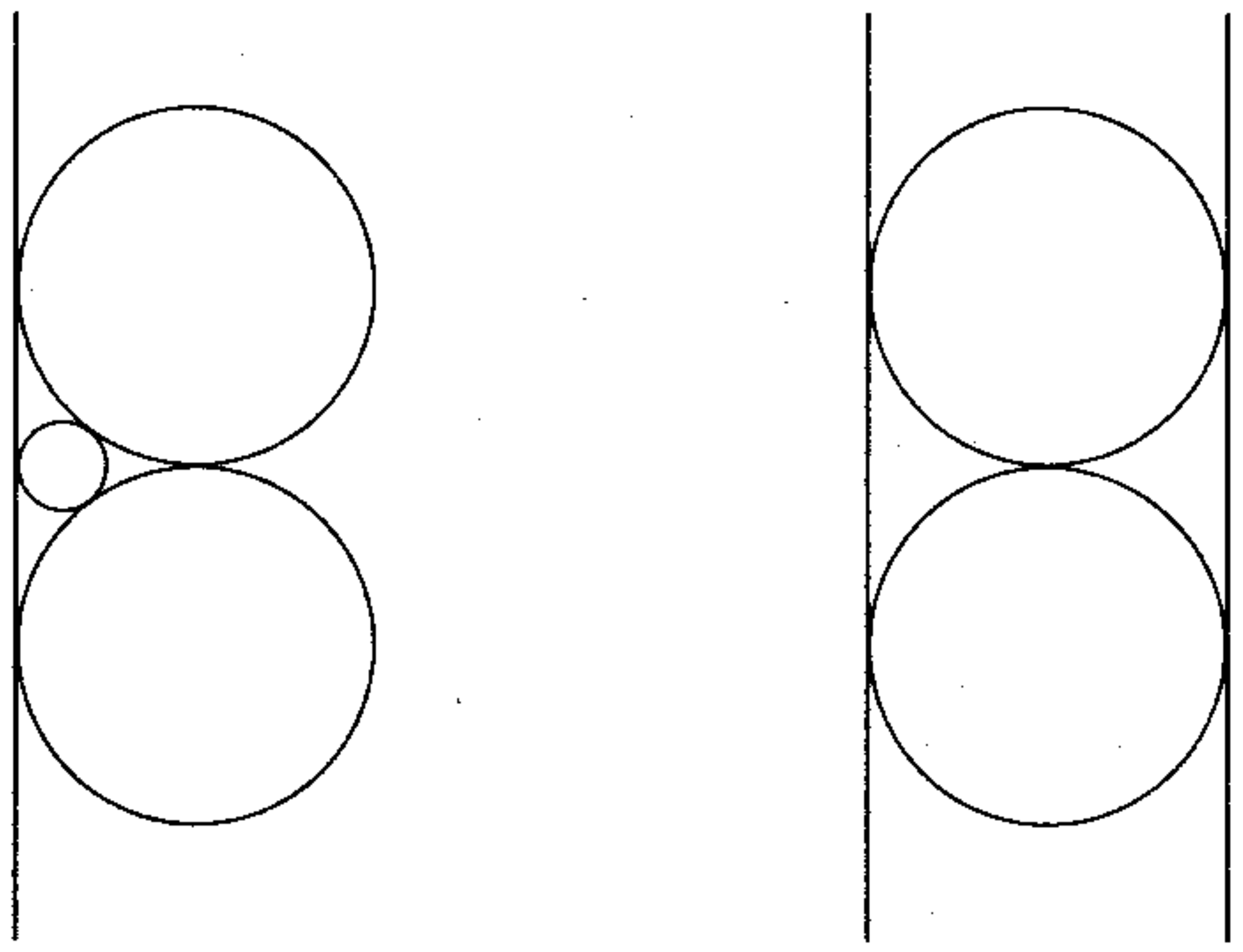


Figura 15.114

Incluso es válido cuando intervienen rectas, considerando que estas tiene radio infinito y curvatura cero.

Para una demostración del teorema de Descartes puede verse el libro de Coxeter (*Fundamentos de Geometría*, Toronto, Canadá, marzo de 1961).

Recientemente, en el libro de Hidetosi Fukayama (1989) *Japanese temple Geometry: San Gaku*, se publica cómo calcular el radio de la cuarta circunferencia de Descartes, tangente exteriormente a los tres primeros en función de los radios de estos.

La demostración está tomada de un libro japonés del siglo XIX y utiliza la distancia entre los puntos de tangencia dos a dos de los tres primeros círculos y una astuta semejanza de triángulos rectángulos convenientemente elegidos.

Una demostración alternativa, también elemental, del teorema de Descartes aparece en la excelente colección de problemas de Geometría Plana (en ruso) *Zadachi po planimetrii* (Vol. 1) de Victor Prasalov (problema 3.23b). (Nauka, Moscú, 1991).

NOTA

Circunferencias de Soddy. Con centro en tres puntos distintos, tracemos tres circunferencias que sean tangentes entre sí, entonces hay exactamente dos circunferencias tangentes a las tres circunferencias dadas.

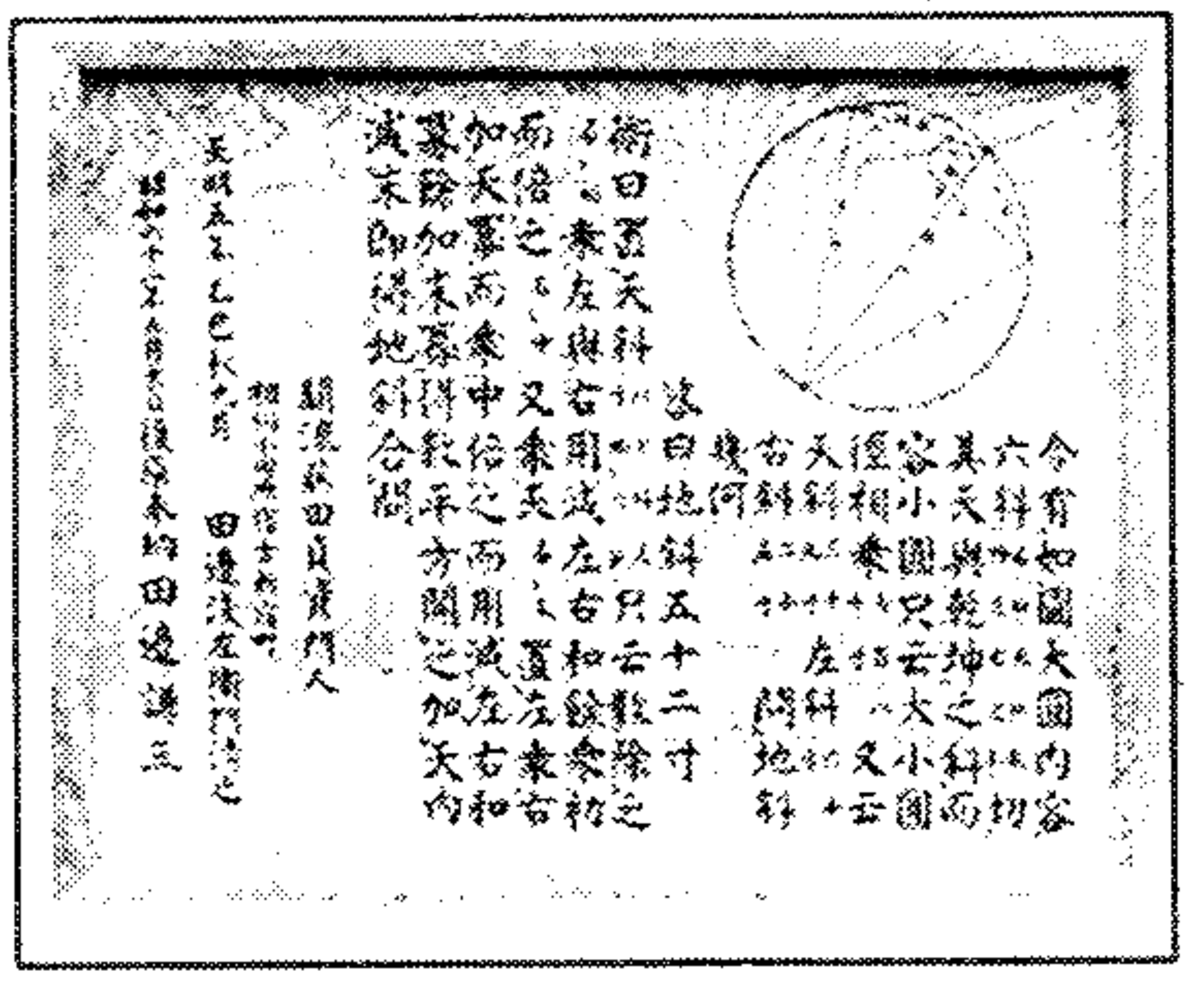
(Frederick Soddy, 1877-1956)

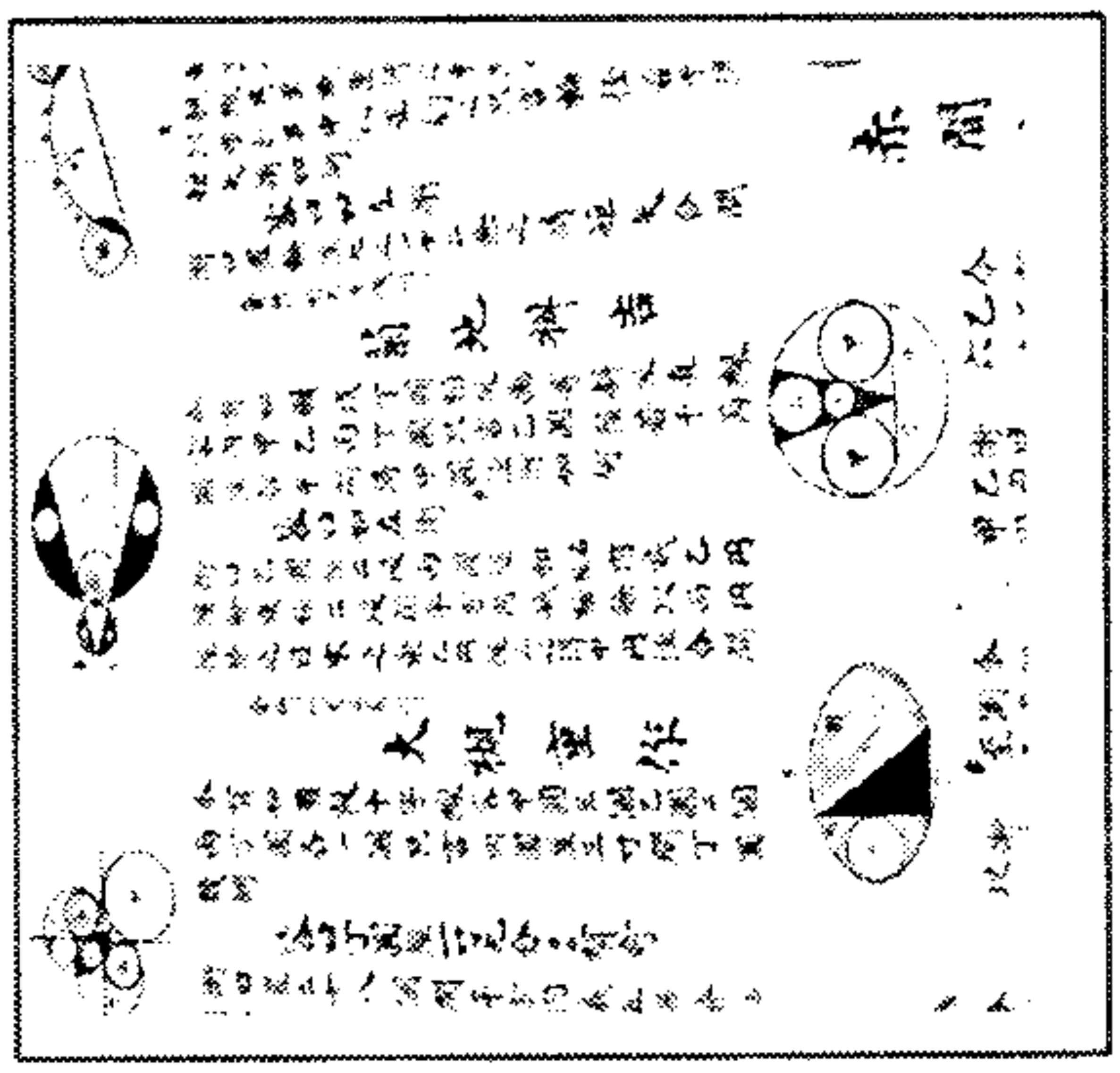
FUENTE: http://garcia.capitan.auna.com/bella/htm/soddy.htm

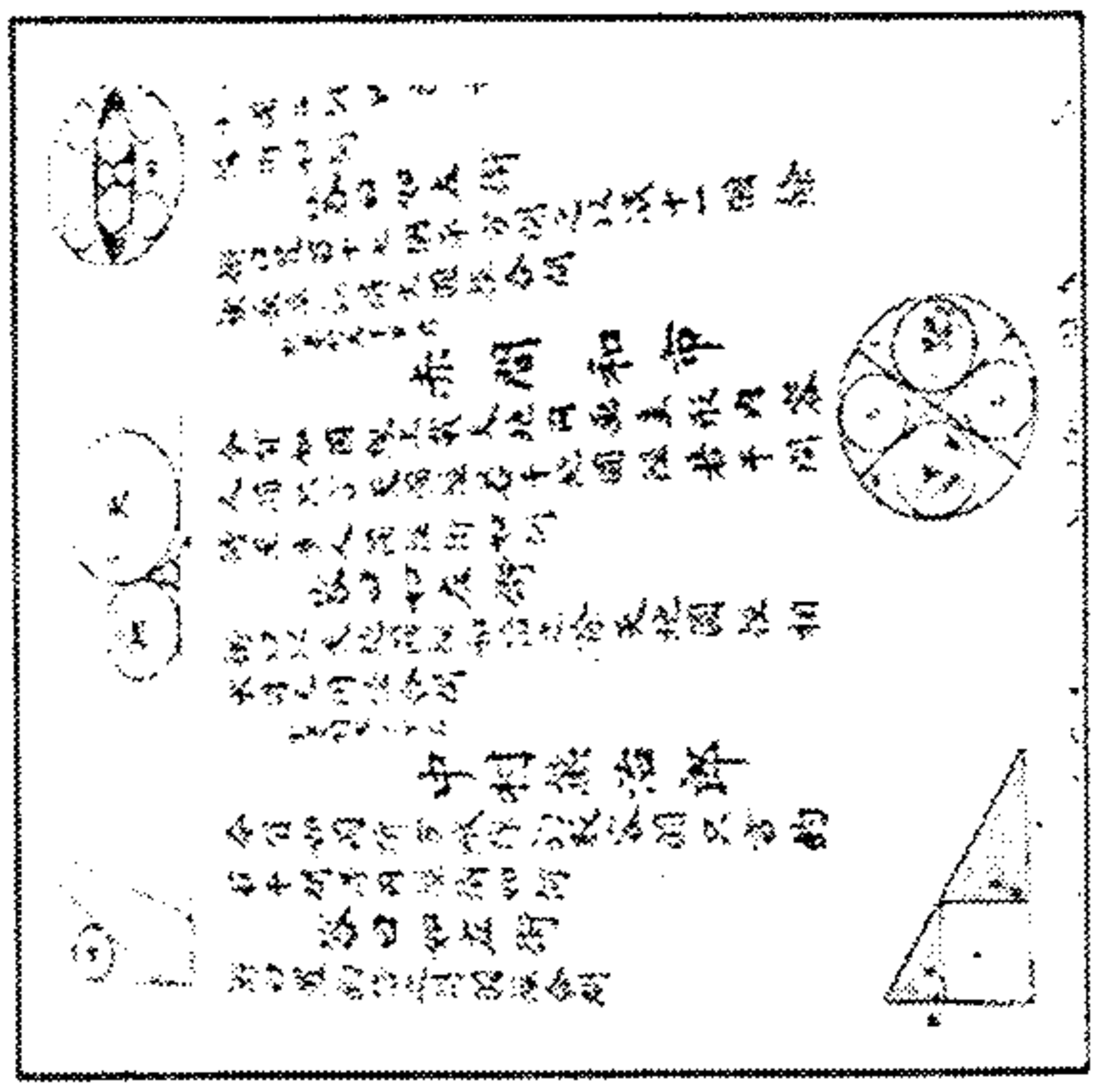
LECTURA

SANGAKU, LAS TABLILLAS MATEMÁTICAS

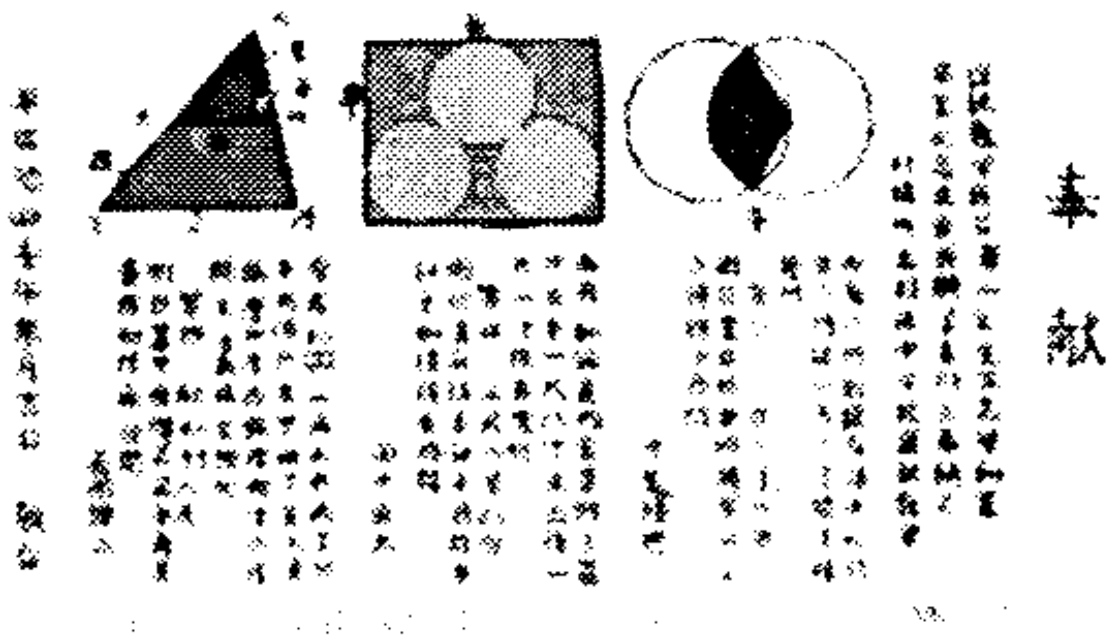
Durante un periodo en el que Japón se encontró aislado del resto del mundo, una modalidad única de matemáticas floreció en los templos y santuarios del país. Matemáticos aficionados construyeron teoremas geométricos sobre elegantes tablillas de madera llamadas Sangaku (literalmente tablillas matemáticas).







Todas las Sangaku recuperadas pertenecen al periodo Edo (principios del siglo XVII a mediados del XIX). Es destacable que fueran elaboradas por mercaderes y granjeros que estudiaron matemáticas por pura diversión. Son tablillas bellamente ilustradas que contienen la solución a un problema de geometría. Curiosamente, no incluyen la demostración de la solución, según el profesor Hidetoshi Fukagawa, aparentemente las tablillas se dejaban como un regalo a los dioses, pero en realidad se enseñaban y se colgaban como un reto para que otros intentaran dar con la demostración. Luego del siglo XIX la tradición de los Sangaku desapareció. Su redescubrimiento se debe a Fukagawa que se dedicó a descifrar las tablillas. En 1989 publicó con Daniel Pedoe la monografía más completa sobre las sangaku: *Japanese temple geometry problems*. Este libro describe un buen número de teoremas geométricos. Un ejemplo destacable es el teorema de Soddy publicado en 1936 por el premio nobel británico Frederick Soddy. Fukayawa y Pedoe encontraron que una solución idéntica fue inscrita en una Sangaku colocada en un santuario de la prefectura de Kanagawa en 1822.



Tablillas de madera en la que los antiguos japoneses escribían la solución de bellos problemas geométricos.

FUENTE: SHELVKOV, Eugeny A., *Saberes*. Diagonal. saberes@diagonal.periodico.net

BIOGRAFÍA

CLAUDIO PTOLOMEO (100 - 170)

Nació en Tolemaida Herminia (el alto Egipto) aproximadamente en el año 85 d.n.e y murió en Alejandría en el año 165 d.n.e.

Ptolomeo fue un gran astrónomo, matemático, geógrafo y físico. Su entrenamiento y práctica astronómica la llevó a cabo desde Alejandría. En sus escritos reconoce dos maestros: Theon de Smyrna y Syrus del cual se conoce poco en la actualidad. Ptolomeo escribió una **Sintaxis matemática** que mereció el reconocimiento de los antiguos. Muy pronto precedió al título el calificativo superlativo de grande, megiste y los árabes al traducirla, la titularon con el calificativo precedido de artículo; **al-Magisti**. Gerardo de Cremona, al realizar la versión latina de Toledo en el año 1175, sin comprender demasiado el sentido de la palabra, escribió **Almegisti** y finalmente adquirió la desinencia latina para convertirse en substantivo neutro: **Almagestum.**

El **Almagesto** de Ptolomeo concibe la Tierra, bien asentada, en el centro del Universo describiendo el movimiento de los astros a su alrededor de modo más conveniente para poder guardar las apariencias.

Sus aportes

- **El Almagesto** que constituye la primera sistematización de la hoy llamada **Trigonometría plana y esférica.**
- Construyó la tabla de cuerdas partiendo del valor de la cuerda de 1°, desde 0° hasta 180° para fracciones menores de 30° utilizó la interpolación lineal.
- Su teoría geocéntrica describía un universo basado en el sistema descrito por Aristóteles en donde la Tierra se encontraba fija y rodeada por 8 esferas.
- Planteó el teorema del cuadrilátero inscrito, donde relacionó los lados opuestos y las diagonales.
- Realizó catálogo de estrellas (1022 estrellas con 48 constelaciones cuyas descripciones aún se utilizan hoy).
- Describió con detalle los instrumentos que debían utilizarse en las observaciones astronómicas y redactó una geografía basada en las informaciones que enviaban las legiones romanas que recorrían el mundo.

BIOGRAFÍA

FRANCOIS VIETTE (1540 - 1603)

Nació en Fontenay-le-comte, Francia en 1540 y falleció en París el 23 de febrero de 1603.

Matemático francés, jurista según su instrucción y género de actividad. Durante sus actividades pedagógicas en una familia influyente se le ocurrió el plan de un nuevo sistema astronómico, que debía sustituir el sistema de Copérnico, incompleto según su opinión. En relación con esta idea Viette dedicó muchos esfuerzos al perfeccionamiento de la trigonometría dándole su forma definitiva en Canon mathematicus (1570).

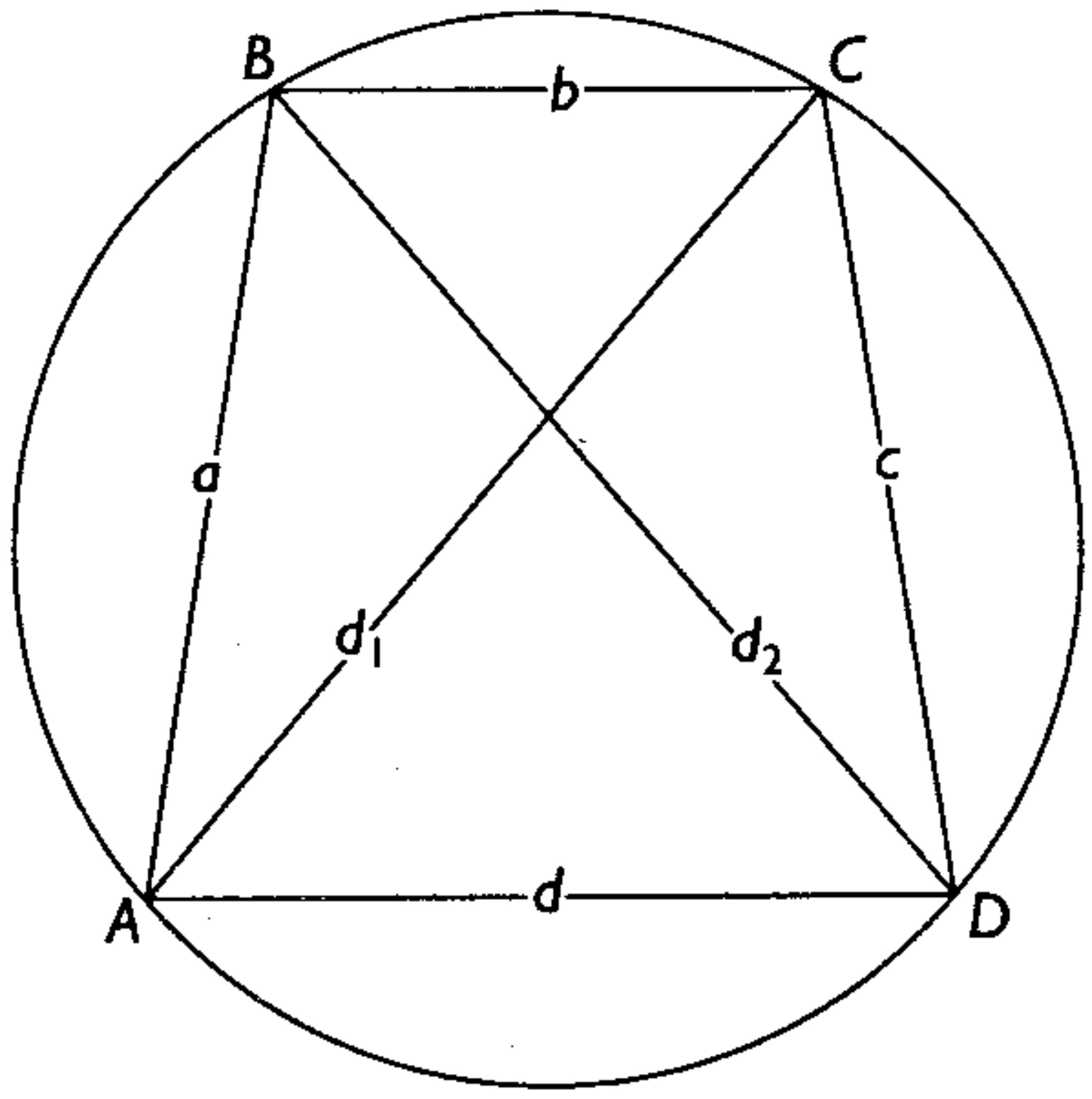
Desde el año 1584 hasta el año 1589 escribió el trabajo principal de su vida *Introducción al arte del análisis.*

Este trabajo se publicó desde el año 1591 por partes, en gran medida después de la muerte del autor y no fue totalmente completado.

La idea de Viette se determinaba por las siguientes consideraciones en la resolución de las ecuciones de 3° y 4°. Además de conjugar la efectividad de los métodos algebraicos con el rigor de la construcciones geométricas antiguas, bien conocidas por Viette y que representaban según su opinión modelos de auténtico análisis científico.

Conoció a Diofanto y Cardano. Se ocupó finalmente de diversas cuestiones geométricas. Uso el mismo sistema que Arquímedes para calcular el número pi (π), con polígonos de muchos lados. Con un polígono de 393216 lados obtuvo un valor de pi con 10 decimales. Una gran hazaña para su época también encontró una expresión de pi basado en el cálculo de límite

$$\pi = 3 + 17/120$$



$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{a.d + b.c}{a.b + c.d}$$

Problema 1

En una circunferencia se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{CD}$ y $AD = 2(AB)$. Calcule la $m\overset{\frown}{CD}$.

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 45° E) 30°

Resolución

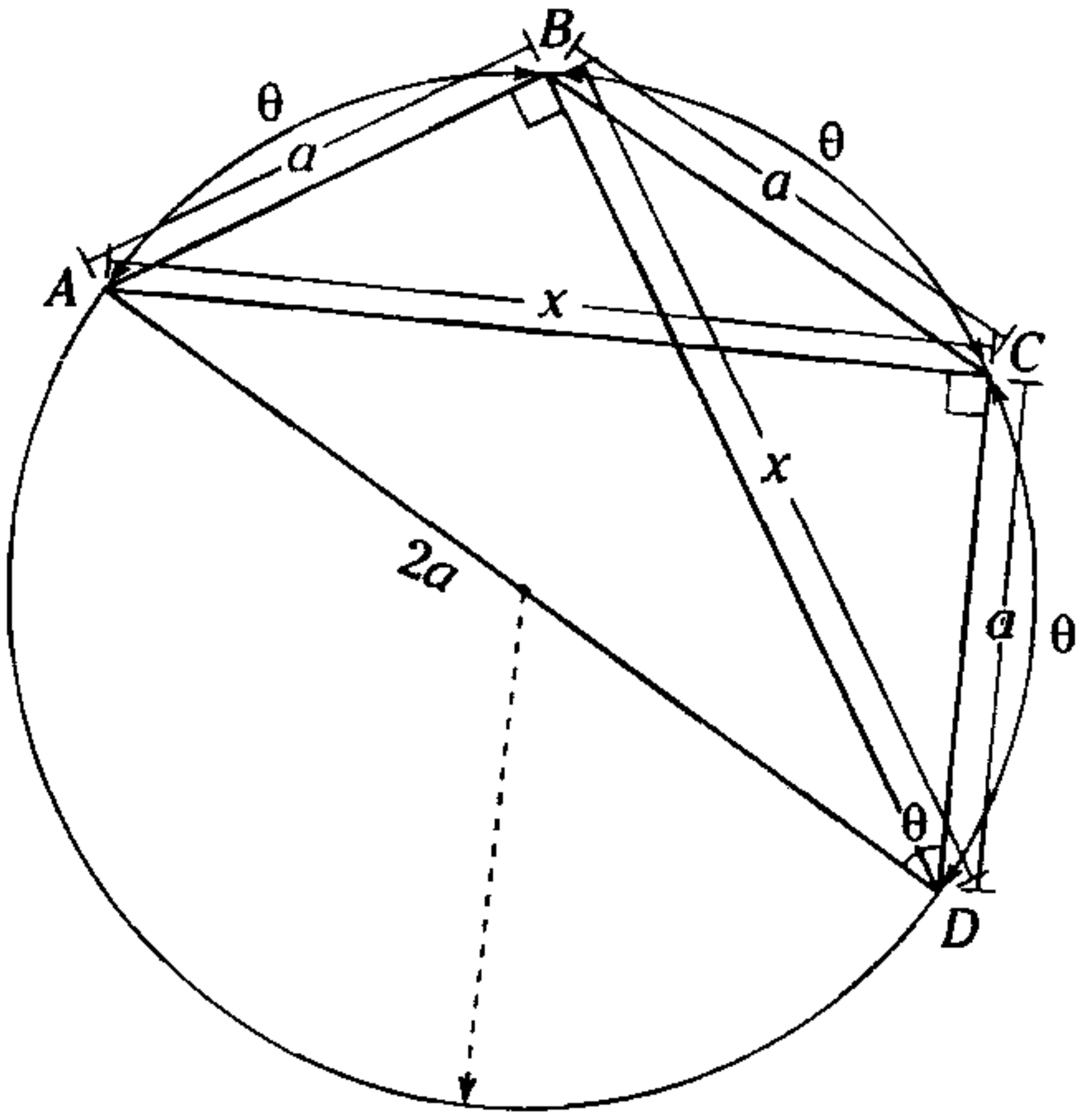


Figura 15.108

Piden $m\overset{\frown}{CD} = \theta$

Como $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{CD} = \theta$

$\rightarrow \ AB = BC = CD = a$

Del dato $AD = 2a$

De la figura 15.108 $m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{BD}$

$\rightarrow \ AC = BD = x$

En ⏢$ABCD$: teorema de Ptolomeo

$(x)(x) = (a)(2a) + (a)(a)$

$x = 3a^2 \ \rightarrow \ x = a\sqrt{3}$

Luego

◺ACD (Notable 30° y 60°)

$\rightarrow \ \theta = 60°$

CLAVE A

Problema 2

En un cuadrilátero $ABDE$ se ubica el punto L en $\overline{BD}$, tal que $ABLE$ es un cuadrilátero inscriptible, la $m\sphericalangle BEA = m\sphericalangle LED$, $LD = 2(BL) = 8$, $DE = 2(LE)$ y $(AB)(LE) = 40$. Calcule AE.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución

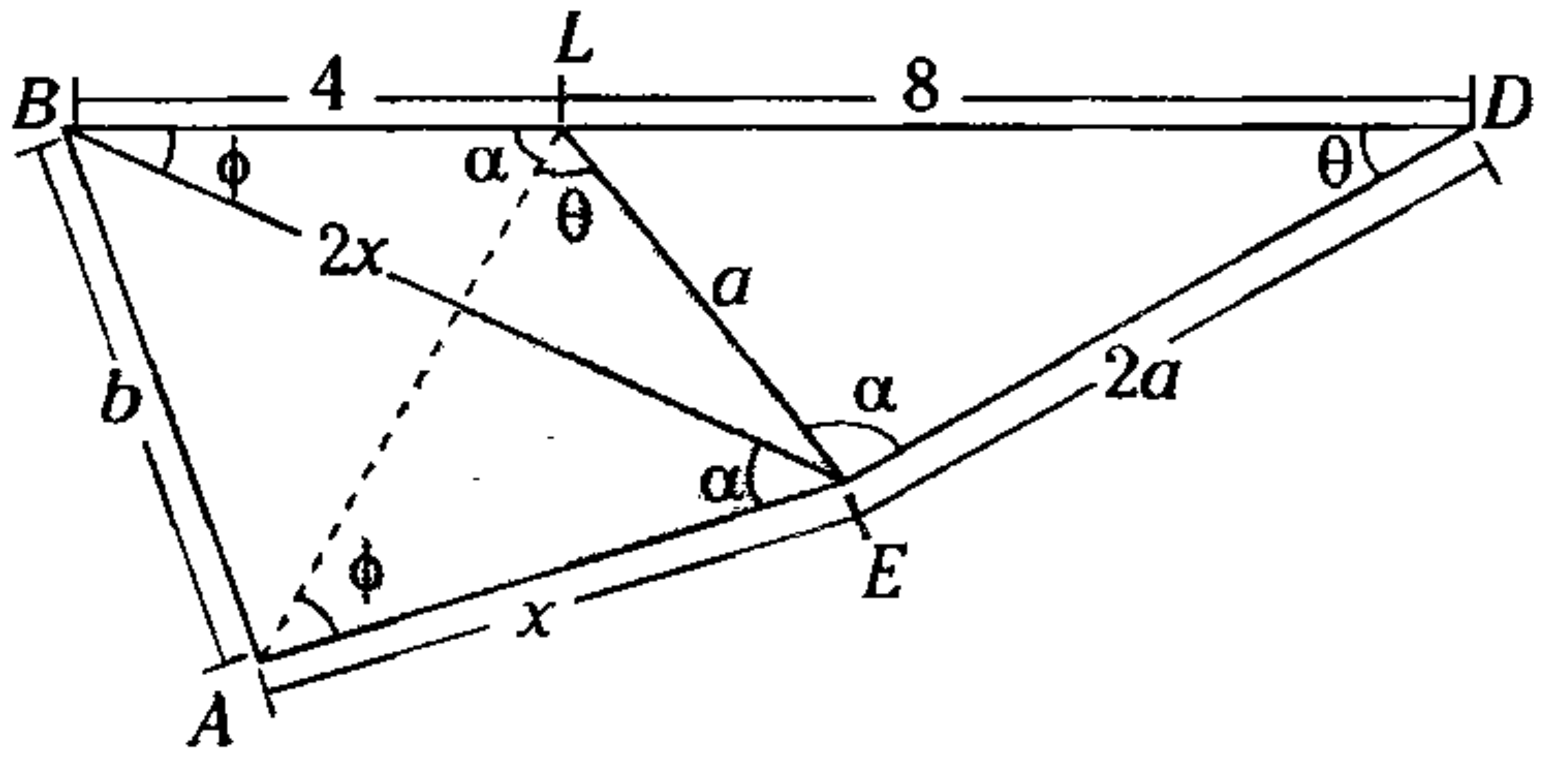


Figura 15.109

Piden $AE = x$

Dato $m\sphericalangle BEA = m\sphericalangle LED = \alpha$

$(AB).(LE) = 40 \ \rightarrow \ b \times a = 40$

Como $ABLE$ es ⏢ Inscriptible:

$m\sphericalangle BLA = \alpha$, $m\sphericalangle LBE = m\sphericalangle LAE = \phi$

$\triangle LDE$: si $m\sphericalangle LDE = \theta \ \rightarrow \ m\sphericalangle ALE = \theta$

$\triangle LAE \sim \triangle DBE$ (A.A.A.)

$$\frac{x}{BE} = \frac{a}{2a} \ \rightarrow \ BE = 2x$$

y $$\frac{x}{BE} = \frac{AL}{12} \ \rightarrow \ AL = 6$$

⏢$ABLE$: teorema de Ptolomeo

$(2x)(6) = x(4) + ab$

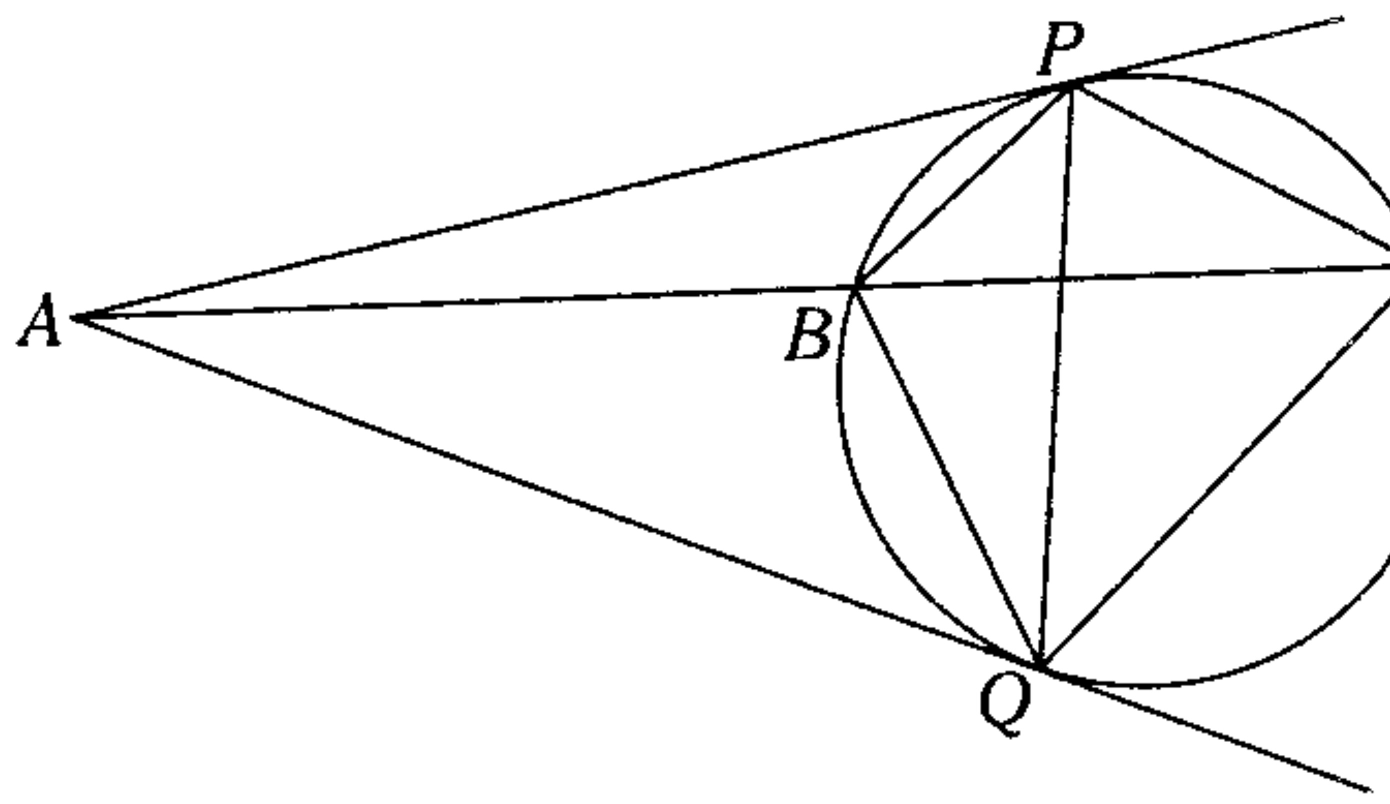
$12x = 4x + 40$

$\therefore \ x = 5$

CLAVE C

Problema 3

Según la figura, $(BP)(CQ) = 10$; P y Q son puntos de tangencia. Calcule $(BC)(PQ)$.



A) 10 B) 2 C) 15
D) 18 E) 20

Resolución

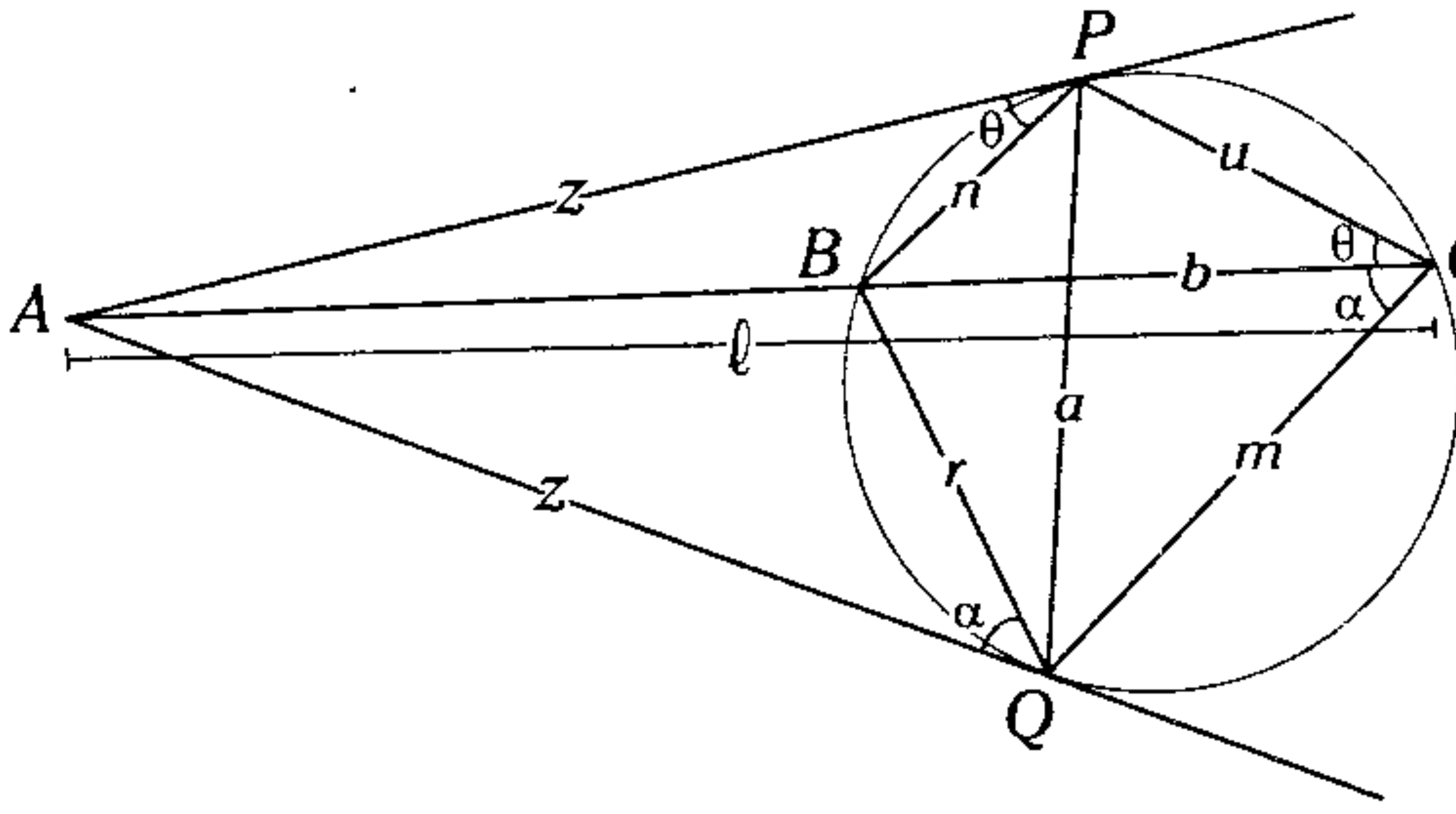


Figura 15.110

Piden $(BC)(PQ)$

Sea $BP = n$, $CQ = m$

$BC = b$ y $PQ = a$

Dato $mn = 10$

Según la figura 15.10

$\triangle APB \sim \triangle ACP$ (A.A.A.)

$$\frac{u}{n} = \frac{\ell}{z} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle AQB \sim \triangle ACQ$

$$\frac{m}{r} = \frac{\ell}{z} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\frac{u}{n} = \frac{m}{r} \rightarrow ur = mn \qquad \text{(III)}$$

Luego $\square BPCQ$ (teorema de Ptolomeo)

$$mn + ur = ab$$

Reemplazando

$$nm + mn = ab$$

$$ab = 2mn$$

$$\therefore \quad ab = 20$$

CLAVE E

Problema 4

Se tiene un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. Si la diferencia de los cuadrados de las longitudes de las diagonales es 400 y una de sus diagonales es diámetro, calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de dichas diagonales.

A) 40 B) 20 C) 10
D) 8 E) 15

Resolución

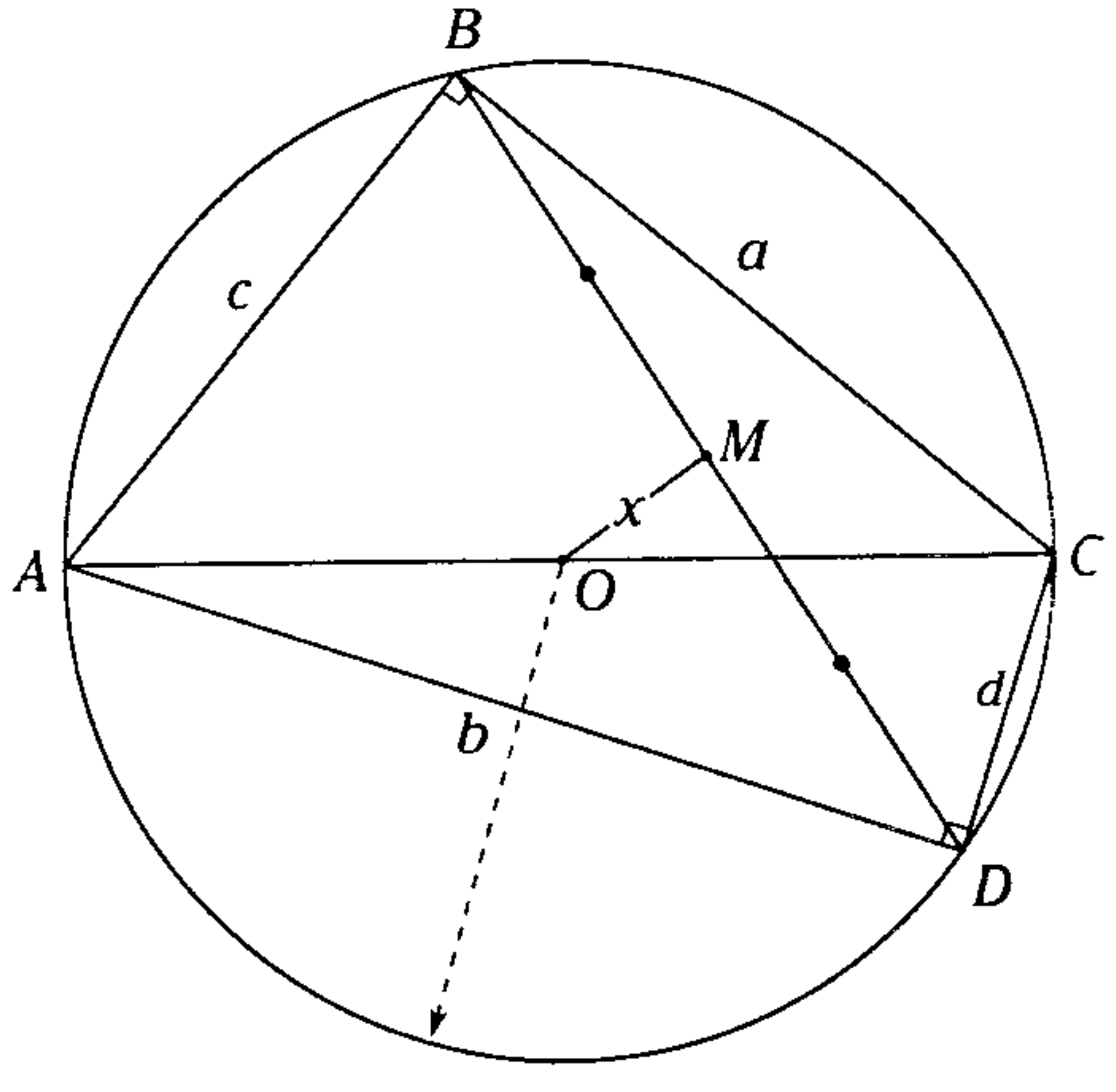


Figura 15.111

Piden $OM = x$

Dato

$AC^2 - BD^2 = 400$

Por teorema de Euler en el $\triangle ABCD$

$$c^2 + a^2 + d^2 + b^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4(x)^2 \quad \text{(I)}$$

$\triangle ABC$: $(AC)^2 = c^2 + a^2$

$\triangle ADC$: $(AC)^2 = b^2 + d^2$

Reemplanzado en (I)

$$(AC)^2 + (AC)^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4(x)^2$$

$$(AC)^2 - (BD)^2 = 4x^2$$

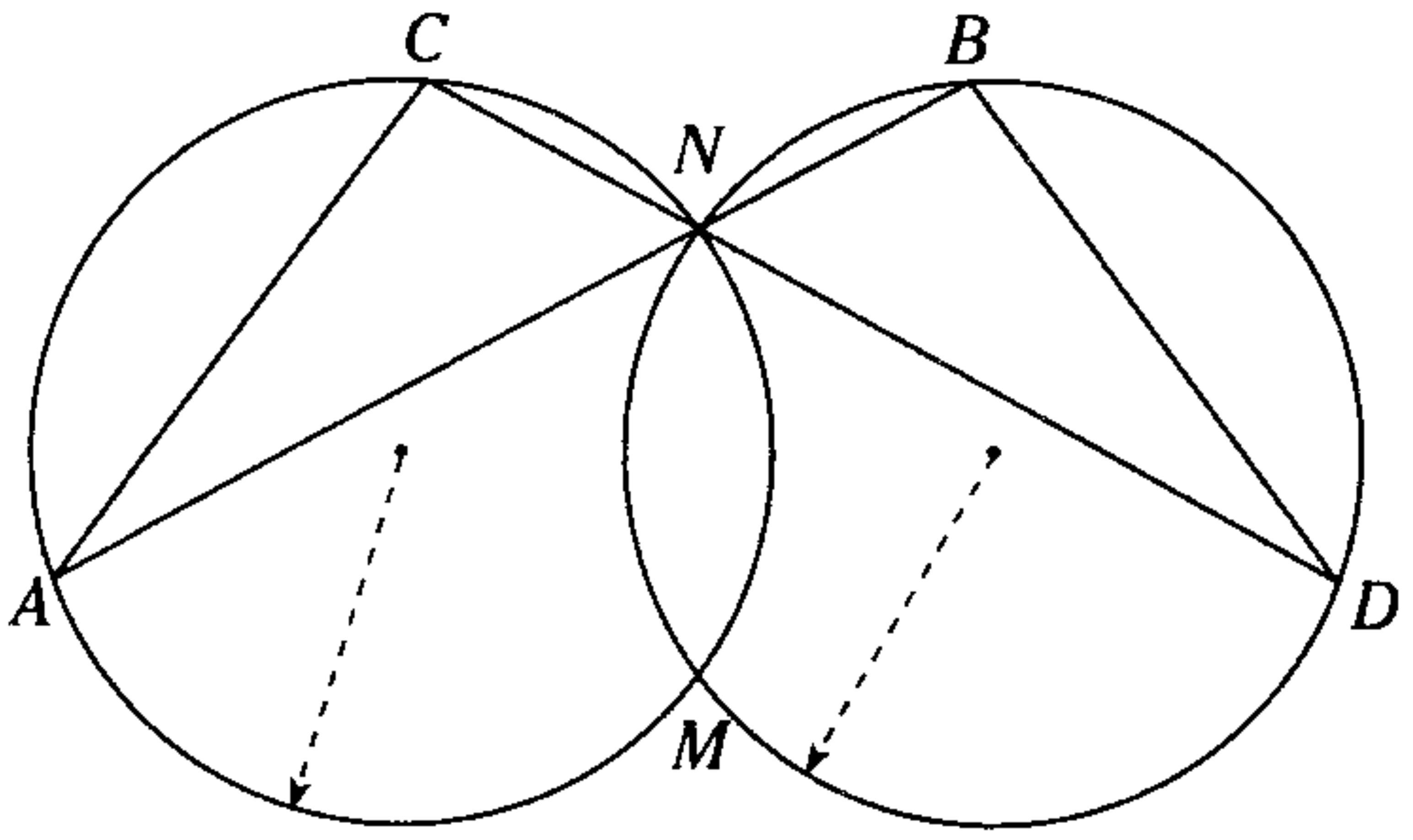
$$400 = 4x^2$$

$$\therefore \quad x = 10$$

CLAVE C

Problema 5

Según la figura, $m\widehat{CA} = m\widehat{AM} = m\widehat{BD} = m\widehat{MD} = 120°$, $m\widehat{CN} = m\widehat{NB}$, $AB = \ell$ y $(CN)(CN + AB) = b$. Calcule BD.



A) $\sqrt{3\ell^2 - 2b}$

B) $\sqrt{2\ell^2 - b}$

C) $\sqrt{\ell^2 - 3b}$

D) $\sqrt{\ell^2 - 2b}$

E) $\sqrt{2\ell^2 + b}$

Resolución del problema 5

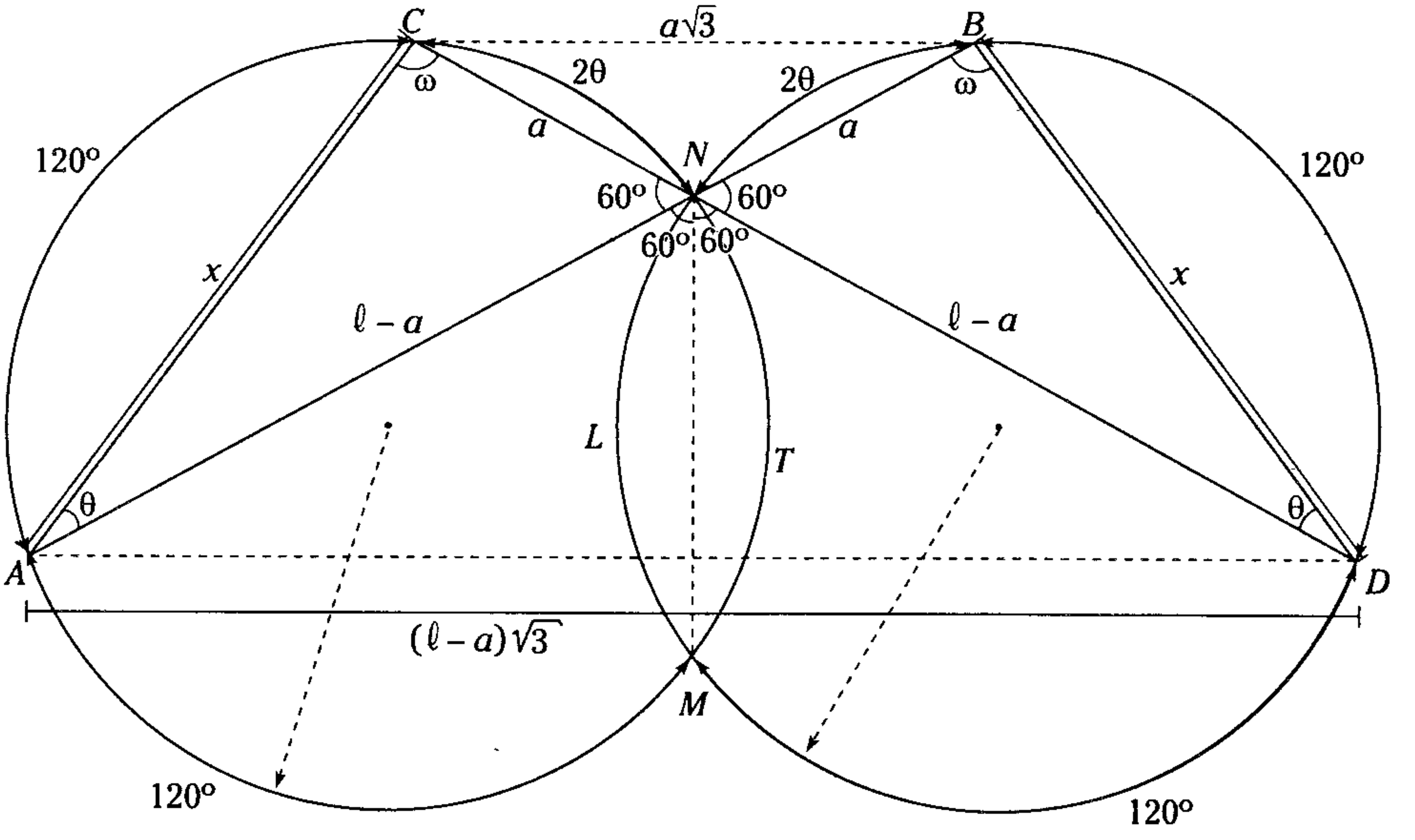


Figura 15.112

Piden $BD = x$

De la figura 15.112, $m\widehat{NLM} = m\widehat{NTM}$ entonces las circunferencias son congruentes.

Debido a que la $m\widehat{CN} = m\widehat{NB}$ y las circunferencias son congruentes

$$CN = NB = a \text{ y } CB = a\sqrt{3}$$

también

$$CA = BD = x$$

$\triangle ACB \cong \triangle DBC$ (L.A.L.)

$$\rightarrow AN = ND$$

Por lo cual $ACBD$ es un trapecio isósceles

En $ACBD$: Por teorema de Ptolomeo

$$x.x + a\sqrt{3}(\ell - a)\sqrt{3} = \ell.\ell$$

$$x^2 + 3a^2 = \ell^2 - 3a\ell$$

$$x^2 = \ell^2 - 3a(\ell + a)$$

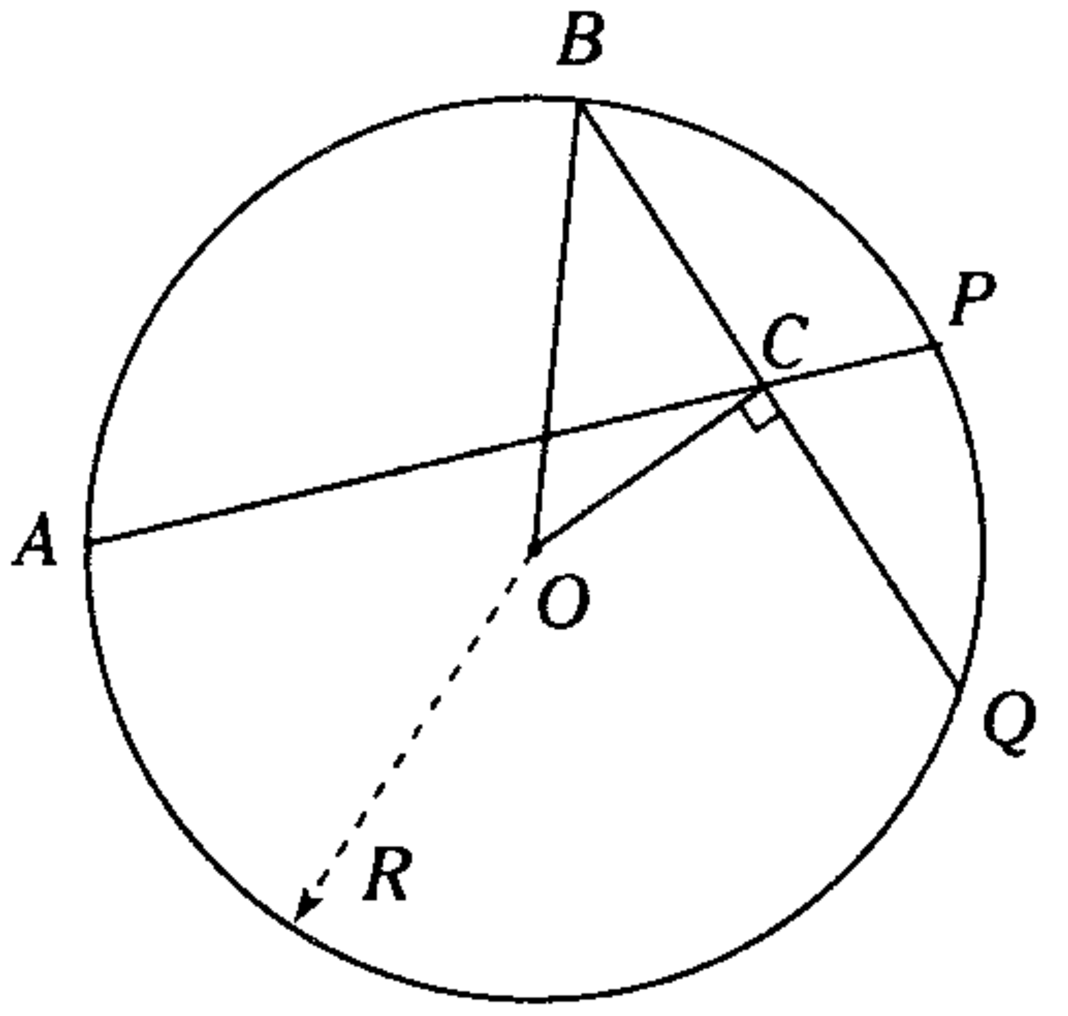
Por dato $a(\ell + a) = b$

$$\therefore\ x = \sqrt{\ell^2 - 3b}$$

CLAVE C

Problema 6

En la figura, $m\widehat{AQ} = m\widehat{AB} + m\widehat{PQ}$, si $R = 8$. ¿Cuánto distan los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{OB}$?



A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4
D) $4\sqrt{2}$ E) 6

Resolución

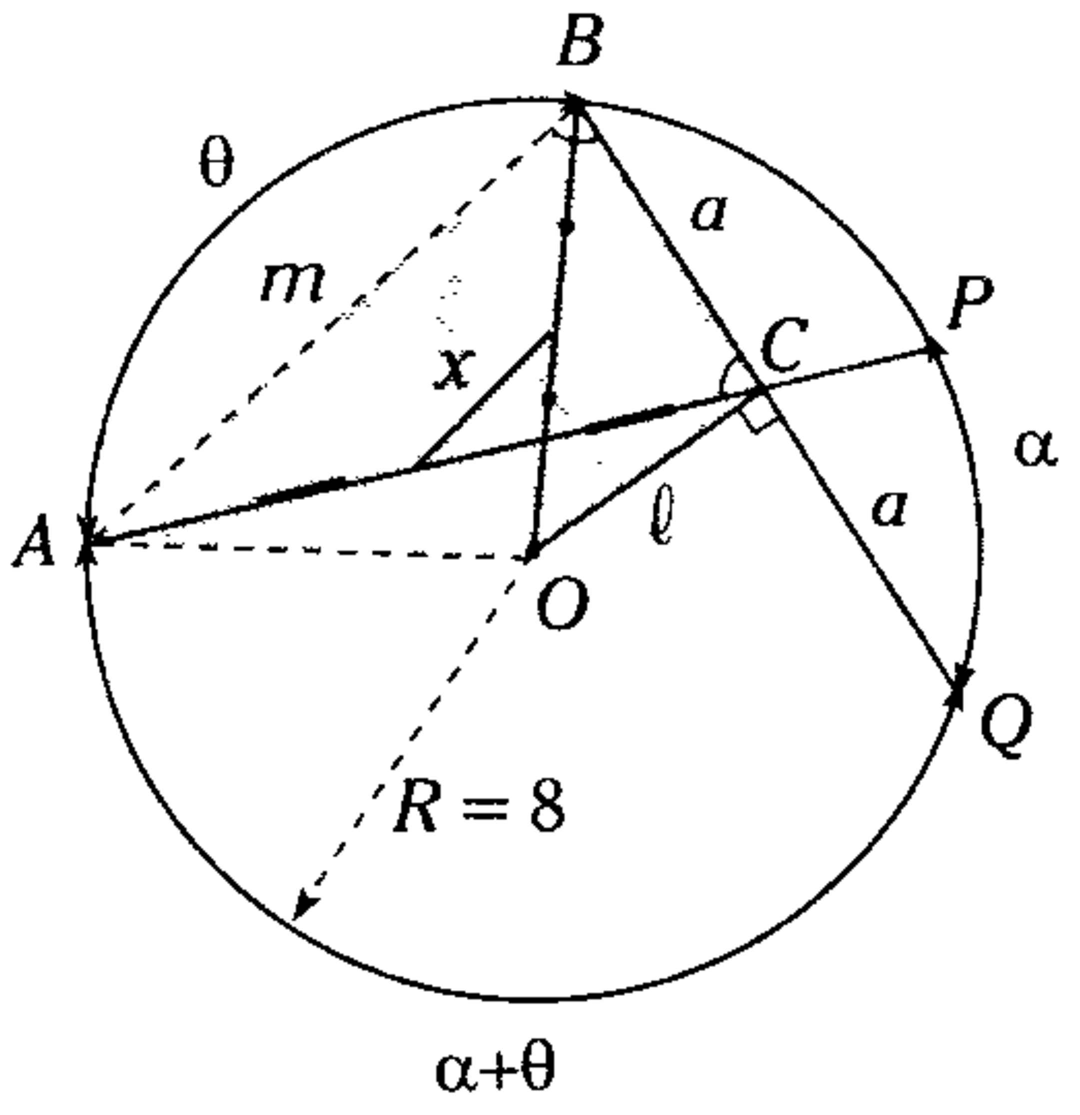


Figura 15.113

Piden x.

Dato $m\widehat{AQ} = m\widehat{AB} + m\widehat{PQ}$

Sea $m\widehat{AB} = \theta$, $m\widehat{PQ} = \alpha$

$$\rightarrow m\widehat{AQ} = \theta + \alpha$$

Por $\measuredangle$ inscrito: $m\measuredangle ABQ = \dfrac{\alpha + \theta}{2}$

Por $\measuredangle$ interior: $m\measuredangle BCA = \dfrac{\alpha + \theta}{2}$

$$\rightarrow AB = AC = m$$

Propiedad de circunferencias

$$BC = CQ = a$$

En $\square ABCO$: teorema de Euler

$$m^2 + a^2 + \ell^2 + R^2 = (R)^2 + (m)^2 + 4x^2$$

$$x^2 = \frac{a^2 + \ell^2}{4} \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle BCO$: teorema de Pitágoras

$$a^2 + \ell^2 = 8^2$$

En (I)

$$\therefore\ x = 4$$

CLAVE C

Problema 7

En un romboide $ABCD$ se traza $\overline{CM} \perp \overline{BD}$ (M es punto medio de $\overline{AD}$), la m$\measuredangle MCD = 30°$, $\overline{BD} \cap \overline{CM} = \{T\}$. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{BM}$ y $\overline{AT}$, si $TB = 8$.

A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 3
D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{5}$

Resolución

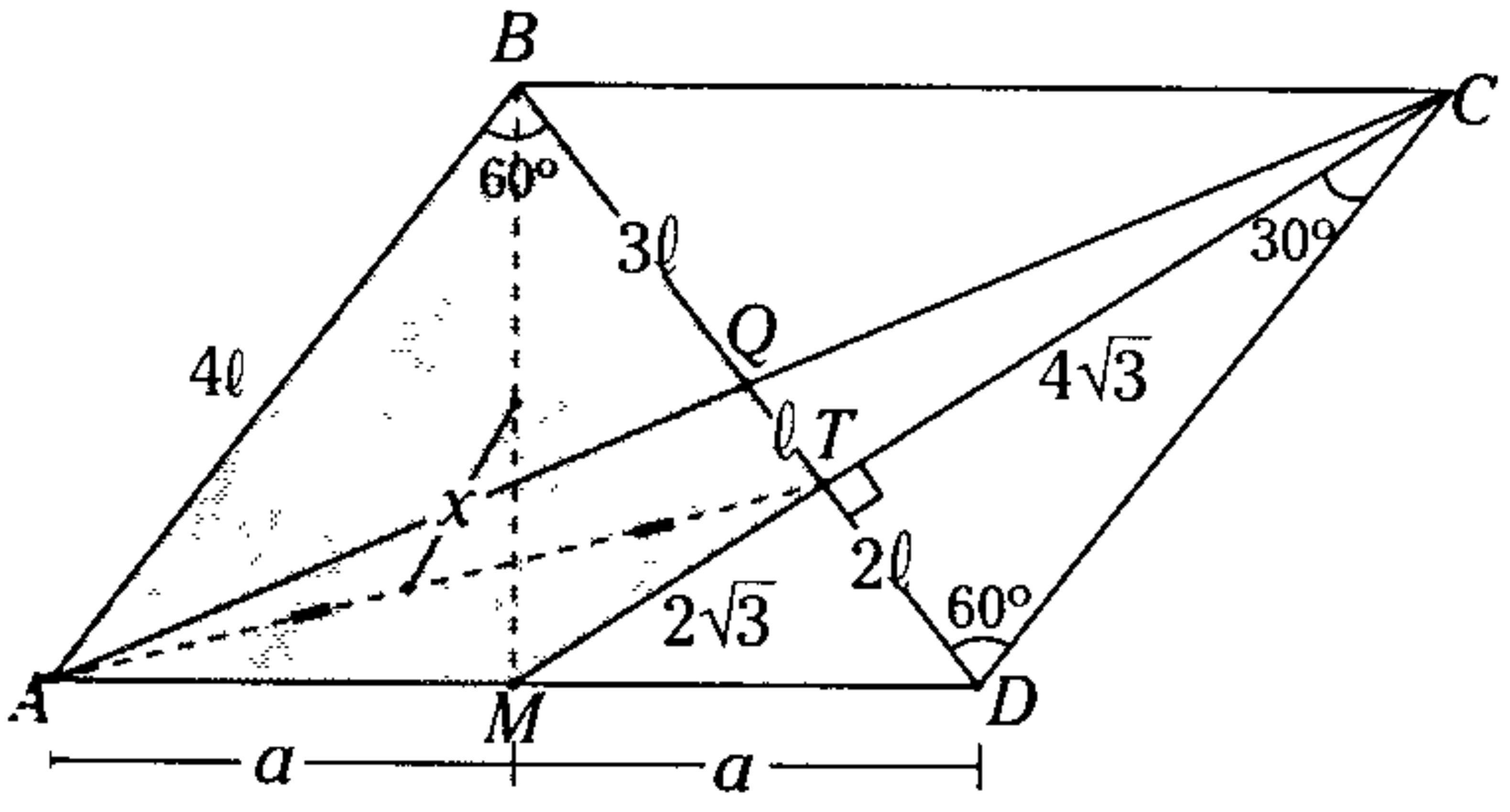


Figura 15.114

Piden x

Se traza $\overline{CA}$ → Q biseca a $\overline{BD}$

T: es baricentro del $\triangle ACD$

→ $TD = 2(QT)$

⊿CTD: notable 30°; 60° → $CD = 2(TD) = 4\ell$

$\triangle ABT$: se nota que es equilátero

Del dato

$4\ell = 8$ → $\ell = 2$

⊿BTM: teorema Pitágoras

$BM^2 = (2\sqrt{3})^2 + (8)^2$

$BM^2 = 12 + 64$

⊿MTD: teorema Pitágoras

$MD^2 = (2\sqrt{3})^2 + (4)^2$

$MD^2 = 12 + 16 = a^2$

En ⏢$ABTM$: Por teorema de Euler

$8^2 + 8^2 + (2\sqrt{3})^2 + (28) = 8^2 + (76) + 4x^2$

$64 + 12 + 28 = 76 + 4x^2$

$\therefore\ x = \sqrt{7}$

CLAVE A

Problema 8

En un cuadrado $ABCD$ se traza el cuadrante $\overset{\frown}{BD}$ de centro A, luego se ubica N en $\overset{\frown}{BD}$, tal que $\frac{BN}{ND} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ y $NC = 20$. Calcule AD.

A) $\sqrt{17}$ B) $\sqrt{15}$ C) $2\sqrt{15}$
D) $2\sqrt{17}$ E) $3\sqrt{19}$

Resolución

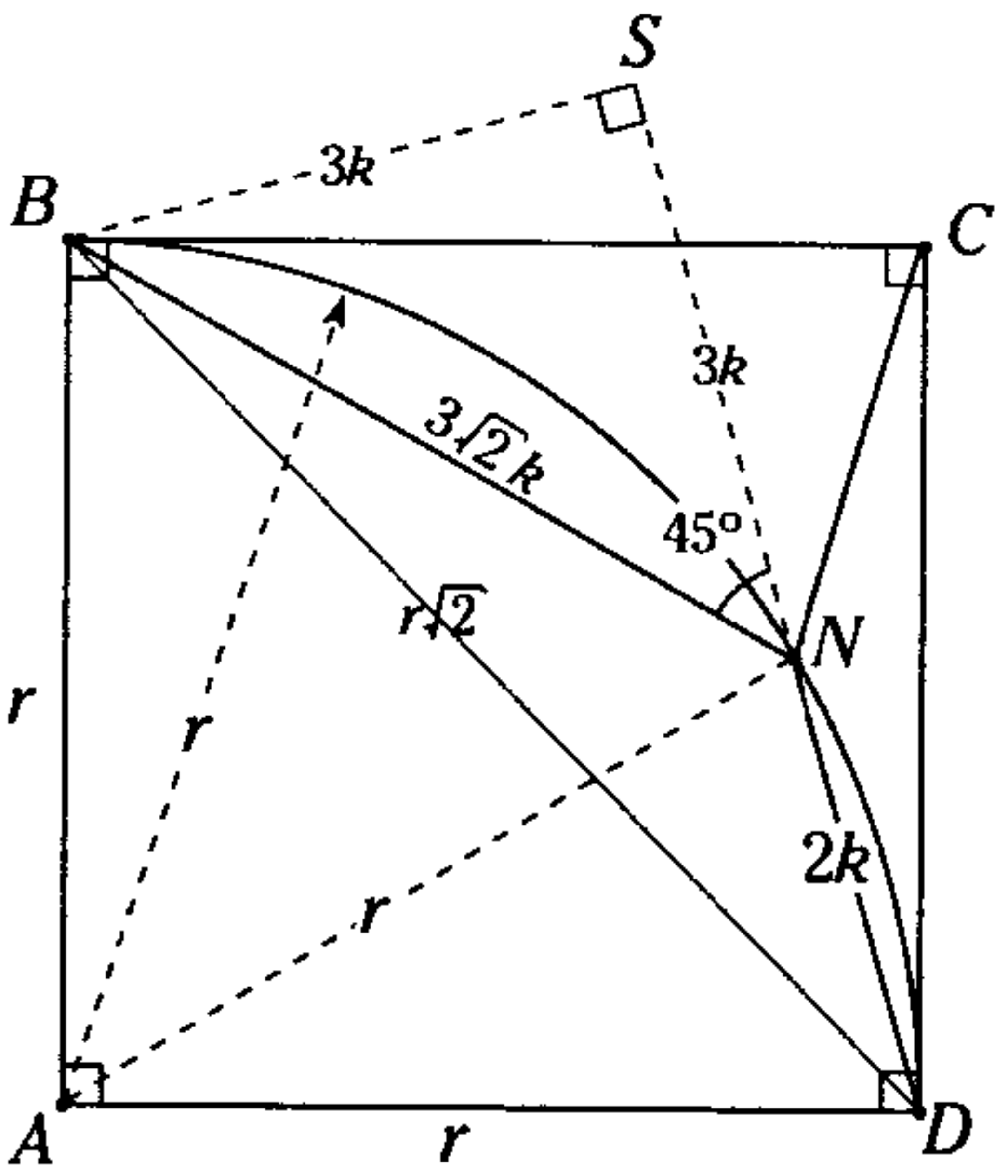


Figura 15.115

Piden $AD = r$

Dato $\frac{BN}{ND} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ → si $ND = 2k$, $BN = 3\sqrt{2}\,k$

Se prolonga $\overline{DN}$ hasta que m$\measuredangle BSN = 90°$

Se sabe que m$\measuredangle BNS = 45°$

⊿BSN: notable 45° → $BS = 3k = NS$

$\triangle BSD$: $(r\sqrt{2})^2 = (3k)^2 + (5k)^2$ (I)

En $\triangle ABCD$: teorema de Marlen

$$r^2 + CN^2 = (3\sqrt{2}\,k)^2 + (2k)^2 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II)

$$\frac{9k^2 + 25k^2}{2} + 20 = 18k^2 + 4k^2$$

$$17k^2 + 20 = 22k^2$$

$$20 = 5k^2$$

$$\rightarrow \quad k = 2$$

Reemplazando en (I)

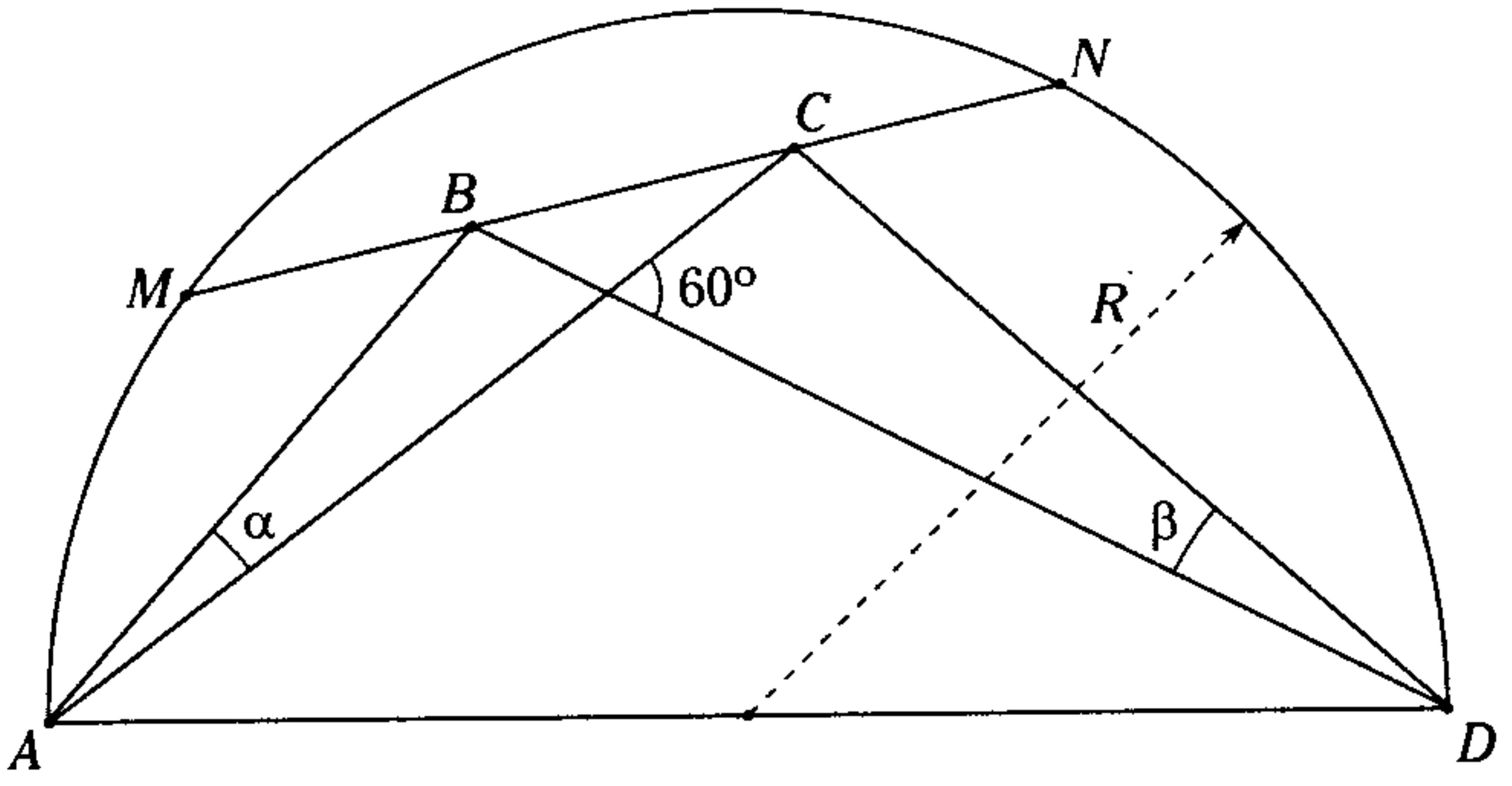
$$(r\sqrt{2})^2 = (6)^2 + (10)^2$$

$$\therefore \quad r = 2\sqrt{17}$$

CLAVE D

Problema 9

Según la figura, $MB = BC = CN$, $BD = AC$, $m\widehat{AM} + m\widehat{ND} = 90°$, $\alpha + \beta = 30°$. Calcule la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.



A) $\sqrt{21}\,R/9$ B) $\sqrt{21}\,R/6$ C) $\sqrt{42}\,R/6$ D) $\sqrt{42}\,R/9$ E) $\sqrt{14}\,R/9$

Resolución

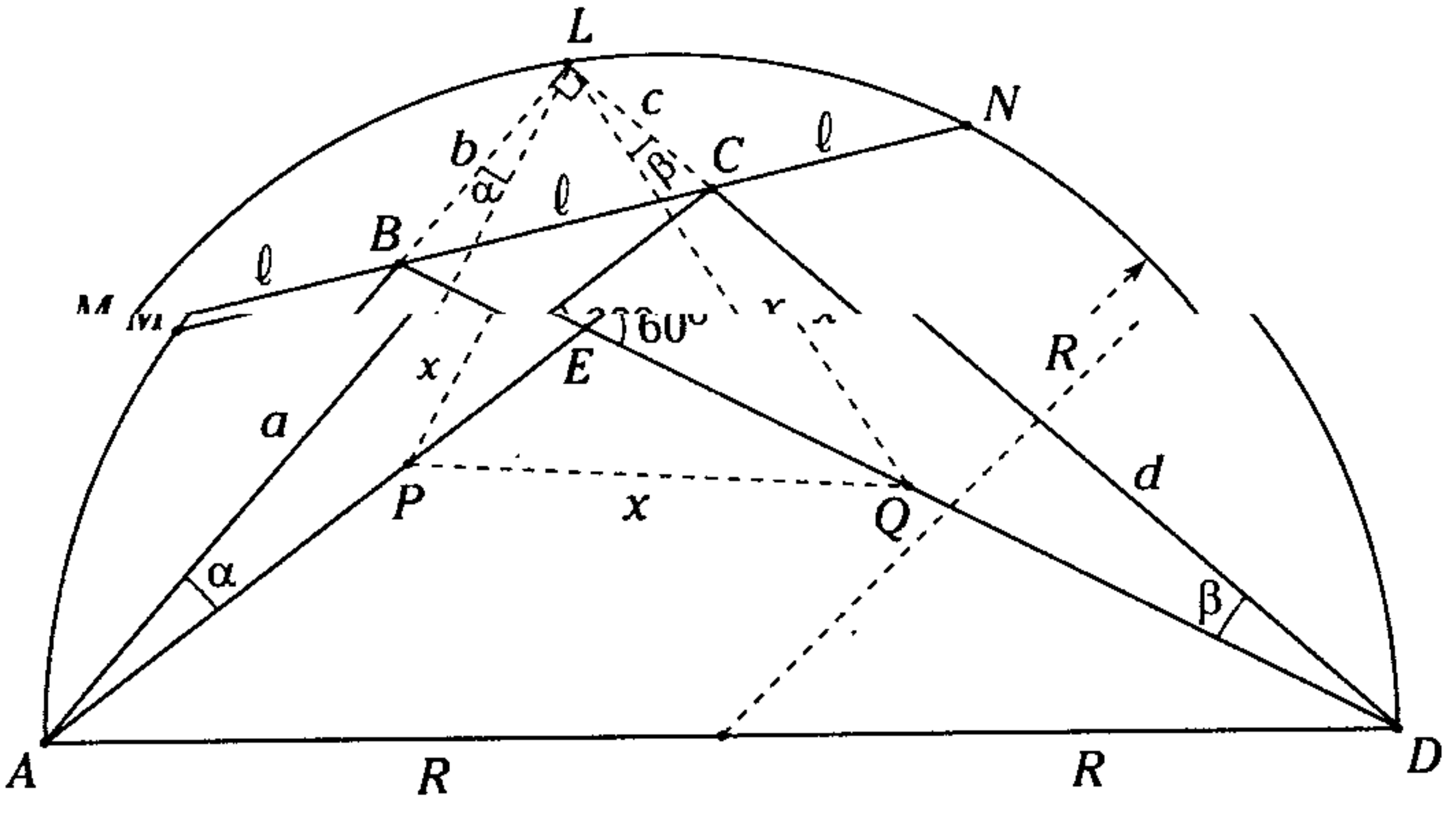


Figura 15.116

Piden $PQ = x$

Datos: $\alpha + \beta = 30°$

$m\measuredangle AED = 120°$

Se prolongan $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ que intersecan en un punto de la semicircunferencia, debido a que en el $\measuredangle ALDE$.

$$\alpha + m\measuredangle ALD + \beta = 120°$$

$$\rightarrow\ m\measuredangle ALD = 90°$$

$\triangle ALC$ y $\triangle BLD$: Se trazan las medianas $\overline{LP}$ y $\overline{LQ}$ respectivamente.

Se nota $\triangle PLQ$ es equilátero

$$\rightarrow\ AC = BD = 2x$$

De los datos se tiene que $m\widehat{MN} = 90°$

$$\rightarrow\ MN = R\sqrt{2},$$

$$MB = BC = CN = \frac{R\sqrt{2}}{3} = \ell$$

En $\square ABCD$: teorema de Euler

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = (2x)^2 + (2x)^2 + 4x^2$$

$$a^2 + \ell^2 + d^2 + (2R)^2 = 12x^2 \qquad \text{(I)}$$

$\triangle ALD$: teorema de Pitágoras

$$(a+b)^2 + (c+d)^2 = (2R)^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab + c^2 + d^2 + 2cd = 4R^2 \qquad \text{(II)}$$

$\triangle BLC$: teorema de Pitágoras

$$\ell^2 = b^2 + c^2 \qquad \text{(III)}$$

Por teorema de las cuerdas

$$a \cdot b = \ell(2\ell) \qquad \text{(IV)}$$

$$c \cdot d = \ell(2\ell) \qquad \text{(V)}$$

Reemplanzado (III) en (I)

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4R^2 = 12x^2 \qquad \text{(VI)}$$

De la relación (IV) y (V) en (II)

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4\ell^2 + 4\ell^2 = 4R^2 \qquad \text{(VII)}$$

Restando (VI) y (VII)

$$4R^2 - 8\ell^2 = 12x^2 - 4R^2$$

$$8R^2 - 8\ell^2 = 12x^2$$

$$8R^2 - 8\left(\frac{R\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 12x^2$$

$$8R^2\left[1 - \frac{2}{9}\right] = 12x^2$$

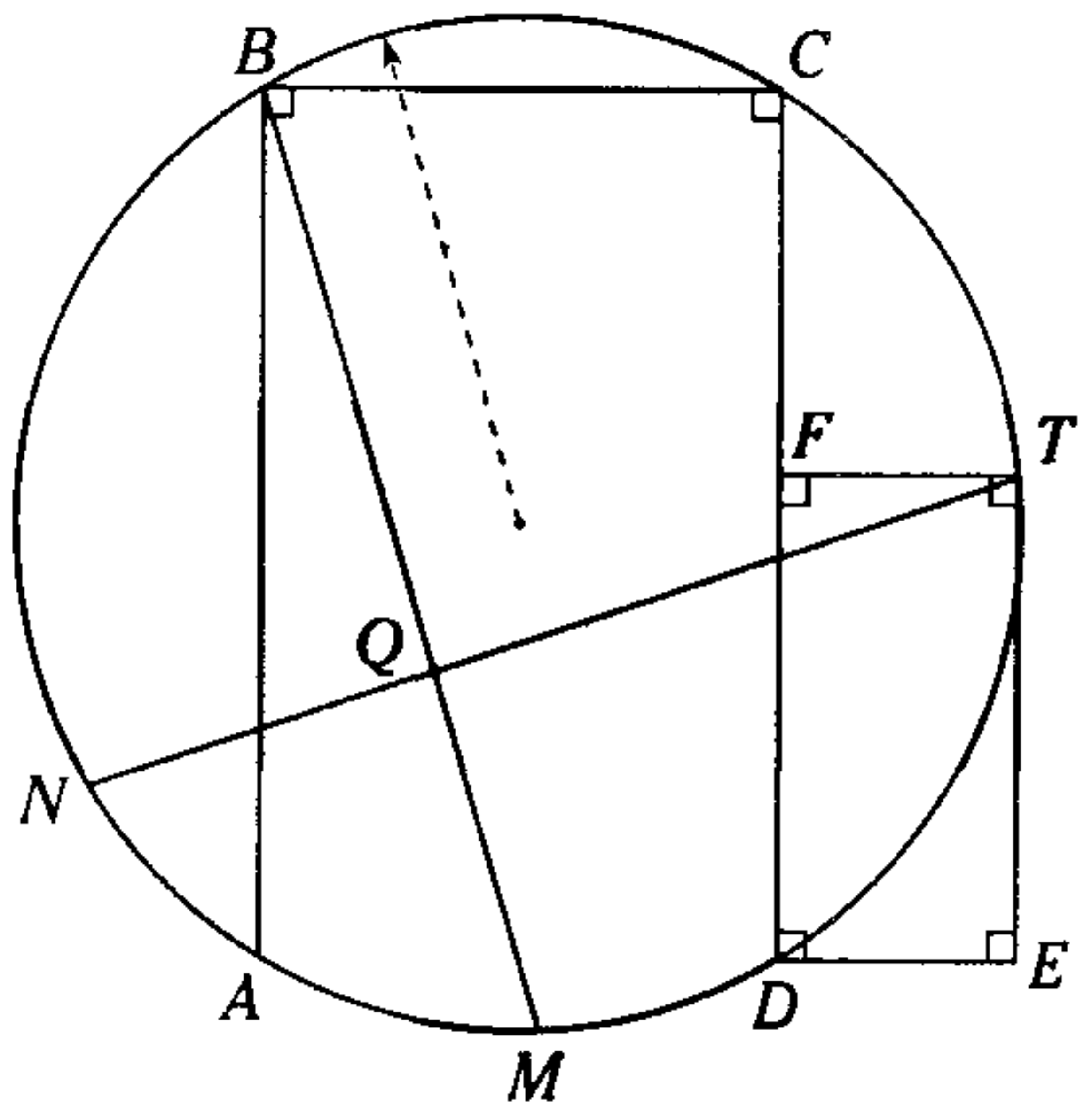
$$\frac{\cancel{56}R^2}{9} = \cancel{12}x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{14R^2}{9\times 3} = x^2$$

$$\therefore\quad x = \frac{\sqrt{42}R}{9}$$

CLAVE D

Problema 10

En la figura, $BM = TN$, $(QC)^2 - (QE)^2 = 27$ y $AQ = 3$. Calcule QF.



A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8

Resolución

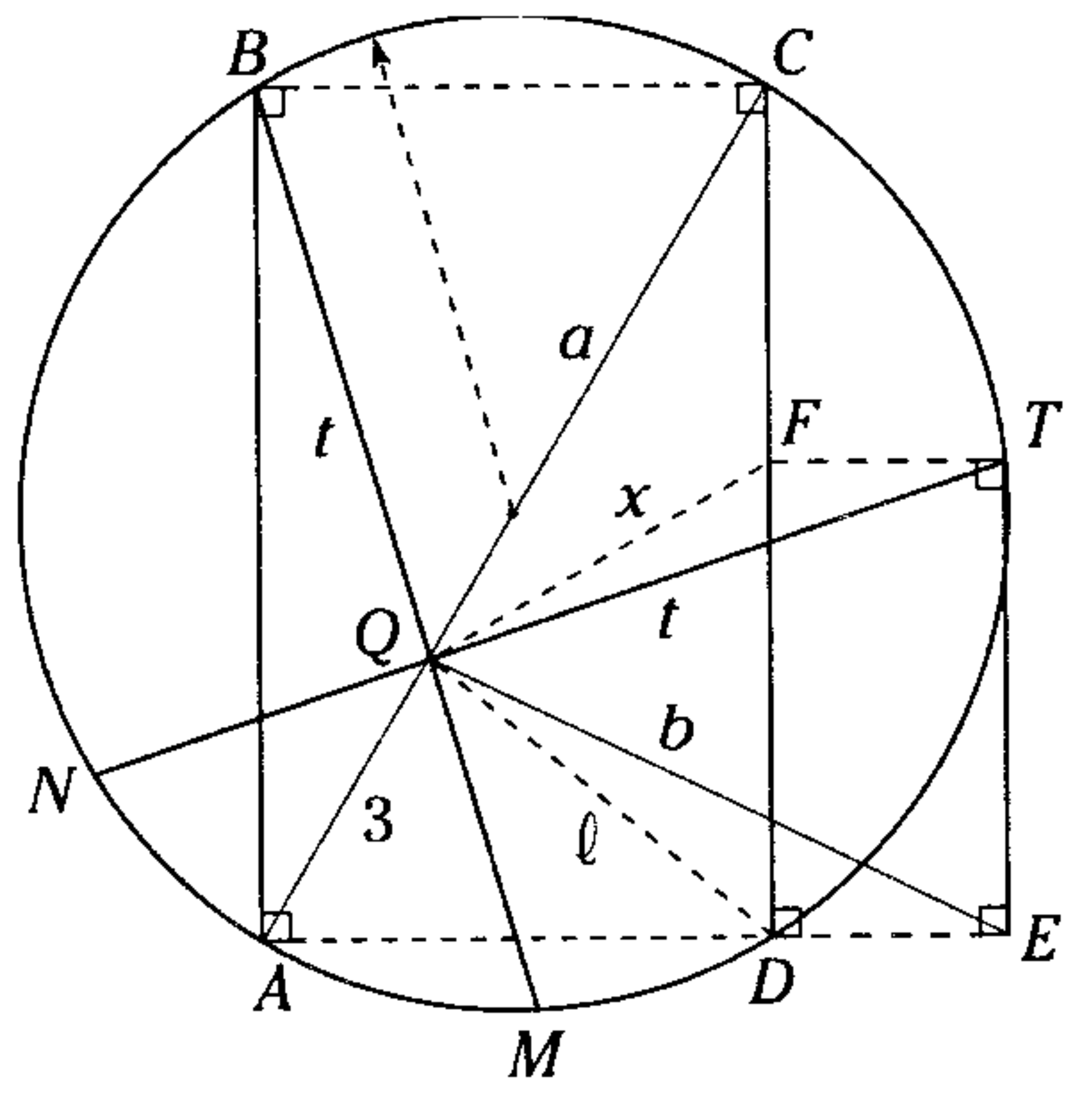


Figura 15.117

Piden $QF = x$

Dato $a^2 - b^2 = 27$

Se nota que $ABCD$ rectángulo

Como $BM = TN$

$\rightarrow \ m\overset{\frown}{BN} = m\overset{\frown}{TM}$ y $BQ = QT = t$

En ▭$ABCD$: teorema de Marlen

$t^2 + \ell^2 = a^2 + 3^2$ (I)

En ▭$FTED$: teorema de Marlen

$x^2 + b^2 = t^2 + \ell^2$ (II)

Sumando (I) y (II)

$x^2 + b^2 = a^2 + 3^2$

$x^2 = a^2 - b^2 + 9$

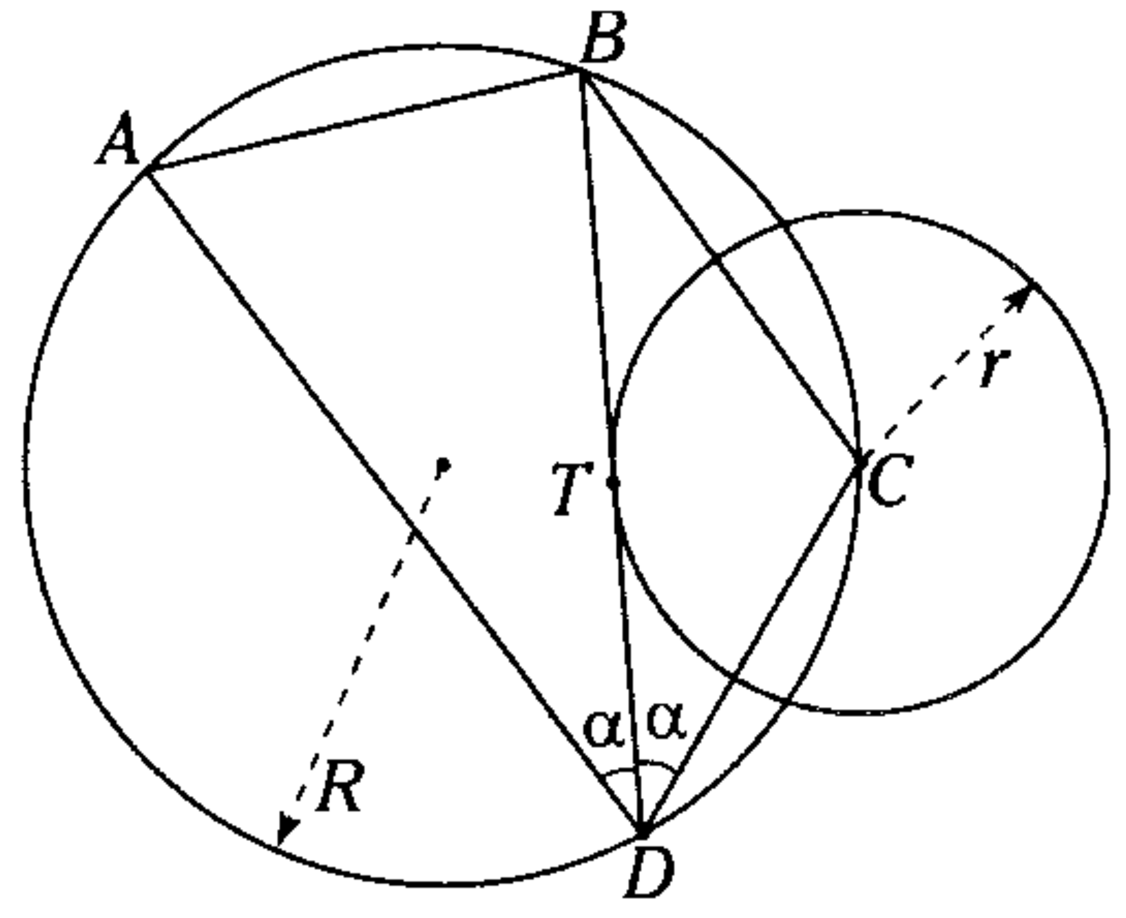
$x^2 = 27 + 9$

$\therefore \quad x = 6$

CLAVE C

Problema 11

Según la figura, $ABCD$ es un trapecio isósceles, T es punto de tangencia y $BD^2 - (AB)(AD) = k$. Calcule $R.r$



A) k B) $\frac{k}{3}$ C) $\frac{k}{4}$

D) $\frac{k}{2}$ E) $\frac{k}{8}$

Resolución

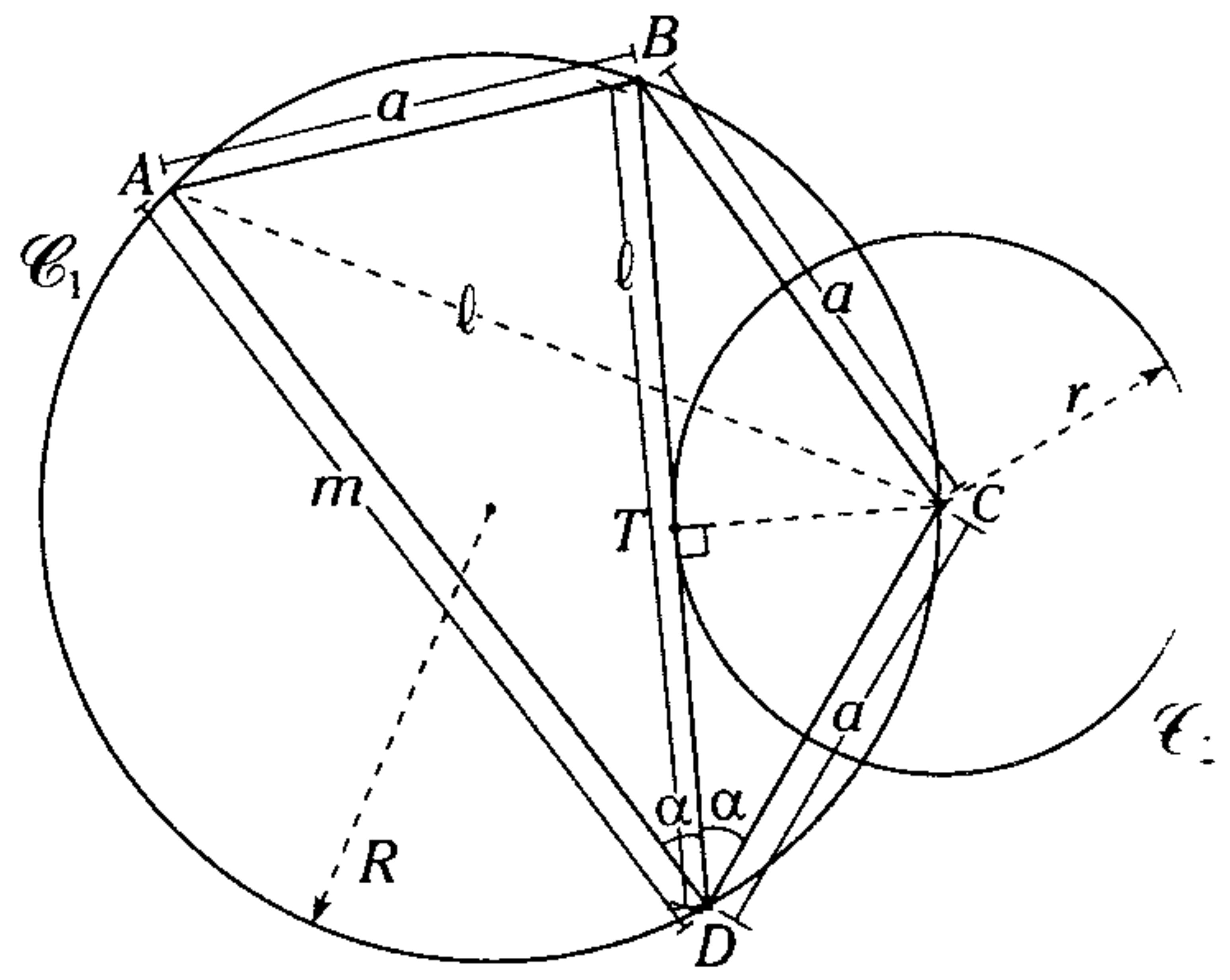


Figura 15.118

Piden Rr

Dato $BD^2 - AB(AD) = k$

$\rightarrow \ \ell^2 - am = k$

Como $ABCD$: trapecio isósceles y se sabe que

$AC = BD = \ell$

$\rightarrow \ m\overset{\frown}{ABC} = m\overset{\frown}{BCD}$

por lo cual $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$

$\rightarrow \; AB = CD = a$

En $\mathscr{C}_1$: se aplica para $ABCD$: teorema de Ptolomeo

$$a.a + a.m = \ell.\ell \qquad \text{(I)}$$

$\mathscr{C}_2$: teorema del producto de dos lados

$$a.a = r(2R) \qquad \text{(II)}$$

(II) en (I)

$$2Rr + a.m = \ell^2$$

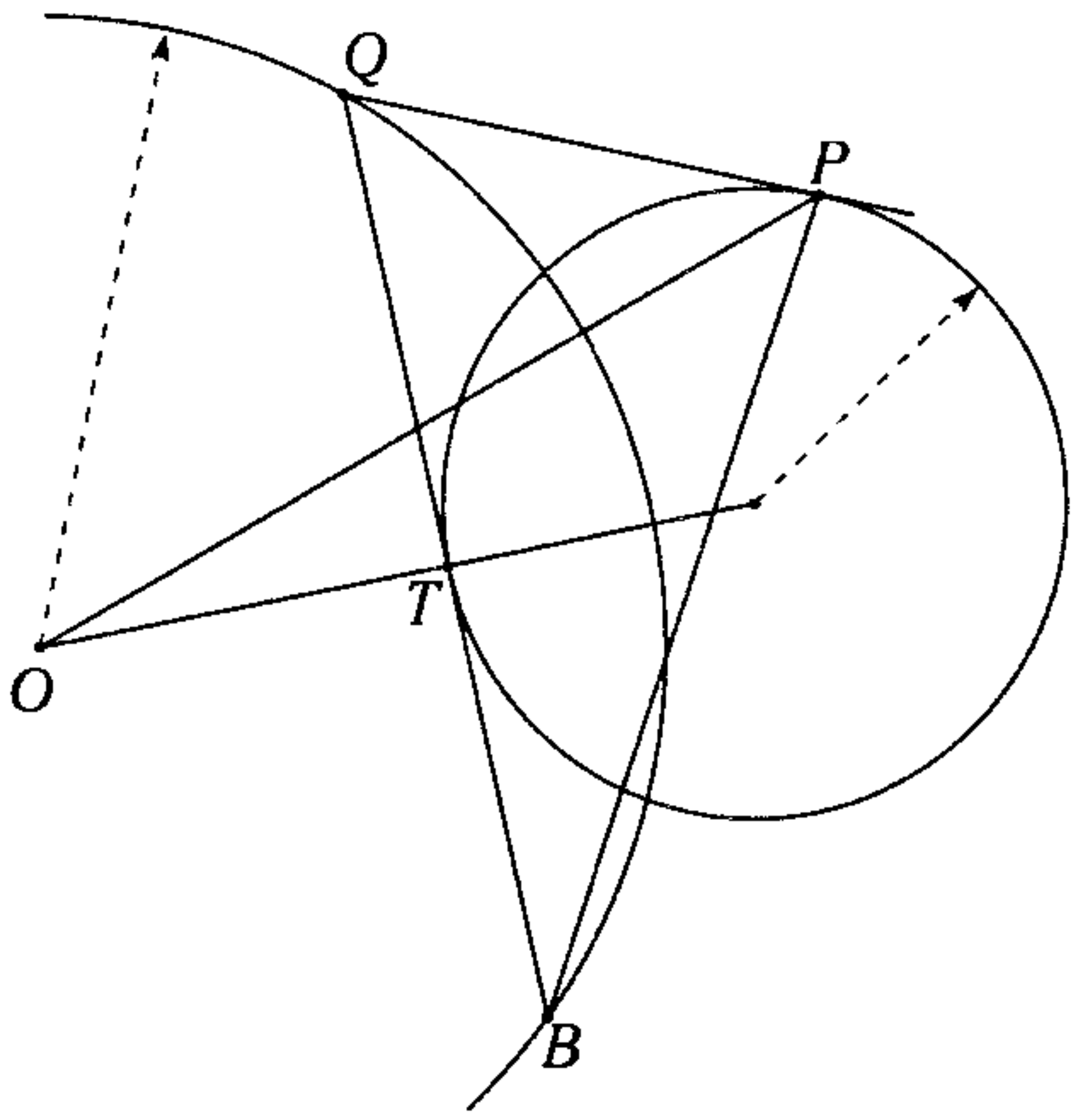
$$Rr = \frac{\ell^2 - am}{2}$$

$$\therefore \quad Rr = \frac{k}{2}$$

CLAVE D

Problema 12

En la figura, P y T son puntos de tangencia, $OT = \sqrt{7}$, $PQ = 3$ y $PO^2 - PB^2 = 1$. Calcule la distancia de T al punto medio de OP.



A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{3}/2$ E) $2\sqrt{3}$

Resolución

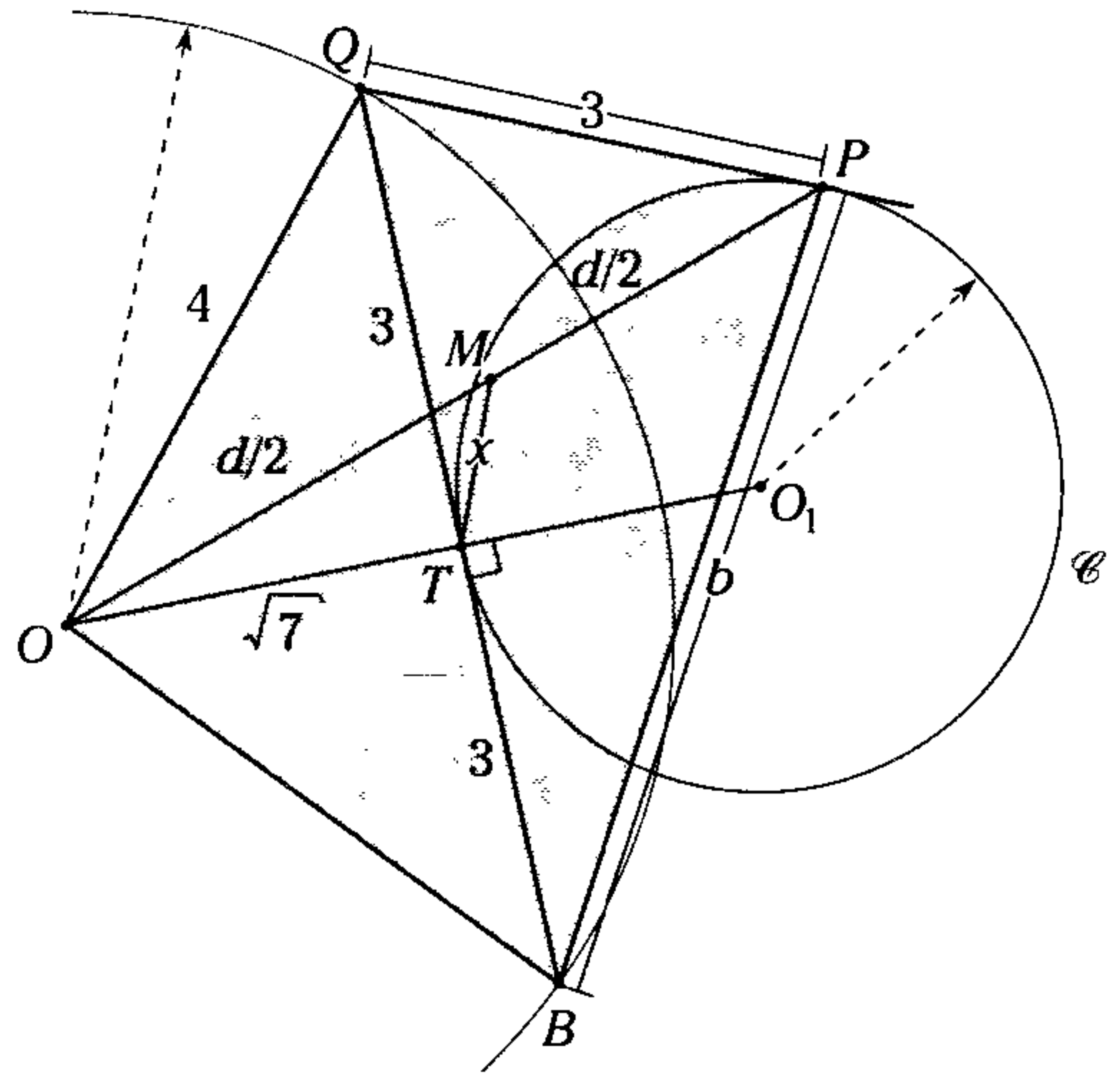


Figura 15.119

Piden $TM = x$

Dato $d^2 - b^2 = 1$

Por teorema en $\mathscr{C}$

$$\overline{O_1T} \perp \overline{BQ} \;\rightarrow\; QT = TB$$

Para $\mathscr{C}$: $PQ = 3 = TQ$

$\triangle$ QTO: teorema de Pitágoras

$$OQ^2 = 3^2 + \sqrt{7}^{\,2} \;\rightarrow\; OQ = 4$$

En el $\square$ $OQPB$: teorema de Euler

$$4^2 + 3^2 + b^2 + 4^2 = d^2 + 6^2 + 4x^2$$

$$16 + 9 + 16 = d^2 - b^2 + 36 + 4x^2$$

$$41 = 1 + 36 + 4x^2$$

$$\therefore \quad x = 1$$

CLAVE A

Problema 13

En un cuadrante AOB de centro y radio $3\sqrt{10}$, se ubican P en $\overset{\frown}{AB}$ y S en $\overline{AO}$, tal que $m\overset{\frown}{PB} = 37°$ y $m\sphericalangle SPB = 90°$. Calcule la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{SP}$.

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) 1 E) 4

Resolución

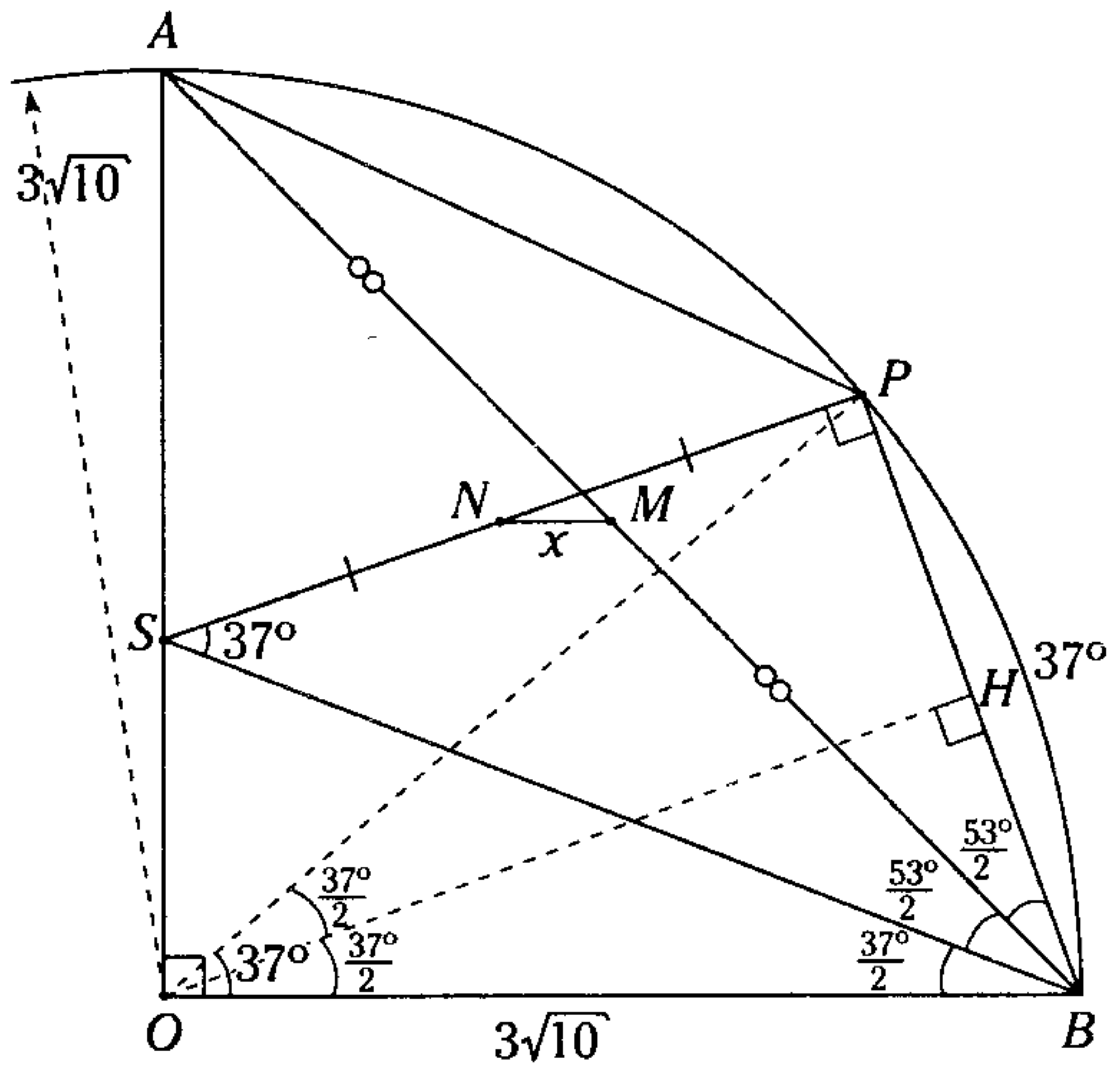


Figura 15.120

Piden $NM = x$

Del dato $SPBO$: ⏢ Inscriptible

$\rightarrow$ $m\sphericalangle PSB = m\sphericalangle POB = 37°$

Se traza $\overline{OH} \perp \overline{PB}$

$\rightarrow$ $PH = HB$

⊾OHB: Notable de $37°/2$

$\rightarrow$ $PH = HB = 3$

⊾SPB: notable de $37°$ y $53°$

$\rightarrow$ $SP = 8, BS = 10$

Por $\sphericalangle$ inscrito: $m\sphericalangle ABP = 53°/2$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle ABS = 53°/2$

⊾AOB: notable de $45°$

$AB = 3\sqrt{10}\sqrt{2}$ y $m\sphericalangle OBS = 37°/2$

⊾SOB: notable de $37°/2$.

Como $OB = 3\sqrt{10}$ $\rightarrow$ $OS = 3$

$\triangle AOP$: como $m\sphericalangle AOP = 53°$

$\rightarrow$ $AP = 6\sqrt{2}$

En el ⏢$APBS$: Se aplica el teorema de Euler

$$(SA)^2+(AP)^2+(PB)^2+(BS)^2=(AB)^2+(SP)^2+4x^2$$

$$(2\sqrt{10})^2 + (6\sqrt{2})^2 + (6)^2 + (10)^2 =$$

$$= (3\sqrt{20})^2 + (8)^2 + 4x^2$$

$$40 + 72 + 36 + 100 = 9(20) + 64 + 4x^2$$

$$4 = 4x^2$$

$$\therefore \quad x = 1$$

CLAVE D

Problema 14

En el cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia, se ubica el punto E en el $\overset{\frown}{AD}$, tal que los triángulos BED y CAE sean congruentes, $m\overset{\frown}{AE} = m\overset{\frown}{ED}$, $m\overset{\frown}{AB} \neq m\overset{\frown}{CD}$, $\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{L\}$, $LD = 3(AL)$ y $(CE)(3(BE) - CD) = 17$. Halle $(AE)(AL)$.

A) 15/14 B) 17/5 C) 15/2
D) 17/3 E) 17/4

Resolución

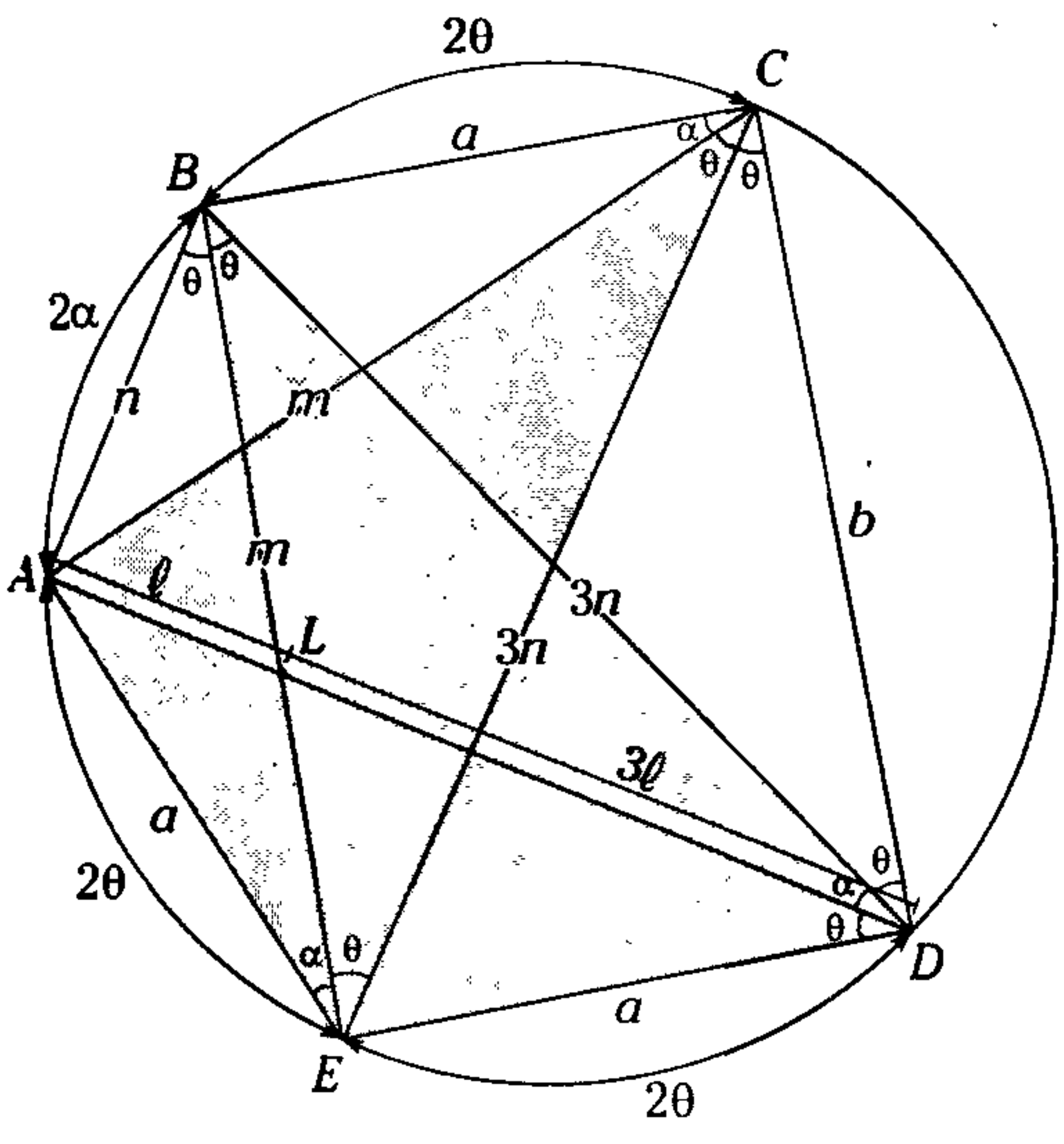


Figura 15.121

Piden $(AE)(AL) = a \, . \, \ell$

Datos: $m\widehat{AE} = m\widehat{ED} = 2\theta$

$\rightarrow \; AE = ED = a$; $m\widehat{AB} \neq m\widehat{CD}$

$\rightarrow \; AB \neq CD$ esto quiere decir que $BE \neq CE$

De la congruencia dada

$BE = AC$ y $BD = CE$

$\rightarrow \; m\widehat{ABC} = m\widehat{EAB}$, $m\widehat{BC} = m\widehat{AE}$, $AE = BC = a$

$\triangle ABD$: teorema de la bisectriz interior

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\ell}{3\ell} = \frac{1}{3}$$

Sea $AB = n$

$\rightarrow \; BD = 3n$

En el $\square ABCD$: teorema de Ptolomeo

$(AC)(BD) = (AB)(CD) + (BC)(AD)$

$m \, . \, 3n = n \, . \, b + a \, . \, 4\ell$

$$a\ell = \frac{n(3m-b)}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\therefore \; a\ell = \frac{17}{4}$$

CLAVE E

Problema 15

En un rectángulo *ABCD*, se traza el cuadrante *BAQ*, de centro *A*, luego se traza $\overline{DT}$ tangente al cuadrante en *T*. Si $BT = 2$ y $TQ = \sqrt{2}$, calcule *TC*.

A) $\sqrt{29}/4$ B) $\sqrt{29}/2$ C) $3\sqrt{3}/2$

D) $\sqrt{7}/2$ E) $\sqrt{30}/2$

Resolución

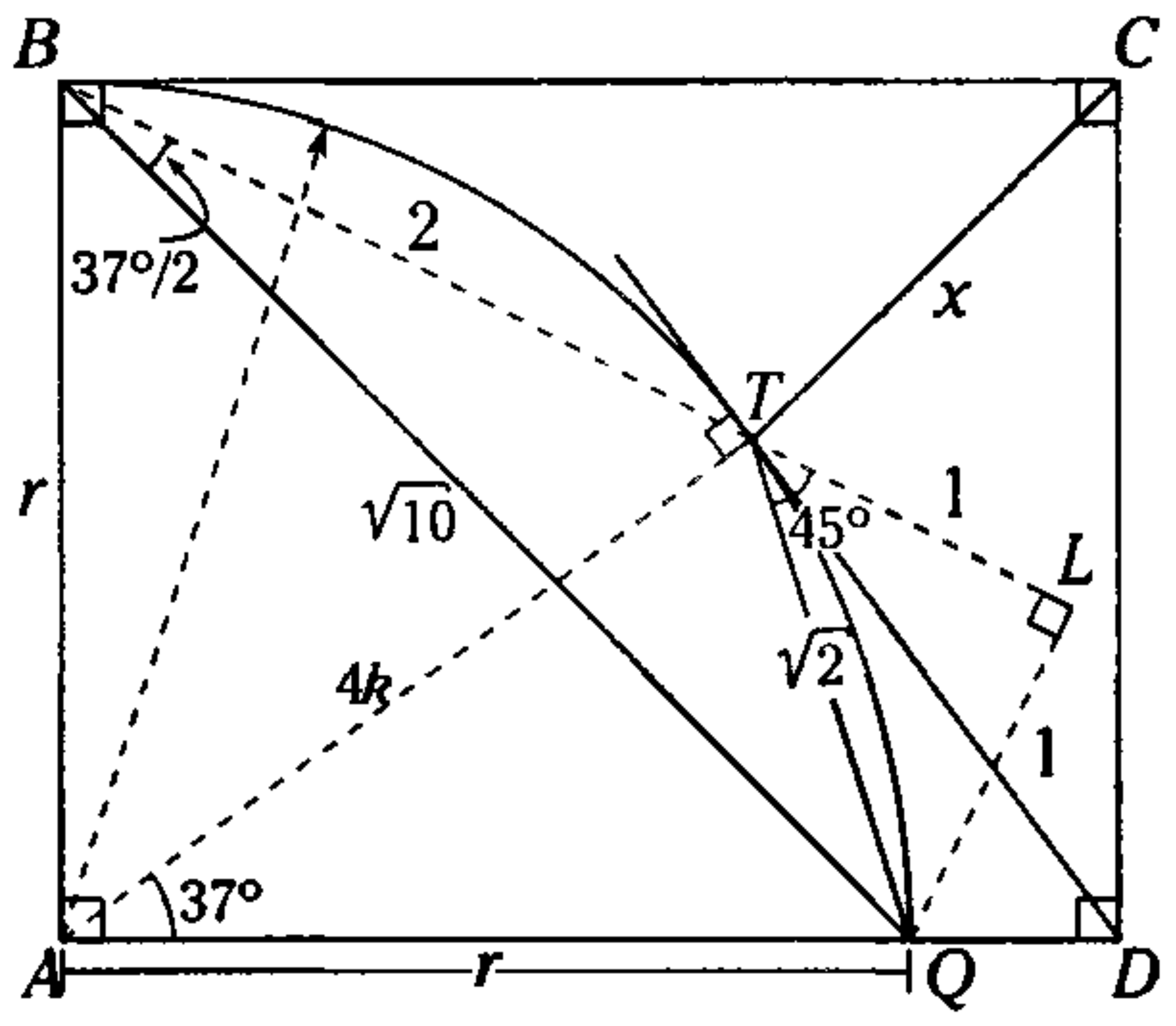


Figura 15.122

Piden $TC = x$

Se sabe $m\measuredangle LTQ = 45°$

Se traza $\overline{QL} \perp \overline{BL}$, ⊾TLQ: Es notable de 45°

$\rightarrow \; TL = 1, LQ = 1$

⊾BLQ: notable de $\frac{37°}{2}, \frac{143°}{2}$

$\rightarrow \; BQ = \sqrt{10}$, $m\measuredangle TBQ = \frac{37°}{2}$

Por $\sphericalangle$ central: $m\sphericalangle TAQ = 37°$

$\triangle BAQ$: notable de 45°

$\rightarrow\ r\sqrt{2}=\sqrt{10}\ \rightarrow\ r=\sqrt{5}$

$\triangle ATD$: notable de 37°, 53°

$AT = 4k = \sqrt{5}\ \rightarrow\ k=\sqrt{5}/4$

Además

$TD = 3k\ \rightarrow\ TD=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$

En el $\square ABCD$: teorema de Marlen

$$x^2+\sqrt{5}^2 = 2^2+\left(\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

$$x^2+5 = 4+\frac{9(5)}{16}$$

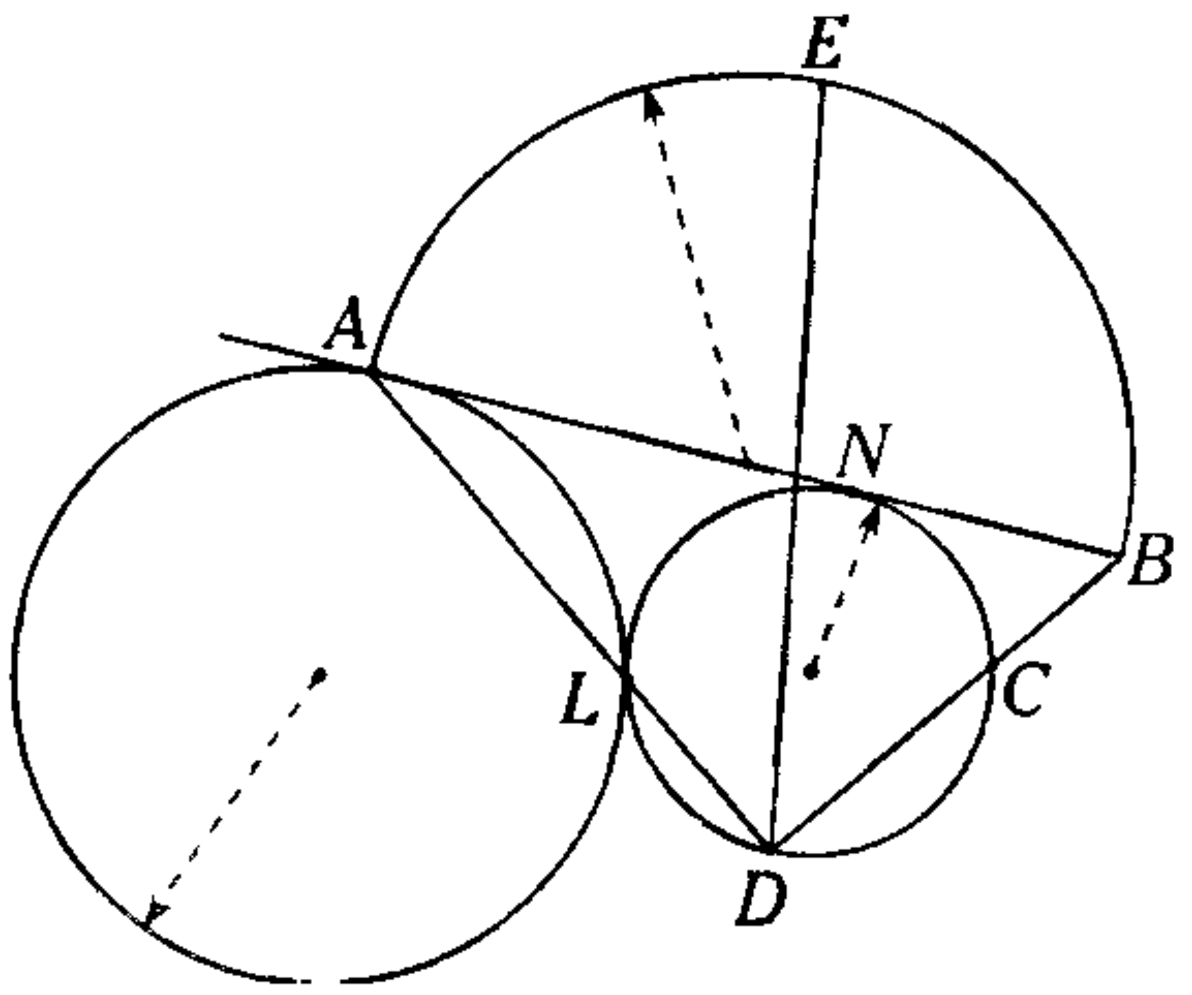
$$x^2=\frac{45}{16}-1\ \rightarrow\ x^2=\frac{29}{16}$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{29}}{4}$$

CLAVE **A**

Problema 16

Del gráfico, A, N, L son puntos de tangencia $m\overset{\frown}{NC}=m\overset{\frown}{LD}$, $AB=5\sqrt{2}$, $m\overset{\frown}{AL}=74°$, $m\overset{\frown}{AE}=m\overset{\frown}{EB}$. Calcule la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de AB y DE.



A) 0,2 B) 0,4 C) 0,5
D) 0,6 E) 0,7

Resolución

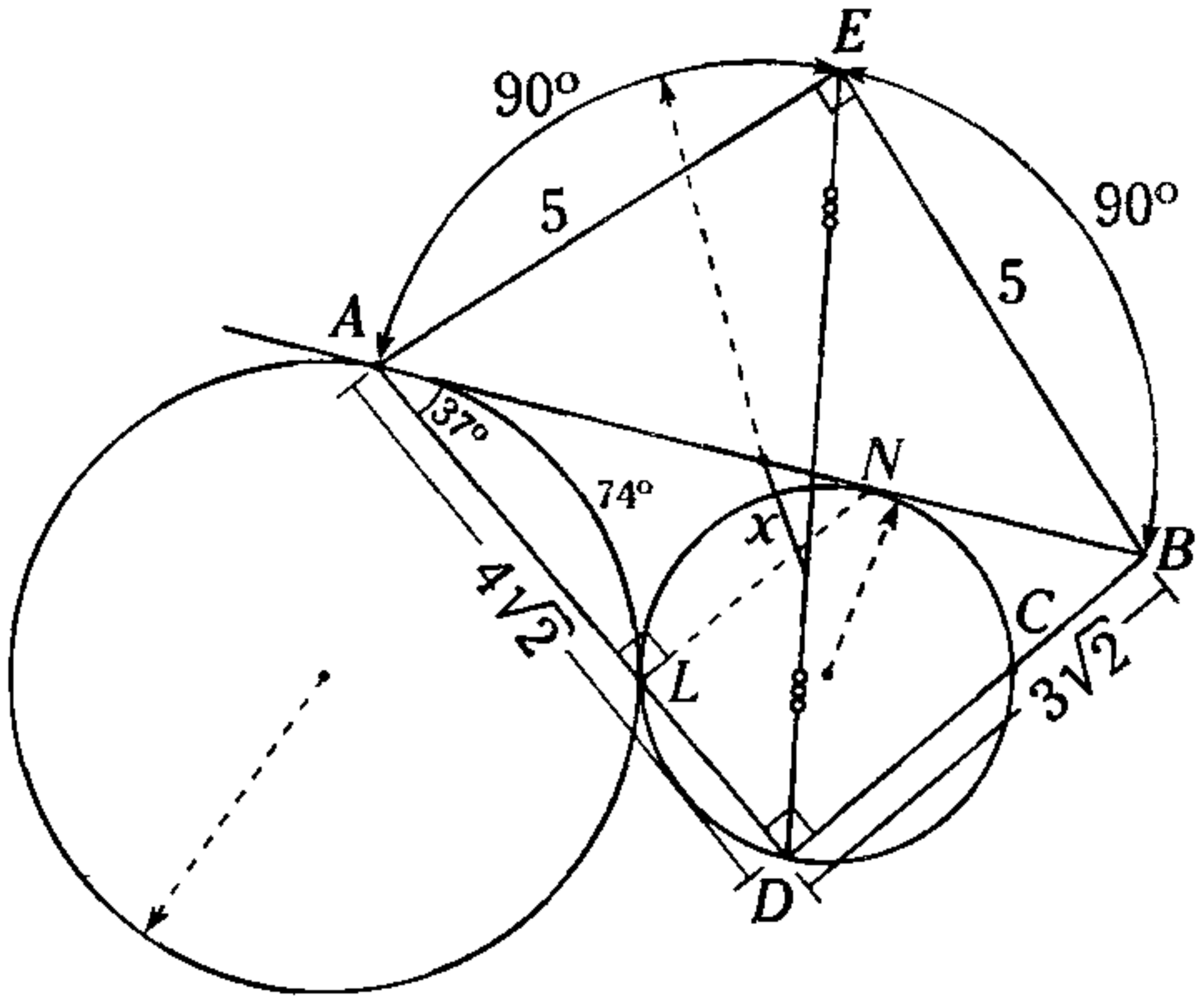


Figura 15.123

Piden x

Como $m\overset{\frown}{AL}=74°\ \rightarrow\ m\sphericalangle BAD=37°$

Dato: $m\overset{\frown}{NC}=m\overset{\frown}{LD}$

$\rightarrow\ \overline{NL}\,//\,\overline{CD}$, por propiedad $m\sphericalangle NLA = 90°$

$\rightarrow\ m\sphericalangle BDA = 90°$

$\triangle ADB$: notable de 37°, 53°

Como $AB = 5\sqrt{2}$

$\rightarrow\ BD = 3\sqrt{2},\ AD=4\sqrt{2}$

$\triangle AEB$: notable de 45°

Como $AB = 5\sqrt{2}$

$\rightarrow\ AE = EB = 5$

Para aplicar el teorema de Euler en el $\square AEBD$, necesitamos ED, por lo cual planteamos el teorema de Ptolomeo.

$(ED)(5\sqrt{2}) = 5(4\sqrt{2})+5(3\sqrt{2})$

$ED = 7$

Ahora por teorema de Euler en el $\square AEBD$

$(5)^2+(5)^2+(3\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2=(5\sqrt{2})^2+(7)^2+4x^2$

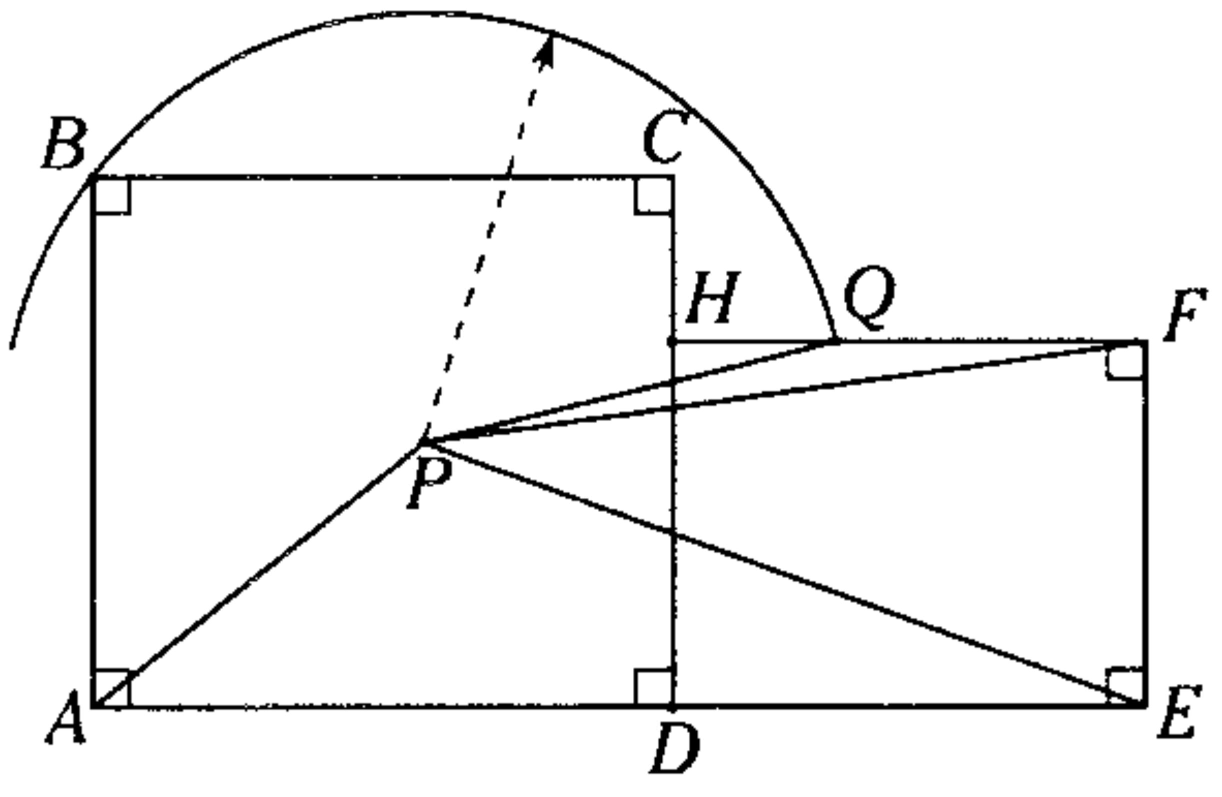
$25+25+18+32 = 50+49+4x^2$

$\therefore\quad x = 1/2 = 0,5$

CLAVE **C**

Problema 17

De la figura, $(PQ)^2+(PE)^2=7$, $(PC)^2=(PH)^2+2$. Halle $(FP)^2+(AP)^2$.



A) 8 B) 7 C) 4
D) 6 E) 5

Resolución

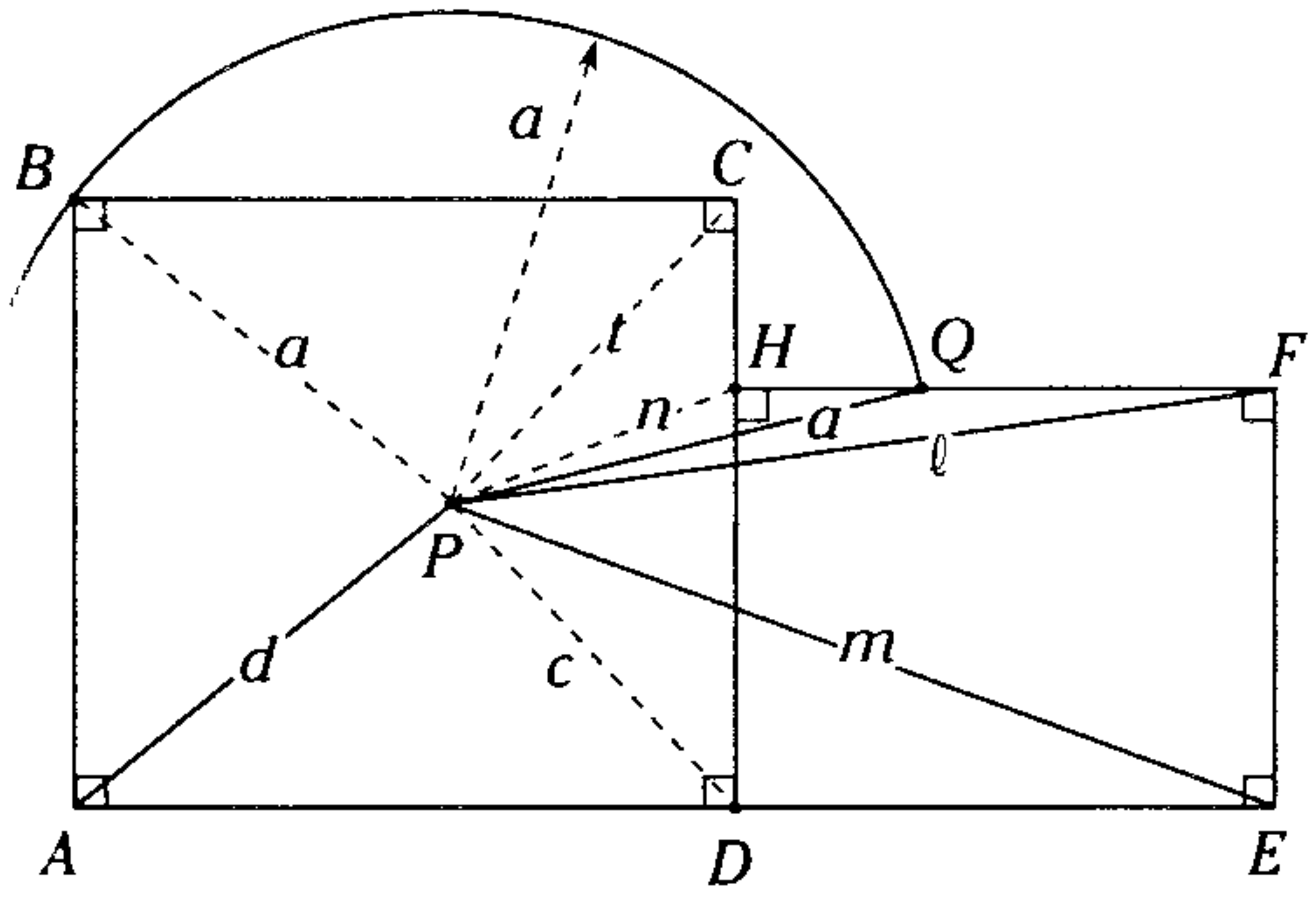


Figura 15.124

Piden $(FP)^2+(AP)^2$

Sea $FP=\ell$ y $AP=d$

Dato: $(PQ)^2+(PE)^2=a^2+m^2=7$

En el $\square ABCD$: teorema de Marlen

$$a^2+c^2=d^2+t^2 \qquad \text{(I)}$$

En el $\square HFED$: teorema de Marlen

$$n^2+m^2=\ell^2+c^2 \qquad \text{(II)}$$

Sumando (I) y (II)

$$a^2+c^2+n^2+m^2=d^2+t^2+\ell^2+c^2$$

$$a^2+n^2+m^2=d^2+t^2+\ell^2$$

Como $t^2=n^2+2$

$$\rightarrow\ a^2+m^2=d^2+\ell^2+2$$

$$7=d^2+\ell^2+2$$

$$\therefore\ d^2+\ell^2=5$$

CLAVE E

Problema 18

En una circunferencia $\mathscr{C}$, se tiene las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ perpendiculares en el punto L. Si el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo BLC es 3, $AL=4$ y $m\overset{\frown}{AC}=2(m\overset{\frown}{AD})$, calcule el radio de la circunferencia $\mathscr{C}$.

A) $\sqrt{50{,}9}$ B) $\sqrt{58{,}9}$ C) $\sqrt{60{,}9}$
D) $\sqrt{62{,}9}$ E) $\sqrt{56{,}9}$

Resolución

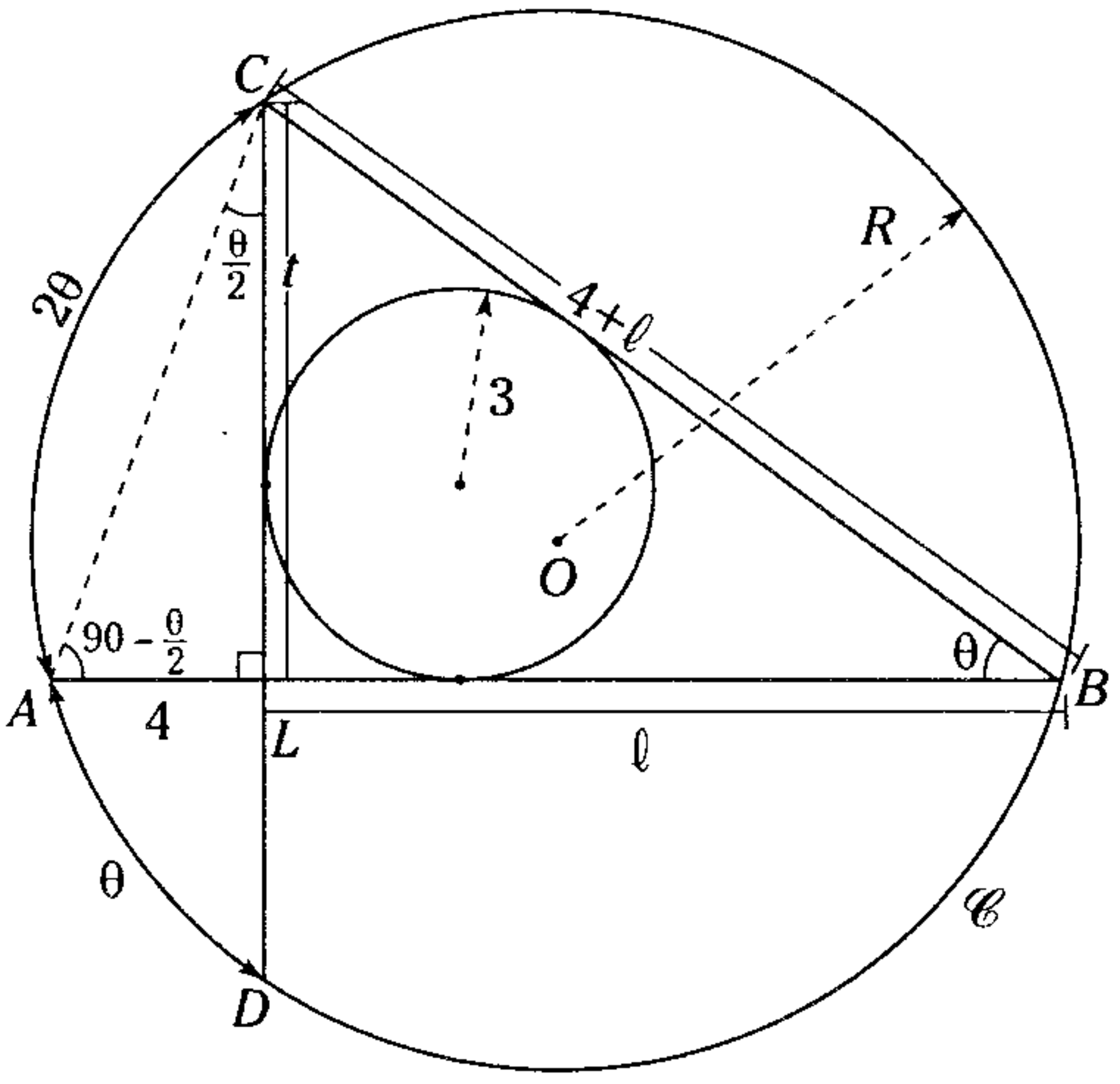


Figura 15.125

Piden R

En $\mathscr{C}$ se aplica el teorema de Faure

$$AL^2+CL^2+LB^2+LD^2=4R^2 \qquad \text{(I)}$$

Del dato

$m\overset{\frown}{CA}=2(m\overset{\frown}{AD})$, sea $m\overset{\frown}{AD}=\theta \rightarrow m\overset{\frown}{CA}=2\theta$

Se traza $\overline{AC}$, m∢$CBA = \theta$, m∢CAB = m∢$ACB = 90 - \dfrac{\theta}{2}$

$\rightarrow\ AB = BC = 4 + \ell$

En ⊿ CLB: teorema de Poncelet

$t + \ell = 4 + \ell + 2(3)$

$t = 10$

En ⊿ CLB: teorema de Pitágoras

$10^2 + \ell^2 = (4+\ell)^2 \ \rightarrow\ \ell = \dfrac{21}{2}$

Por teorema de las cuerdas en $\mathscr{C}$

$(4)\left(\dfrac{21}{2}\right) = (10)(LD) \ \rightarrow\ LD = \dfrac{21}{5}$

Reemplazando en (I)

$4^2 + 10^2 + \left(\dfrac{21}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{21}{5}\right)^2 = 4R^2$

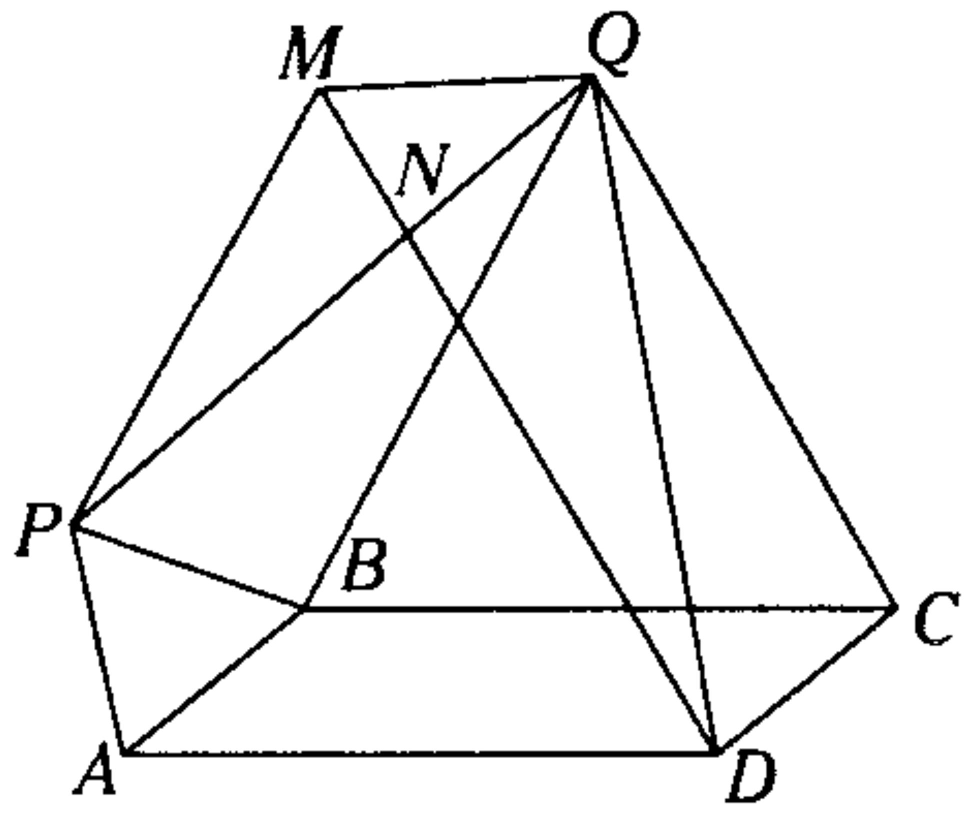
$R^2 = \dfrac{243{,}89}{4}$

$R = \sqrt{60{,}9}$

CLAVE C

Problema 19

En la figura, $ABCD$ es un paralelogramo, los triángulo PBA y BQC son equiláteros. Si m∢$PMQ = 120°$, $MP = m$ y $MQ = n$, calcule ND.



A) $(m^2 + n^2 - mn)/(m+n)$
B) $(m^2 + n^2 + mn)/(m+n)$
C) $(m^2 + n^2 - mn)/(m-n)$
D) $(m^2 + n^2 + mn)/m$
E) $(m^2 + n^2 - mn)/n$

Resolución

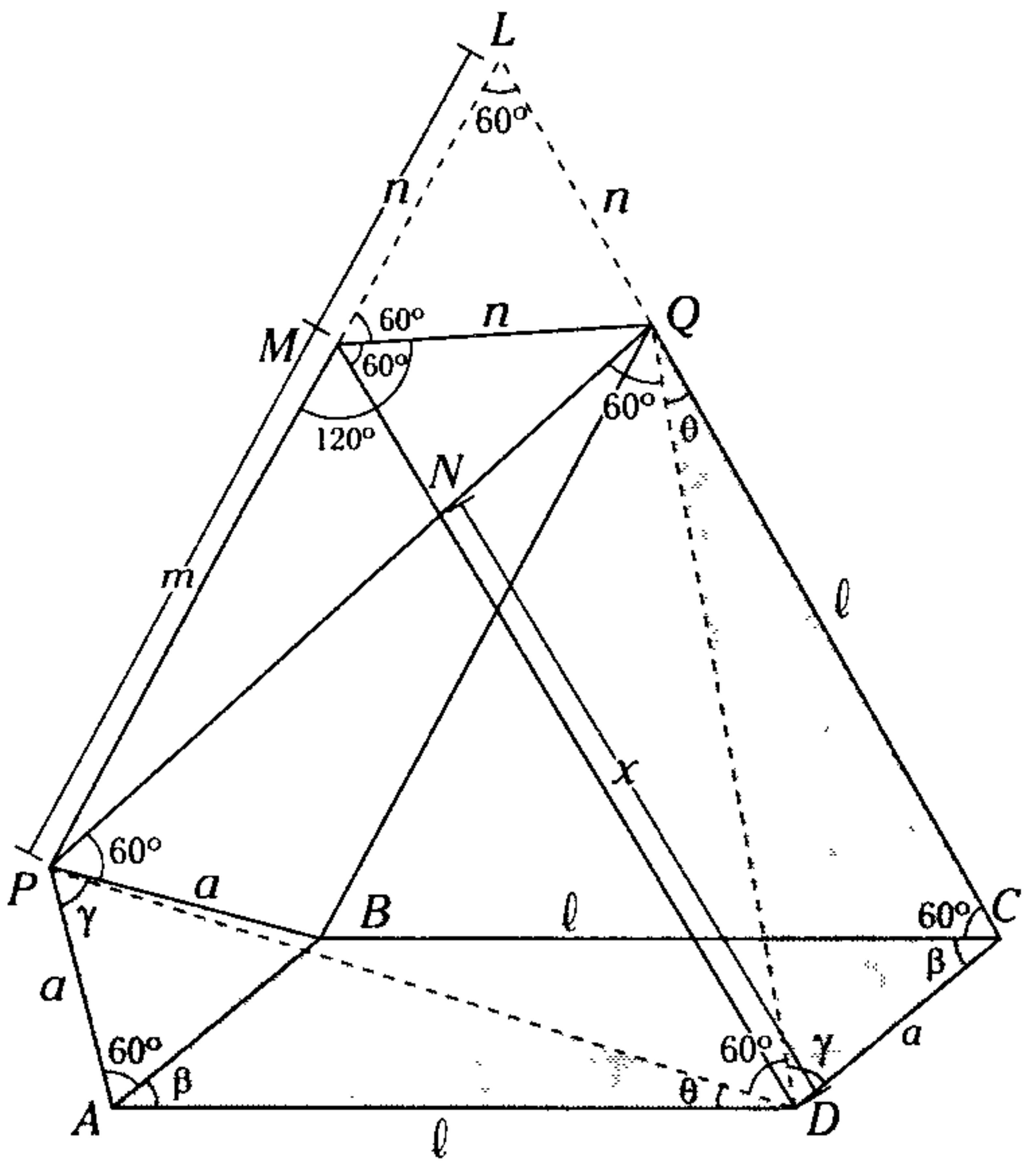


Figura 15.126

Piden $ND = x$

Como $ABCD$: paralelogramo

m∢BAD = m∢$BCD = \beta$

△QCD ≅ △DAP (L.A.L.)

$\rightarrow\ DQ = PD$, m∢QDC = m∢$APD = \gamma$,

m∢DQC = m∢$ADP = \theta$

△CDQ: $\theta + \gamma + \beta = 120°$

En C y D: $\beta + \theta + \gamma$ + m∢$PDQ = 180°$

$\rightarrow$ m∢$PDQ = 60°$ por lo cual PQD: △ equilátero

Como se observa

m∢PMQ + m∢$PDQ = 180°$

$\rightarrow$ $PMQD$: ⏢ Inscriptible

Por el teorema de Chadú

$MD = m + n \ \rightarrow\ MN = m + n - x$

Se traza $\overline{LQ}//\overline{MN}$

$\triangle PMN \sim \triangle PLQ$ /(A.A.A.)

$$\frac{m+n-x}{n}=\frac{m}{n+m}$$

$$(m+n)(m+n-x)=mn$$

$$m^2+n^2+2mn-x(m+n)=mn$$

$$x(m+n)=m^2+n^2-mn$$

$$\therefore\quad x=\frac{m^2+n^2-mn}{m+n}$$

CLAVE A

Problema 20

En un cuadrado se ubica el punto P en la región interior. Si $PA=2$, $PB=1$ y $PD=3$, calcule m$\sphericalangle APB$.

A) 120° B) 145° C) 135°
D) 150° E) 165°

Resolución

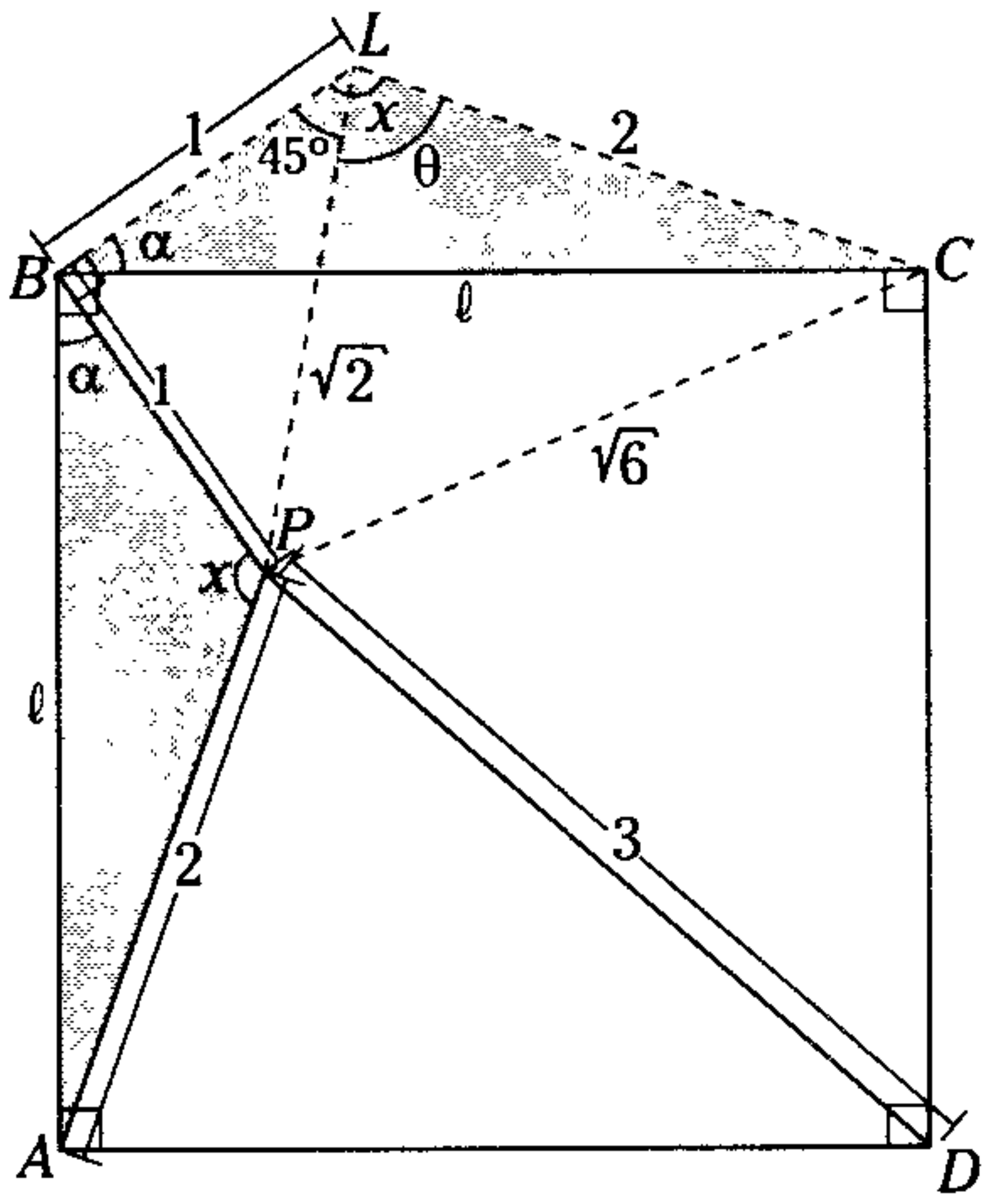


Figura 15.127

Piden m$\sphericalangle APB = x$

Se traza BL, tal que $BL = BP$, m$\sphericalangle CBL$ = m$\sphericalangle ABP$

Ahora se tiene

$\triangle LBC \cong \triangle PBA$ (L.A.L.)

$\rightarrow$ $LC = PA = 2$, m$\sphericalangle BPA$ = m$\sphericalangle BLC = x$

En el $\square ABCD$: por teorema de Marlen

$$PC^2+2^2=3^2+1^2$$

$$\rightarrow\ PC=\sqrt{6}$$

Se traza LP: $\triangle LBP$: notable 45°

$\rightarrow$ $LP=\sqrt{2}$

$\triangle LPC$: teorema del coseno

$$(\sqrt{6})^2=(\sqrt{2})^2+(2)^2-2(\sqrt{2})(2)\cos\theta$$

$$\rightarrow\ \cos\theta=0$$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle PLC = 90°$

Se observa

$$x=90°+45°$$

$$\therefore\ x=135°$$

CLAVE C

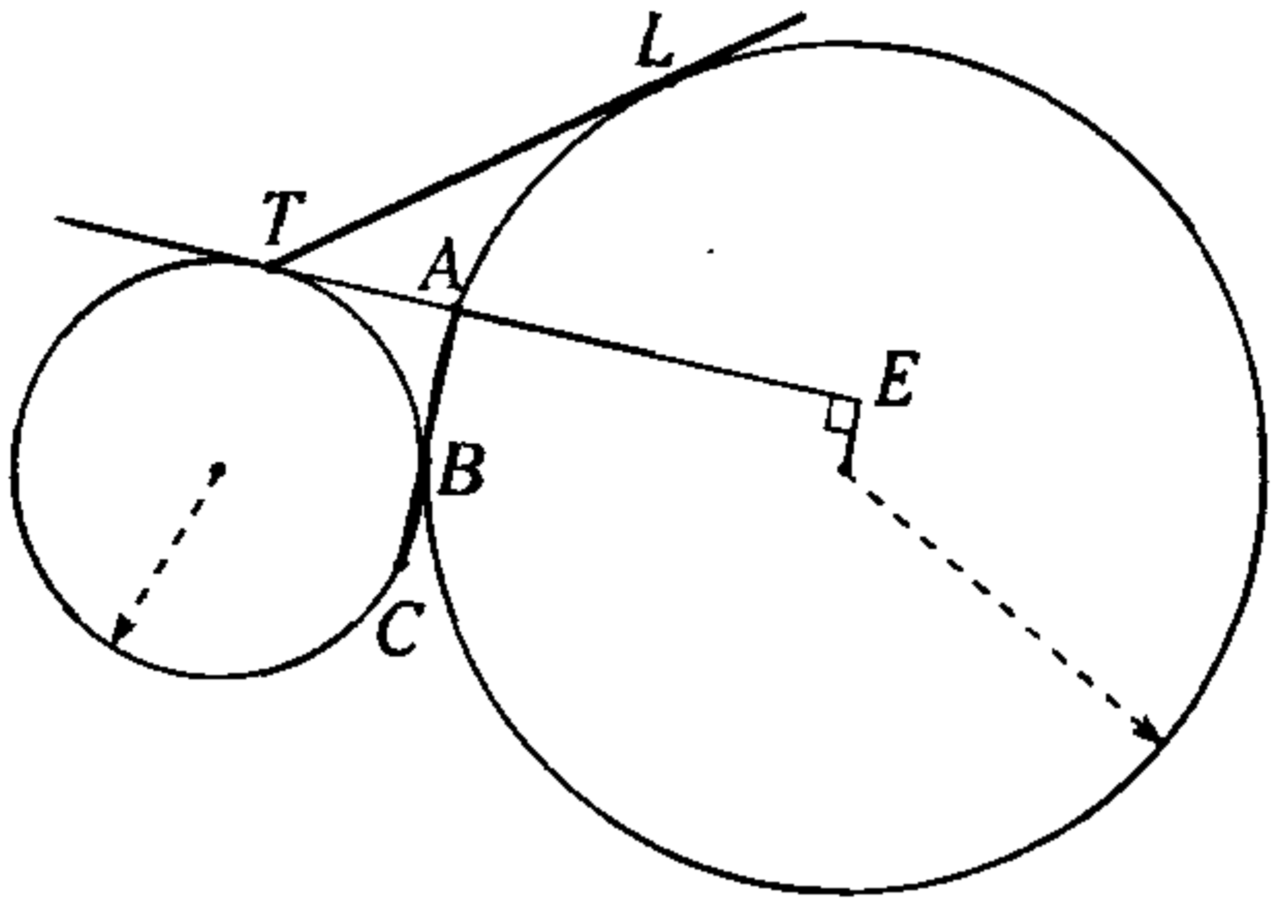
Problemas Propuestos

Relaciones métricas en la circunferencia

1. En una circunferencia se trazan las cuerdas AC y BD que se intersecan en O, luego se traza una recta secante $\overline{EF}$ ($E \in \overline{AO}$, $F \in \overline{DO}$) tal que $\overline{EF}//\overline{AD}$, $(EO)(FD) = (FO)(EA)$, $(AE)(CO) = 16$ y $OB = 4$. Halle FD.

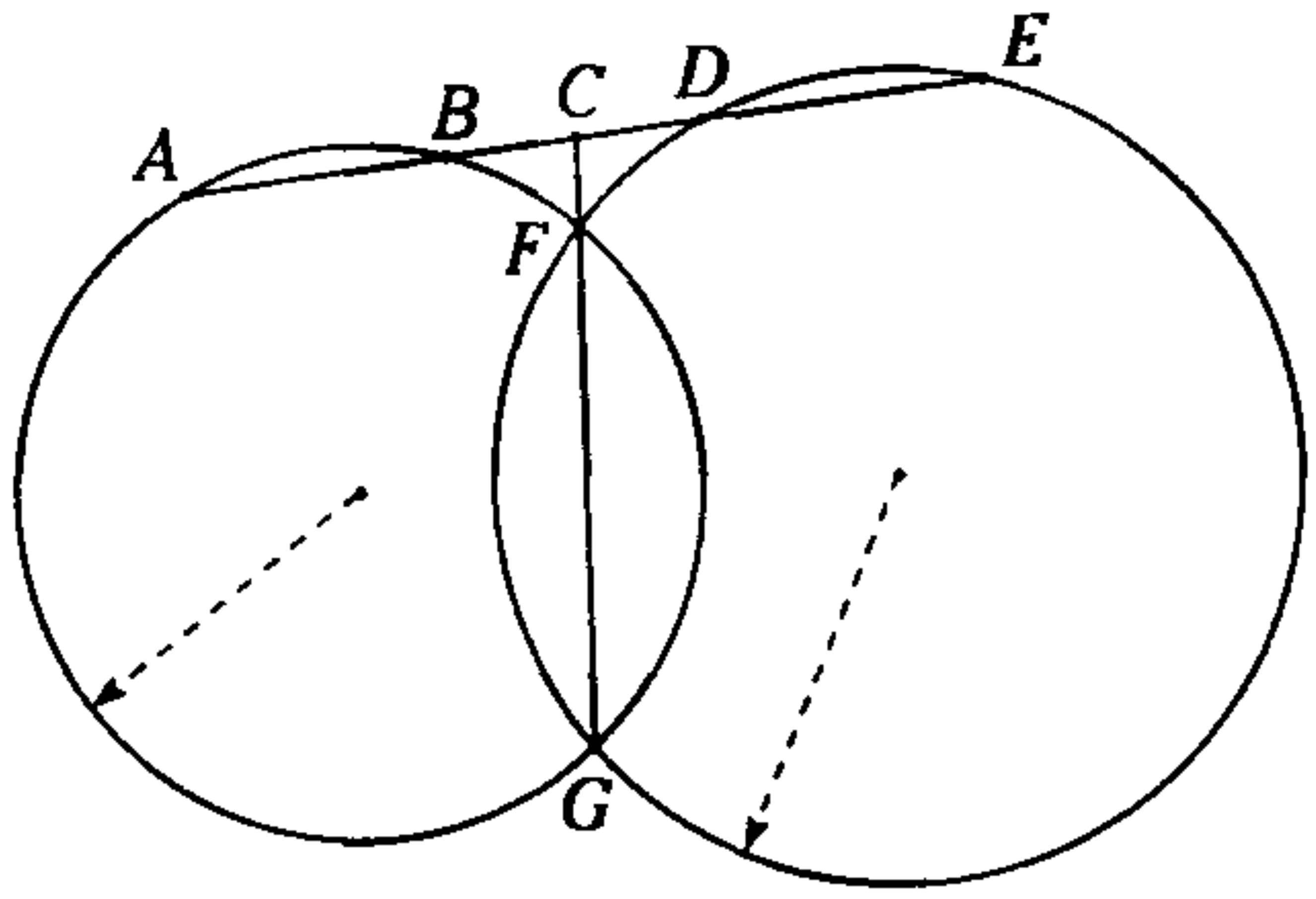
A) 8 B) 4 C) 6
D) 2 E) 5

2. De la figura, T, L y B son puntos de tangencia. Si $(AC)(AB) = 4$ y $TL = AE$, calcule TL.



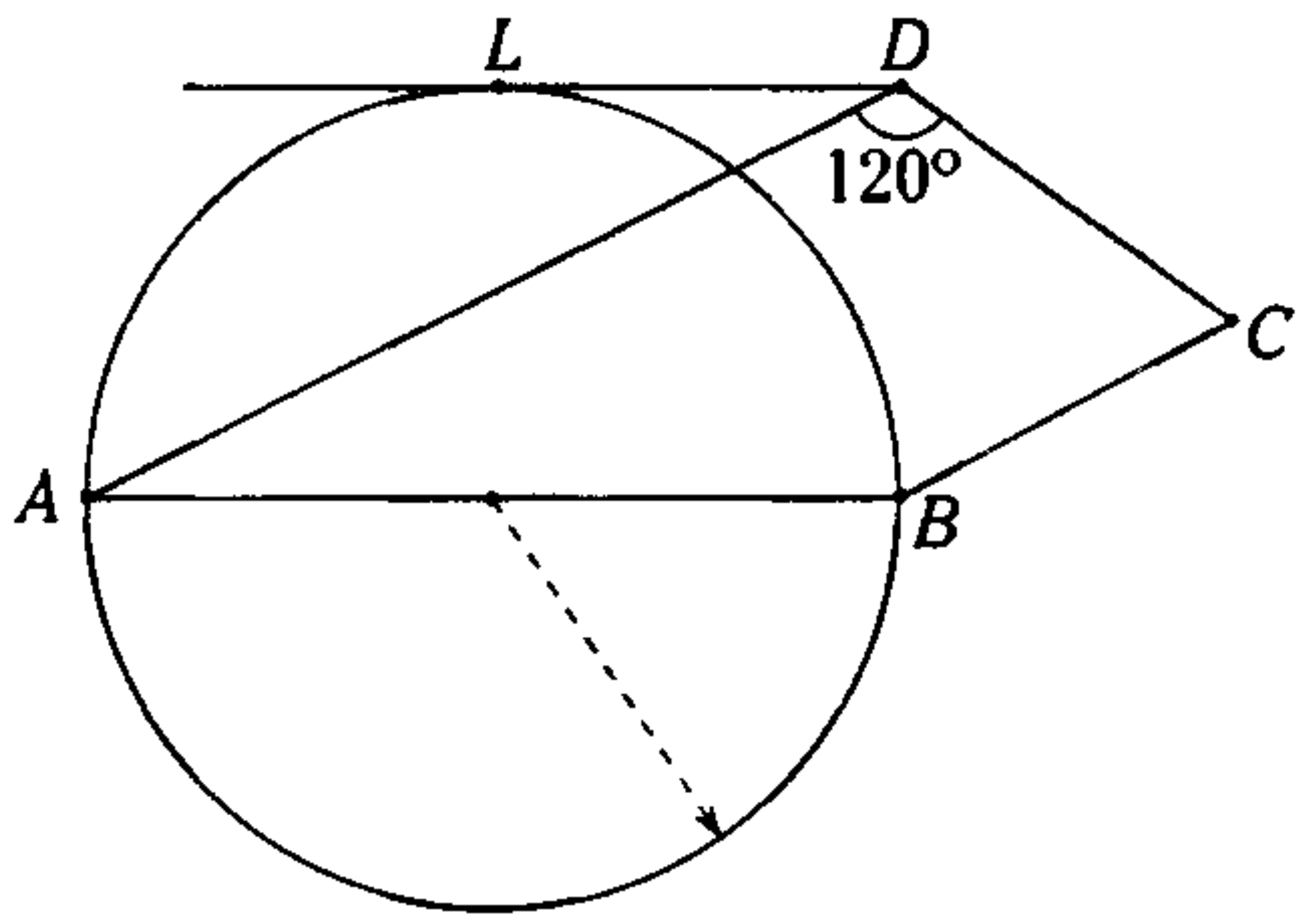
A) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$ B) $2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})$
C) $2(\sqrt{2}-1)$
D) $2(\sqrt{2}+1)$ E) $3(\sqrt{2}+1)$

3. De la figura, $AB = BD = DE = 4$ y $CF = 1$. Calcule FG.



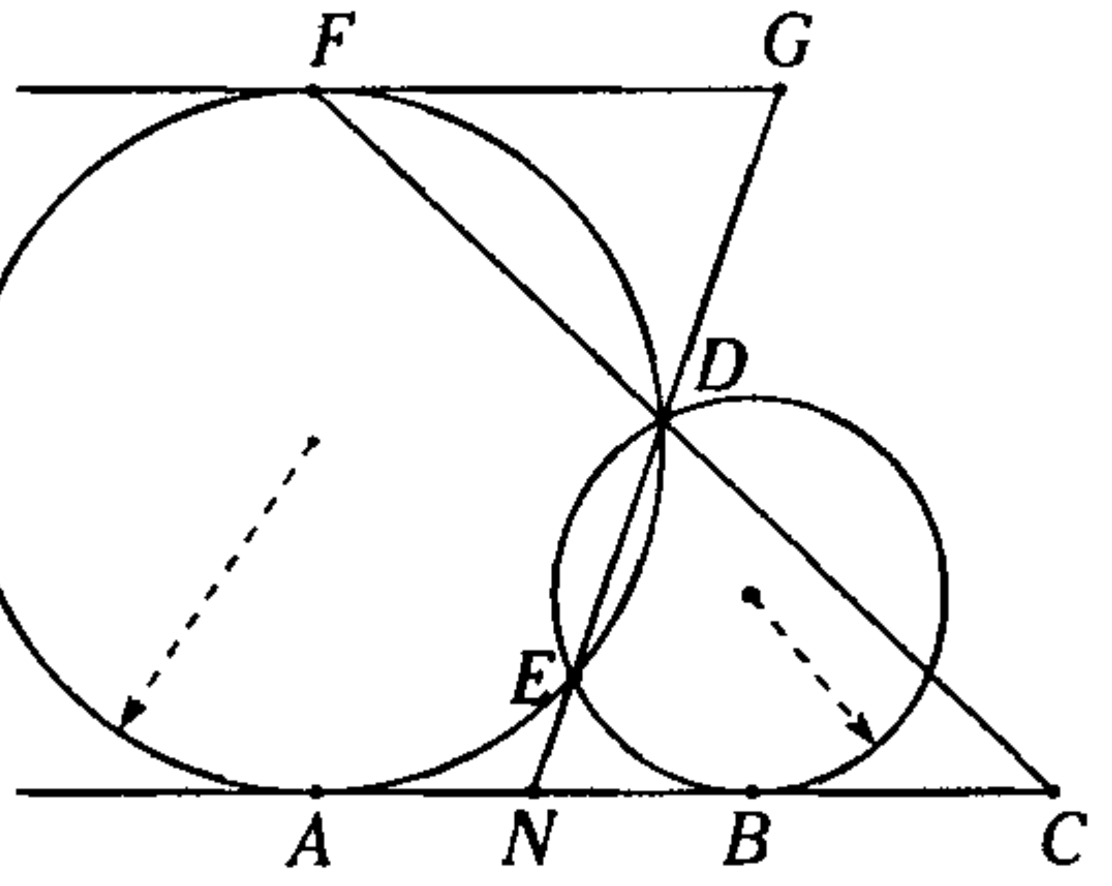
A) 8 B) 10 C) 11
D) 9 E) 12

4. De la figura, L es punto de tangencia $\overline{AD}//\overline{BC}$ y $(AD)(2(BC)-DC) = 9$, halle LD.



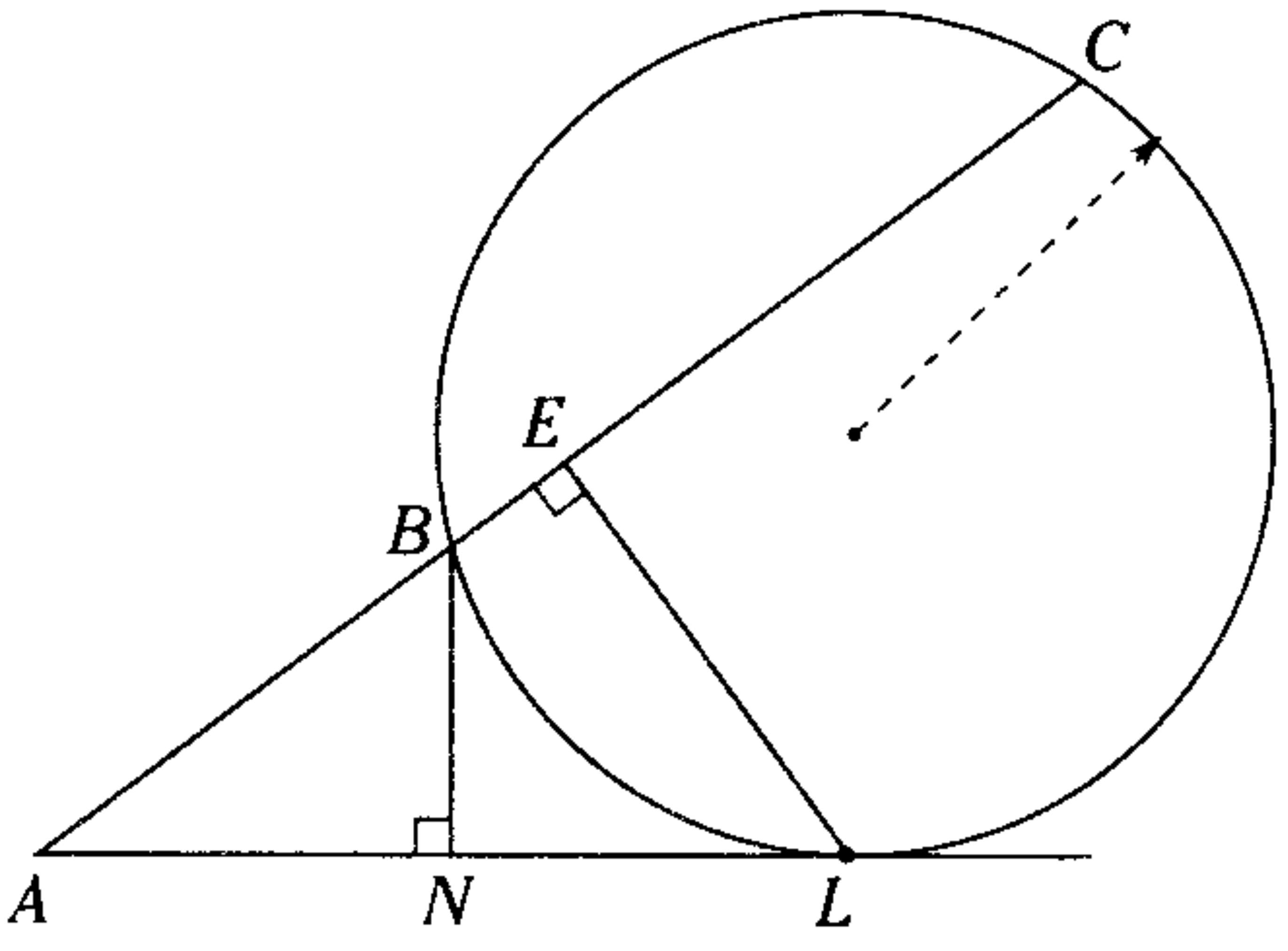
A) 3 B) 4 C) $3\sqrt{2}$
D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ E) $2\sqrt{2}$

5. Si en la figura, $\overline{FG}//\overline{AC}$, $GD = 2(DE)$ y $FD = DC$ calcule $\frac{BC}{AN}$.



A) $\sqrt{2}-1$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $\sqrt{3}-1$
D) $\sqrt{5}-2$ E) $\sqrt{6}-2$

6. De la figura, L es punto de tangencia $\frac{BC}{6}=\frac{BN}{3}=\frac{BA}{4}=1$. Calcule LE.

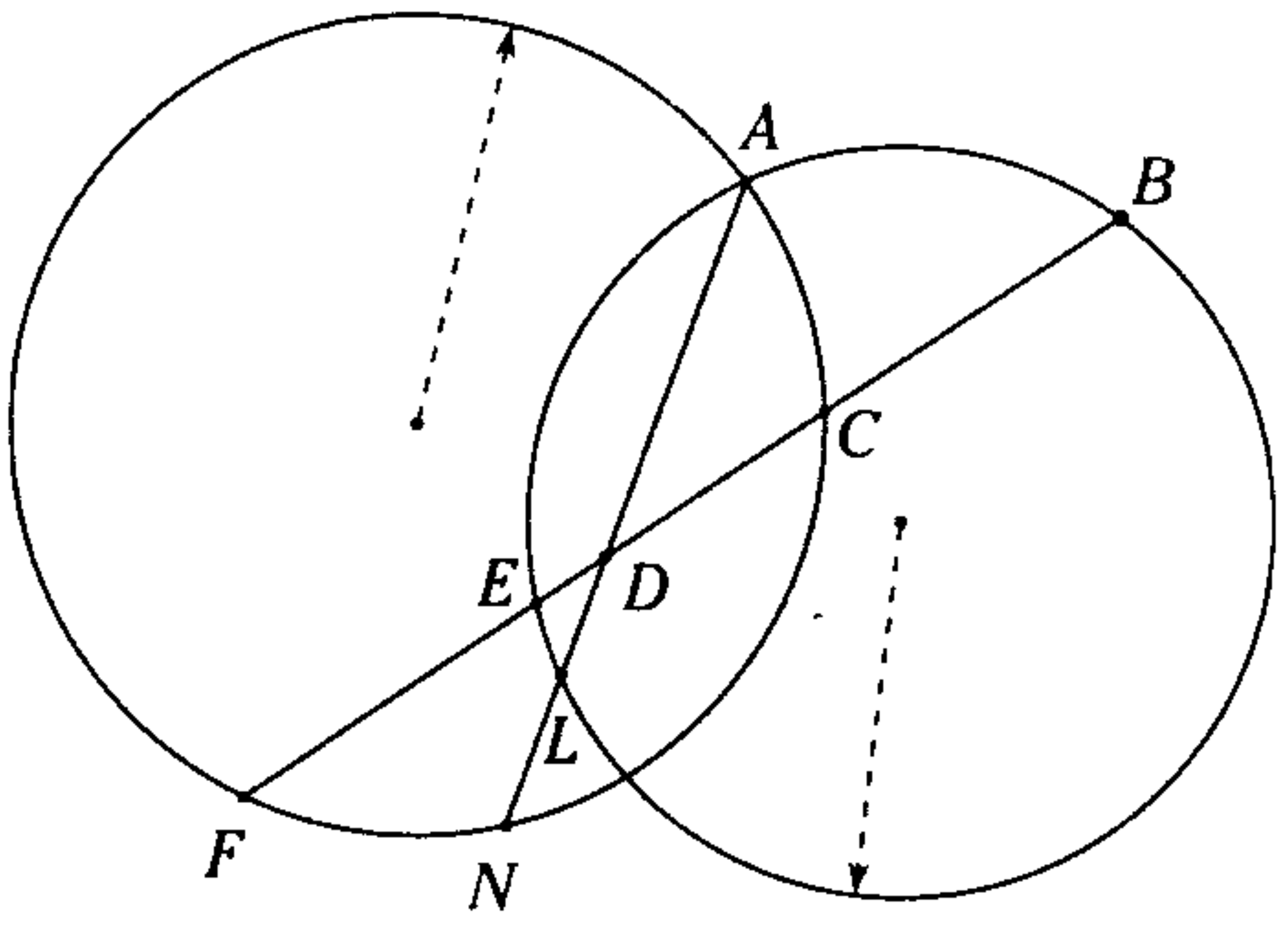


A) $\frac{5\sqrt{10}}{2}$ B) $2\sqrt{10}$ C) $3\sqrt{10}$

D) $\frac{7\sqrt{10}}{2}$ E) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

7. De la figura, $FE = EC = CB$ y $DC = 2(DE)$.

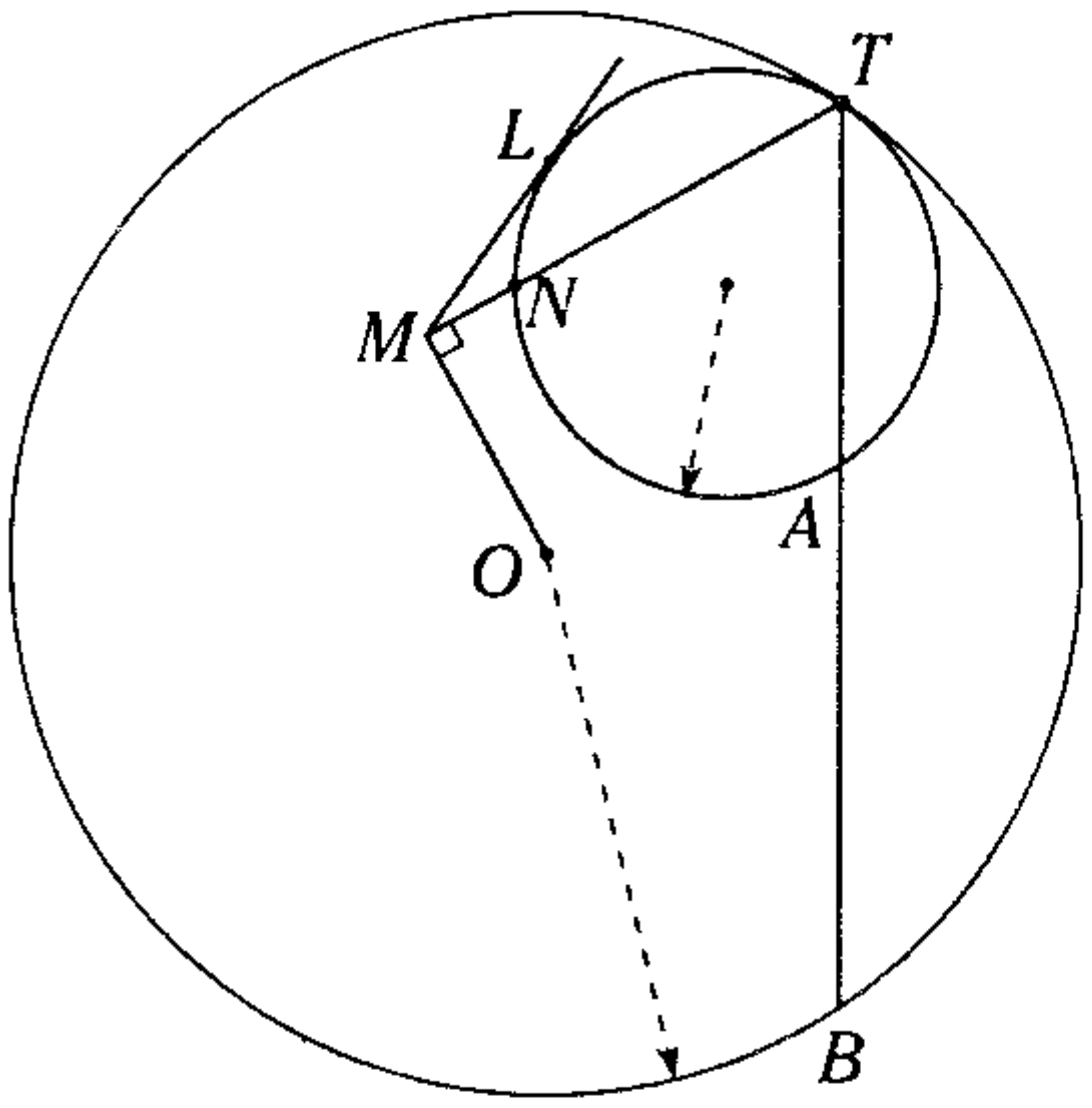
Determine $\frac{DL}{LN}$.



A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{7}{5}$

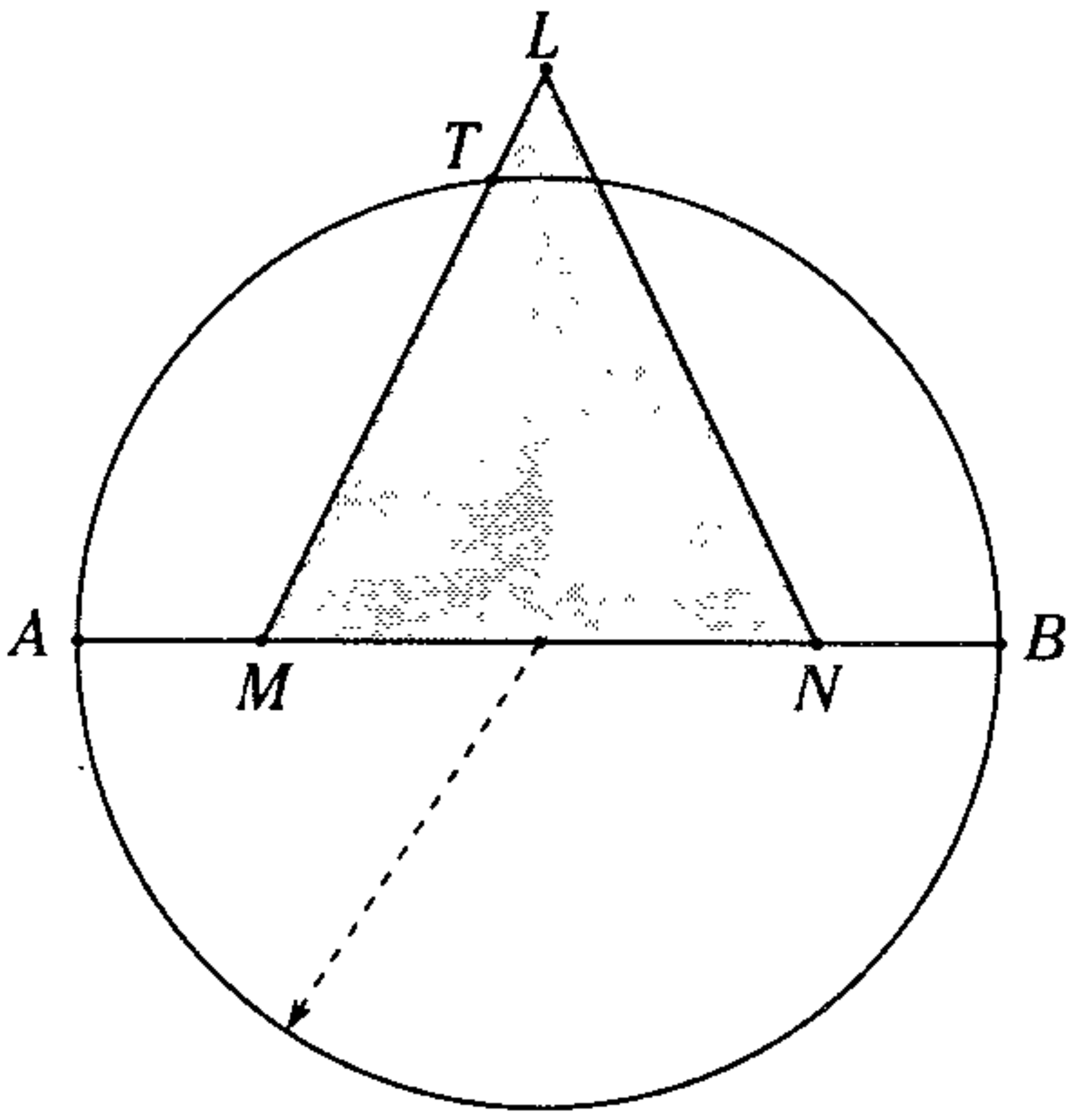
8. De la figura, T y L son puntos de tangencia, $4(TA) = 3(AB)$ y $TN = 6$. Halle LM.



A) $\sqrt{5}$ B) 3 C) $\sqrt{7}$

D) $2\sqrt{2}$ E) 2

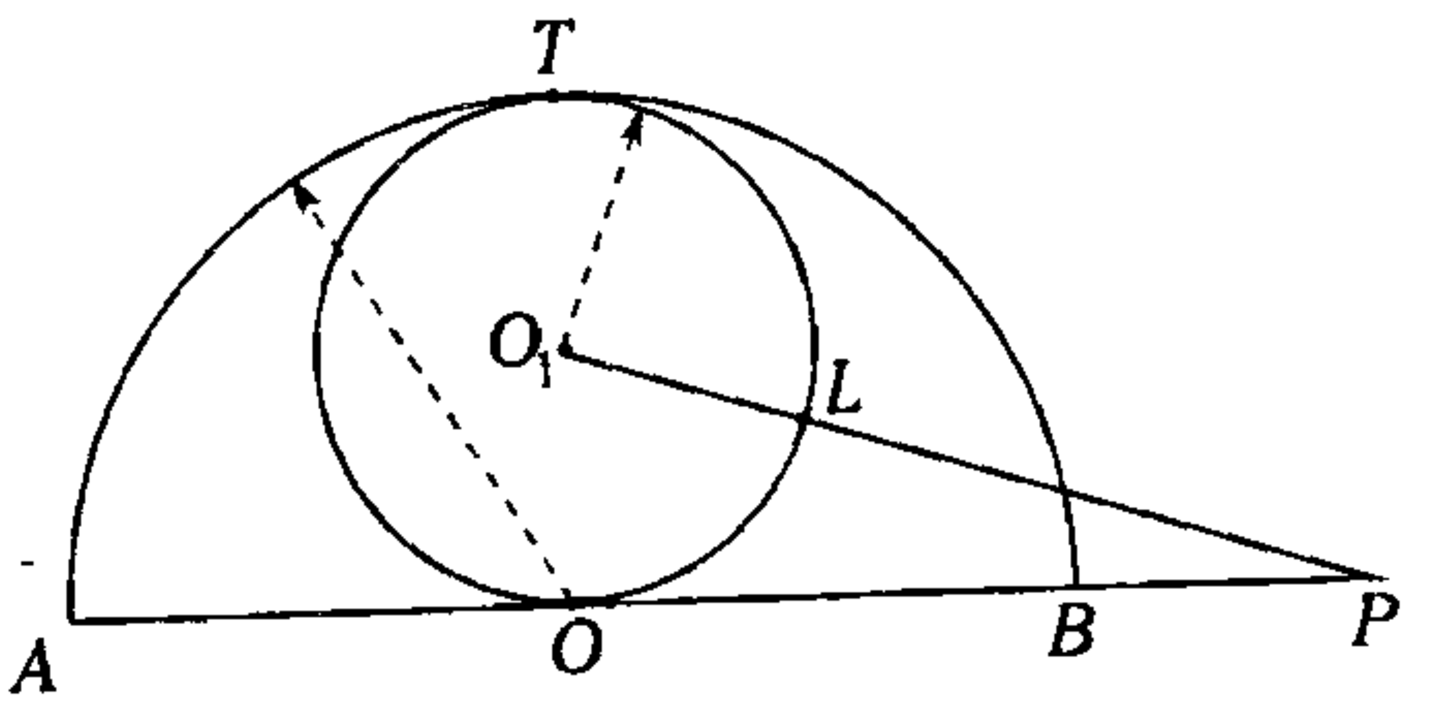
9. De la figura, $AM = NB = 1$. Si el perímetro de la región triangular equilátera MLN es 12, calcule LT.



A) $5-\sqrt{5}$ B) $4-\sqrt{3}$ C) $3-\sqrt{3}$

D) $3-\sqrt{6}$ E) $4-\sqrt{6}$

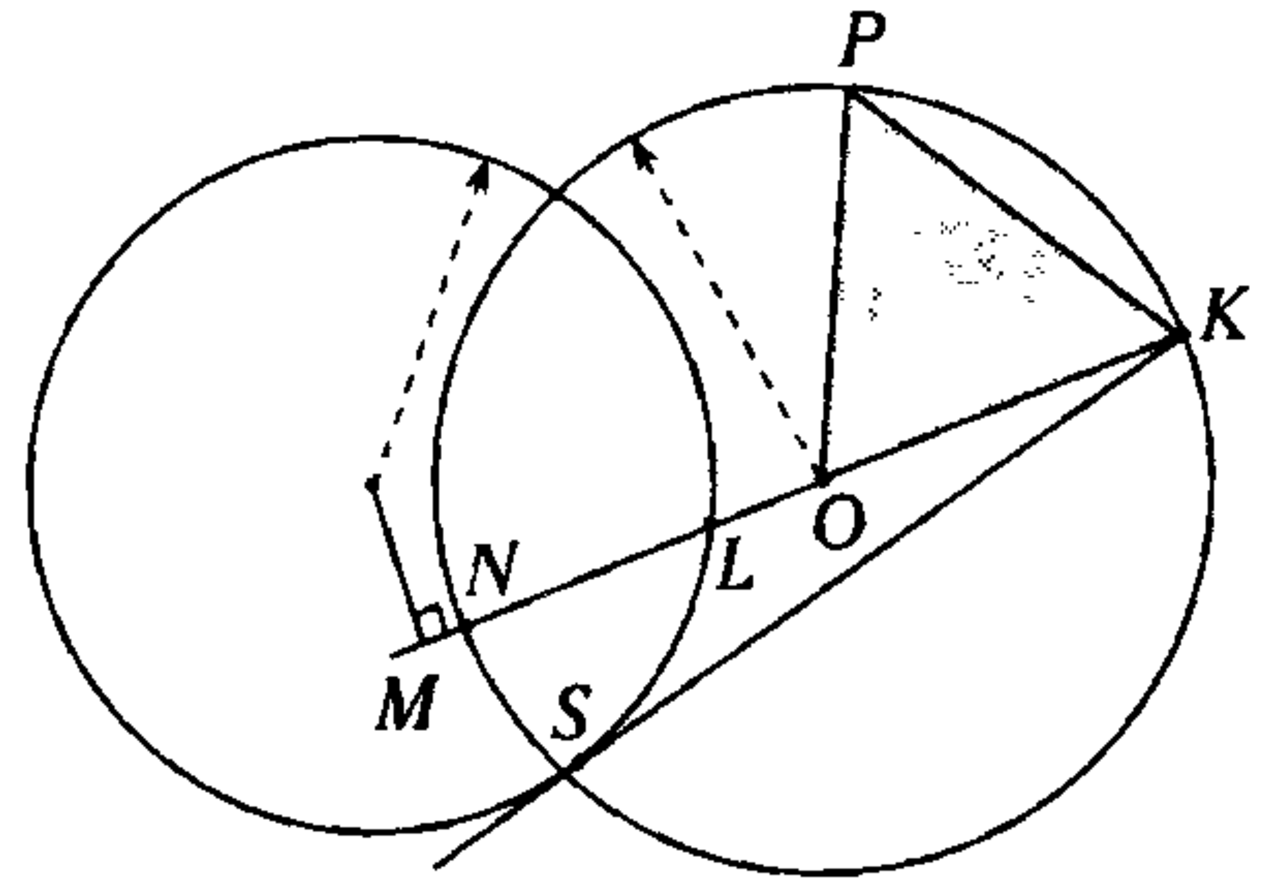
10. De la figura, T y O son puntos de tangencia. Si $LP = 2(BP)$, calcule $\dfrac{OB}{BP}$



A) $\sqrt{2}$ B) 3/2 C) 5/3

D) 4/3 E) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

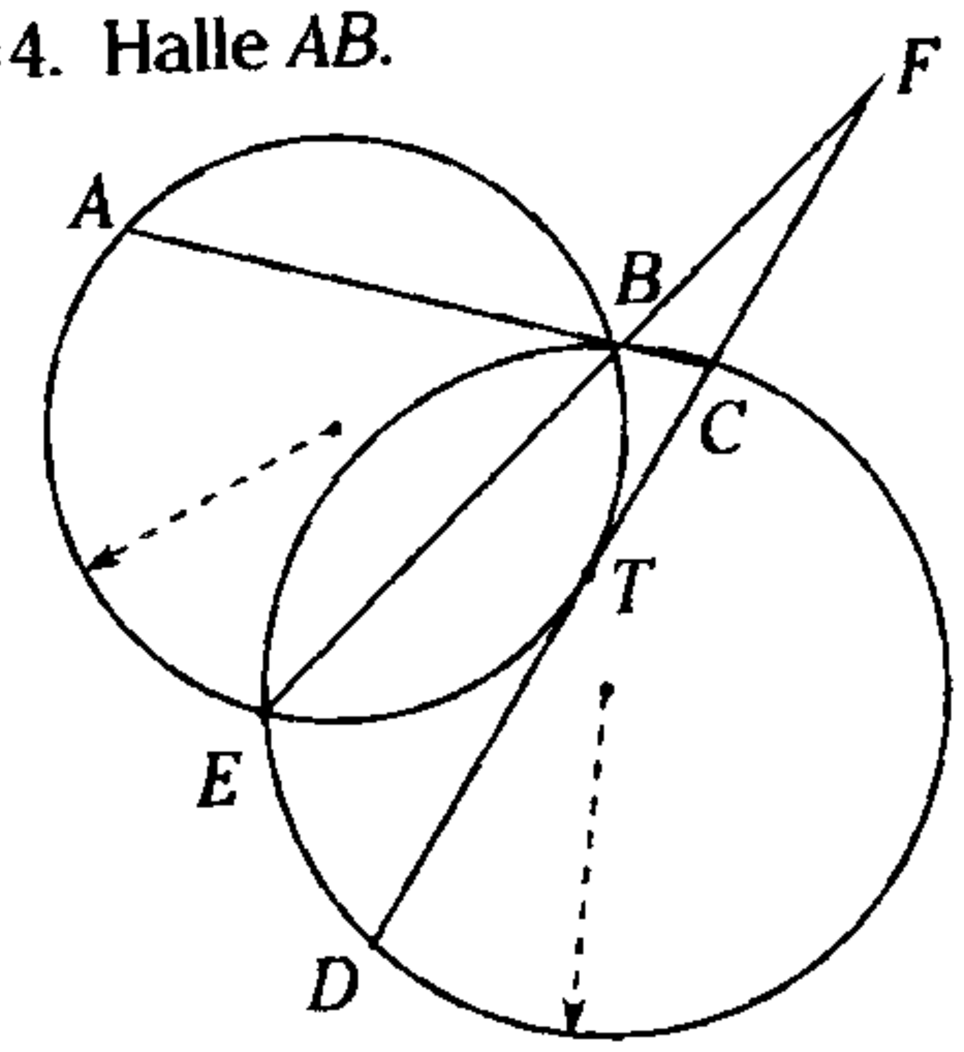
11. De la figura, S es punto de tangencia, $MN=1$; $NL=4$ y el perímetro de la región triangular equilátera POK es 18. Determine KS.



A) 9 B) 11 C) 10

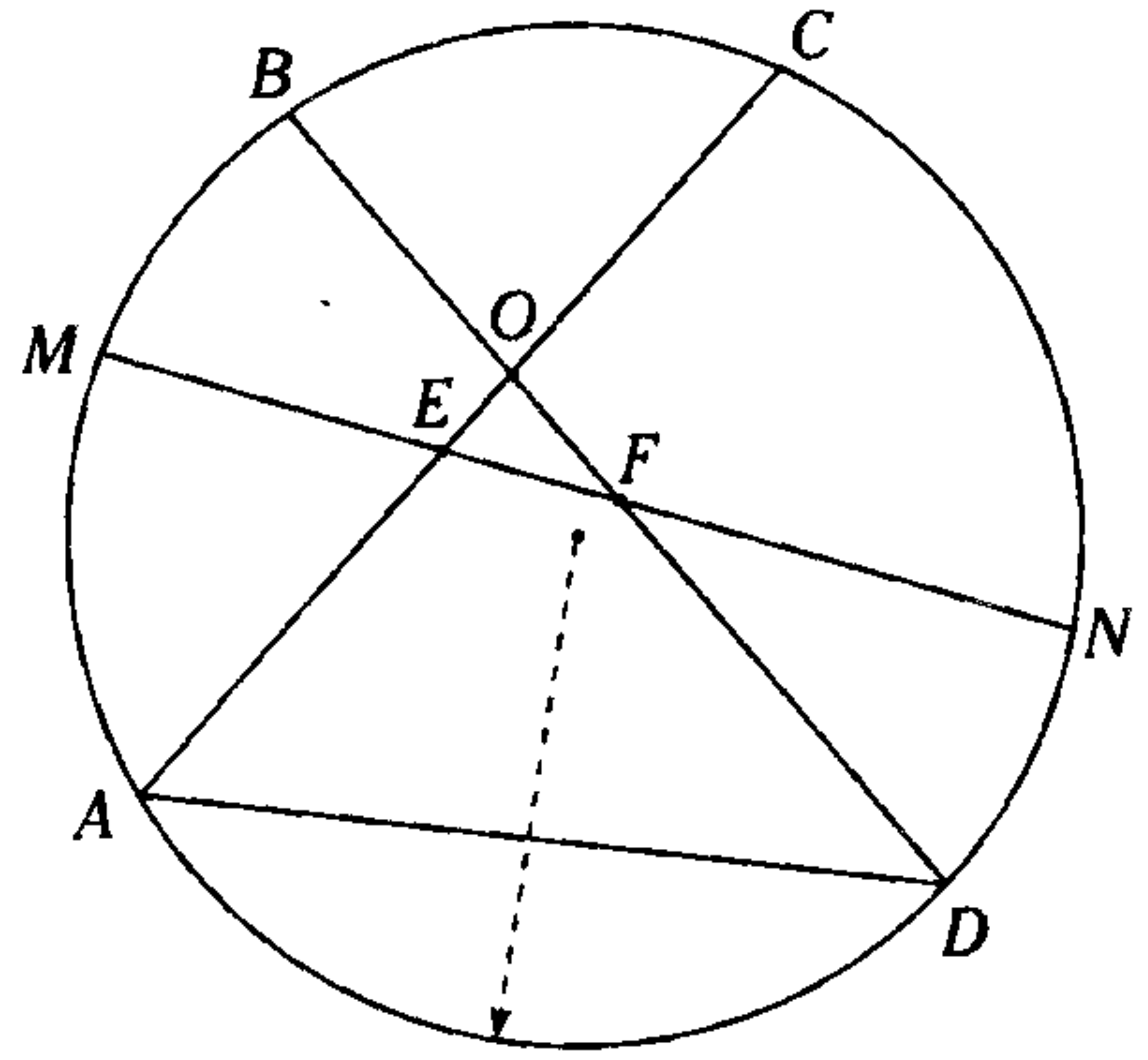
D) 12 E) 14

12. De la figura, T es punto de tangencia, $BC=1$, $DT=3$ y $CF=4$. Halle AB.



A) 6
B) 2,5
C) 3
D) 4
E) 4,5

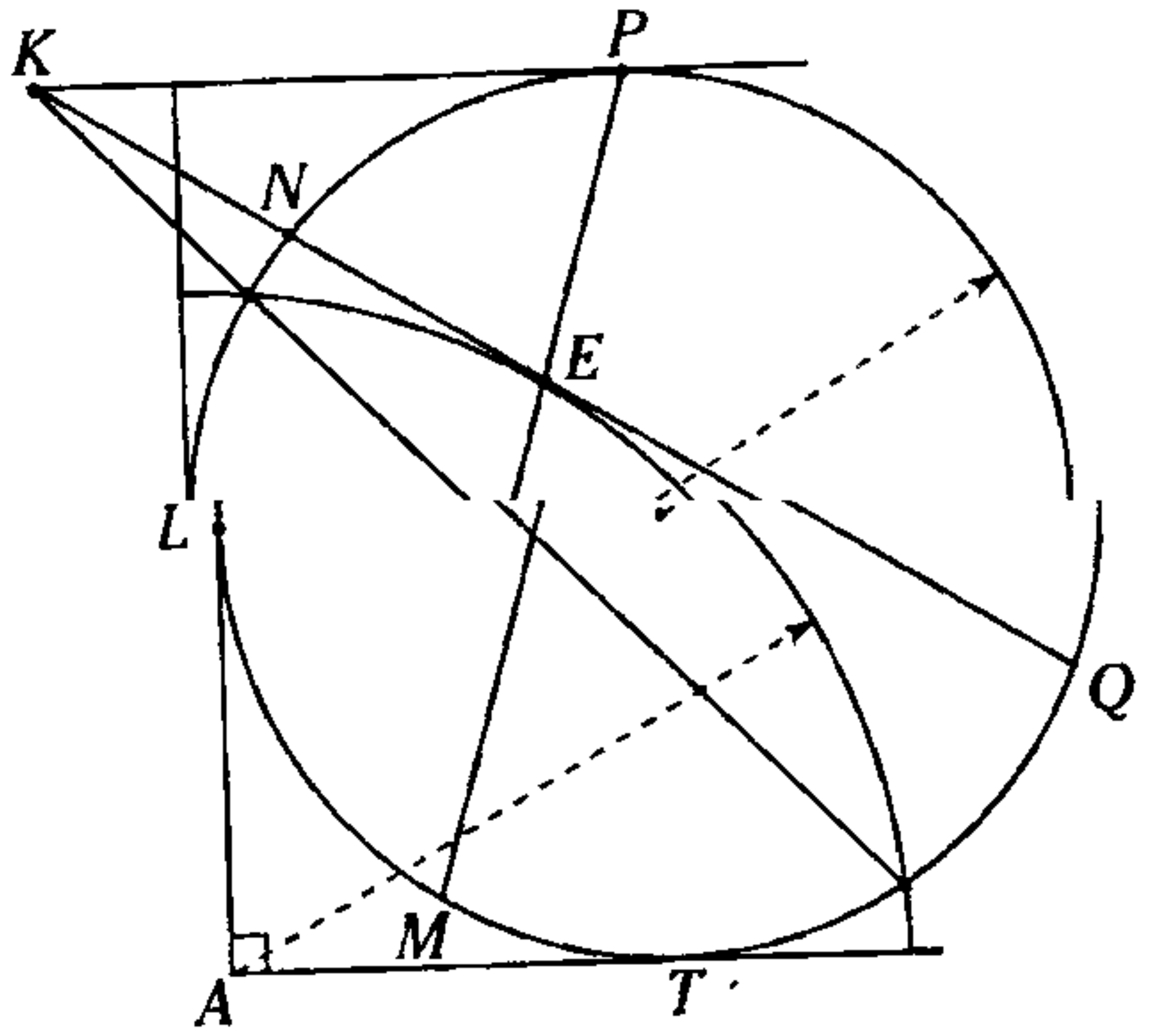
13. De la figura, $\overline{MN} // \overline{AD}$, $AE=2(BO)=6$ y $CO=4$. Calcule FD.



A) 6 B) 7 C) 8

D) 9 E) 10

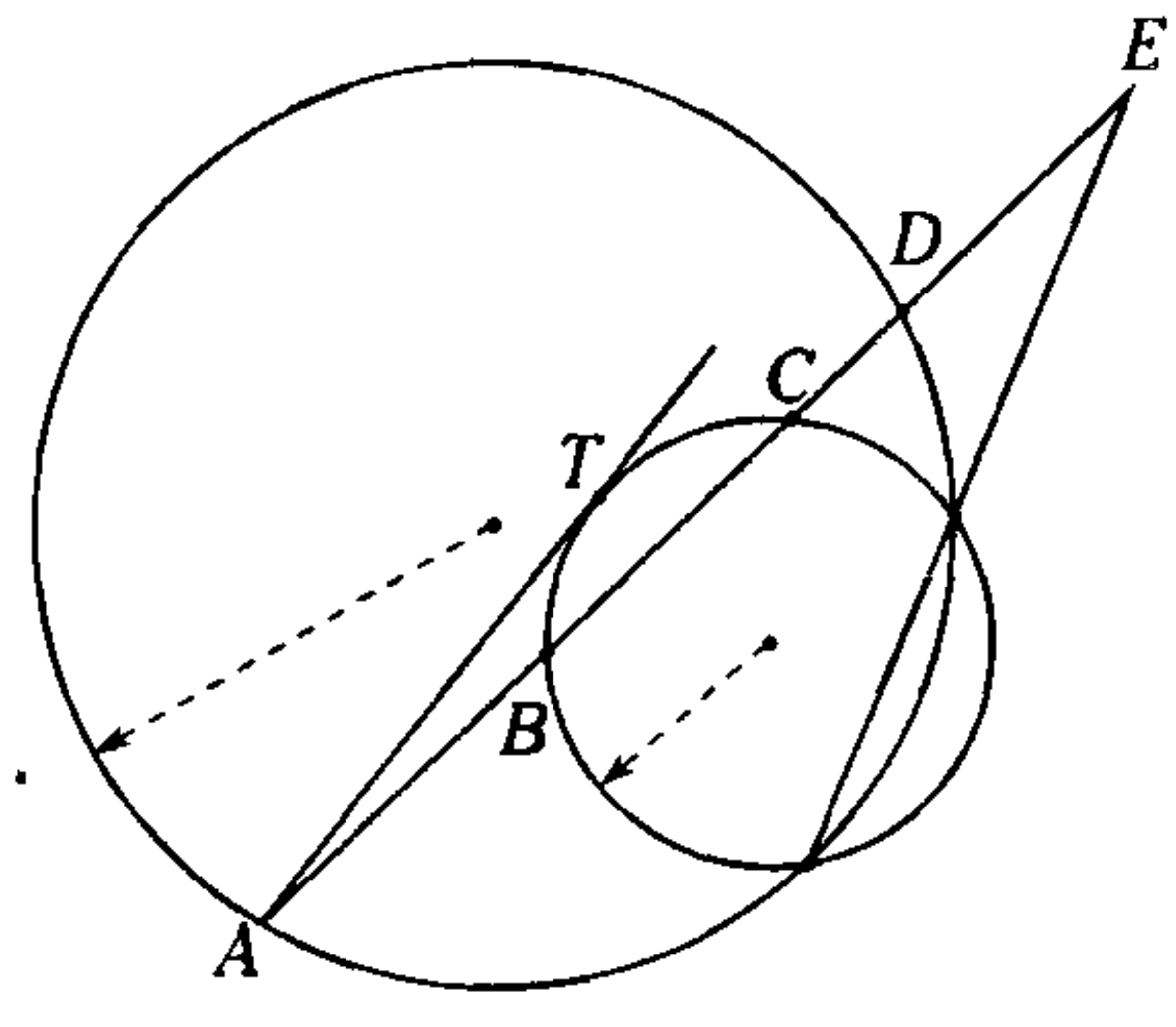
14. De la figura, L, P, T y E son puntos de tangencia y $m\overset{\frown}{NL} - m\overset{\frown}{MT} = \alpha$. Determine $m\overset{\frown}{MQ}$.



A) $90° + 2\alpha$ B) $90° + \alpha$ C) $\dfrac{3\alpha}{2}$

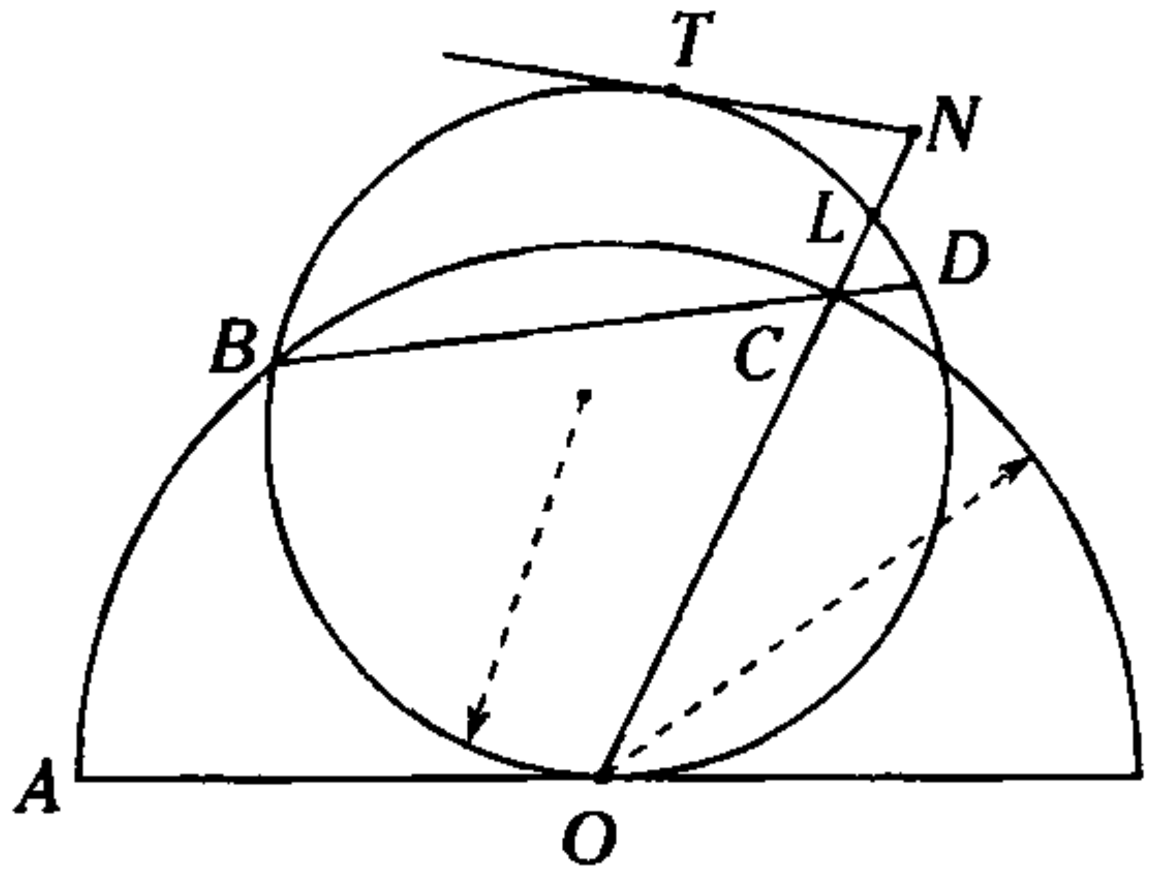
D) $45° + 2\alpha$ E) 2α

15. De la figura, $AT = 4$, $AB = 2$ y $CD = 1$. Determine DE. (T es punto de tangencia)



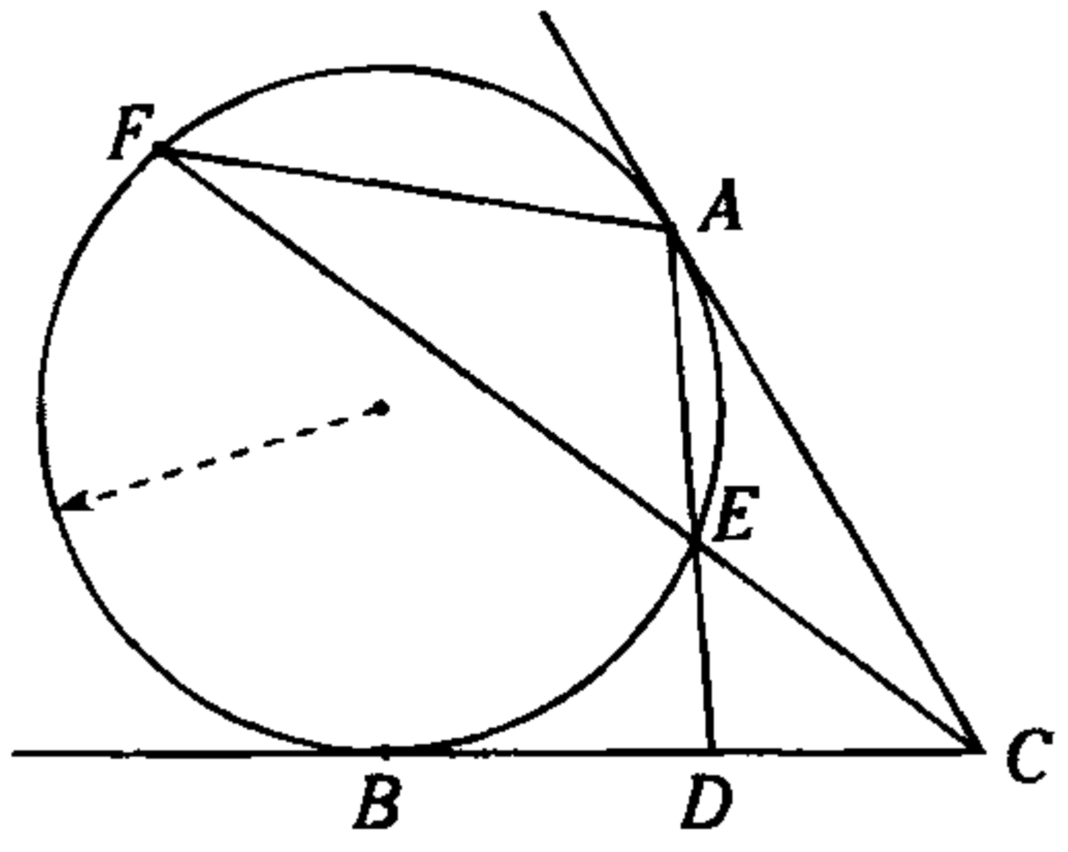
A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

16. De la figura, O y T son puntos de tangencia, $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$, $BC = 6$, $CD = 2$ y $CL = LN$. Calcule TN.



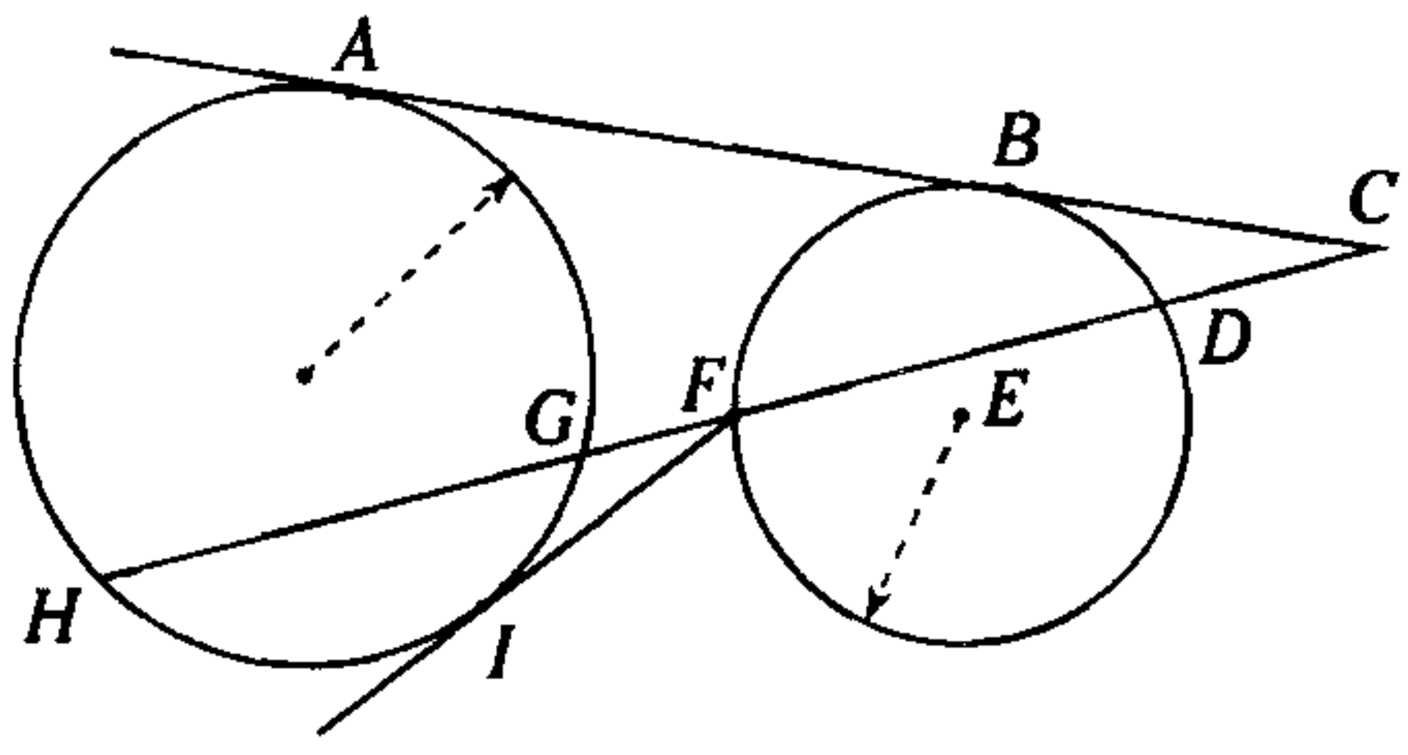
A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$
D) 2 E) $3\sqrt{5}$

17. De la figura, A y B son puntos de tangencia. Si $AF = 15$, $AC = 24$ y $BD = DC$, calcule ED.



A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 14

18. De la figura, A, B e I son puntos de tangencia. Si $AB = BC$ y $\frac{FD}{3} = \frac{DC}{2} = FG$, calcule $\frac{FI}{HG}$.

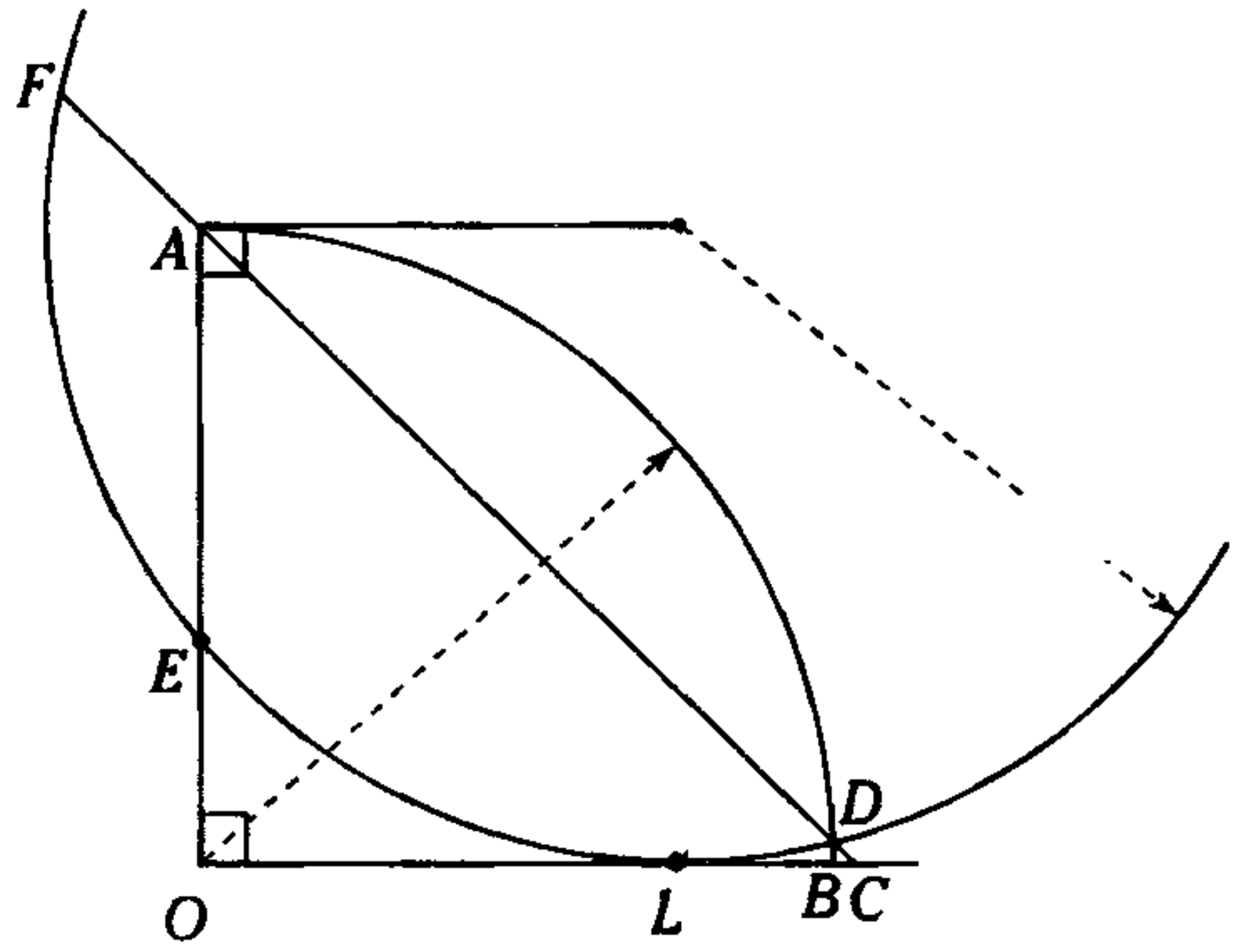


A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B) 2 C) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

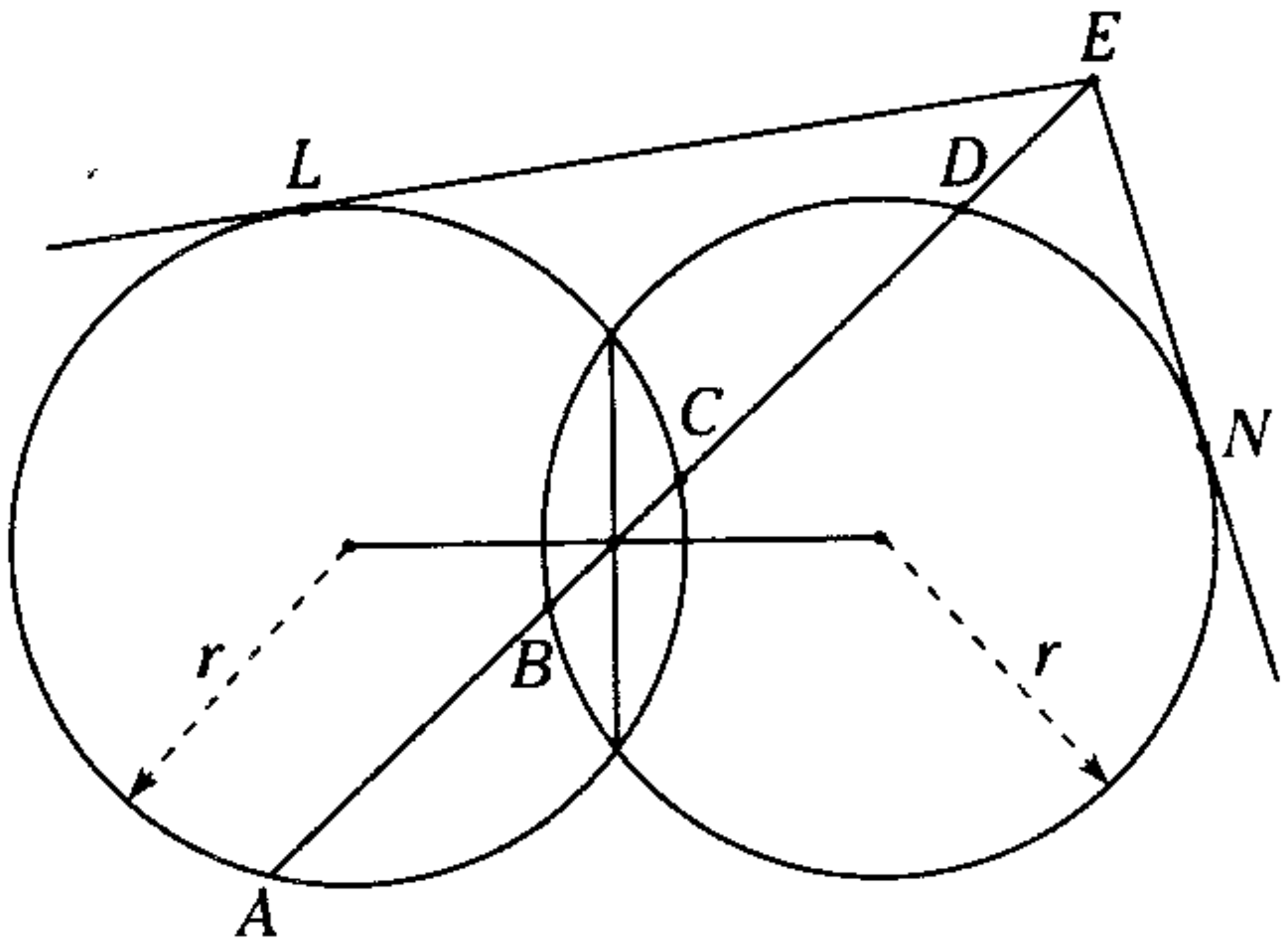
19. De la figura, $\frac{AE}{3} = \frac{OE}{2} = 2$ y $(FA)(DC) = 2$.

Halle BC.



A) 1/6 B) 1/4 C) 1/8
D) 1/16 E) 1/14

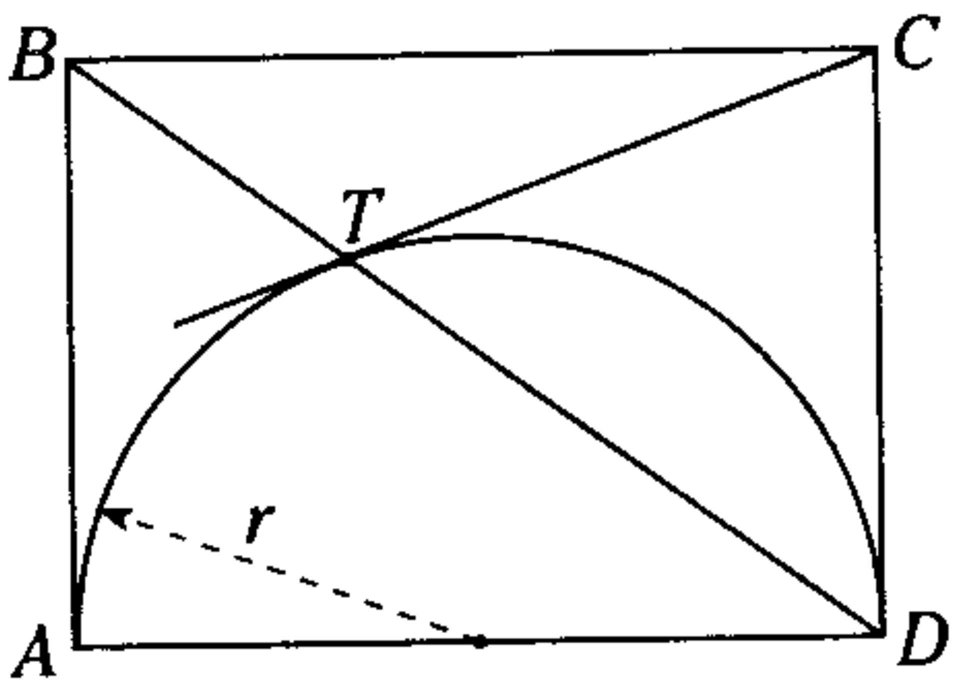
20. De la figura, L y N son puntos de tangencia, $BC=DE$ y $LE=4(EN)$. Calcule $\dfrac{AB}{BC}$



A) $4+3\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $3+\sqrt{6}$
D) $3+2\sqrt{6}$ E) $4+\sqrt{6}$

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

21. Según la figura, T es punto de tangencia, $TB = 2\sqrt{3}$. Calcule r.

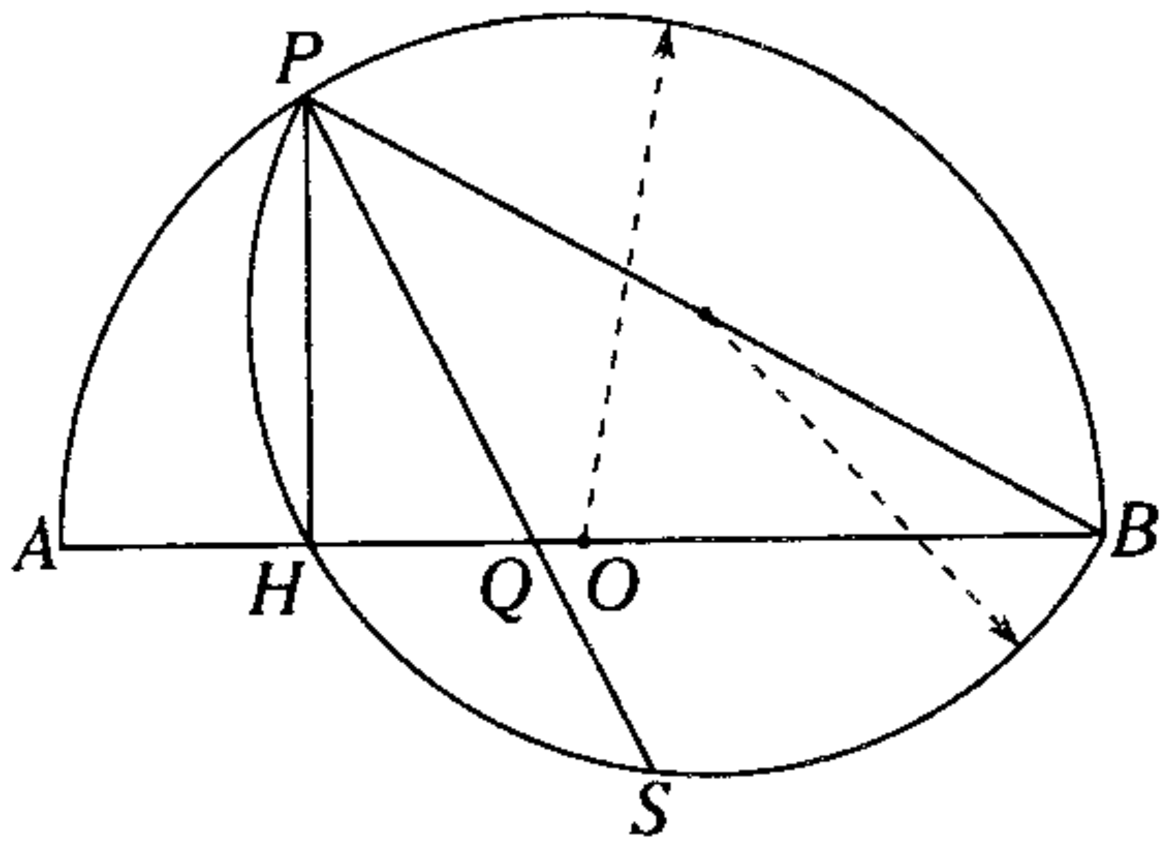


A) 3 B) 4 C) $2\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

22. En un trapecio de diagonales perpendiculares, el producto de las longitudes de sus diagonales es a y la base media mide b. Determine la altura del trapecio.

A) $2a/b$ B) b/a C) a/b
D) $3a/b$ E) $a-b$

23. De la figura, $m\overset{\frown}{PH}=m\overset{\frown}{HS}$ y $AQ(AB)=18$. Calcule PQ.



A) 2 B) $3\sqrt{2}$ C) 3
D) 6 E) 4

24. En un triángulo ABC se traza la mediana CD. Si $AC=3\sqrt{2}$, $AB=6$ y $m\sphericalangle CDA=90°+m\sphericalangle ACD$: calcule la distancia de B a $\overleftrightarrow{CD}$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 4
D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{6}$

25. Desde un punto P de la región exterior a una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, se traza $\overline{PA}$, de modo que lo interseca en L, luego se traza $\overline{LH}$ perpendicularmente a $\overline{AB}$ en H ($H \in \overline{AB}$). Si $m\overset{\frown}{AL}=2m\sphericalangle LBP$ $5(HB)=2(LB)$ y $BP=40$, calcule LB.

A) 12 B) 16 C) 20
D) 24 E) 32

26. De la figura, D, C y B son puntos de tangencia, $m\overset{\frown}{DC}+2m\sphericalangle FGC=180°$; $AB=BE\sqrt{2}$ y $AC \times GC=a^2$. Determine FD.

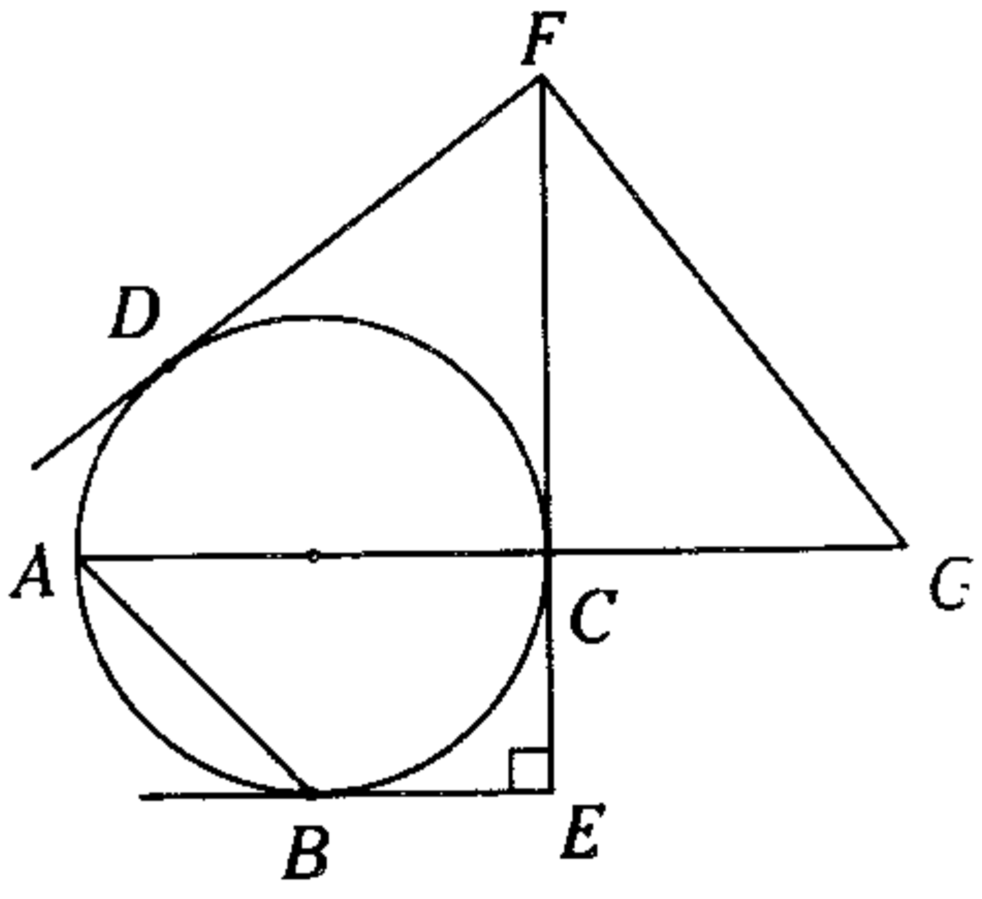
A) $\dfrac{a}{2}$

B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

C) $\dfrac{a}{4}$

D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

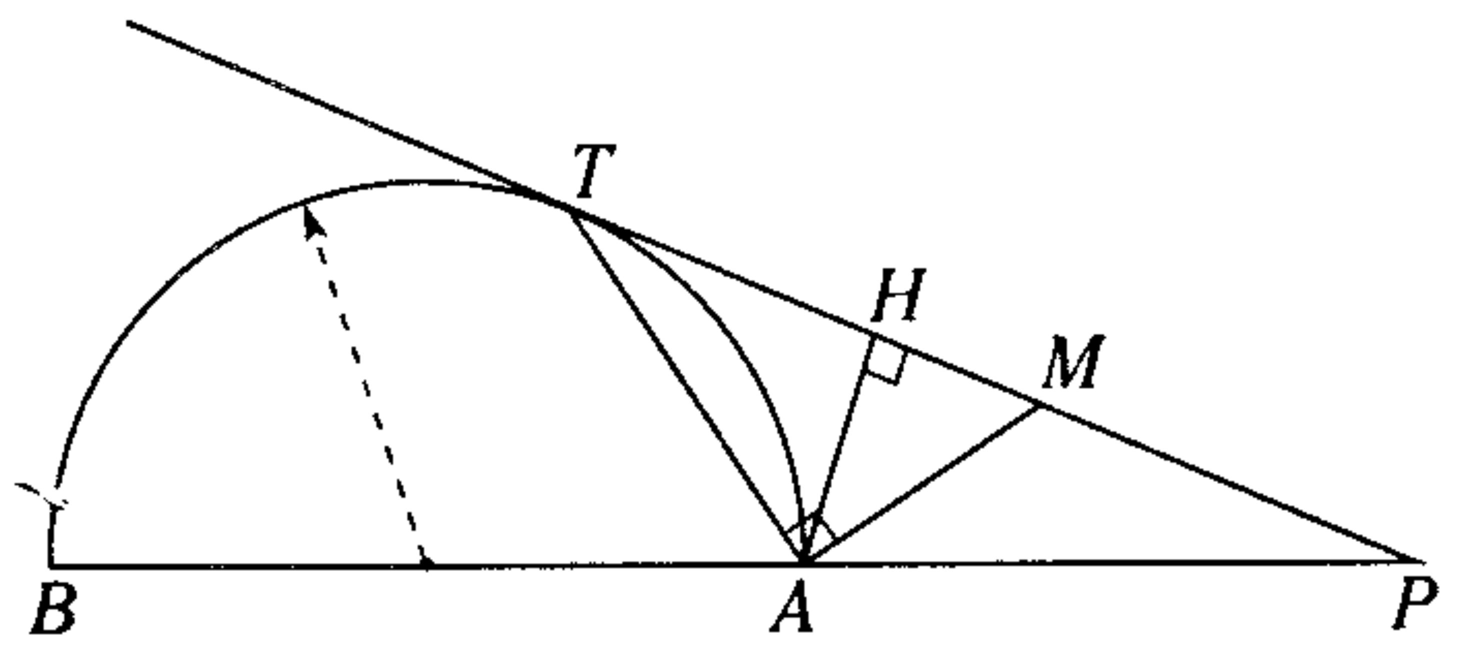
E) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



27. En un triángulo ABC, se ubican los puntos E, F, G y T en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y en la prolongación de $\overline{AB}$ respectivamente, tal que la $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle EFG = 90°$, $m\sphericalangle TFE = m\sphericalangle AFG$; $\frac{AG}{GC} = \frac{3}{2}$; $EF = FG$ y $AB = 10$. Calcule TB.

A) 0,8 B) 1,6 C) 3,2
D) 1,8 E) 3,6

28. Según la figura, $PM = 4$; $AP = 6$ y $TH = 3$. Halle AT.

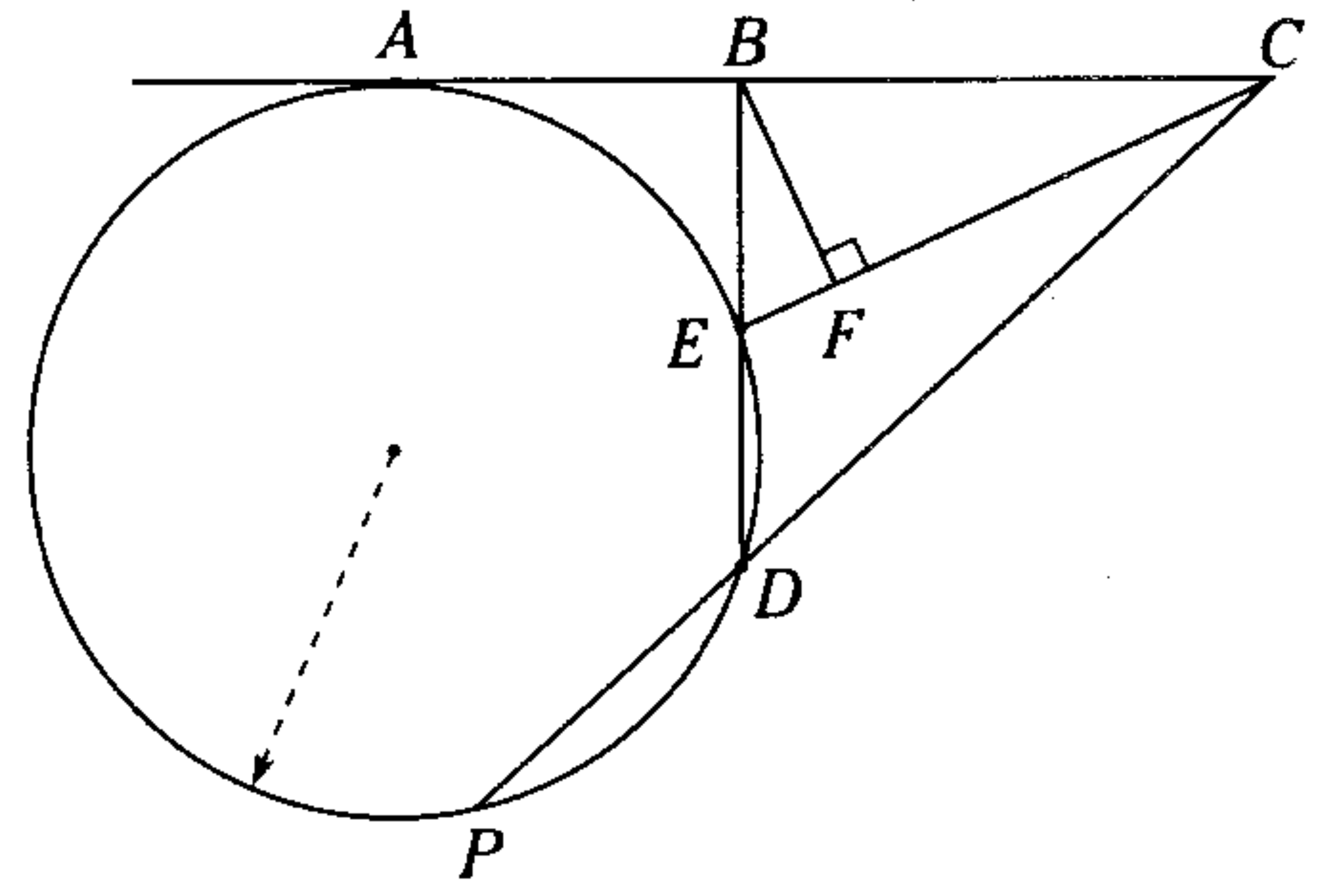


A) $\sqrt{13}$ B) $\sqrt{15}$ C) $\sqrt{17}$
D) $\sqrt{19}$ E) $\sqrt{21}$

29. Dos circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son secantes en los puntos P y T, el centro O de $\mathscr{C}_2$ pertenece a $\mathscr{C}_1$, la cuerda $\overline{AT}$ de $\mathscr{C}_1$ es tangente a $\mathscr{C}_2$, en la prolongación de $\overline{OP}$ se ubica el punto Q tal que $PQ = 5$; $AT = 12$. Determine la distancia de P a $\overline{AQ}$.

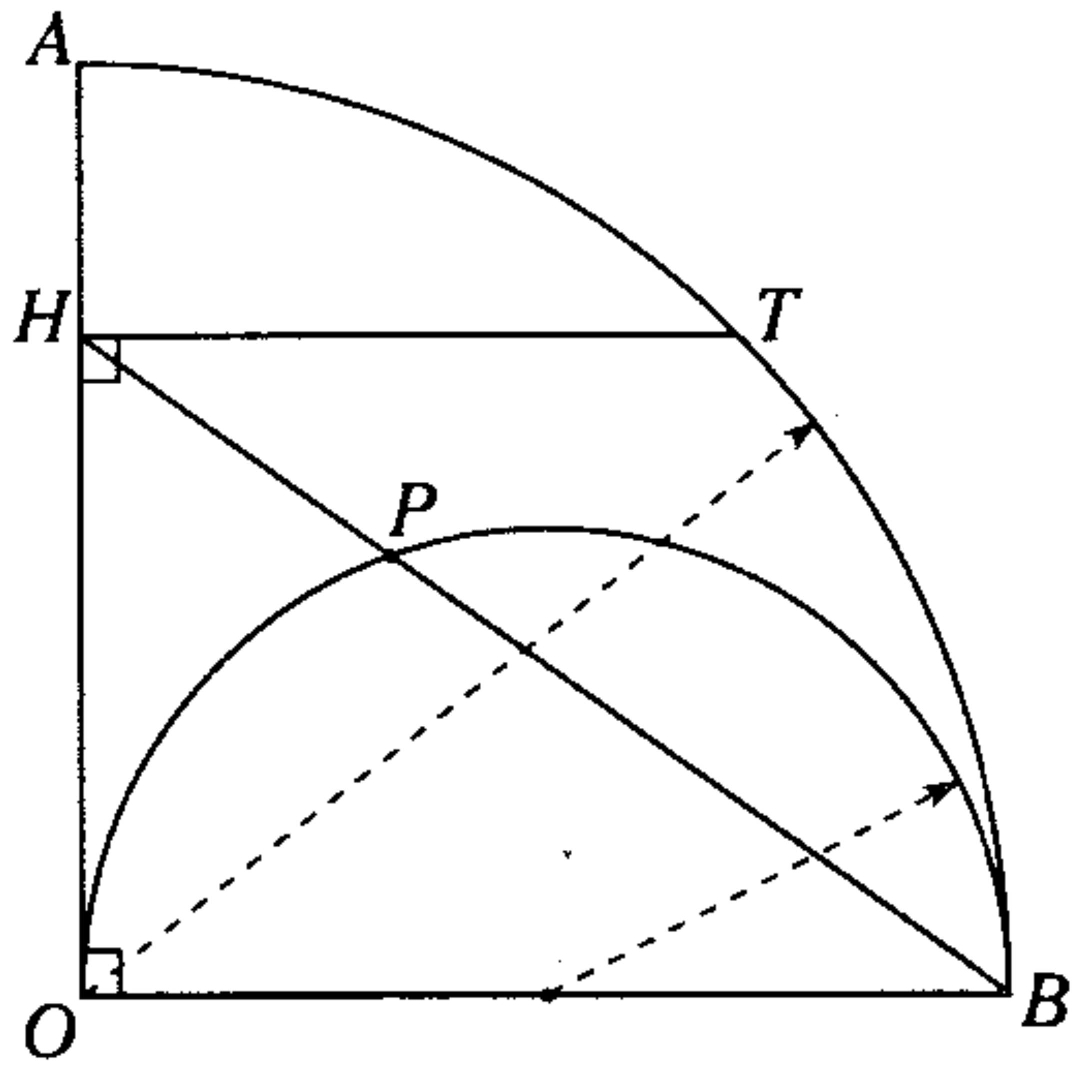
A) 4 B) $\frac{60}{17}$ C) $\frac{60}{13}$
D) $\frac{30}{7}$ E) $\frac{60}{7}$

30. Según la figura, $m\widehat{AP} - m\widehat{AD} = m\sphericalangle ABE = 90°$, $AB = a$; $EC = b$. Calcule BF, (A es punto de tangencia)



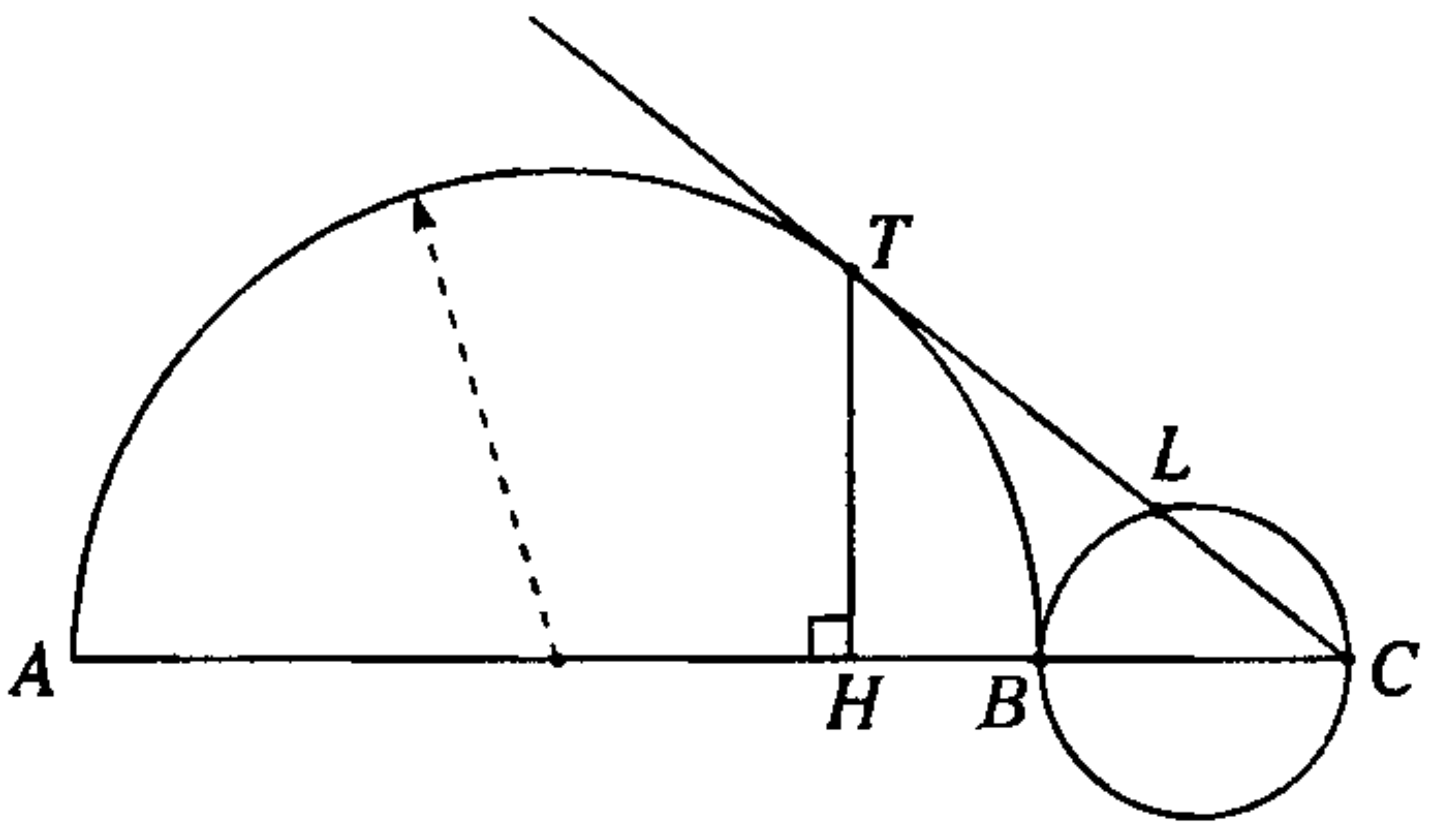
A) $\frac{2a^2}{b}$ B) $\frac{a^2}{2b}$ C) $\sqrt{ab}$
D) $\frac{a^2}{b}$ E) $\frac{b^2}{a}$

31. De la figura, $HP = \ell$ y $HT = OH$. Calcule PB.



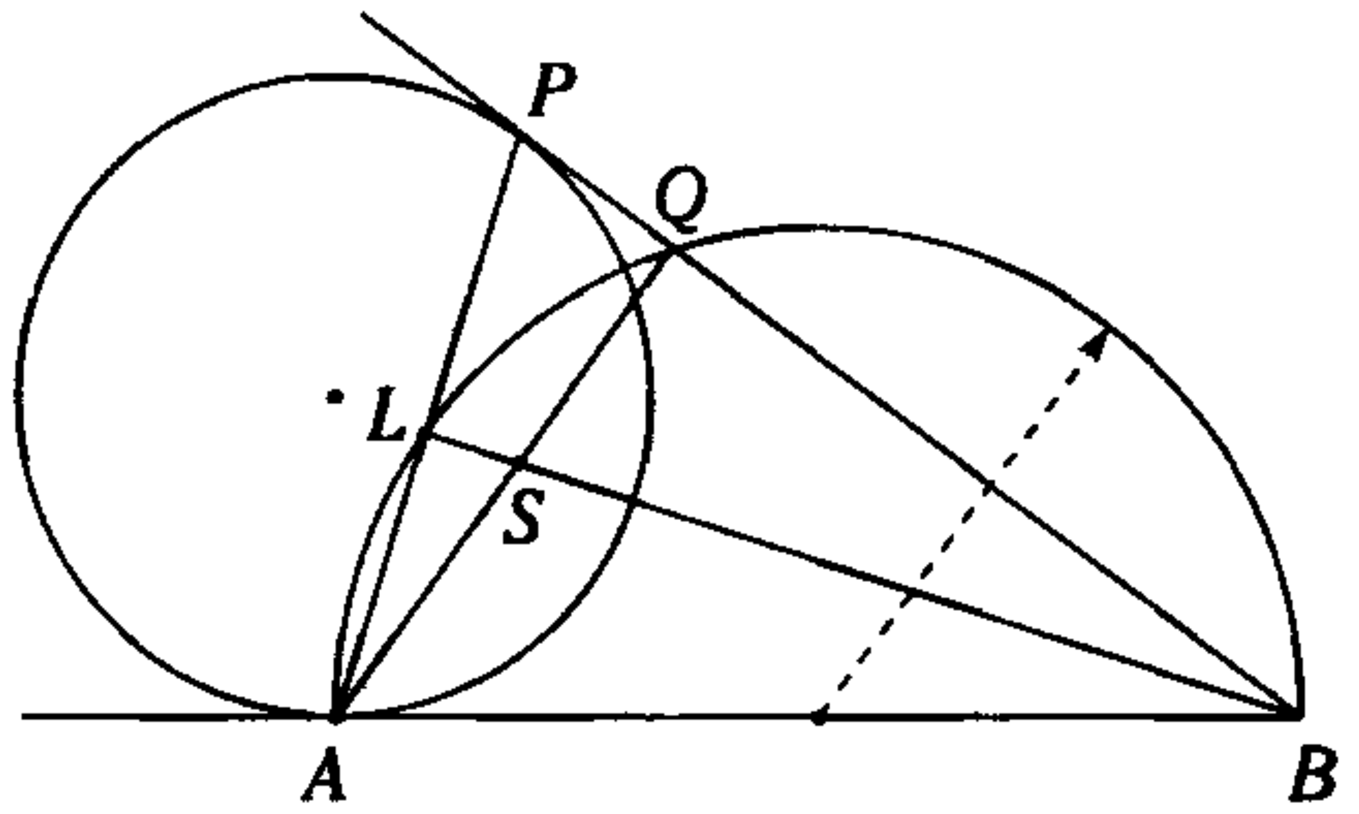
A) 4ℓ B) 3ℓ C) 2ℓ
D) $1{,}5\ell$ E) ℓ

32. En la figura, T y B son puntos de tangencia. Si $AH=5(BL)=10$, calcule LC.



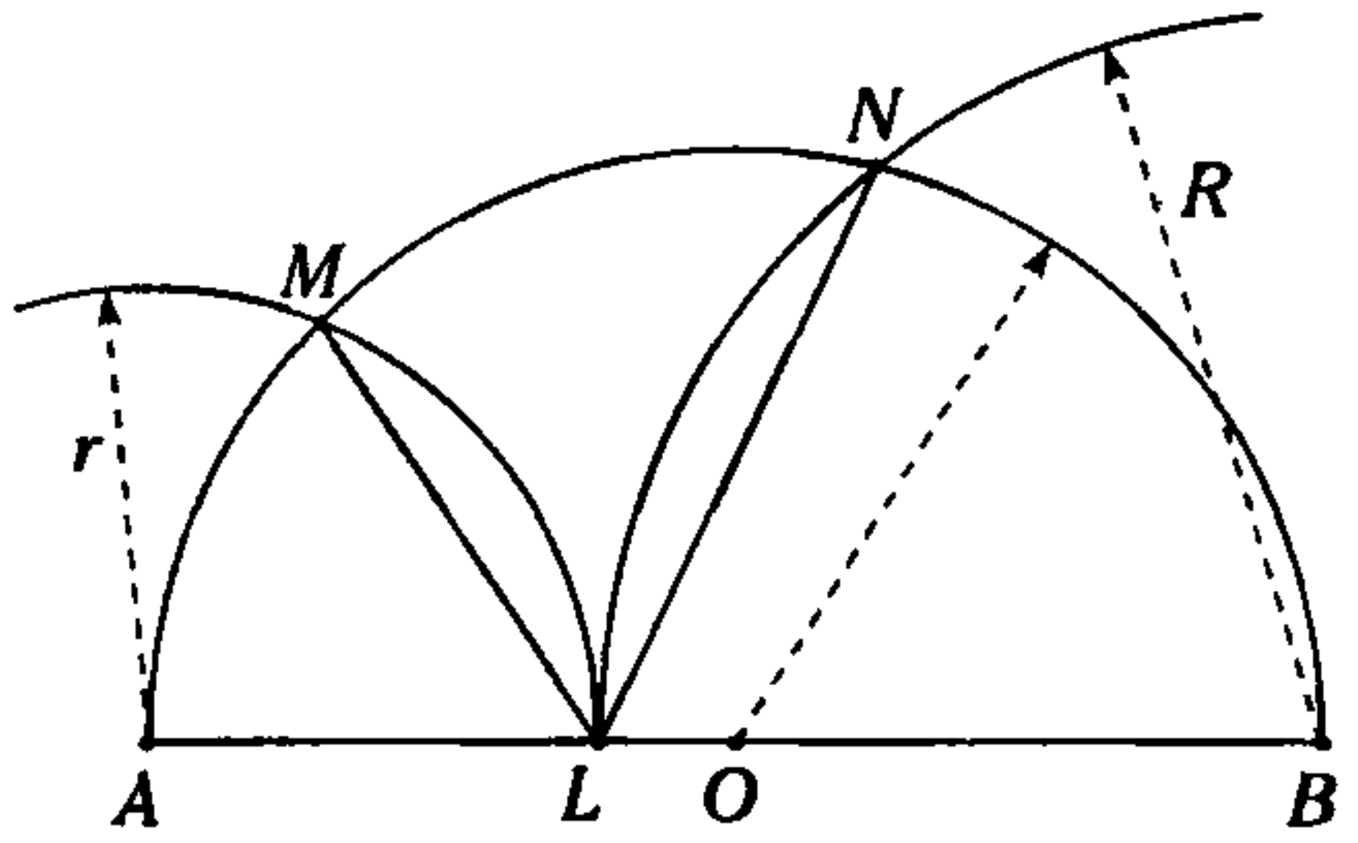
A) 2 B) $\sqrt{5}$ C) 4
D) $3\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{5}$

33. Según la figura, $BS=4(LS)=4$. Si A y P son puntos de tangencia, calcule PS.



A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

34. De la figura, halle $\dfrac{ML}{NL}$



A) $\dfrac{r}{R}$ B) $\dfrac{r+R}{R}$ C) $\dfrac{R}{r}$

D) $\sqrt{\dfrac{r}{R}}$ E) $\sqrt{\dfrac{R}{r}}$

35. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica en la región exterior relativa a $\overline{AB}$ en punto D, tal que la $m\sphericalangle DAC=90°$:

$m\sphericalangle DBA=90-\dfrac{m\sphericalangle BCA}{2}$ y $2(AC^2)-(DC^2)=40$.

Calcule BC.

A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{10}$

D) $3\sqrt{10}$ E) 6

36. En un triángulo ABC, se ubican los puntos P y Q en BC y AC respectivamente. Tal que $m\sphericalangle ABP=m\sphericalangle APQ$; $m\sphericalangle PAQ=m\sphericalangle CPQ$; $AB=PC$ y $PC^2+QC^2=AP^2$. Determine $m\sphericalangle ABC$.

A) 90° B) 45° C) 75°

D) 82° E) 120°

37. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, luego se ubica L en $\overline{AB}$ tal que $\overline{LD}\perp\overline{DB}$, $BC=DC$, $LB=7(AL)=7$. Calcule LD.

A) $2\sqrt{2}$ B) $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$ C) $\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$

D) $3\sqrt{2}$ E) $\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$

38. En una semicircunferencia de diámetro AB, en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto L, luego se trazan la tangente $\overline{LT}$ (T: punto de tangencia) y $\overline{TH}$ perpendicular a $\overline{AL}$ ($H \in \overline{AB}$), si $TL = TH + 5(HB)$ y $HL = 25$. Calcule TH.

A) $\sqrt{5}$ B) 3 C) 1
D) 5 E) 2,5

39. En una circunferencia de centro O, se trazan desde dos puntos exteriores A y B las tangentes AN y BM (N, M son los puntos de tangencia), tal que $m\sphericalangle OBA = 90°$, si $AN = a$ y $BM = b$. Determine AB.

A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{a^2-b^2}$

C) $\sqrt{2a^2-b^2}$

D) $\dfrac{a+b}{2}$ E) $\dfrac{a-b}{2}$

40. En un triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$ ($H \in \overline{AC}$), luego se ubica L en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ tal que $m\sphericalangle ABL = 2m\sphericalangle ALB$, $m\sphericalangle LBA + m\sphericalangle BAC = 90°$, $AC = b$, $AB = d$, $HC = c = 2\sqrt{5}$, $BL = 2a+d$ y $a^2 + c^2 = d^2$. Calcule b.

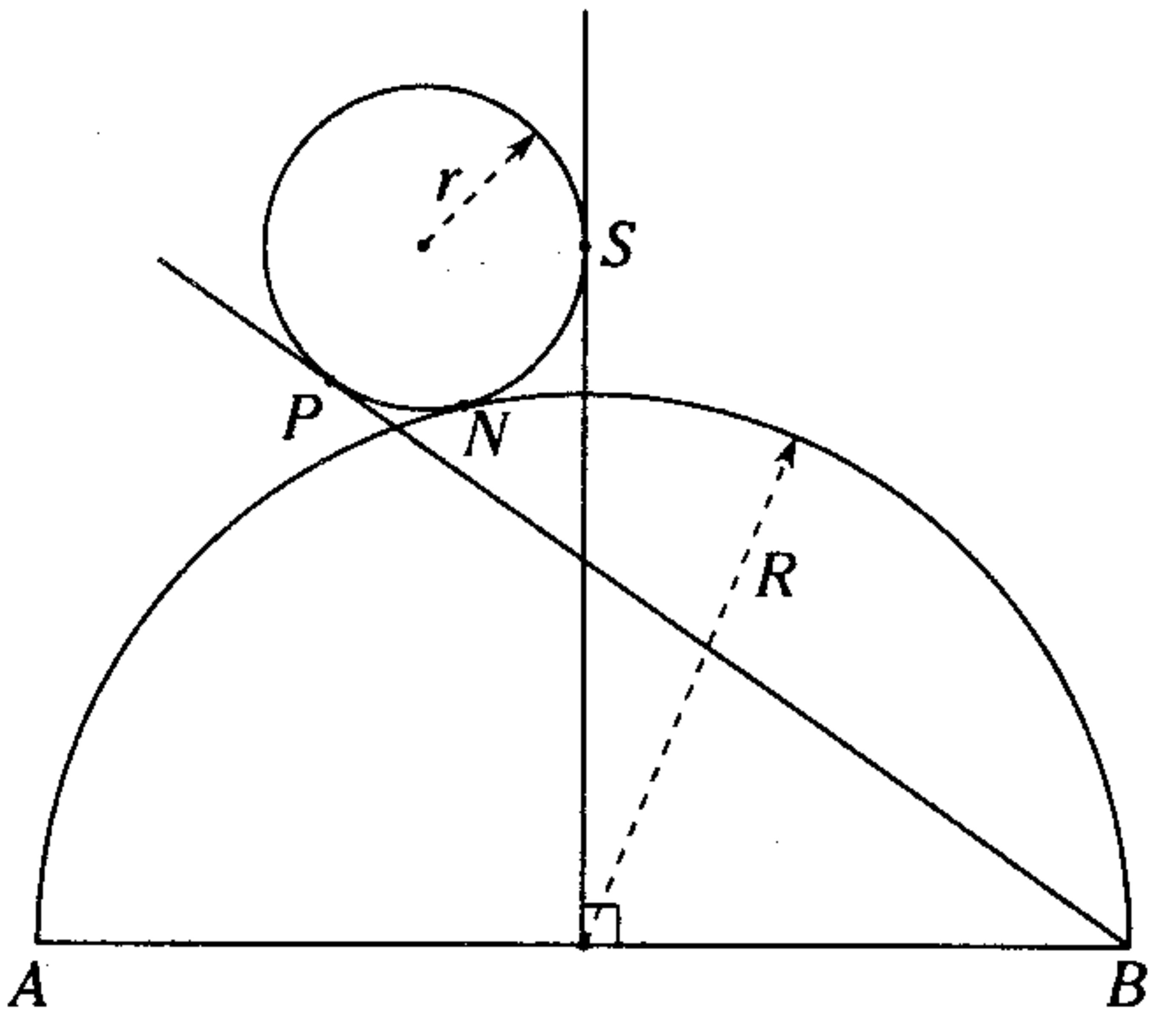
A) 4 B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) 6 E) 8

Relaciones métricas en el triángulo oblicuángulo

41. Es un cuadrilátero $ABCD$, se traza $\overline{DH} \perp \overline{AC}$ ($H \in \overline{AC}$), luego se ubica el punto M de $\overline{BC}$ tal que $MH = HC$; $m\sphericalangle ABC = 2(m\sphericalangle HMC)$; $AD = 16$; $DC = 4$ y $BM = MC$. Calcule AB.

A) 12 B) 9 C) $2\sqrt{5}$
C) $2\sqrt{13}$ E) $5\sqrt{2}$

42. Según la figura, P, S y N son puntos de tangencia. Si $(R + 2r)R = 17$, determine, PB.

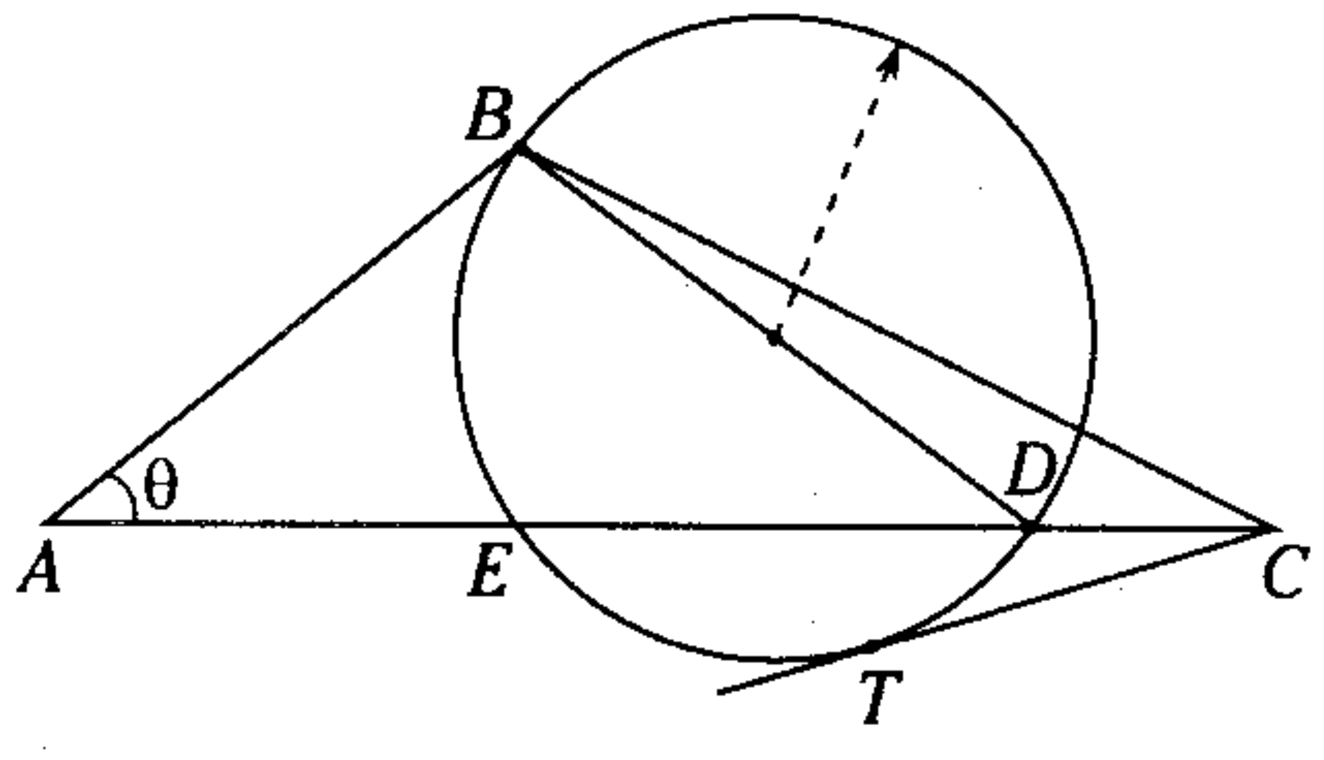


A) $\sqrt{17}$ B) $2\sqrt{17}$

C) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

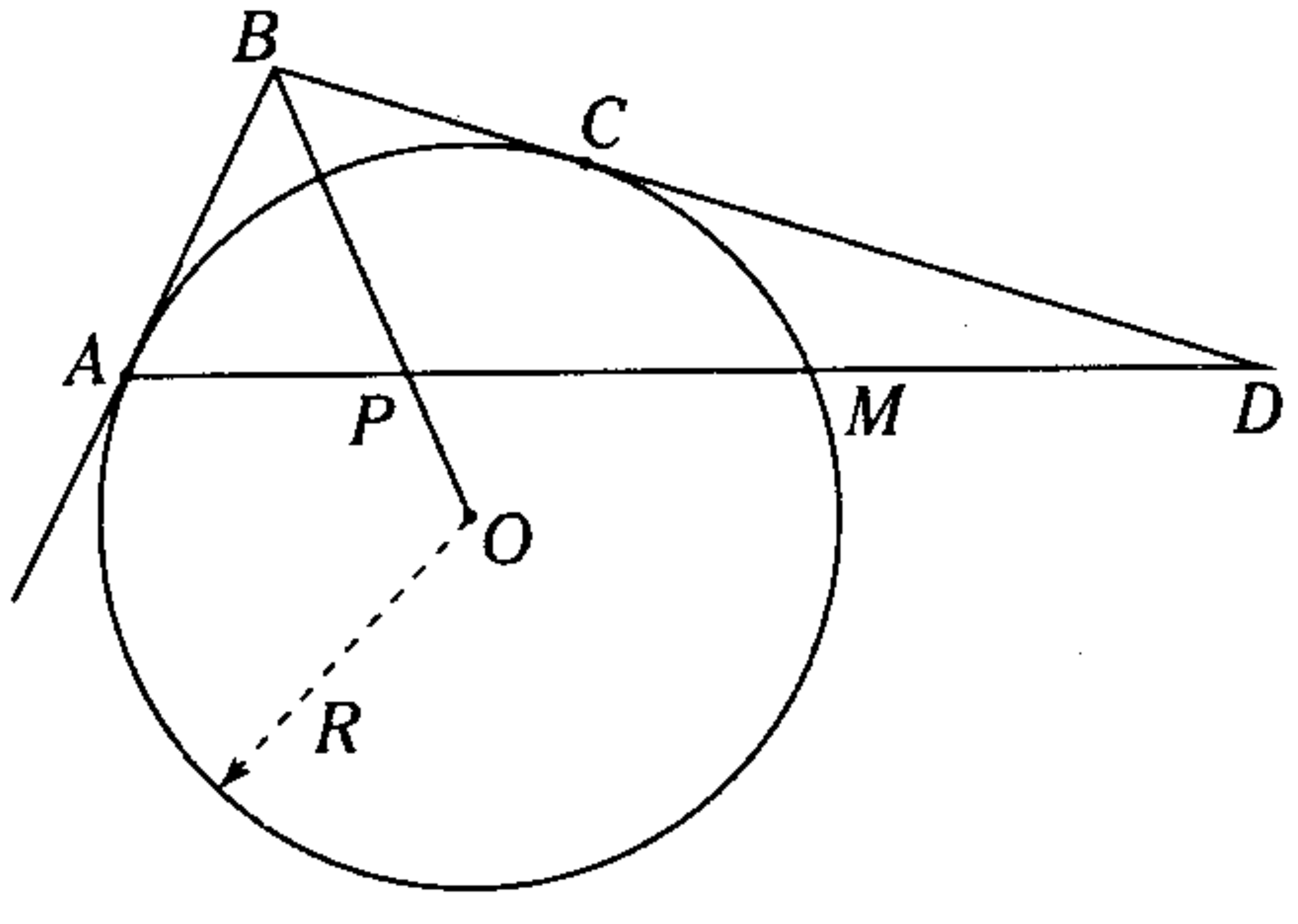
D) $\sqrt{34}$ E) $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$

43. De la figura, T es punto de tangencia. Si $AD = EC$, $AB = ED$ y $BC = 2(TC)$, calcule θ.



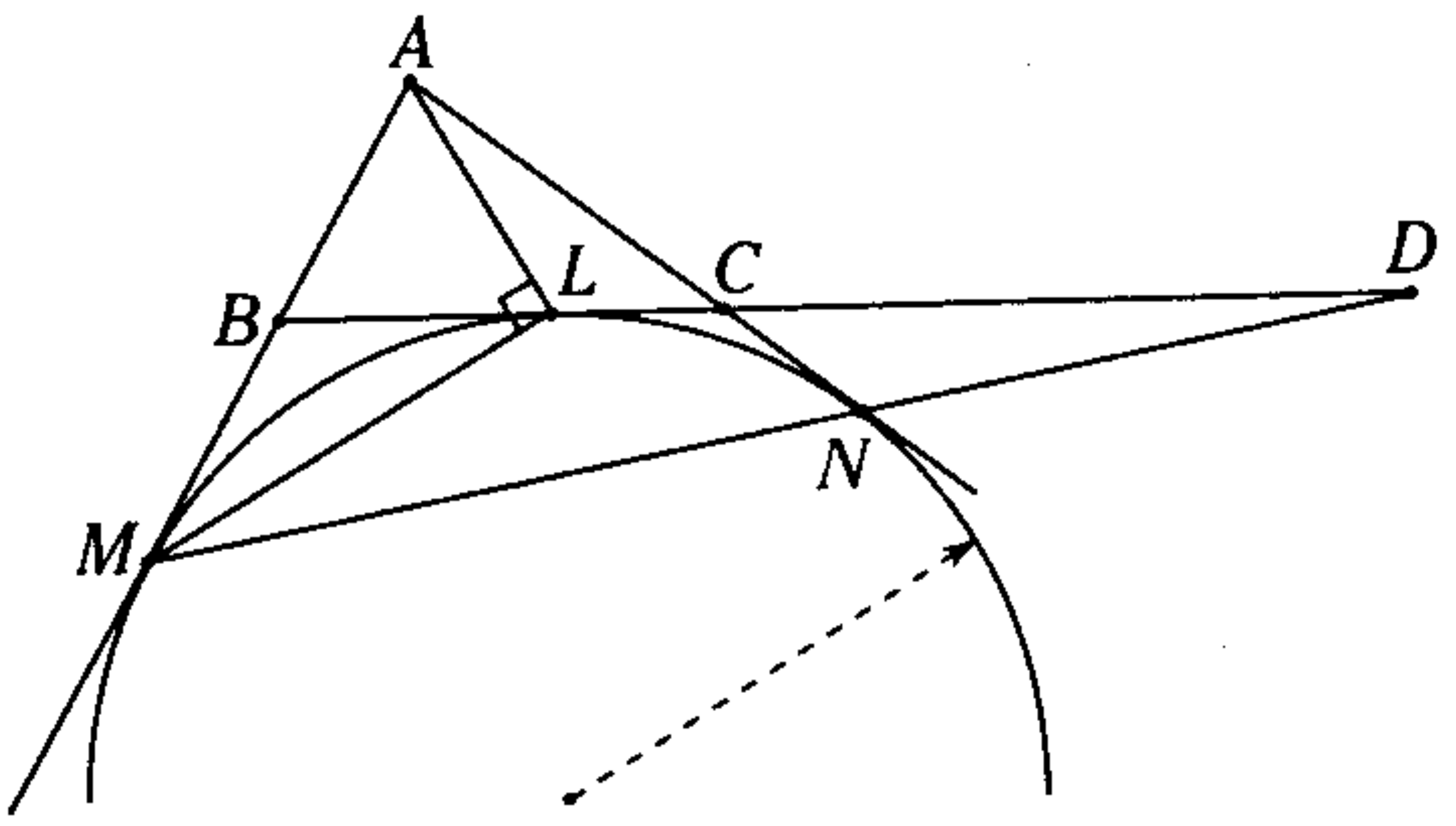
A) 45° B) 37° C) 53°
D) 30° E) 60°

44. En la figura, A y C son puntos de tangencia. Si $PM = MD$, $AB^2 + (AB)(CD) = 88$ y $R^2 - (OP)^2 = 26$, calcule BP.



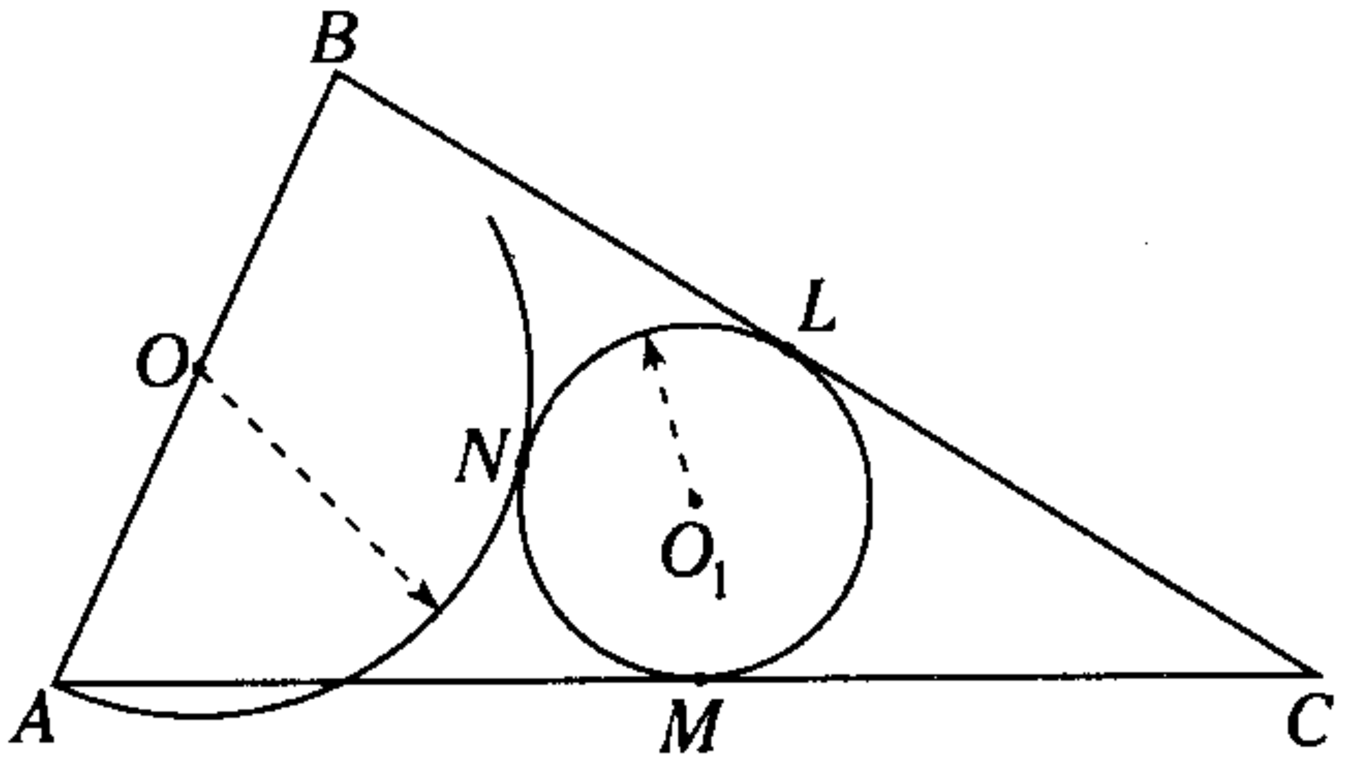
A) $\sqrt{26}$ B) 8 C) 7
D) $2\sqrt{7}$ E) 6

45. Según la figura, M, N y L son los puntos de tangencia. Si $LC = 3$, $CD = 12$, halle AL.



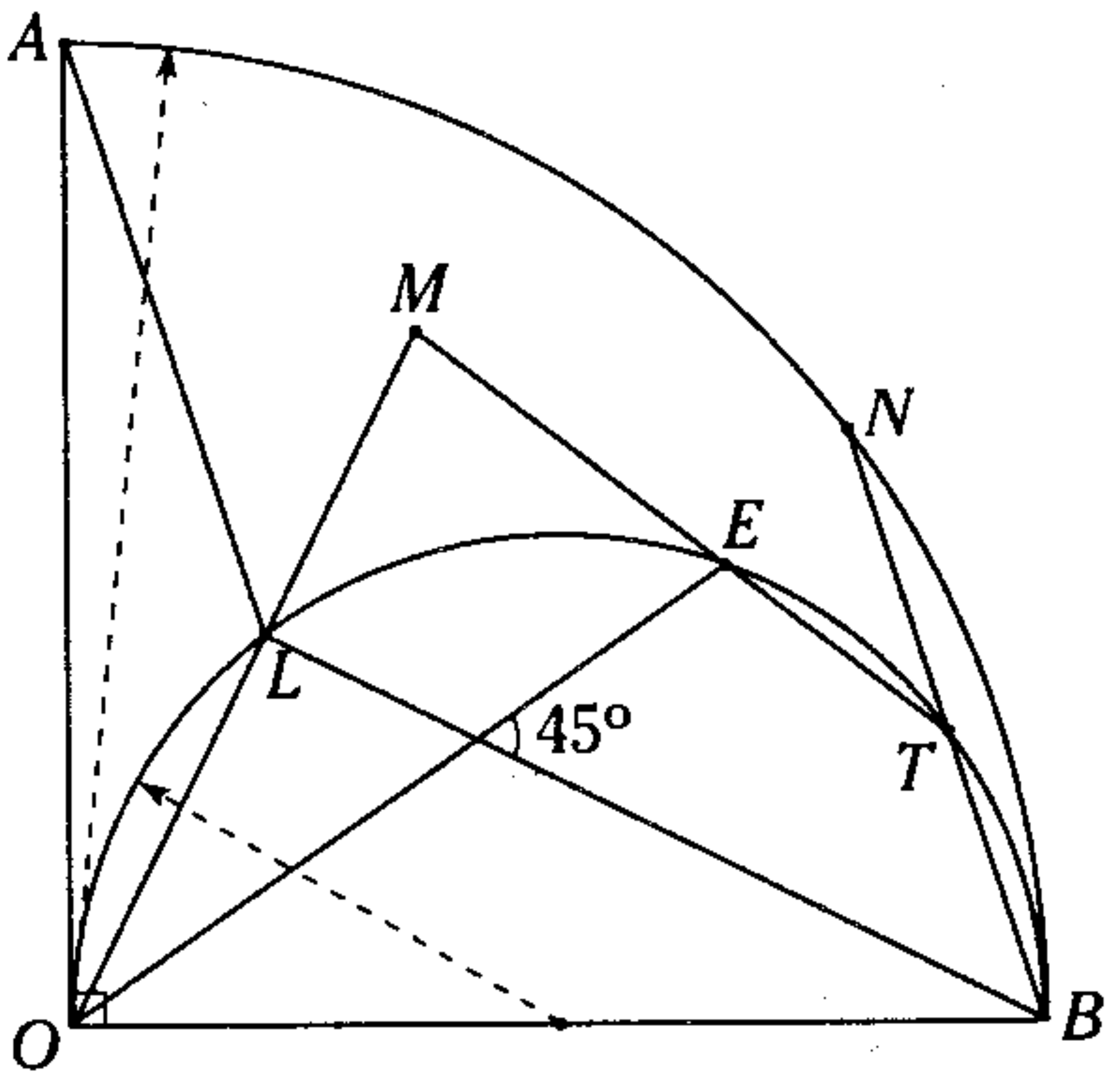
A) 4 B) 4,5 C) 5
D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{6}$

46. De la figura, M, N y L son puntos de tangencia. Si $AM = MC$ y $5(AC)^2 - 4(BC)(AB) = 24(AB)$, determine la distancia de O a O_1.



A) 12 B) 24 C) 16
D) 36 E) 48

47. De la figura mostrada, $m\widehat{OLE} = 4(m\sphericalangle AOL)$; $(MT)(TO) = 36$ y $(ML)(LE) = 20$. Calcule AO.



A) $4\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{3}$ E) 8

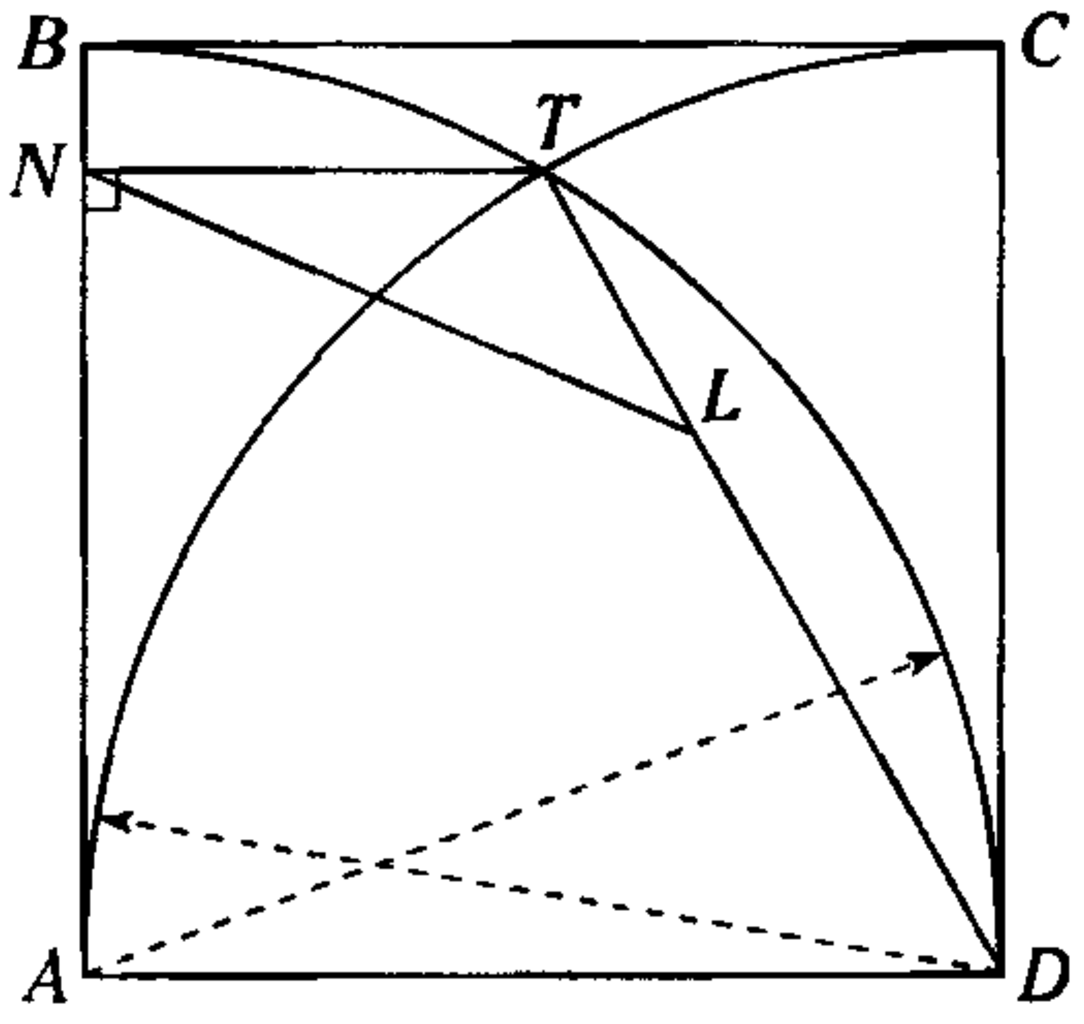
48. En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia, las prolongaciones de las cuerdas $\overline{CB}$ y $\overline{DA}$ se intersecan en M, luego se traza la cuerda $\overline{CQ}$ perpendicular a $\overline{AD}$ en H. Si $m\sphericalangle BDC + m\sphericalangle ADQ = 90°$ y $(MC)(CD) - (MA)(AB) = 36$, halle AC.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

49. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$ y centro O, se trazan la cuerda $\overline{AB}$ y $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ ($H \in \overline{AC}$), luego en $\overline{BH}$ se ubica L tal que $(AB)^2 + (OL)^2 - (AL)^2 = 36$. Calcule CO.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

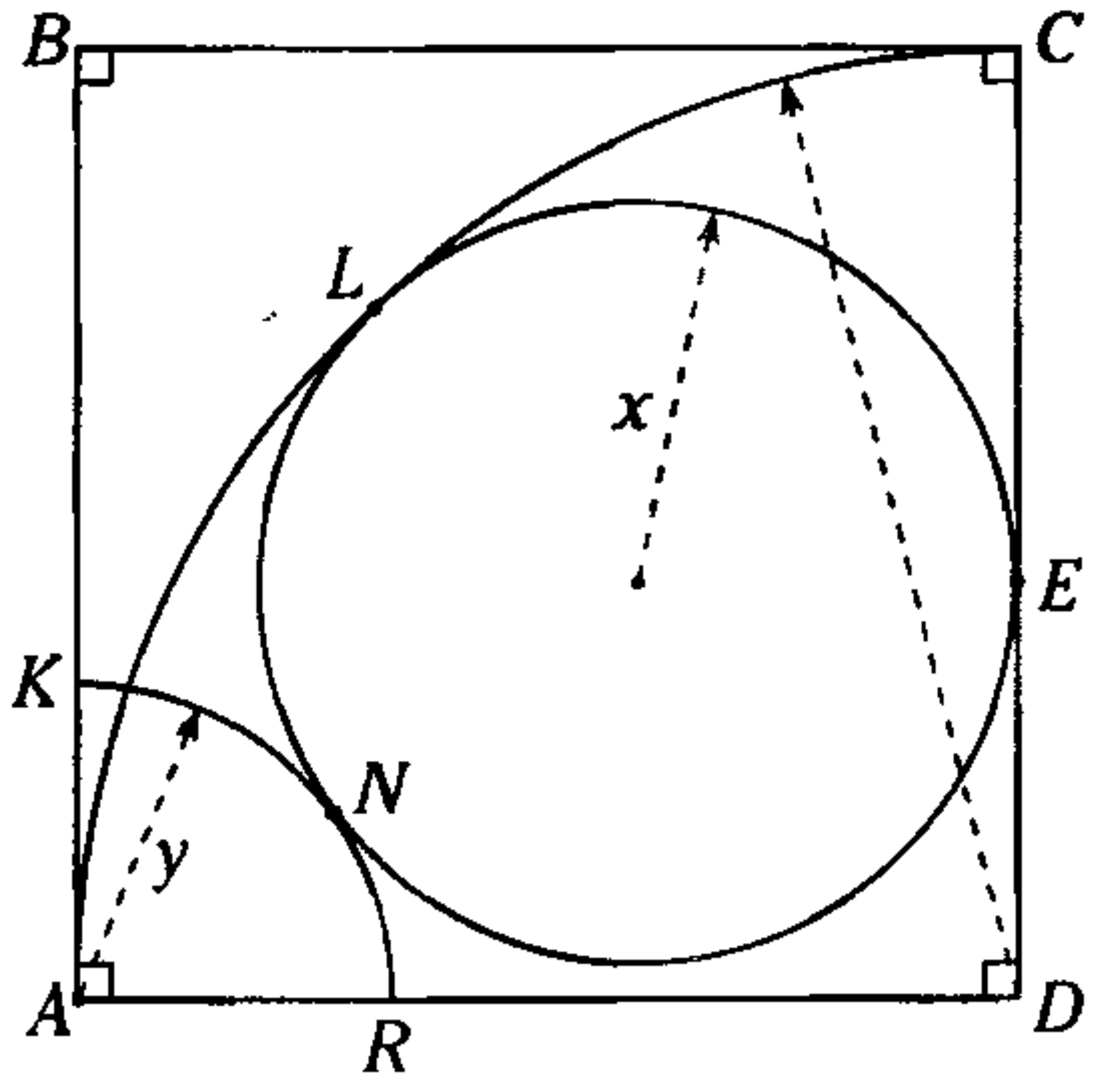
50. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado. Si $2(TL)=LD$ y $NT=\ell$, determine NL.



A) $\frac{3\ell}{2}$ B) $\frac{4\ell}{3}$ C) $\frac{\sqrt{17}\ell}{4}$

D) $\frac{3\sqrt{2}\ell}{4}$ E) $\frac{\sqrt{19}\ell}{3}$

51. De la figura mostrada, N, L y E son puntos de tangencia. Si $BK=2(KA)$, calcule $\frac{x}{y}$.



A) 17/14 B) 15/13 C) 9/7

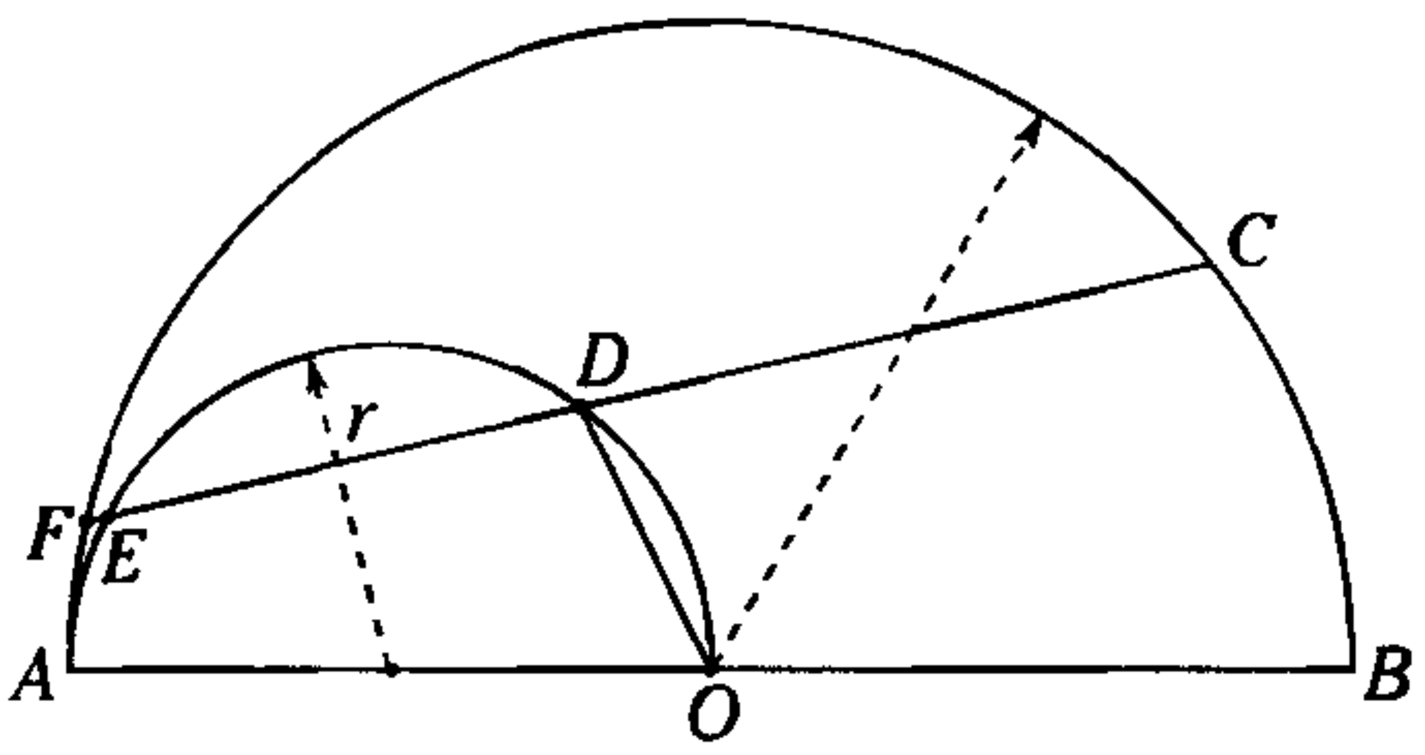
D) 19/14 E) 17/13

52. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se ubican los puntos M y L en $\overline{BC}$ y en la región exterior relativo a $\overline{BC}$ respectivamente tal que $m\measuredangle BCL = m\measuredangle BAM$; $BM=MC$; $CL=14$; $BL=13$ y $CM=7{,}5$. Halle AM.

A) 9 B) 12,5 C) 25/3

D) 7,5 E) 75/8

53. De la figura, $(2r)^2-(FD)(DC)=49$. Calcule DO.



A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

54. En un triángulo ABC, $m\measuredangle BCA=3(m\measuredangle BAC)$; $AB=c$ y $BC=a$. Calcule AC.

A) $\frac{(c-a)}{a}\sqrt{a(a+c)}$

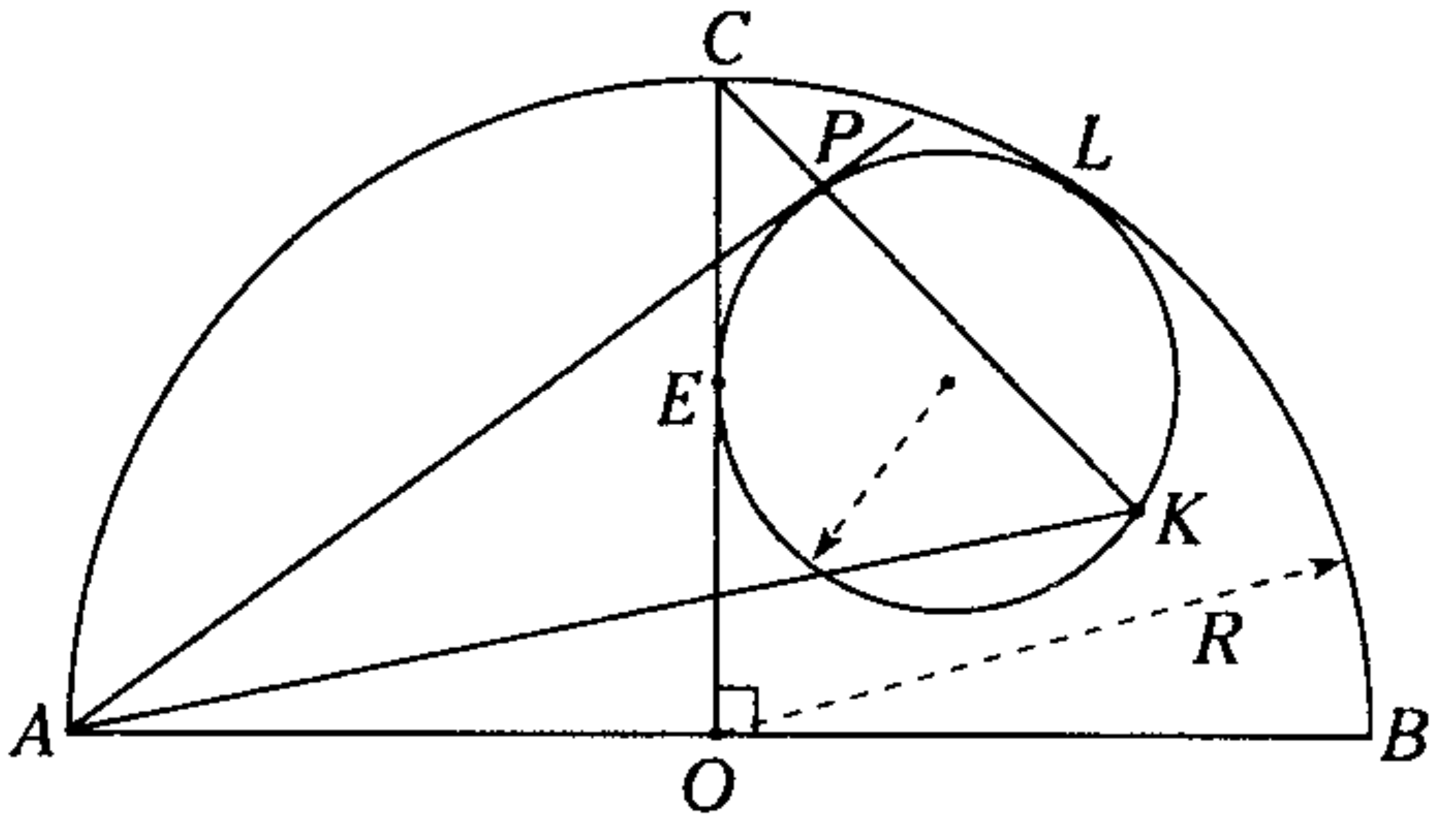
B) $\frac{(c-a)}{c}\sqrt{c(a+c)}$

C) $\frac{(a+c)}{c}\sqrt{c(a+c)}$

D) $\frac{a+c}{c}\sqrt{a(a+c)}$

E) $\frac{(a+c)}{a}\sqrt{a(a+c)}$

55. De la figura, E, L y P son puntos de tangencia. Si $(AK)^2-(KC)^2=a^2$ y $CE=b$, determine R.



A) $\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{2}}$ B) $\sqrt{a^2-b^2}$ C) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

D) $\sqrt{a^2+b^2}$ E) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$

56. En un triángulo ABC, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AC}$ en T y la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{BC}$, es tangente a $\overline{BC}$ en Q. Si $AB=6$; $AC=3$ y $BC=5$, calcule QT.

A) $\sqrt{\dfrac{263}{15}}$ B) $\sqrt{\dfrac{236}{15}}$ C) $\dfrac{1}{4}\sqrt{263}$

D) $\sqrt{\dfrac{185}{6}}$ E) $\sqrt{\dfrac{158}{5}}$

57. Desde un punto F de una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O, se traza $\overline{FH}$ perpendicular a $\overline{AB}$ tal que H es punto medio de $\overline{OB}$, con diámetro $\overline{HB}$ se traza interiormente una semicircunferencia. Si $OA=\ell$, calcule la longitud del radio de la circunferencia tangente a $\overline{FH}$ y a las dos semicircunferencias.

A) $\dfrac{\ell}{5}$ B) $\dfrac{\ell}{7}$ C) $\dfrac{\ell}{9}$

D) $\dfrac{3\ell}{16}$ E) $\dfrac{\ell}{6}$

58. En un paralelogramo $ABCD$, m$\measuredangle BAD=60°$; $AB=18$; $BC=24$; se traza una circunferencia que contiene a C e intersecta a $\overline{BC}$ en P, a la diagonal $\overline{AC}$ en Q y a la prolongación de $\overline{CD}$ en S. Si $PQ=6$. Calcule SP.

A) $3\sqrt{37}$ B) $5\sqrt{27}$ C) $2\sqrt{27}$

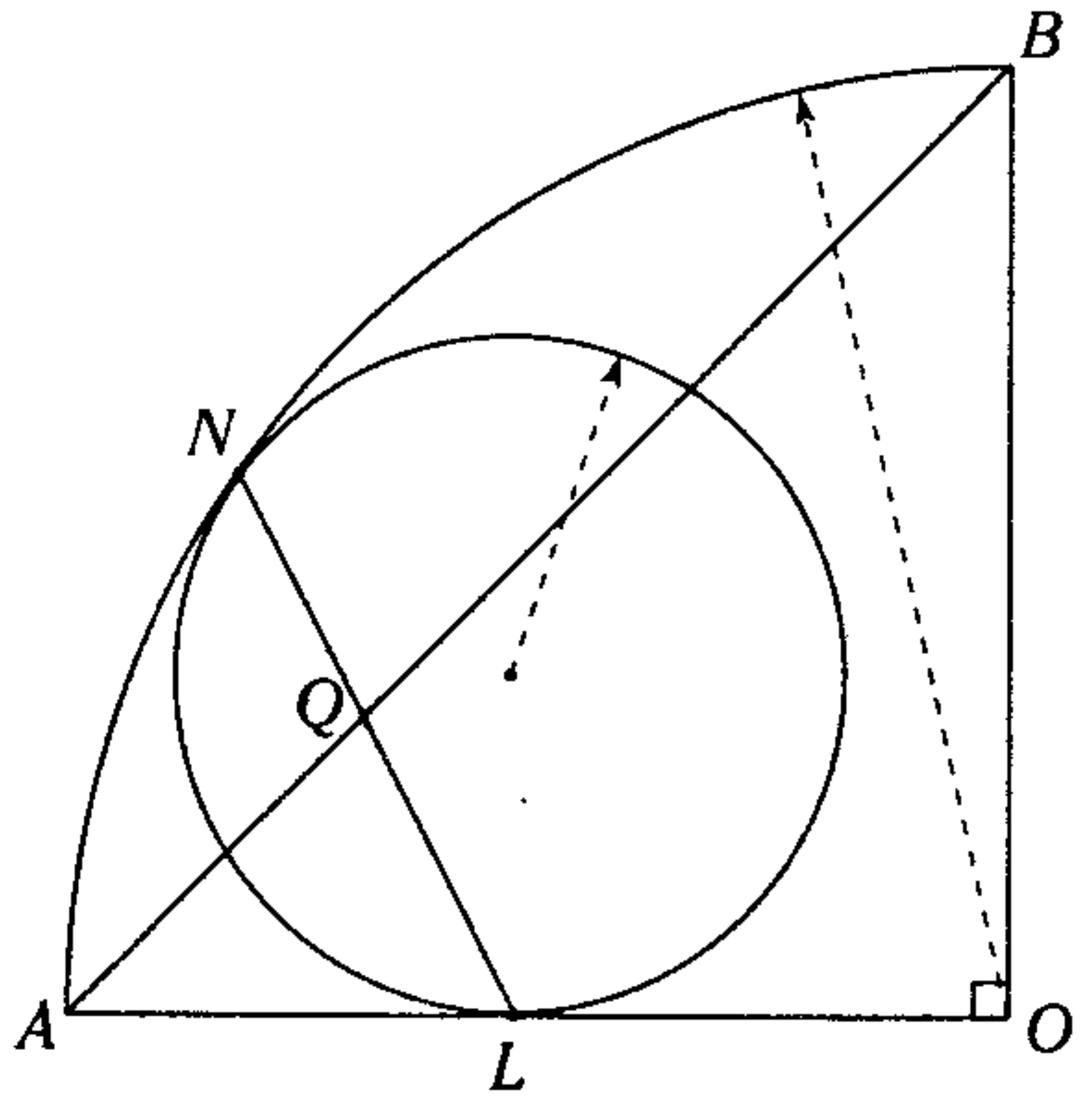
D) $\dfrac{2\sqrt{37}}{3}$ E) $50\sqrt{11}$

59. En un triángulo ABC recto en B, se traza una circunferencia tangente a la hipotenusa en su punto medio y al cateto mayor BC. Con centro en el punto P del otro cateto y radio PA se traza una circunferencia tangente a la primera. Si $AC=b$ y $AB=c$, calcule PA.

A) $\dfrac{b^2}{4c}$ B) $\dfrac{b^2}{8c}$ C) $\dfrac{b^2}{2c}$

D) $\dfrac{b^2}{b+c}$ E) $\dfrac{b^2}{\sqrt{2}c}$

60. En la figura, M y N son puntos de tangencia si $2(AO)(LO)-(NQ)(QL)=49$. Calcule BQ.



A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) $7\sqrt{2}$

Relaciones métricas en el cuadrilátero

61. En un cuadrilátero $ABCD$ inscriptible a una circunferencia, se cumple que $AB=BD=AD$. Si $BC=3$ y $CD=2$, calcule AB.

A) $\sqrt{17}$ B) $3\sqrt{2}$

C) $\sqrt{19}$

D) $\sqrt{21}$ E) $\sqrt{31}$

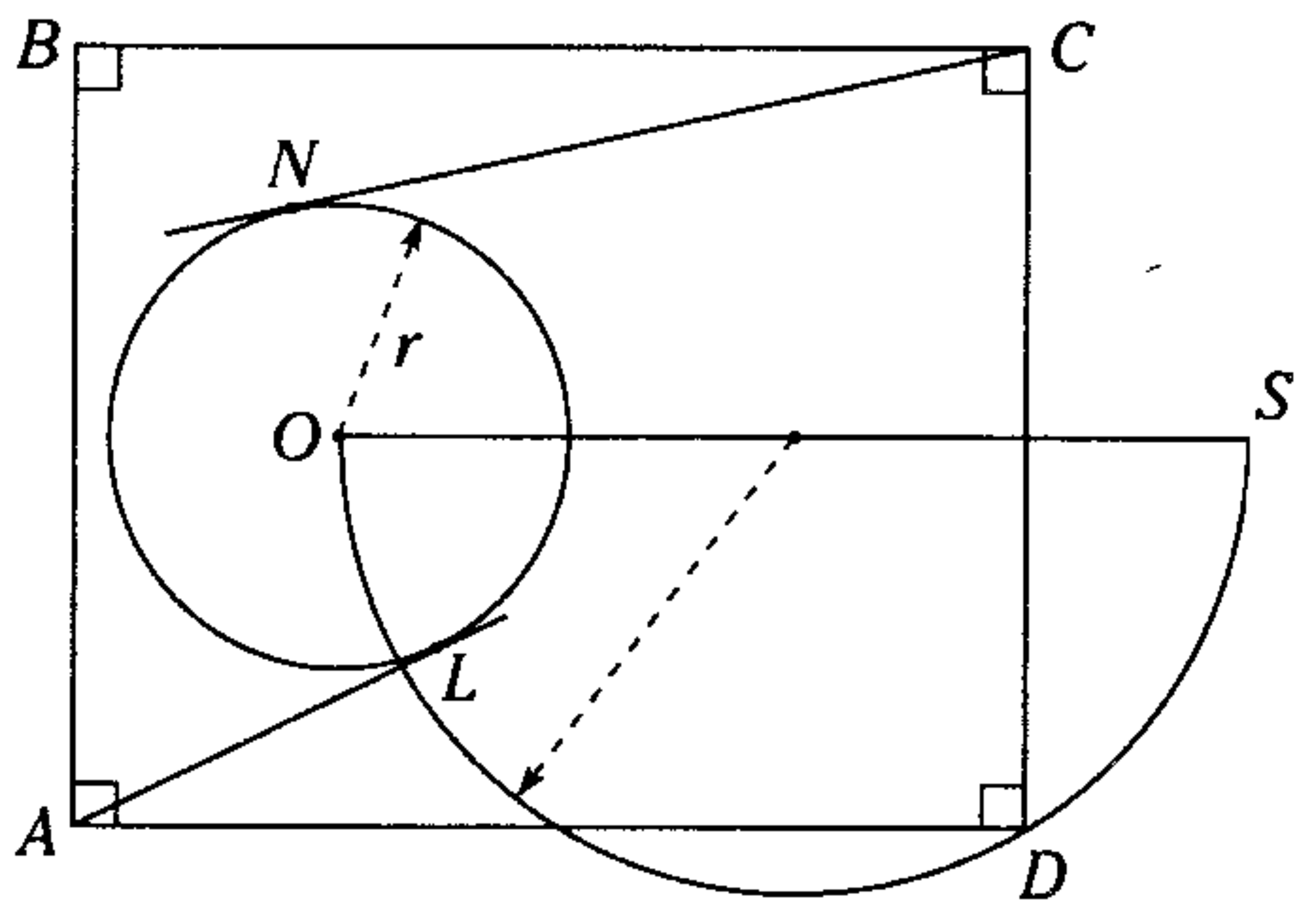
62. En un cuadrado $ABCD$, en $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ se ubican los puntos N y M respectivamente tal que la $m\measuredangle MCN=45°$, $AN=2$ y $BD=5\sqrt{2}$. Halle DM.

A) $2\sqrt{2}$ B) $2{,}5\sqrt{2}$

C) $3\sqrt{2}$

D) $3{,}5\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

63. De la figura, N y L son puntos de tangencia, $DS=OB$ y $SO=4r$. Calcule $(NC^2+AL^2)^{1/2}$

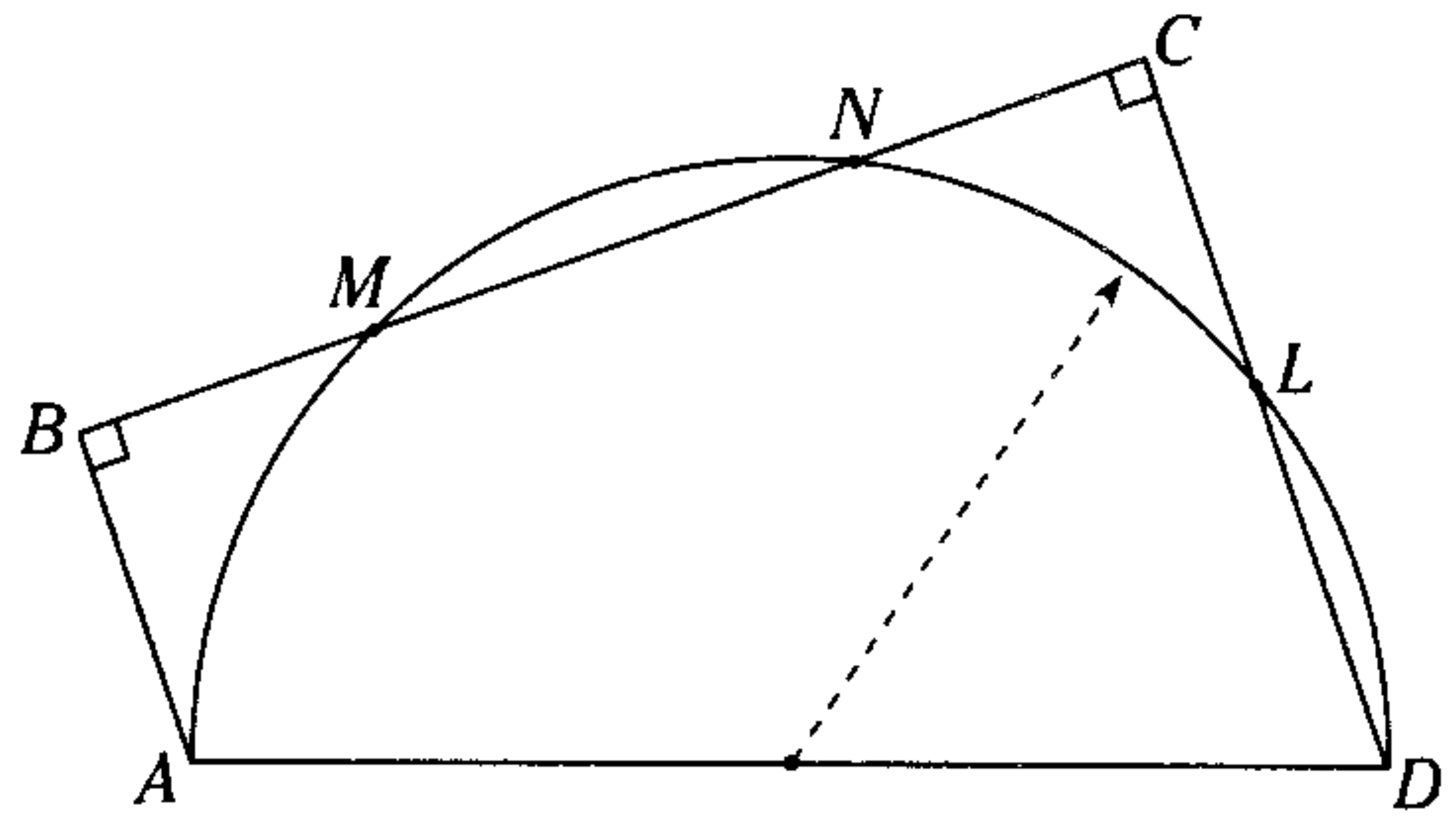


A) $r\sqrt{14}$ B) $r\sqrt{15}$

C) $2r\sqrt{13}$

D) $r\sqrt{17}$ E) $r\sqrt{22}$

64. De la figura $BM+NC=4$ y $CL=LD=3$. Determine $(AN).(MD)$

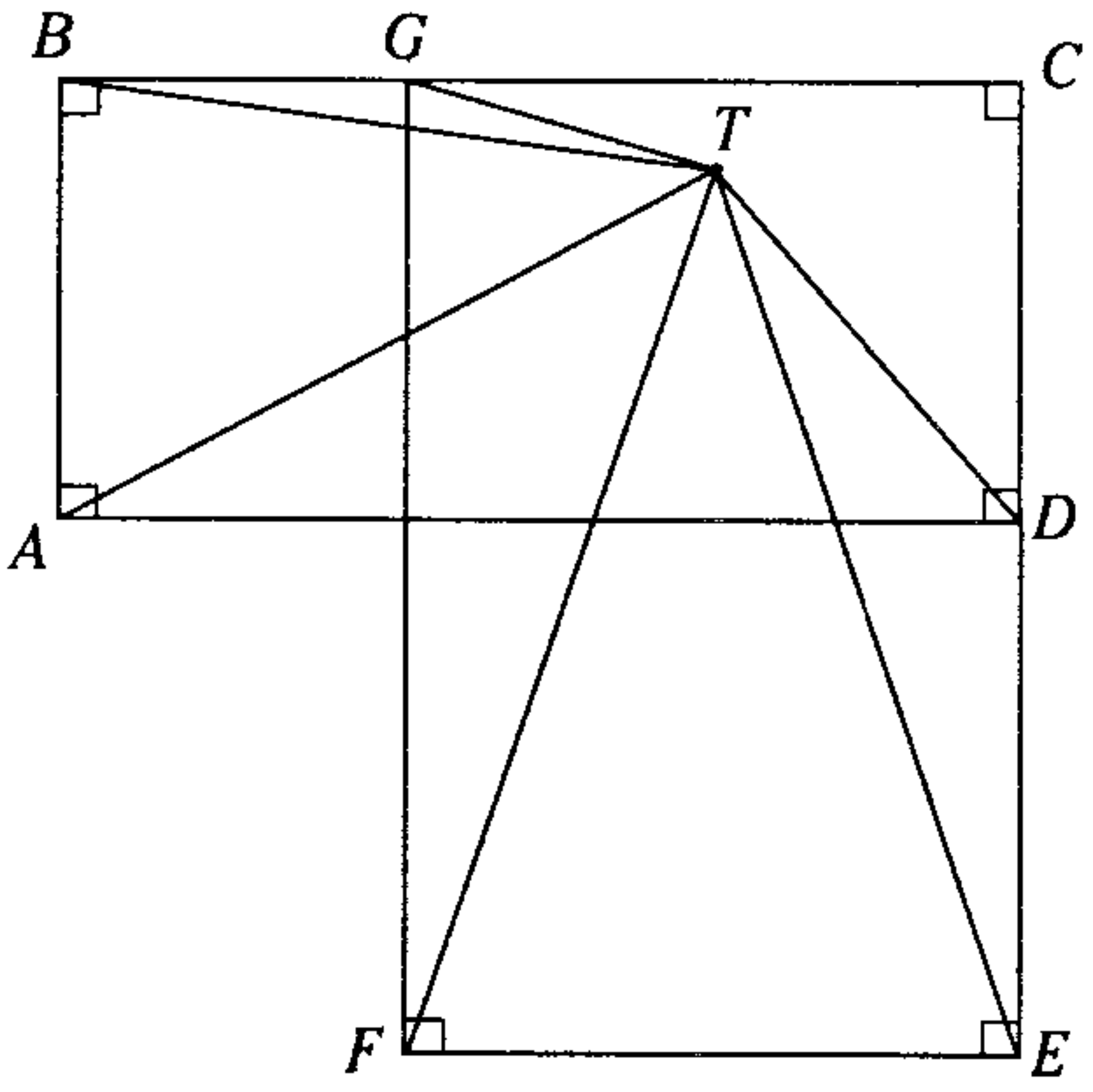


A) $6\sqrt{13}$ B) $14\sqrt{7}$

C) $7\sqrt{130}$

D) $9\sqrt{65}$ E) $9\sqrt{130}$

65. De la figura, $(BT^2+DT^2+FT^2)-(AT^2+GT^2)=7$. Determine TE.

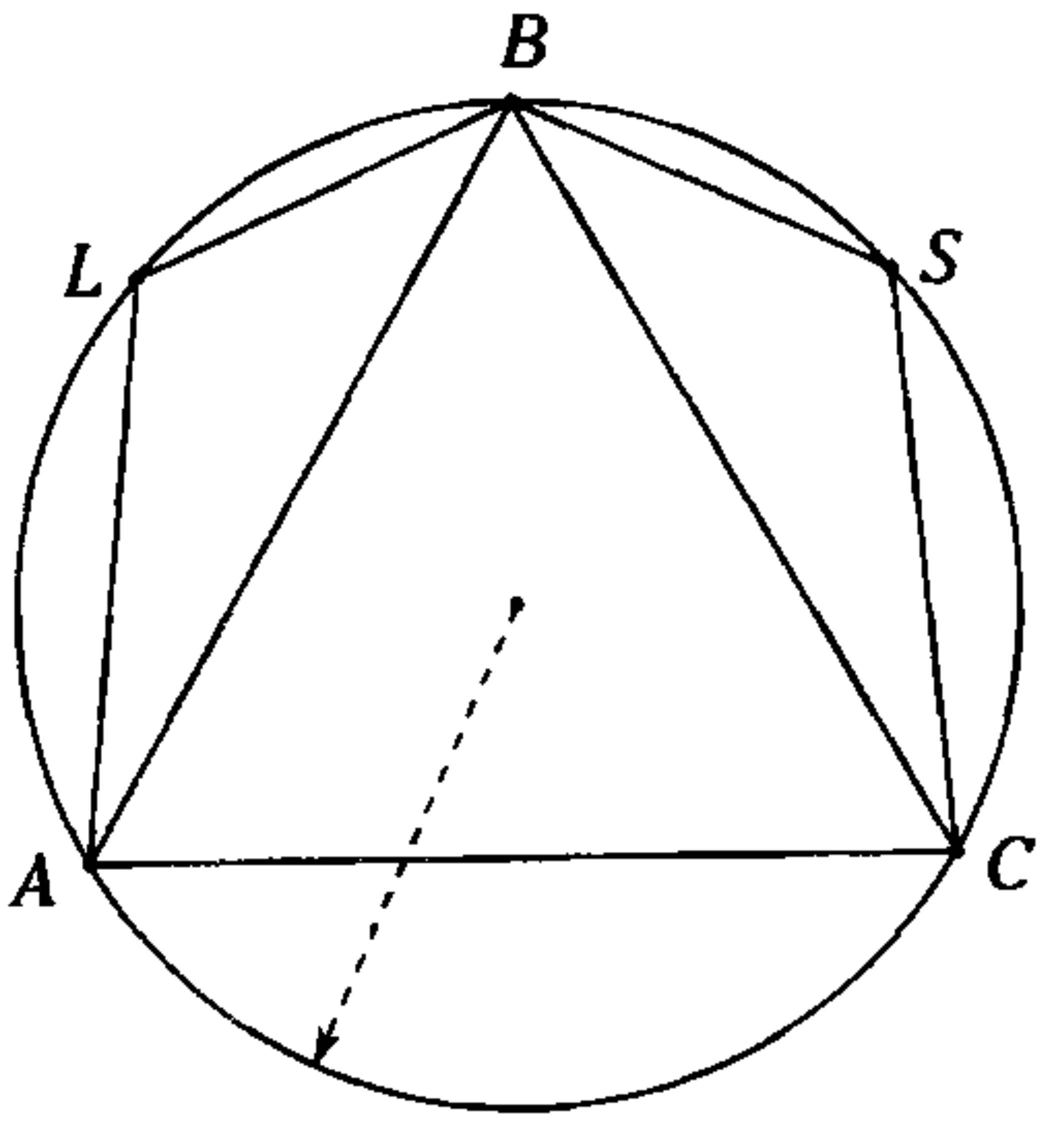


A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{6}$

C) $\sqrt{7}$

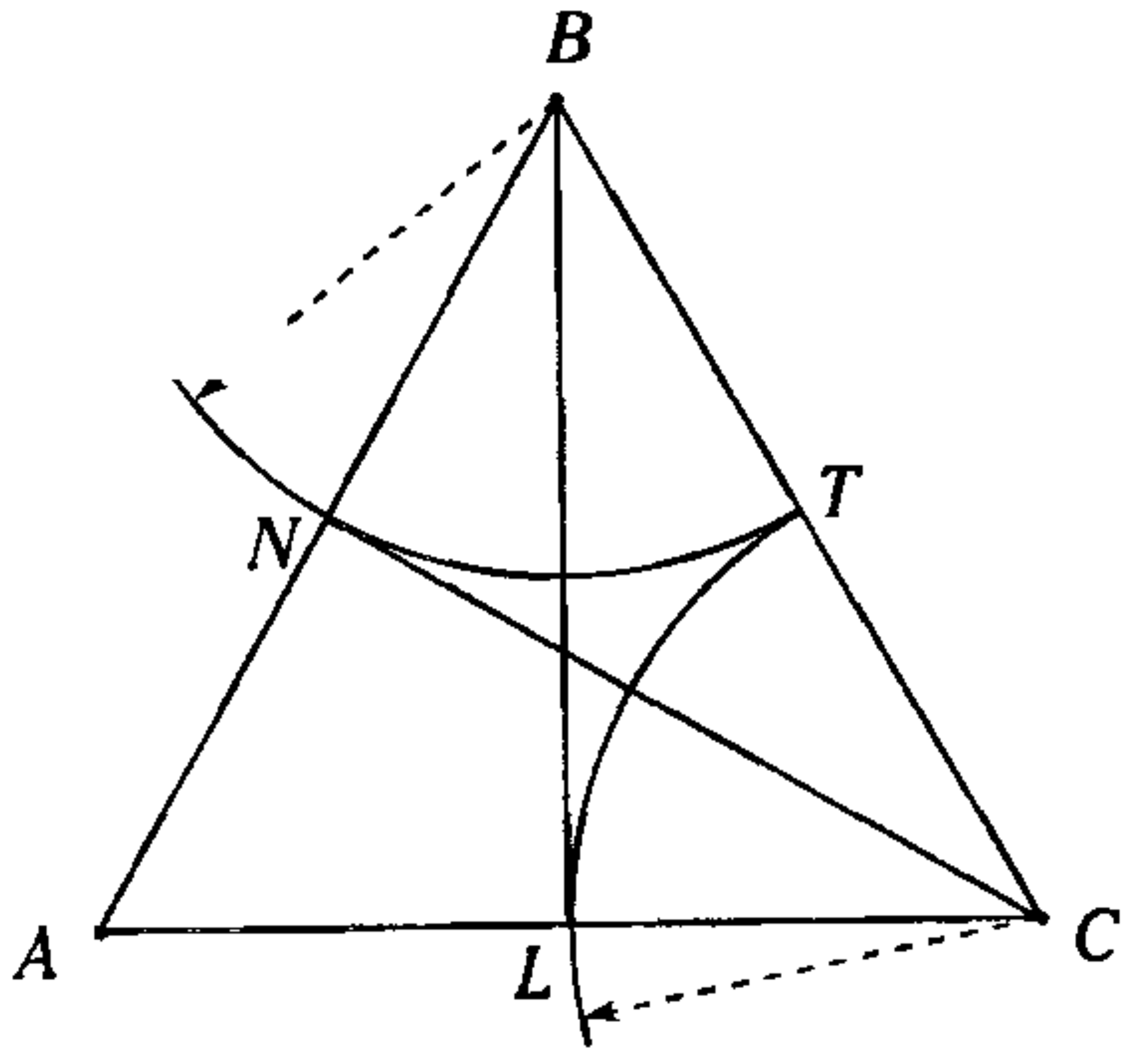
D) $2\sqrt{2}$ E) 3

66. En la figura se muestra a un triángulo equilátero ABC, si $AL-BS=17$ cm y $AS=CL$ Determine $SC-LB$.



A) 14 cm B) 15 cm C) 16 cm
D) 17 cm E) 18 cm

67. De la figura, $AB=BC=CA$, T es punto de tangencia y $NL=a$. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{BL}$ y $\overline{CN}$.

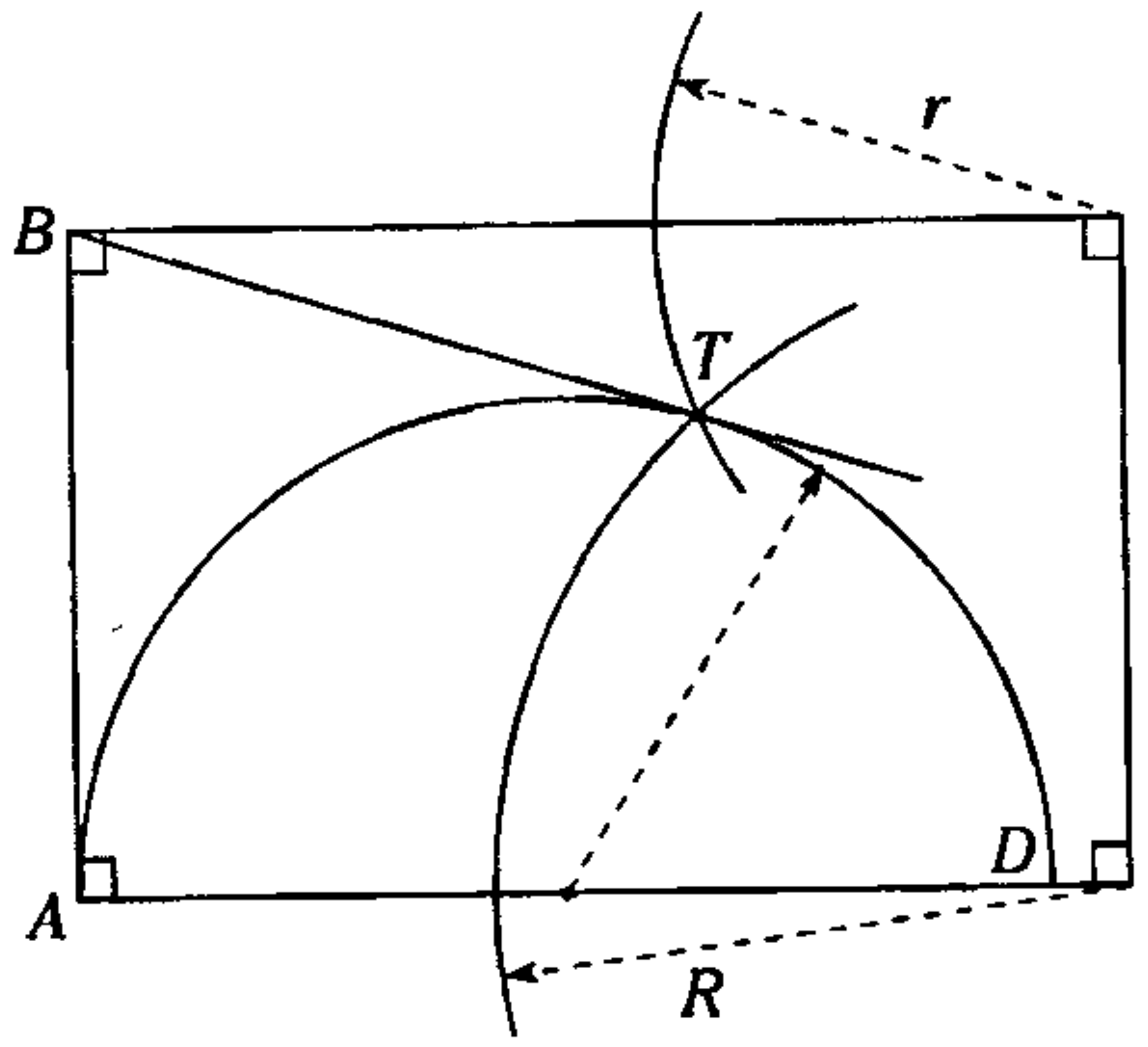


A) $a/4$ B) $a/3$ C) $a/5$
D) $a/2$ E) $2a/3$

68. En una semicircunferencia de diámetro MN, se trazan las cuerdas MP y NQ, las cuales sse intersecan en T, si $(MT)(MP)+(NT)(NP)=64$ y $PQ=6$. Calcule $(NQ)(MP)-(MQ)(NP)$

A) -64 B) -100 C) -96
D) -24 E) -48

69. De la figura, T es punto de tangencia. Si $AD=30$ y $AB=20$, calcule R^2-r^2.



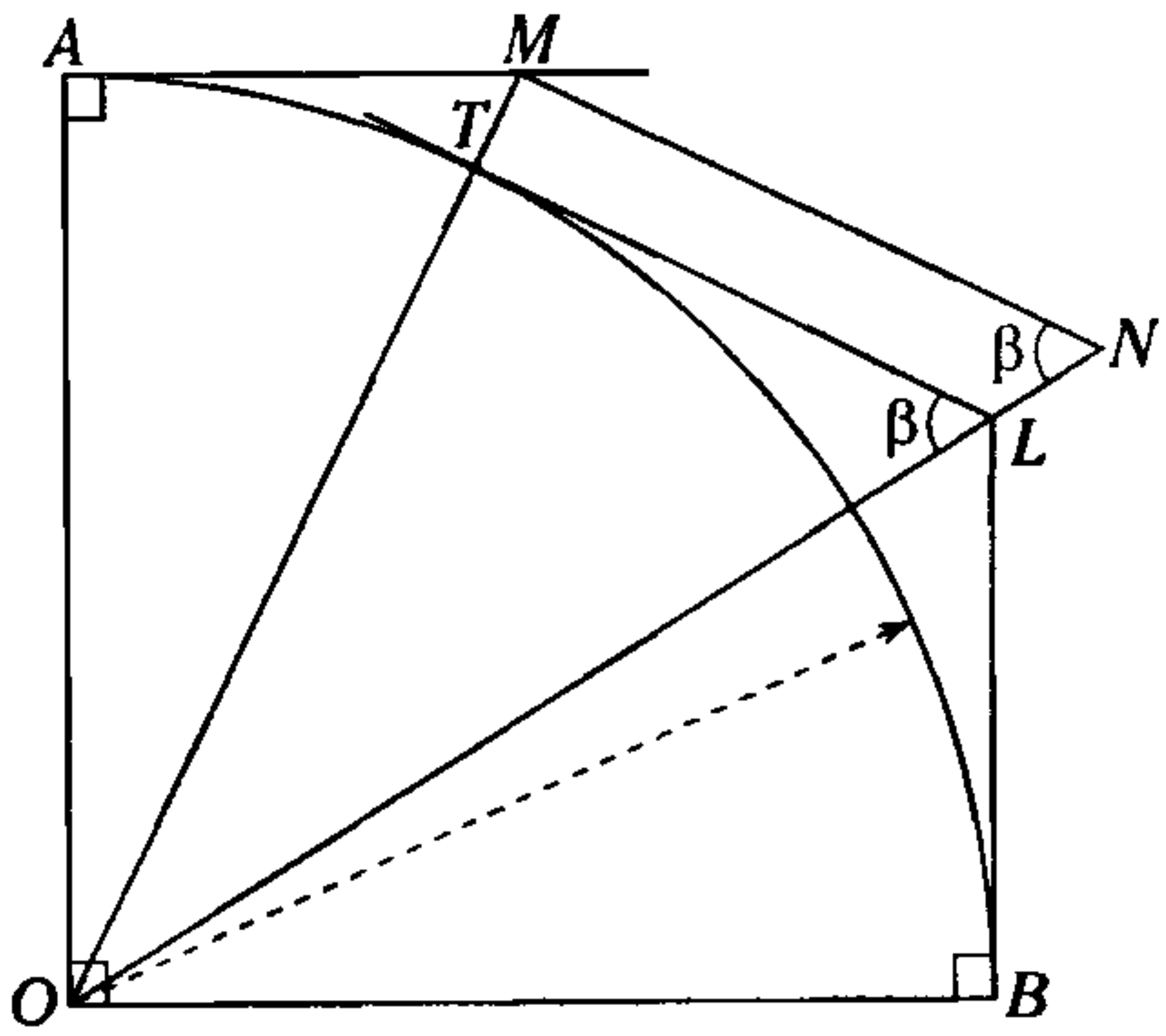
A) $4\sqrt{11}$ B) $3\sqrt{11}$ C) $\sqrt{167}$
D) $\sqrt{166}$ E) $4\sqrt{13}$

70. En un cuadrado $ABCD$, en $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ se ubican los puntos N y M respectivamente $\overline{BD}\cap\overline{NC}=\{P\}$; $\overline{CM}\cap\overline{BD}=\{Q\}$, $m\sphericalangle NCN=45°$ $AN=6$ y $ND=2$. Calcule MP.

A) $\frac{16\sqrt{5}}{3}$ B) $\frac{17\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{18\sqrt{2}}{5}$

D) $\frac{16\sqrt{5}}{7}$ E) $\frac{16\sqrt{5}}{5}$

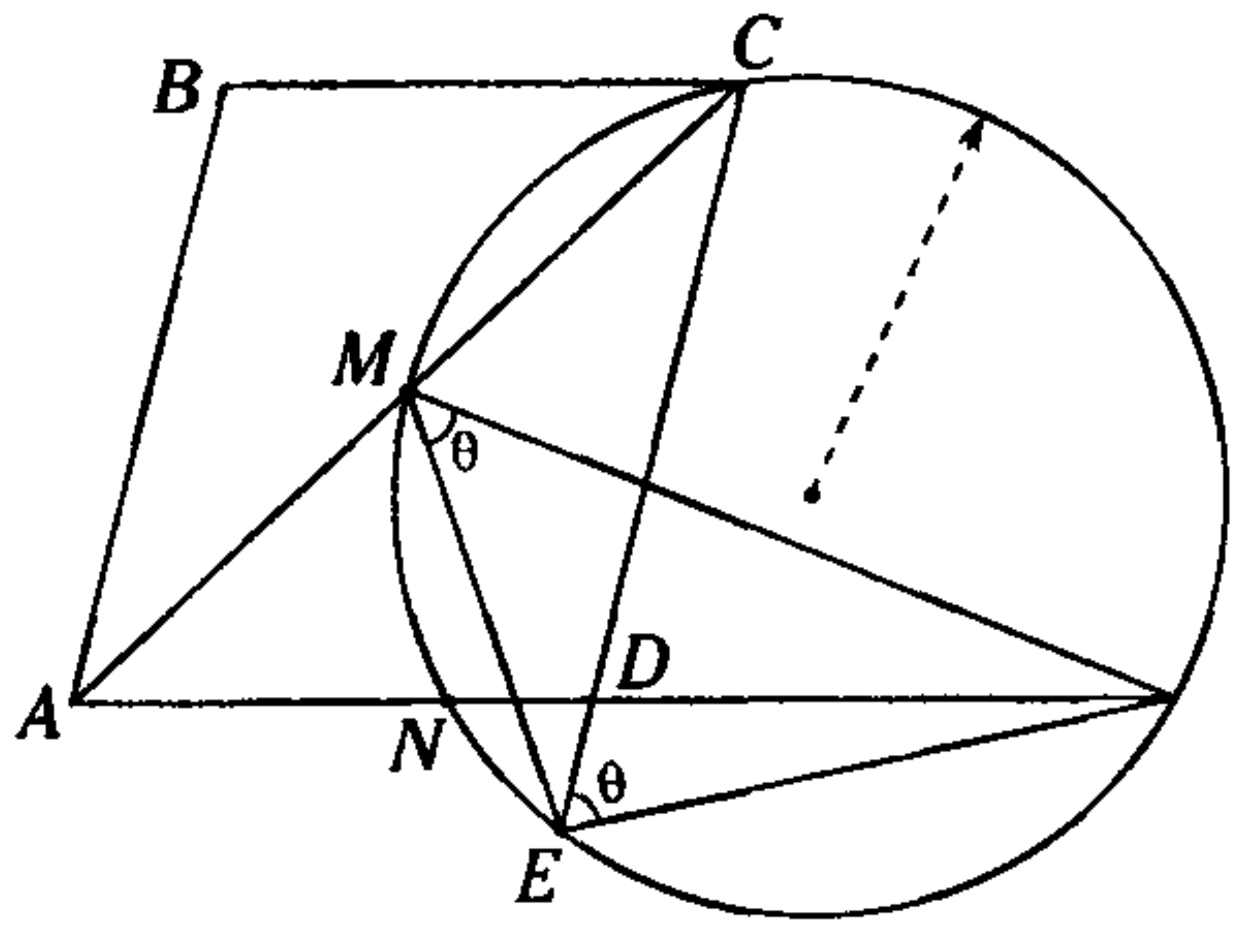
71. De la figura, T es punto de tangencia, $m\widehat{AT}=37°$ y $MO=10$. Determine la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos medios de $\overline{AN}$ y $\overline{MO}$.



A) $\frac{\sqrt{31}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{51}}{2}$ C) $\sqrt{10}$

D) $\frac{\sqrt{41}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{41}}{4}$

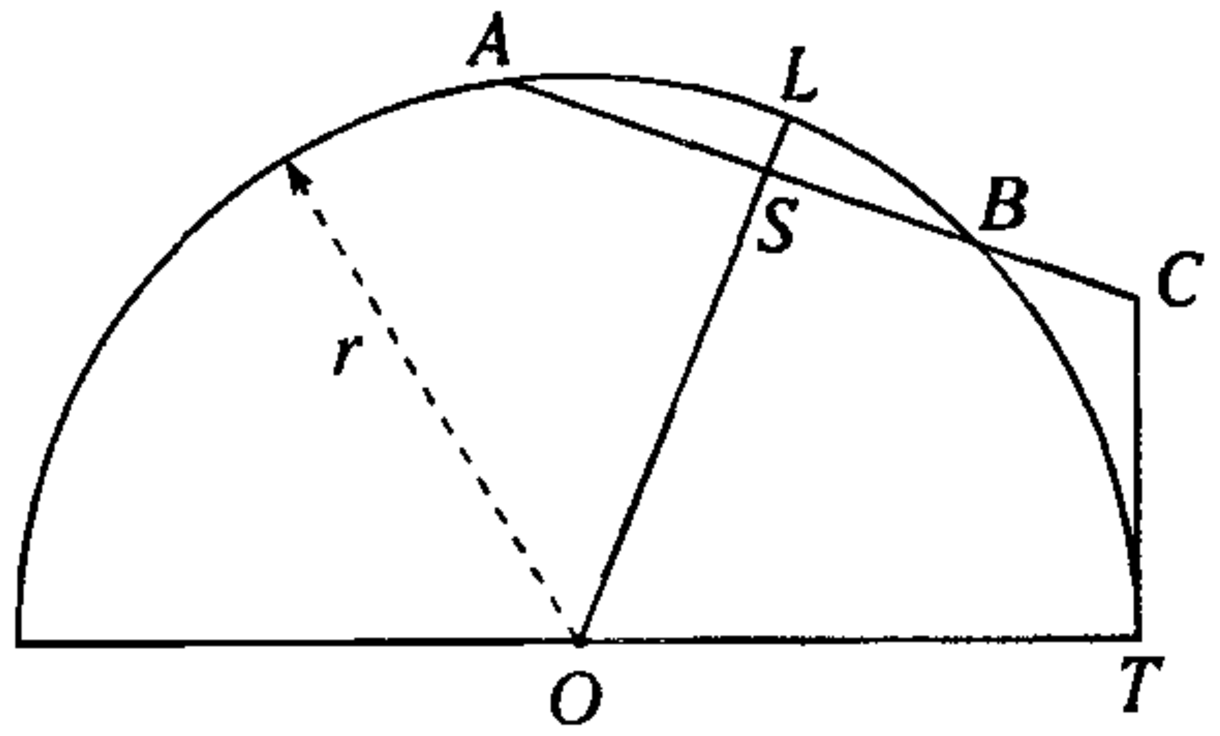
72. De la figura, $AM=MC$, $ABCD$ es un paralelogramo; $AN=5(ND)$, $AM=3(MD)$, $AB=5$ y $DE=2$. Calcule AC^2+BD^2



A) 260 B) 265 C) 270

D) 280 E) 290

73. De la figura, $m\widehat{AL}=m\widehat{LB}$, T es punto de tangencia, $AB=6$, $CT=2(BC)$ y $(TS)(CO)-4(OS)=16$. Calcule $5r$.



A) 32 B) 16 C) 8

D) 10 E) 12

74. Sobre la prolongación del lado BC del triángulo equilátero ABC, se ubica el punto O, luego se traza el triángulo equilátero GEF; donde G y O son baricentros de dichos triángulos (F exterior relativo al lado AC).
Si $(AB)\sqrt{3}+(CO)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$, calcule FC.

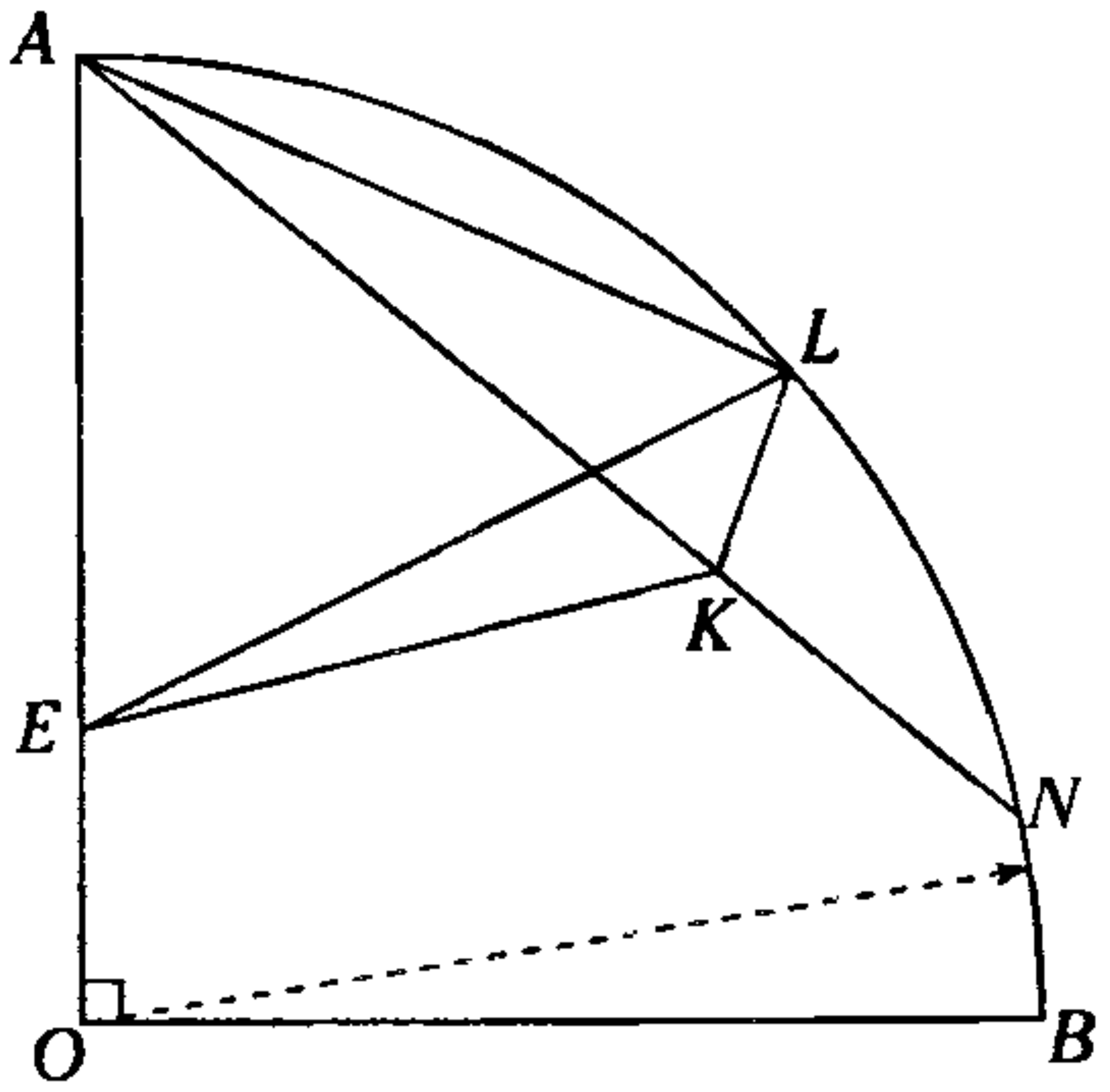
A) $4\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{3}$

D) $7\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

75. De la figura, $m\sphericalangle ELK=45°+\frac{m\widehat{NB}}{2}$;

$(AE)(AL)=2(LK)^2$; $\frac{2(AL)+AE}{LK}=5$ y $EK=2(LK)$

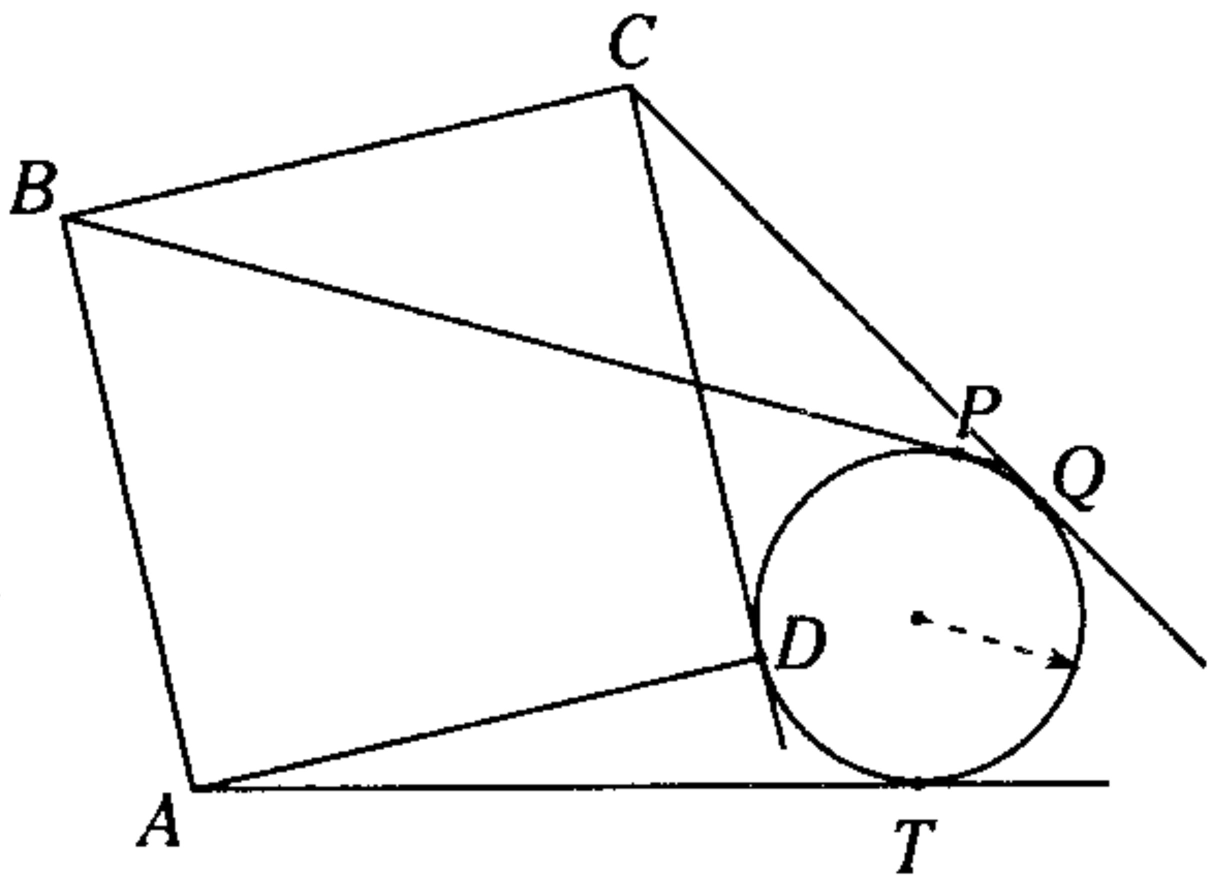
Halle $\frac{LE}{KA}$.



A) 2/3 B) 3/2 C) 4/3

D) 3/4 E) 1

76. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado. Siendo T, D, P y Q son puntos de tangencia, $CQ=n$ y $AT=\ell$. Calcule BP.

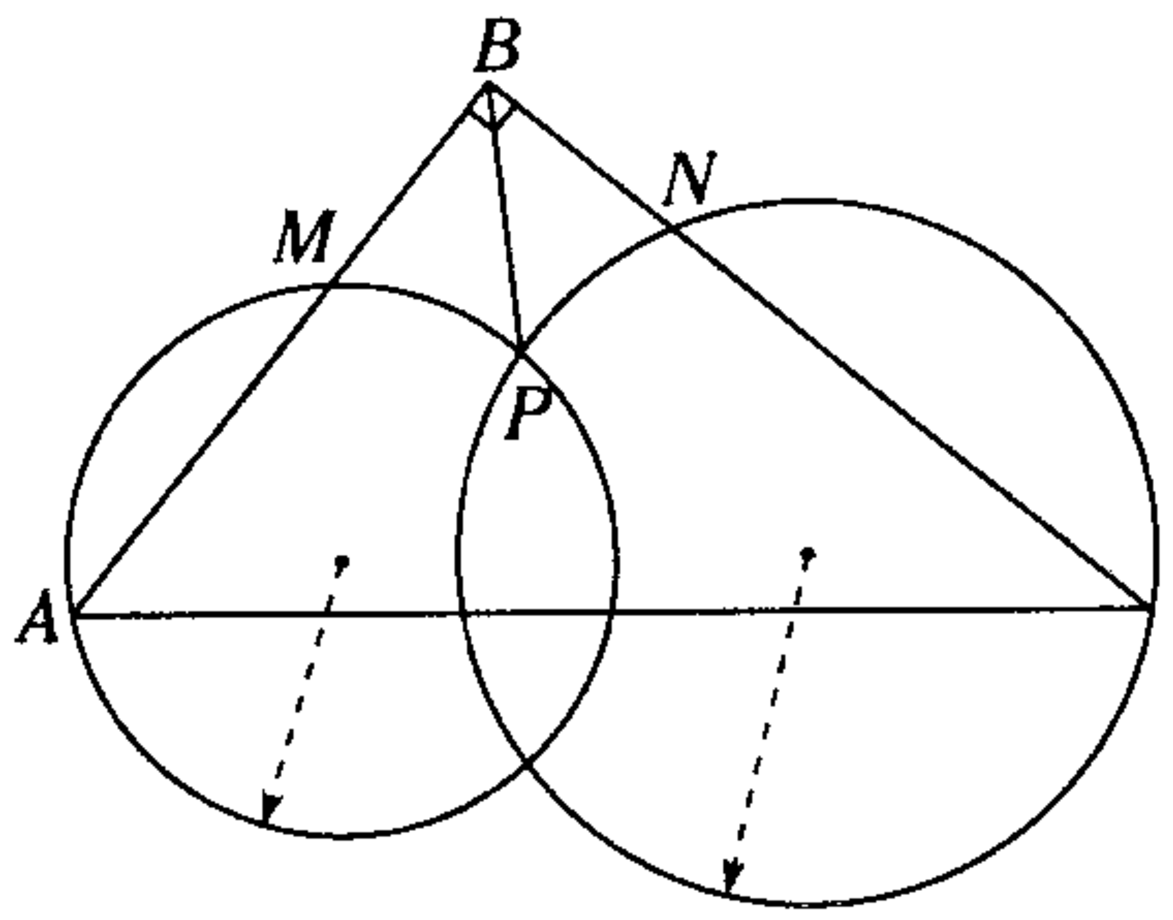


A) $2\sqrt{n^2+\ell^2}$ B) $\sqrt{2n^2+\ell^2}$

C) $\sqrt{n\ell}$

D) $\sqrt{n^2+\ell^2}$ E) $2\sqrt{n\ell}$

77. De la figura mostrada, $BN=4$; $BM=2$ y $m\sphericalangle PBN=45°$. Halle BP.



A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{2}$

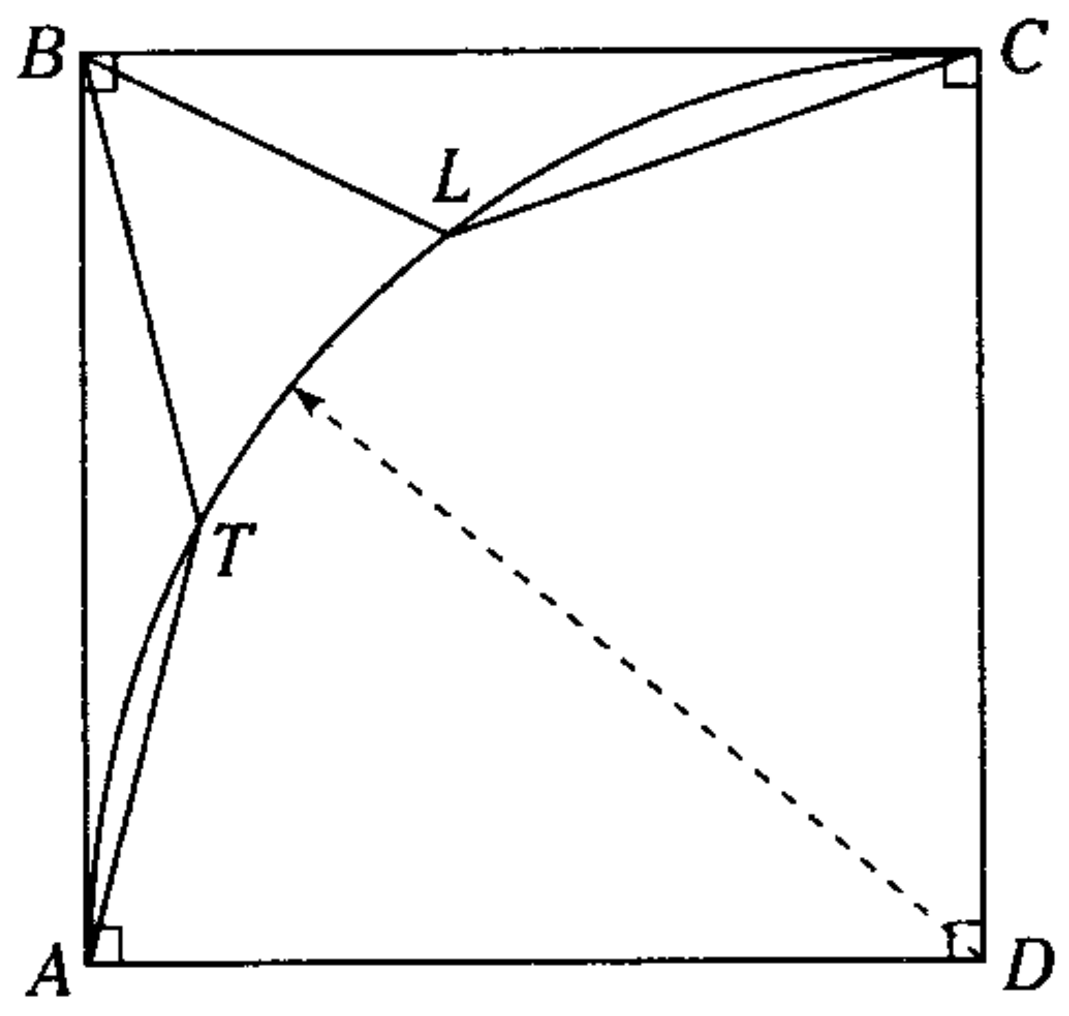
D) 4 E) $2\sqrt{6}$

78. En un triángulo ABC, I y O son el incentro y circuncentro, $(AB)(BC)=27$ y $m\sphericalangle BIO=90°$. Calcule BI.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

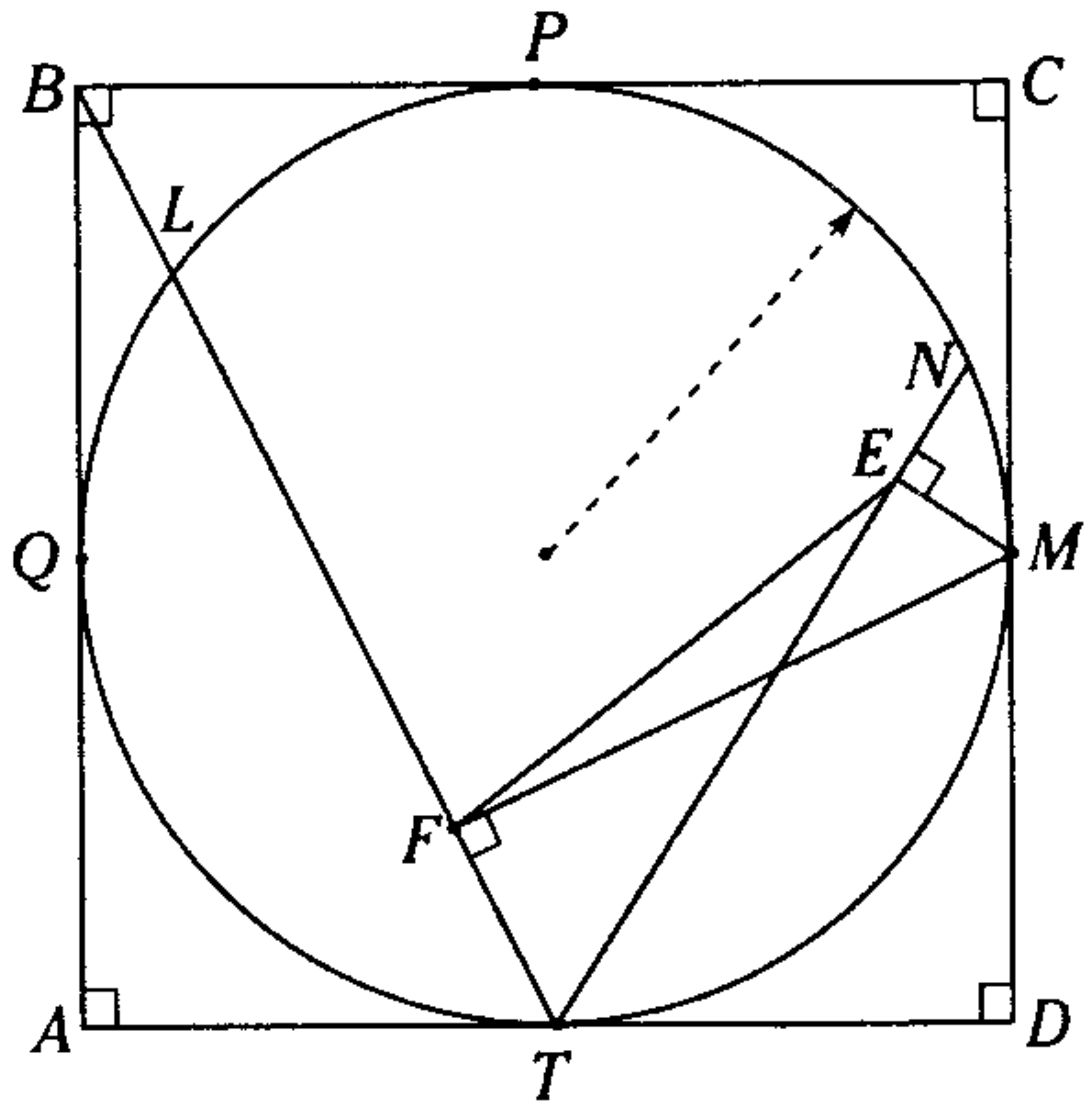
79. De la figura, $(AT)^2-(CL)^2=a$; $(TC)^2-(LA)^2=b$. Determine $(BT)^2-(BL)^2$



A) $(a+b)/2$ B) $(a-b)/4$ C) $a+b$

D) $a-b$ E) $\sqrt{ab}$

80. De la figura, Q, P, M y T son puntos de tangencia, $m\widehat{LPN}=115°$ y $4\sqrt{17}(EF)+FT=7$. Calcule FM.



A) 7/4 B) 7/3 C) 14/3

D) 7/2 E) 7

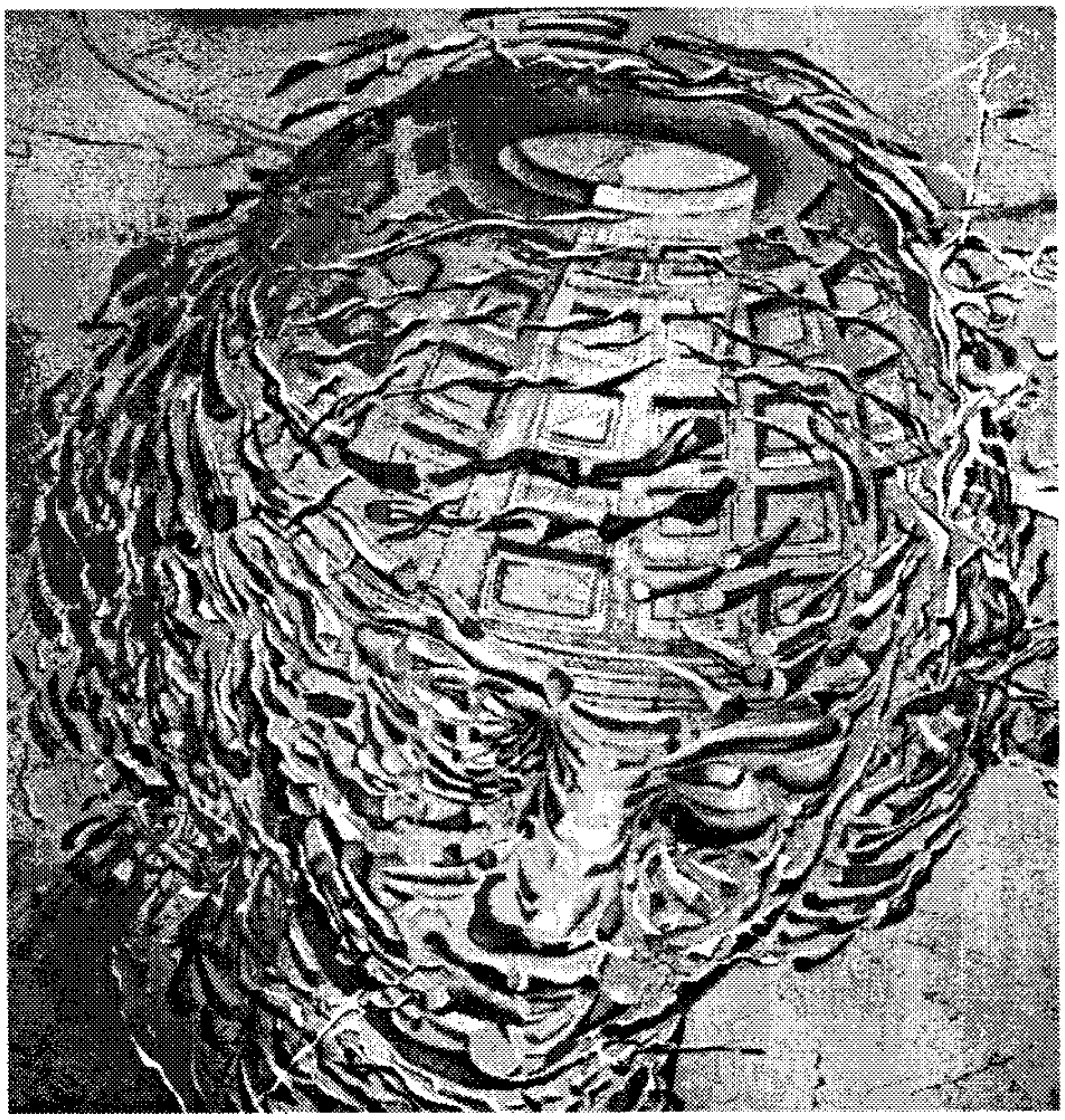
41	C	51	A	61	C	71	D
42	D	52	E	62	E	72	E
43	D	53	E	63	A	73	B
44	E	54	A	64	E	74	C
45	C	55	C	65	C	75	E
46	A	56	A	66	D	76	D
47	A	57	D	67	D	77	A
48	C	58	D	68	E	78	B
49	D	59	B	69	A	79	C
50	E	60	C	70	B	80	A

1	B	11	D	21	E	31	C
2	D	12	C	22	C	32	B
3	C	13	C	23	C	33	E
4	D	14	B	24	E	34	D
5	C	15	E	25	B	35	C
6	E	16	B	26	B	36	A
7	D	17	A	27	B	37	C
8	C	18	E	28	A	38	D
9	D	19	C	29	C	39	B
10	E	20	D	30	D	40	C

Claves

Capítulo XVI

Potencia y eje radical



En esta pintura de Salvador Dalí, Cabeza rafaelesca estallando, podemos apreciar que el artista realizó su obra a partir de objetos que giran entorno a su eje. Estos objetos, ubicados en planos paralelos y perpendiculares al eje, se encuentran constituidos por puntos que tienen igual potencia respecto de dicho eje.

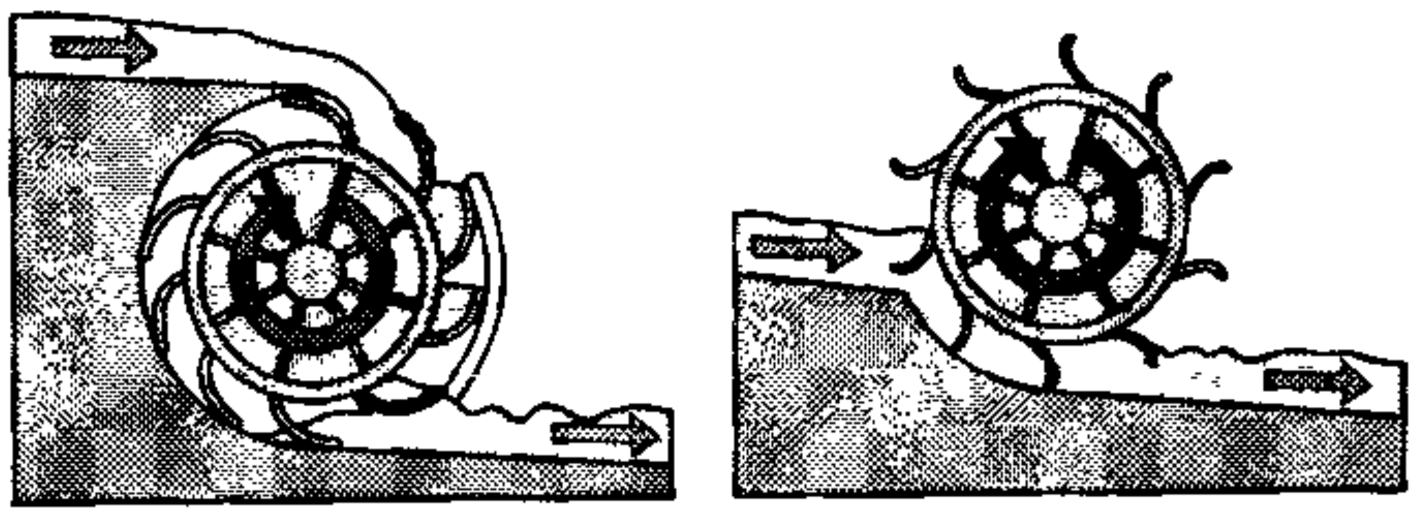
Potencia y eje radical

OBJETIVOS

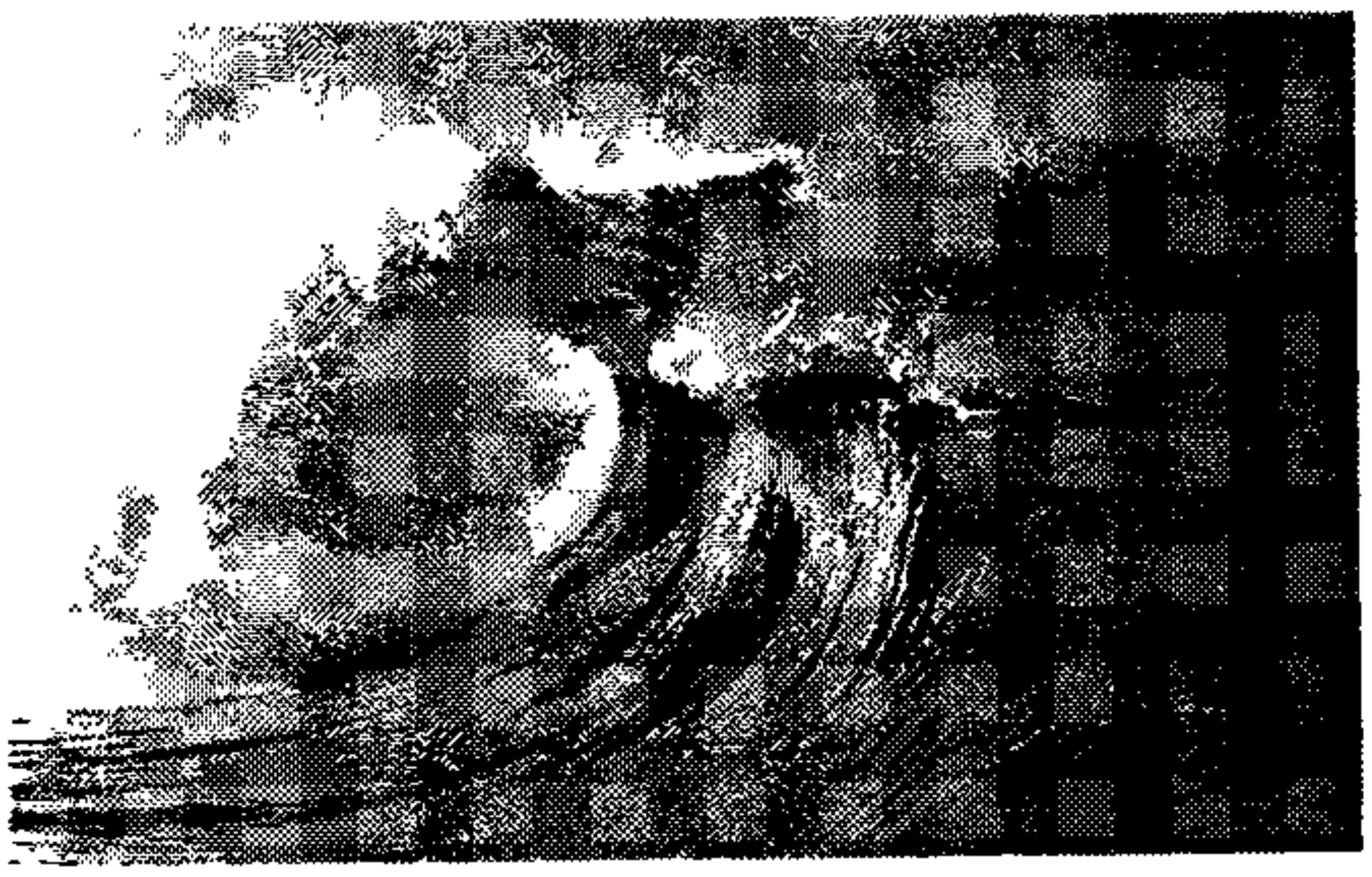
- Conocer la definición de potencia de un punto respecto a una circunferencia.
- Establecer cuándo la potencia es positiva o negativa.
- Comprender la definición del eje radical para aplicarla correctamente.
- Definir el centro radical.

INTRODUCCIÓN

Para poder comprender y analizar de manera adecuada este capítulo, se ha creído conveniente establecer conceptos previos como los de segmento dirigido o los de dirección y sentido, algunos textos abordan este capítulo a partir del concepto de vectores que no es otra cosa que un segmento que tiene una dirección y un sentido.



Las turbinas, utilizan la fuerza de las aguas en sus paletas para generar poderosas fuerzas en su eje de giro.



La potencia de las olas se mide por la fuerza con que irrumpen sus crestas en la superficie del mar. Si hacemos un corte transversal imaginario y lo consideramos como una circunferencia veremos que la ola es más potente cuando más alejada esta del eje imaginario.

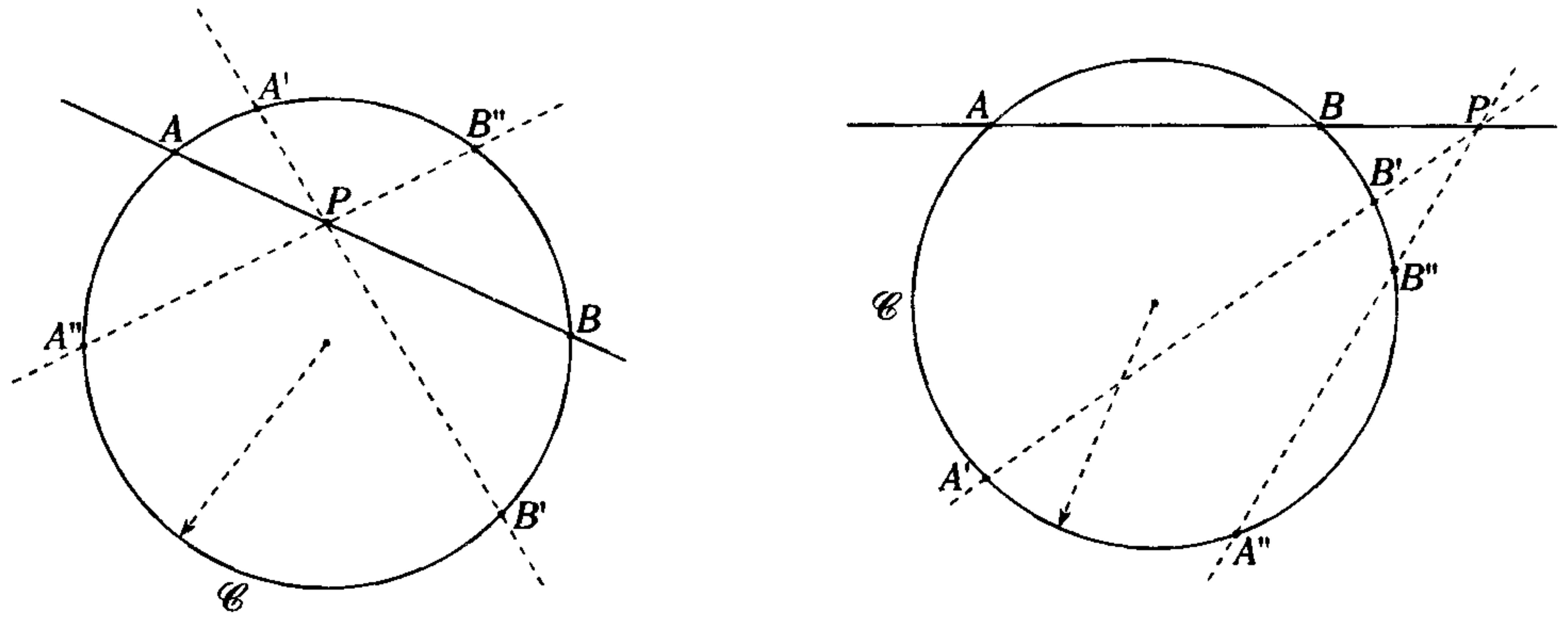
Además, recordaremos algunos teoremas que se han estudiado en el capítulo XV (Relaciones métricas en la circunferencia).

El tema de potencia esta asociado fundamentalmente a fenómenos físicos ya sea de la naturaleza o en la que el hombre haya intervenido así esta presente en el rango de peligrosidad de los ciclones respecto de su vórtice por parte de los aviones, o en los remolinos marinos por parte de las embarcaciones. La potencia se encuentra presente en las olas marinas, los molinos de viento, las turbinas, etc.

POTENCIA

CONCEPTOS PREVIOS

Sea una circunferencia $\mathscr{C}$ y un punto P contenidos en un mismo plano. Si por P se traza una recta secante a $\mathscr{C}$ en A y B; entonces, el producto de las longitudes de los segmentos PA y PB es constante.



$(PA).(PB) = (PA').(PB') = ... = \text{cte.}$ $(PA).(PB) = (PA').(PB') = ... = \text{cte.}$

Figura 16.1

Esta propiedad característica de las relaciones métricas en la circunferencia nos sugiere formular el concepto de potencia y, con ello, el concepto de segmentos dirigidos.

SEGMENTOS DIRIGIDOS

DEFINICIÓN

Son segmentos que tienen un punto de inicio y un punto final; por lo tanto, tienen dirección y sentido.
Dirección: se establece por la línea que lo contiene.
Sentido: es la orientación del punto de inicio al punto final.

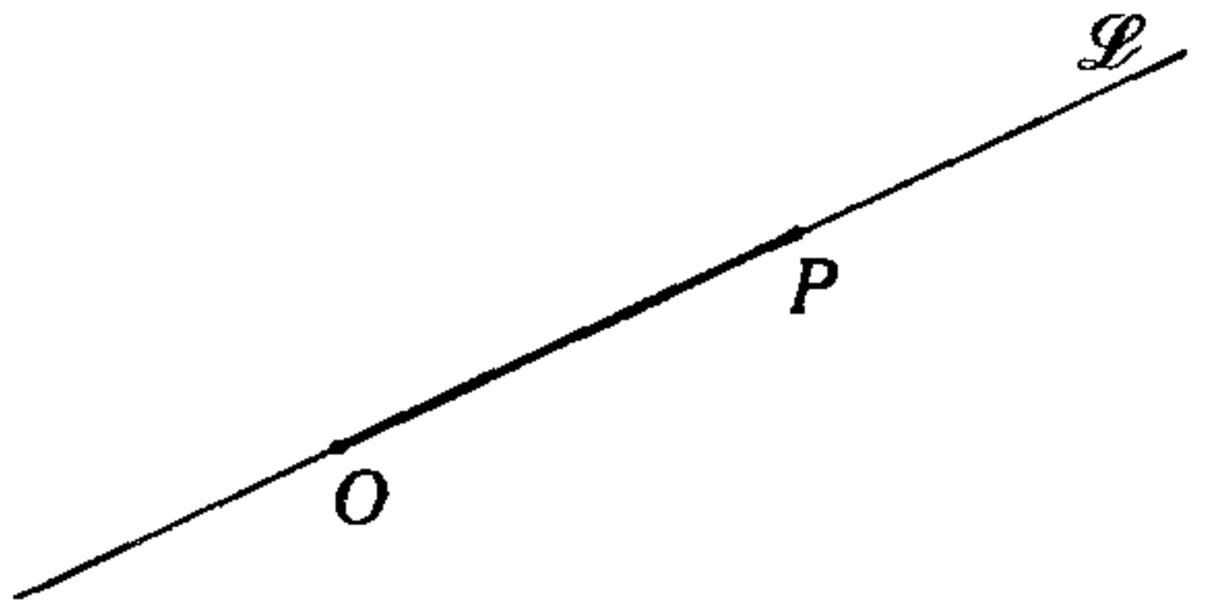


Figura 16.2

O: punto de inicio
P: punto final
$\overline{OP}$: segmento de dirección $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y sentido de O a P.

Observación

Las longitudes de dos segmentos dirigidos que tienen la misma dirección y el mismo sentido estarán acompañadas de un mismo signo (+ ó –), y de diferente signo si tienen sentidos diferentes.

$\overline{PA}\,.\,\overline{PB} = (+PA)(+PB) = (-PA)(-PB)$ $\qquad$ $\overline{PA}\,.\,\overline{PB} = (+PA)(-PB) = (-PA)(+PB)$

Figura 16.3

Nota

Por cuestiones prácticas, consideraremos como producto de segmentos dirigidos al producto de sus longitudes acompañados de su respectivo signo.

$$\overline{AB}\,.\,\overline{CD} = (\pm AB)\,.\,(\pm CD)$$

POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN

Es el producto de los segmentos dirigidos de un punto, a cualquier par de puntos en la circunferencia, tal que resulten colineales con él.

Notación

Pot. $P(\mathscr{C})$: Potencia de P respecto de $\mathscr{C}$.

Dependiendo de la posición del punto P, respecto a la circunferencia $\mathscr{C}(O, R)$, tenemos

a. Si P es exterior a una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio R. ($\mathscr{C}(O, R)$)

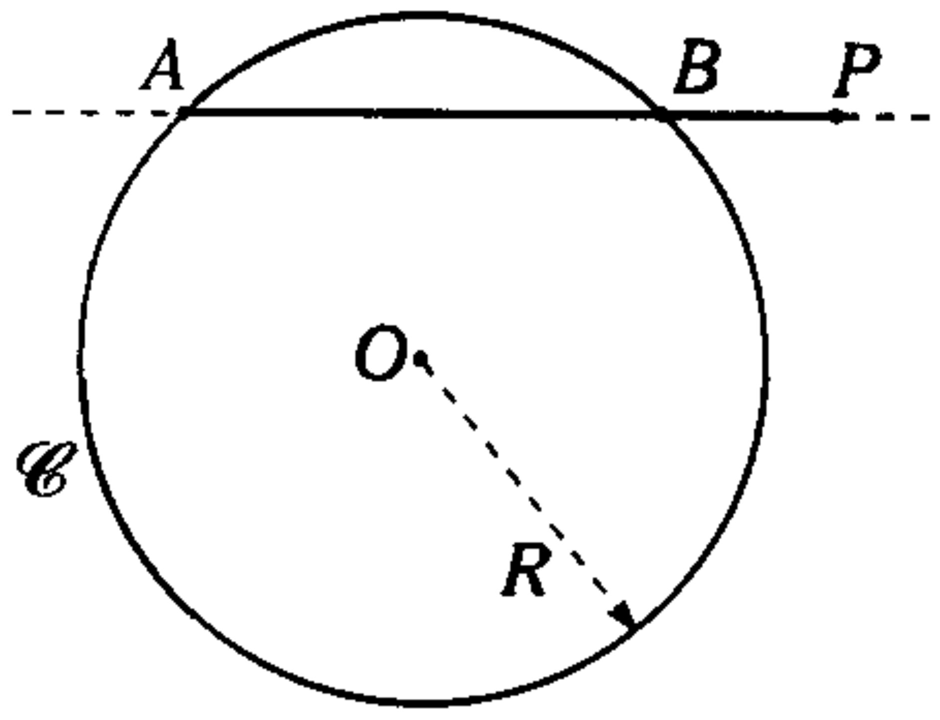


Figura 16.4

P: exterior a $\mathscr{C}$.

$A \in \mathscr{C}$ y $B \in \mathscr{C}$; $(A \neq B)$

A, B y P son colineales

Pot. $P(\mathscr{C}) = (-PA)\,.\,(-PB)$

$$\boxed{\text{Pot. } P(\mathscr{C}) = PA\,.\,PB}$$

Observación

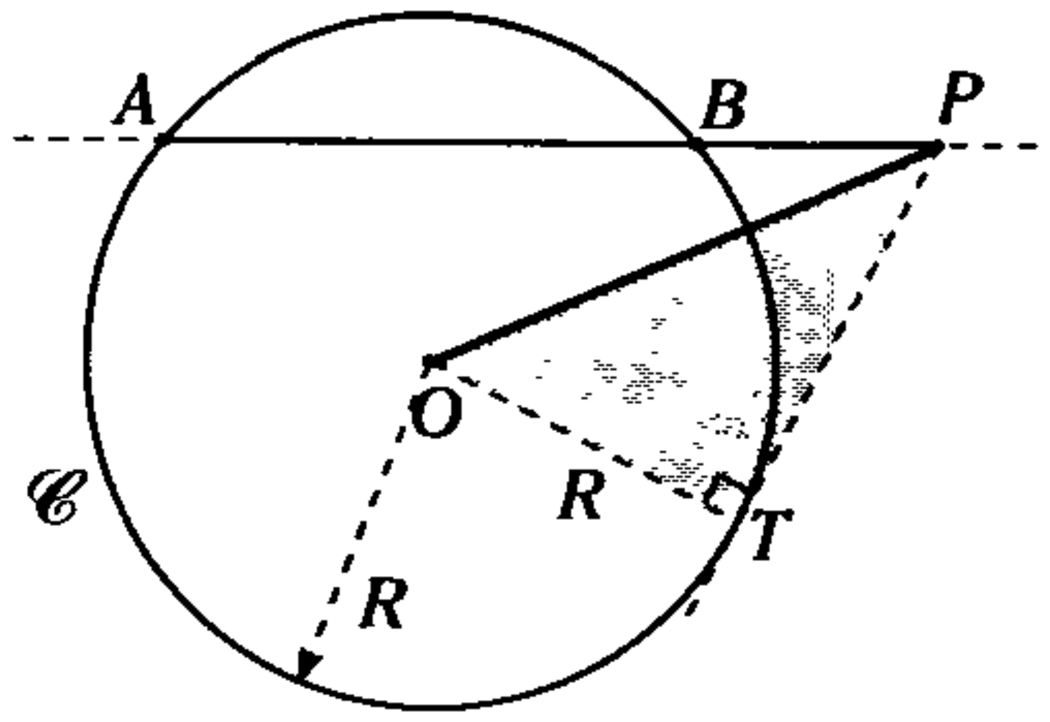


Figura 16.5

Por teorema de las tangentes

$PA\,.\,PB = (PT)^2$

⊾PTO

$(PT)^2 = (PO)^2 - R^2$

$\rightarrow$ Pot. $P(\mathscr{C}) = (PT)^2$

$$\boxed{\text{Pot. } P(\mathscr{C}) = (PO)^2 - R^2}$$

- La potencia de P respecto de $\mathscr{C}$ es igual al cuadrado de la longitud del segmento tangente trazado de P a $\mathscr{C}$.
- La potencia de P respecto de $\mathscr{C}$ es igual a la diferencia de cuadrados, de la distancia de P al centro O y el radio R.

b. Si P es interior a una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio R ($\mathscr{C}(O, R)$).

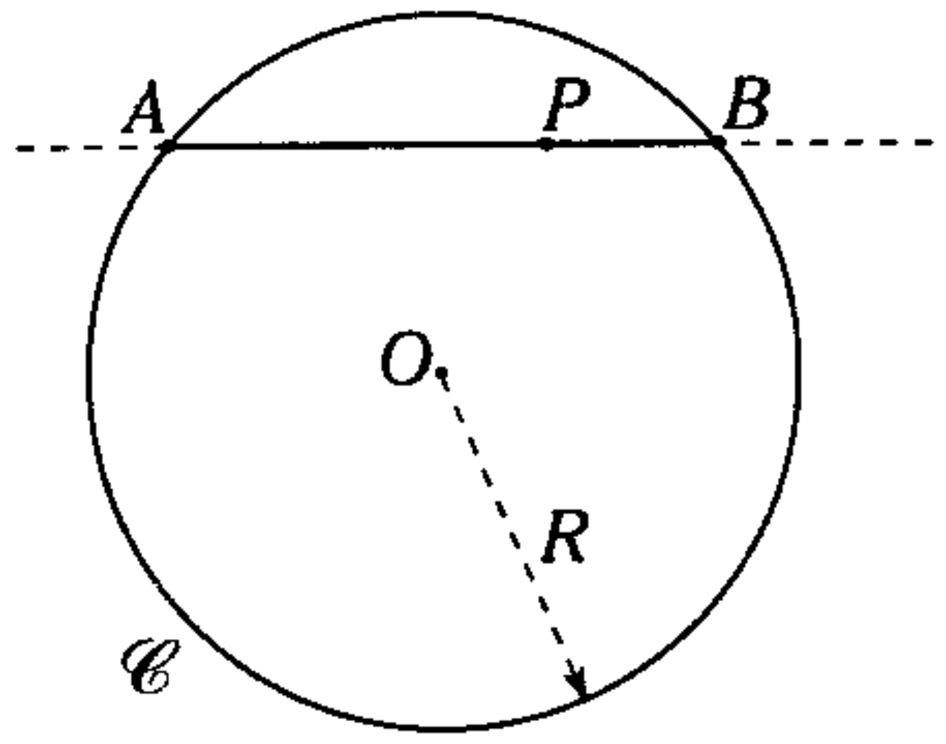


Figura 16.6

P: interior a $\mathscr{C}$

$A \in \mathscr{C}$ y $B \in \mathscr{C}$; $(A \neq B)$

A, B y P son colineales

$$\text{Pot. } P\,(\mathscr{C}) = (-PA)\,.\,(+PB)$$

$$\boxed{\text{Pot. } P(\mathscr{C}) = -PA\,.\,PB}$$

Observación

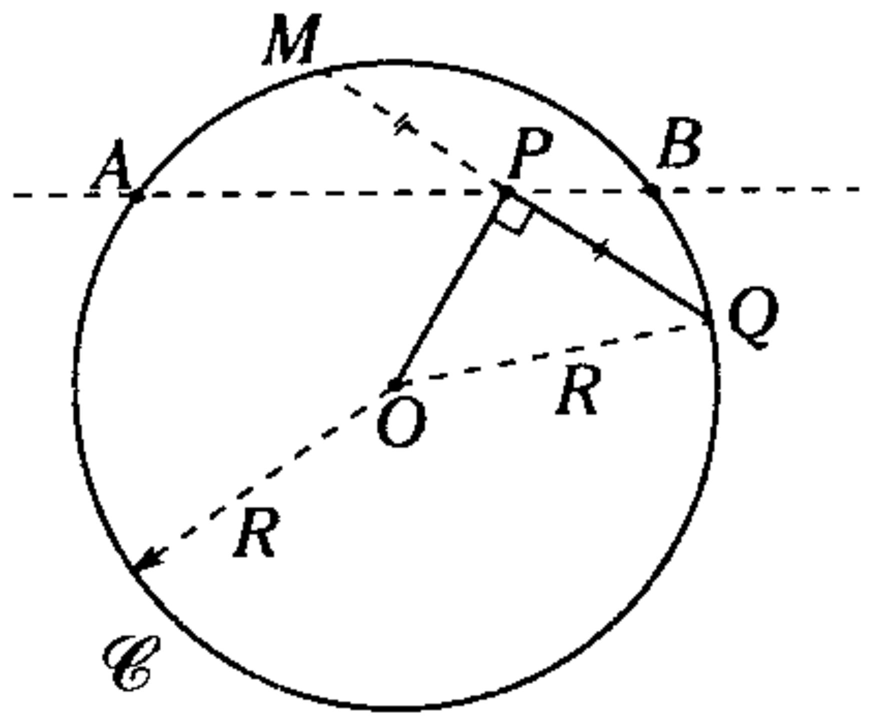


Figura 16.7

$\text{Pot. } P(\mathscr{C}) = (-PM)\,.\,(PQ)$

como $PM = PQ$

entonces $\text{Pot. } P(\mathscr{C}) = -(PQ)^2$

también $(PQ)^2 = R^2 - (PO)^2$

$\therefore\ \text{Pot. } P(\mathscr{C}) = (PO)^2 - R^2$

→

$$\boxed{\text{Pot. } P(\mathscr{C}) = -(PQ)^2}$$

o $$\boxed{\text{Pot. } P(\mathscr{C}) = (PO)^2 - R^2}$$

- La potencia de P respecto de $\mathscr{C}$ es igual a menos el cuadrado de la longitud de la semicuerda determinada por P.
- La potencia de P respecto de $\mathscr{C}$ es igual a la diferencia de cuadrados, de la distancia de P al centro y el radio R.

c. Si P pertenece a la circunferencia $\mathscr{C}$.

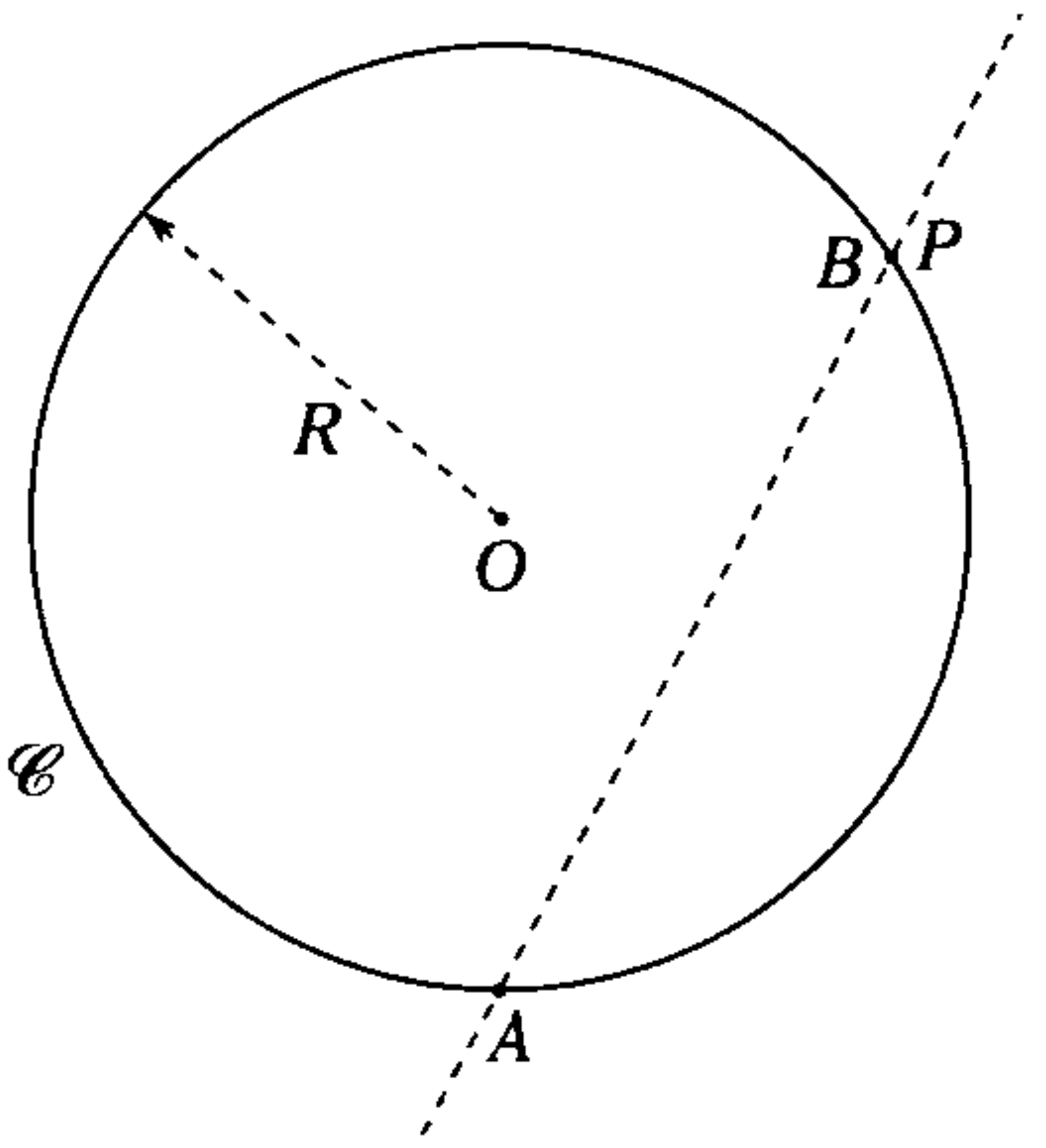


Figura 16.8

Si $P \in \mathscr{C}$

$\rightarrow\ P = B$

$\therefore\ PB = 0$

$\text{Pot. } P(\mathscr{C}) = (PA)\,.\,(PB) = (PA)\,.\,(O)$

$$\boxed{\text{Pot. } P(\mathscr{C}) = O}$$

Observación

$\text{Pot. } P(\mathscr{C})$: $(PO)^2 - R^2 = (R)^2 - R^2 = 0$

$\rightarrow\ \boxed{\text{Pot. } P(\mathscr{C}) = 0}$

De (a), (b) y (c) podemos concluir que la potencia de un punto P, respecto de una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio R ($\mathscr{C}(O, R)$), es igual a la diferencia de cuadrados de la distancia de P al centro (O) y el radio (R) de la circunferencia.

$$\boxed{\text{Pot. } P(\mathscr{C}(O, R)) = (PO)^2 - R^2}$$

Nota

- La potencia del centro de una circunferencia respecto a dicha circunferencia es igual a menos el cuadrado del radio de dicha circunferencia.

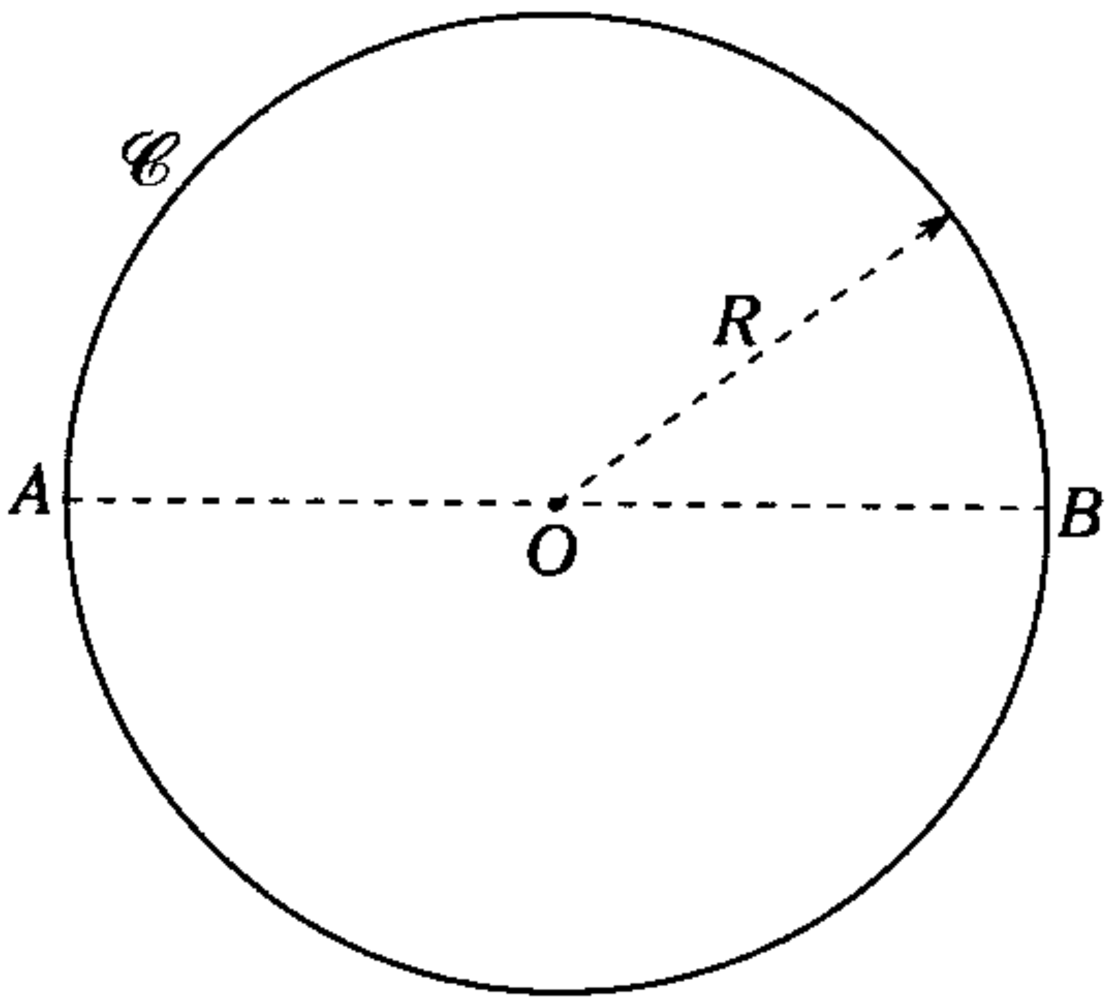
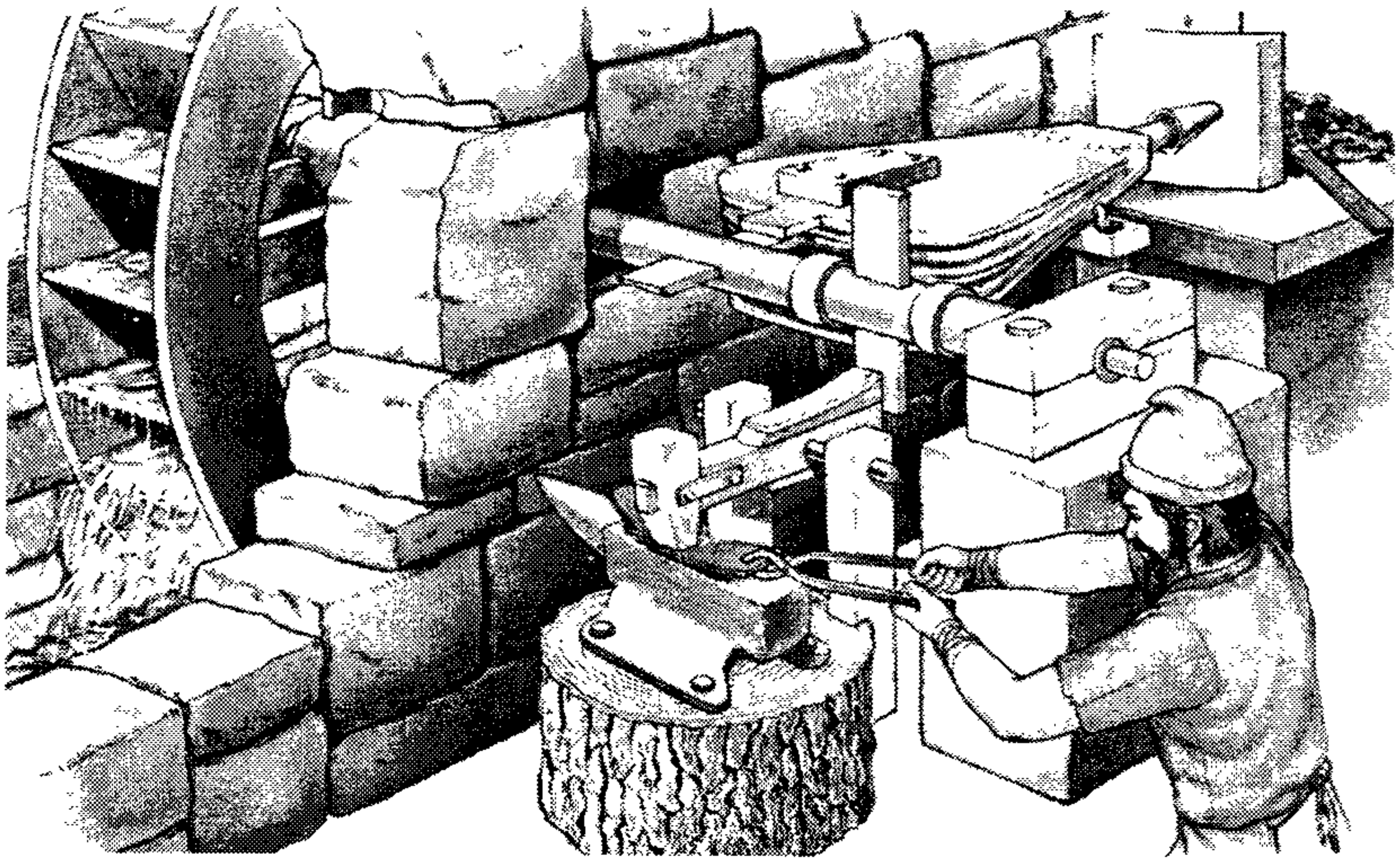


Figura 16.9

Pot. $O(\mathscr{C}(O, R)) = (-OA)(+OB)$

Pot. $O(\mathscr{C}(O, R)) = (-R)(R) = -R^2$

$$\text{Pot. } O(\mathscr{C}(O\,;R)) = -R^2$$



La potencia del centro de la rueda respecto de ella hace girar el eje de rotación con tal fuerza que a la vez se transforma en energía que el hombre emplea de diferentes formas.

Nota

- Los puntos cuya potencia respecto de una circunferencia es un valor fijo (K) pertenecen a una circunferencia concéntrica a la primera, si $K > 0$

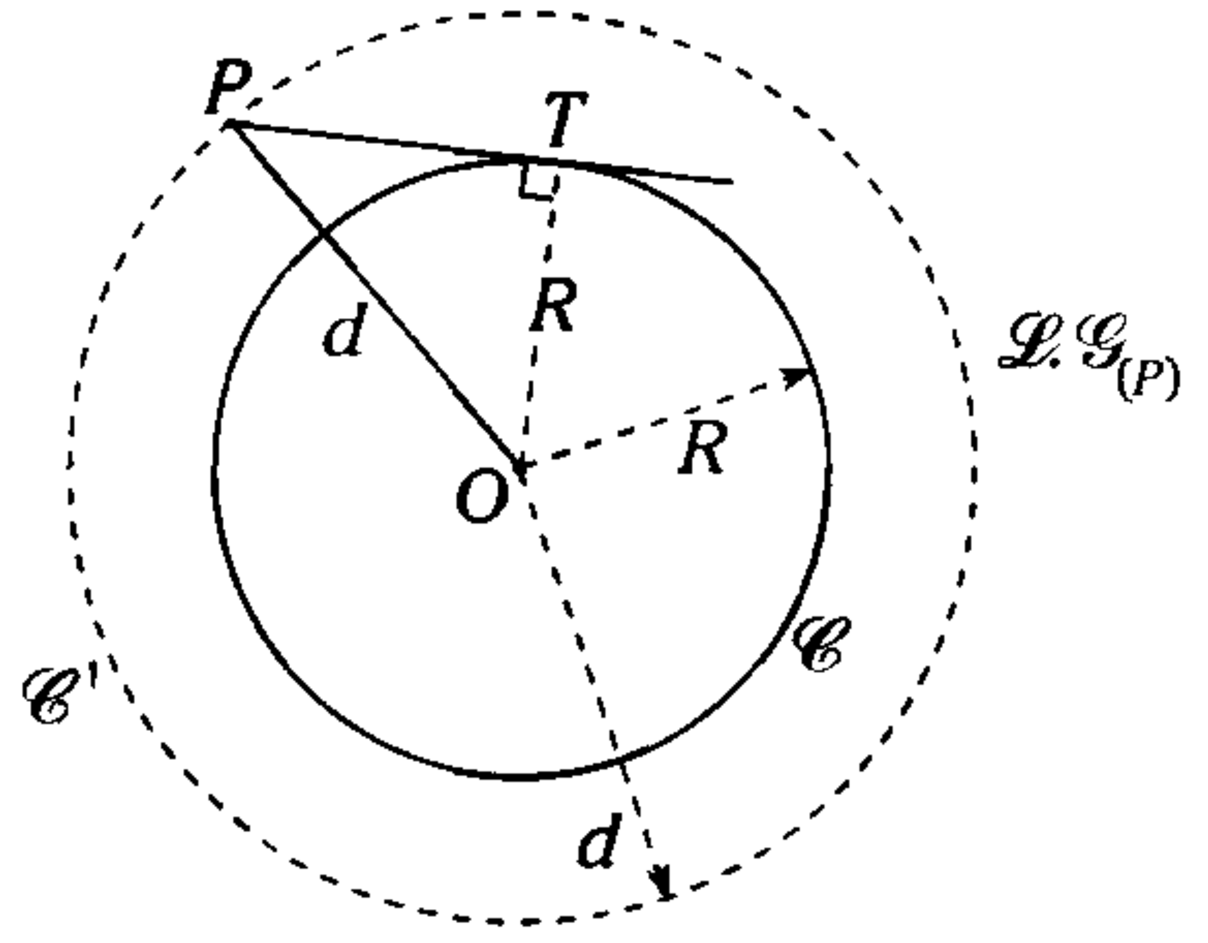
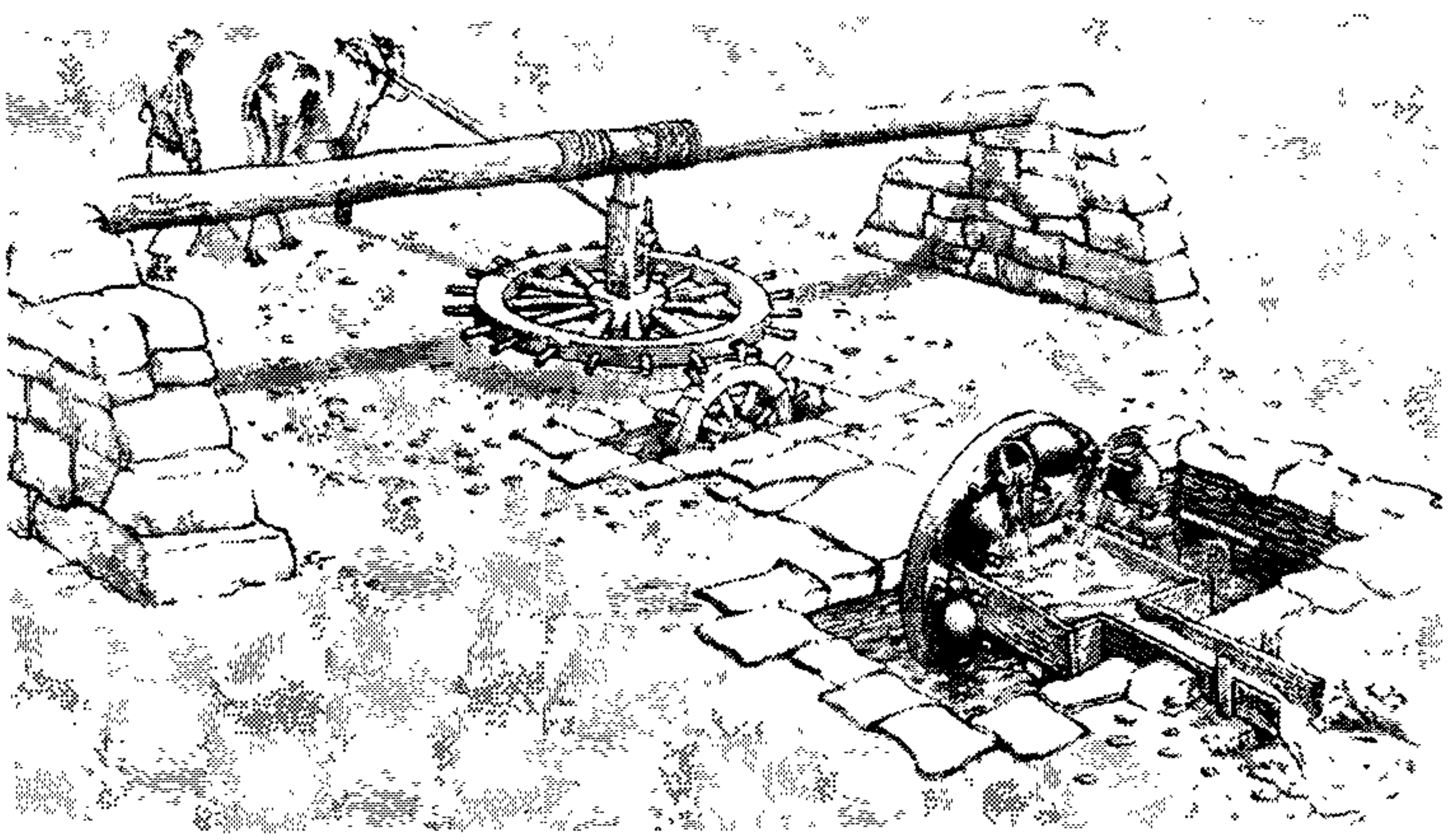


Figura 16.10

T: punto de tangencia
Para todo punto P
Pot. $P(O; R) = (PT)^2 = K$
$\triangle OPT$: $(PT)^2 + R^2 = d^2$
Como $(PT)^2 = K$ = cte. y R es constante.
Por lo tanto d es constante



La potencia del buey respecto de la rueda genera una fuerza de rotación que aplicada a un sistema de engranajes permite sacar agua de la napa freática para emplearla en el riego de campos de cultivo.

POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO DE OTRO PUNTO

Teorema

La potencia de un punto respecto de otro es igual al cuadrado de la distancia entre dichos puntos.

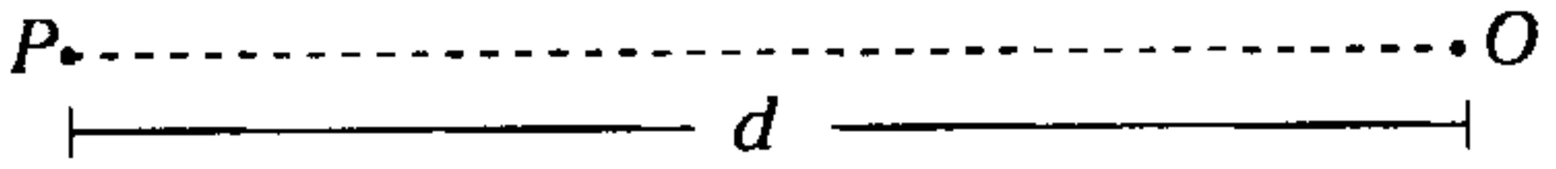


Figura 16.11

$$\text{Pot. } P(O) = d^2$$

Un punto es considerado como una circunferencia de radio nulo (circunferencia puntual), por lo que al ubicar los puntos A y B en la circunferencia colineales con P,

$$A = B = O \text{ (} O \text{ centro de } \mathscr{C}\text{)}$$

De esta manera, $PA = PB = PO$

$$\rightarrow \text{Pot. } P(O) = (PO)^2 = d^2$$

EJE RADICAL

DEFINICIÓN

El eje radical de dos circunferencias coplanares y no concéntricas es el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto de dichas circunferencias.

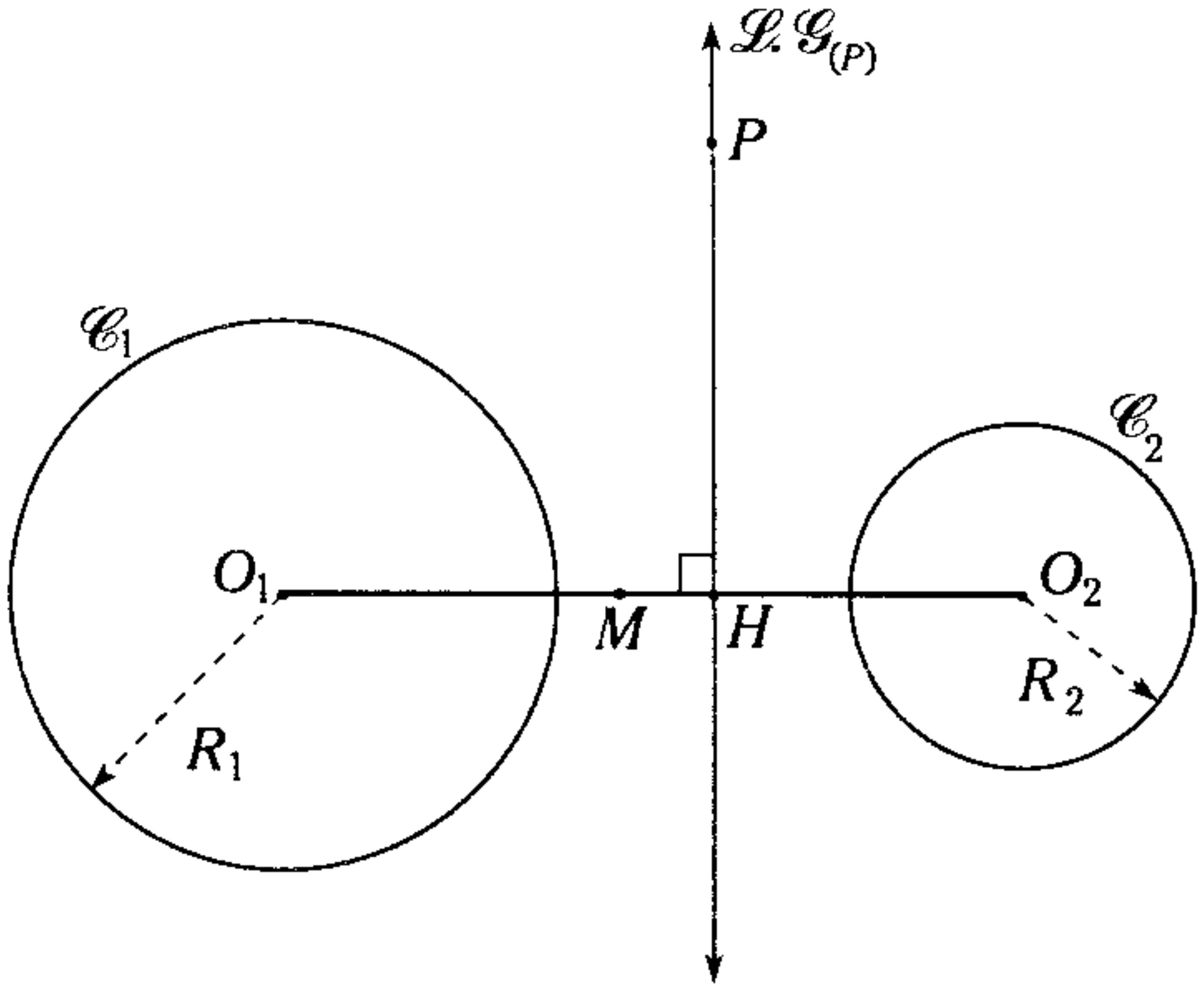
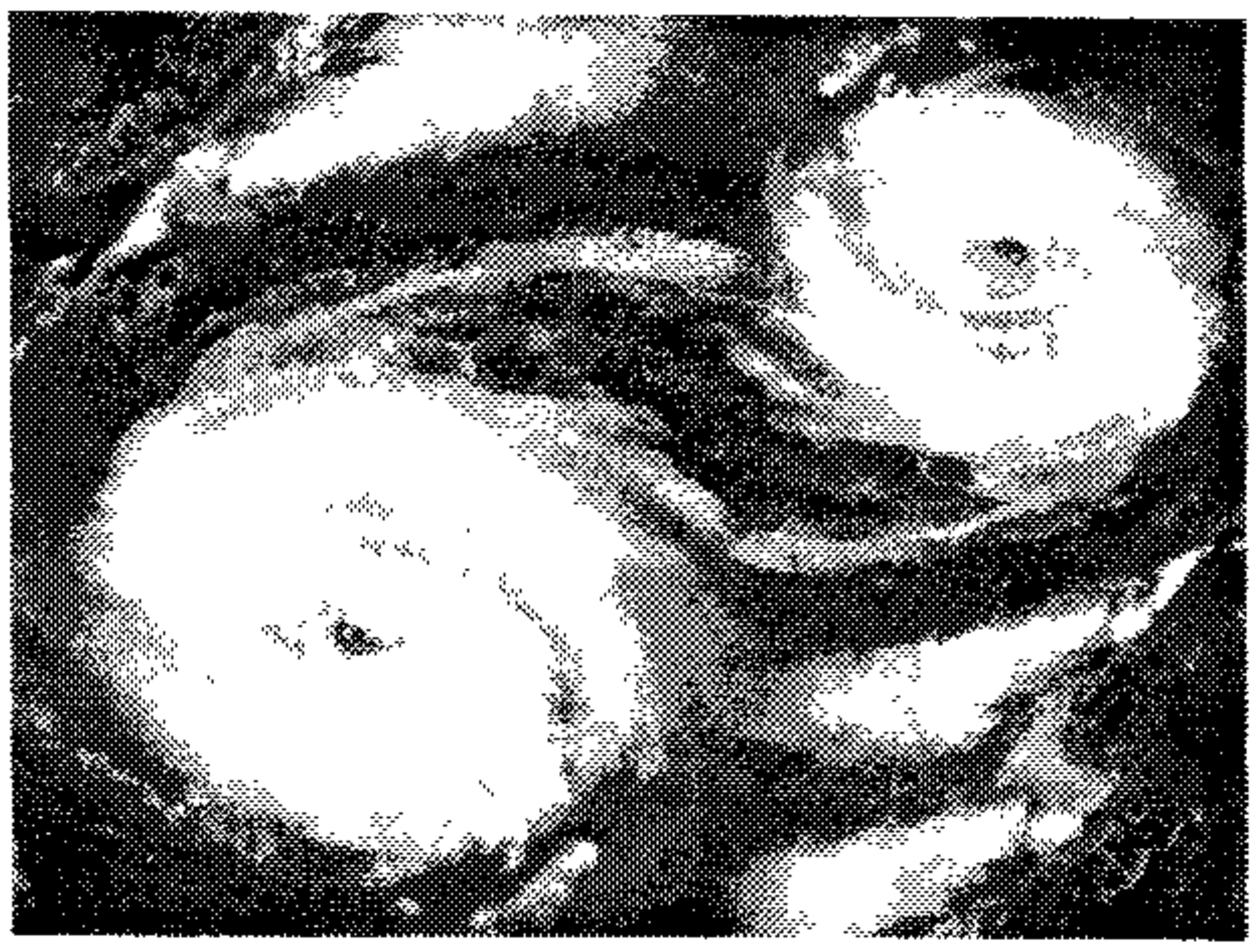


Figura 16.12



La foto muestra dos huracanes captados desde un satélite cada uno de ellos genera fuerzas de viento de gran potencia las cuales al chocar o bien se anulan si sus fuerzas tienen sentidos contrarios o en todo caso se unen para formar un tornado de mayor potencia.

$\mathscr{L}.\mathscr{G}_{(P)}$: Lugar geométrico de los puntos P que tienen igual potencia respecto de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Entonces $\boxed{\text{Pot. } P(\mathscr{C}_1) = \text{Pot. } P(\mathscr{C}_2)}$

Propiedades

1. $\overleftrightarrow{PH} \perp \overline{O_1O_2}$ ($\overleftrightarrow{PH}$: $\mathscr{L}.\mathscr{G}_{(P)}$)
2. Si $O_1M=MO_2$, entonces MH es constante.

Demostración

Si M es punto medio de $\overline{AC}$.

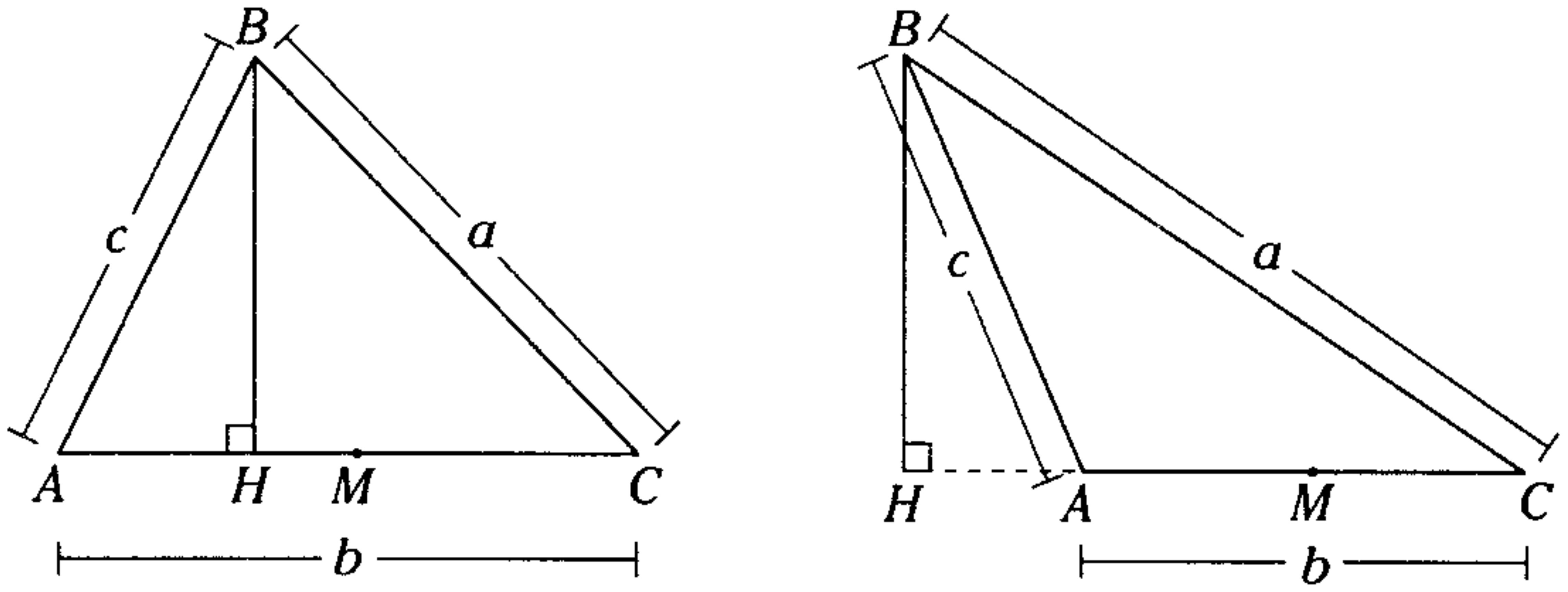


Figura 16.13

Se cumple que para todo $\triangle ABC$ (acutángulo u obtusángulo),

$$|a^2-c^2|=2b(HM) \quad \rightarrow \quad HM=\frac{|a^2-c^2|}{2b}$$

De la figura 16.13 y de la definición tenemos

Caso 1

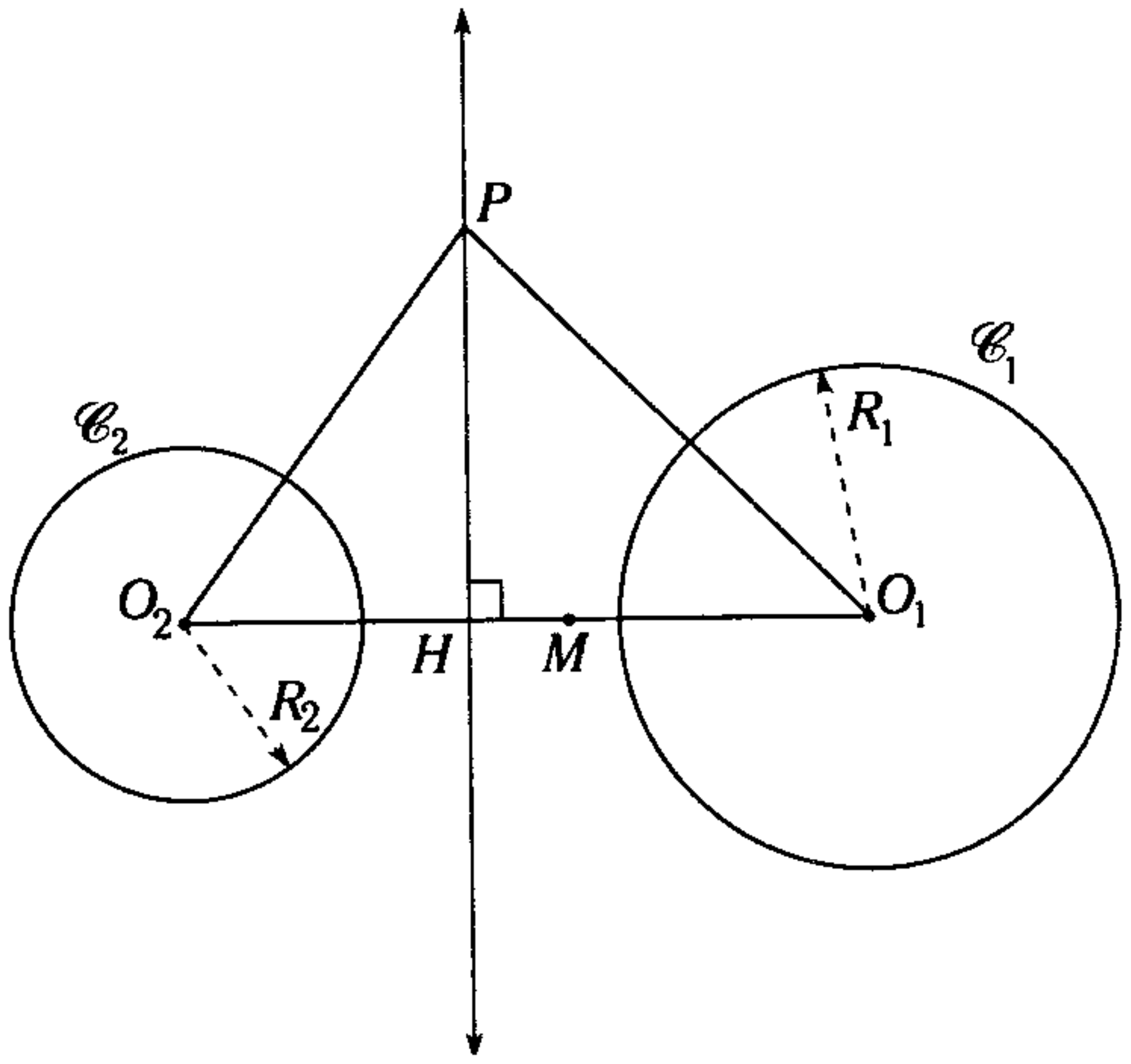


Figura 16.14

$$\text{Pot. } P(\mathscr{C}_1)=\text{Pot. } P(\mathscr{C}_2)$$

$$(PO_1)^2-R_1^2=(PO_2)^2-R_2^2$$

$$|(PO_1)^2-(PO_2)^2|=|R_1^2-R_2^2|$$

$$2(O_1O_2)(HM)=|R_1^2-R_2^2|$$

$$\rightarrow HM=\frac{|R_1^2-R_2^2|}{2(O_1O_2)}$$

$\therefore$ MH: constante

Como M es un punto fijo, entonces H es un punto fijo de $\overline{O_1O_2}$, para todo P que satisface la condición inicial y donde $\overline{PH}\perp\overline{O_1O_2}$.

Caso 2

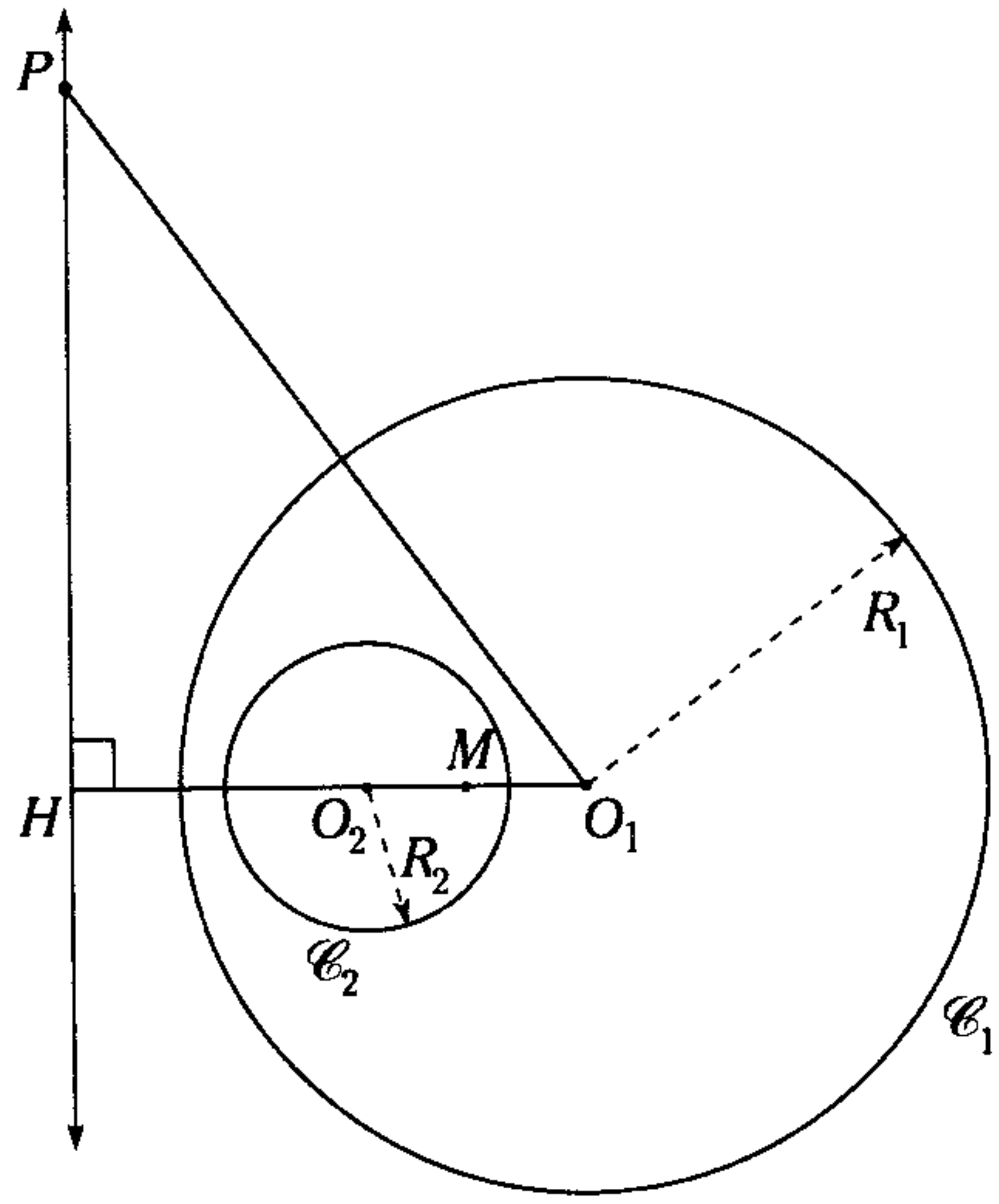


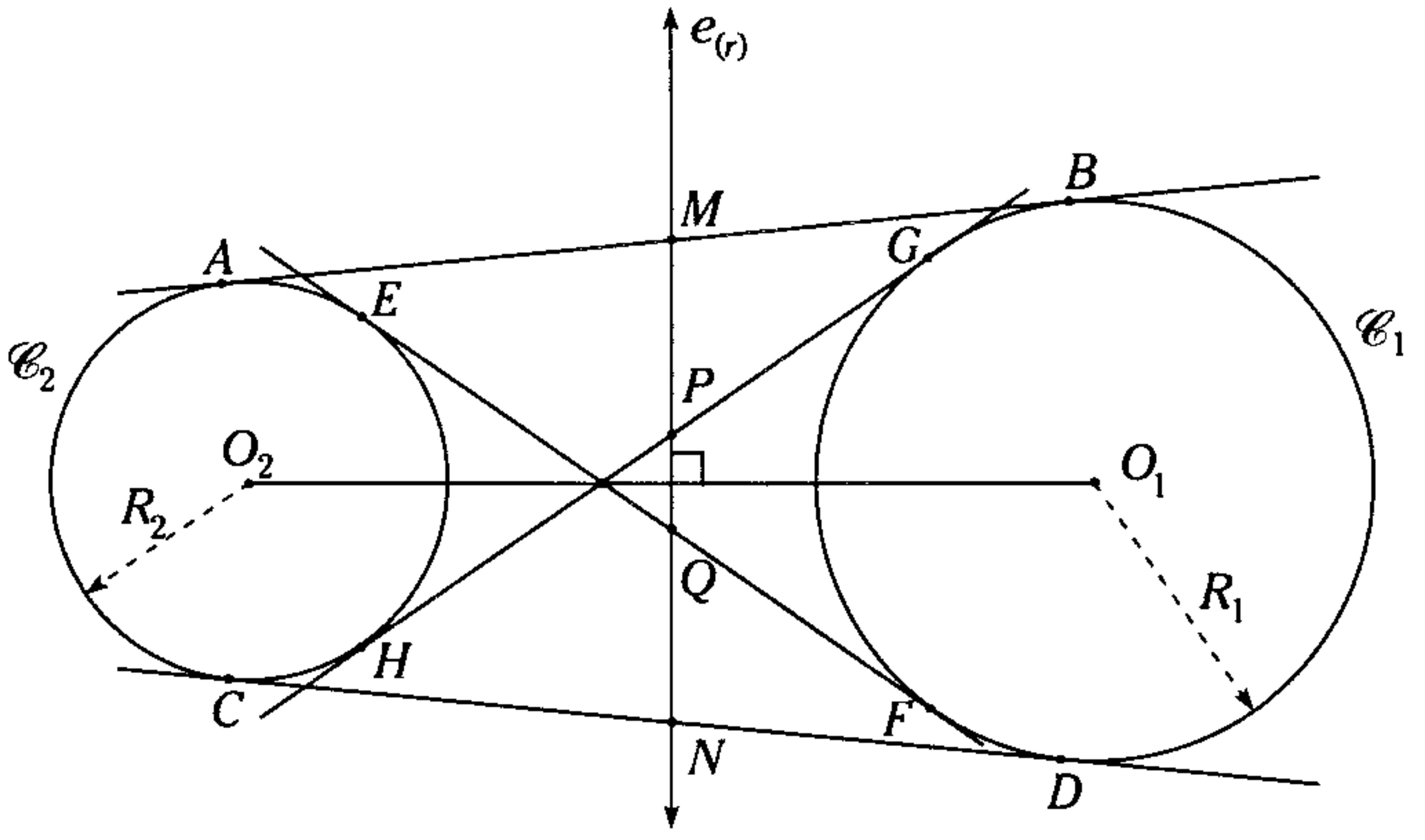
Figura 16.15

Análogamente al caso anterior, H es un punto fijo de la recta O_1O_2, para todo P que tiene igual potencia, respecto de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, donde $\overline{PH}\perp\overline{O_1O_2}$.

Conclusión

- El eje radical de dos circunferencias es perpendicular a la recta que pasa por los centros de las circunferencias.
- Si $R_1\neq R_2$, entonces H es diferente de M.
- Si $R_1=R_2$, entonces el eje radical pasa por el punto medio de $\overline{O_1O_2}$ (segmento que une los centros de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$).
- Las circunferencias no pueden ser concéntricas ($O_1O_2=O$); de lo contrario, MH es indeterminado, es decir, H se ubica en el infinito. Por lo tanto, no está definido.

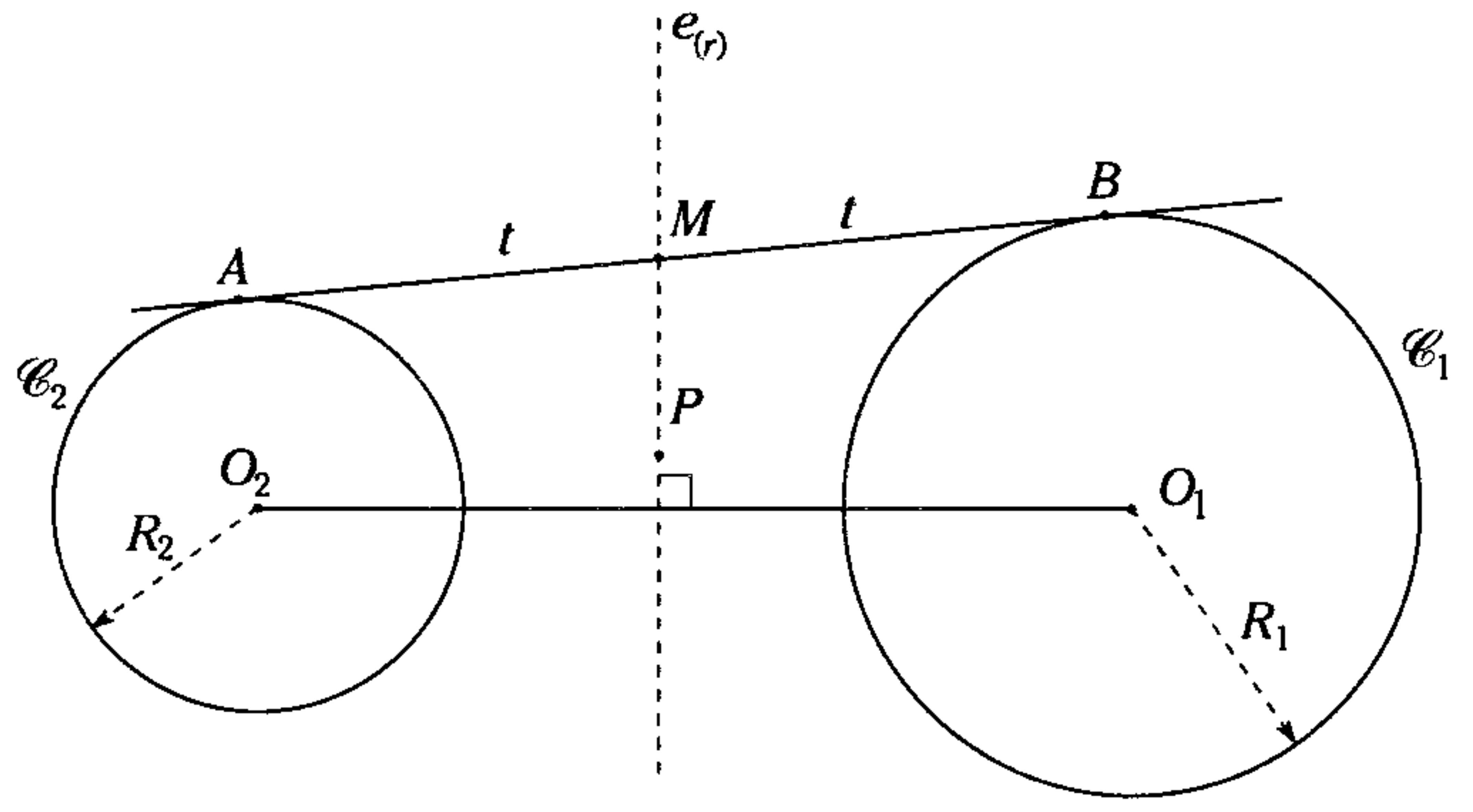
El eje radical de dos circunferencias exteriores pasa por los puntos medios de las tangentes comunes interiores y exteriores a dichas circunferencias.



(a)

$e_{(r)}$: eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.
M, N, P y Q son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{GH}$ y $\overline{EF}$, respectivamente.

Demostración



(b)

Figura 16.16

$\overleftrightarrow{AB}$: tangente común exterior de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. Si M es punto medio de $\overline{AB}$, confirmamos que $MA = MB = t$.
Sabemos

$$\text{Pot. } M(\mathscr{C}_1) = (MB)^2 = t^2$$
$$\text{Pot. } M(\mathscr{C}_2) = (MA)^2 = t^2$$
$$\therefore \ \text{Pot. } M(\mathscr{C}_1) = \text{Pot. } M(\mathscr{C}_2)$$

Así, M pertenece al eje radical ($e_{(r)}$) de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.
Análogamente, N, P y Q pertenecen a $e_{(r)}$.

PROPIEDAD

Si desde un punto del eje radical de dos circunferencias se trazan tangentes a dichas circunferencias, los segmentos tangentes comparten igual longitud.

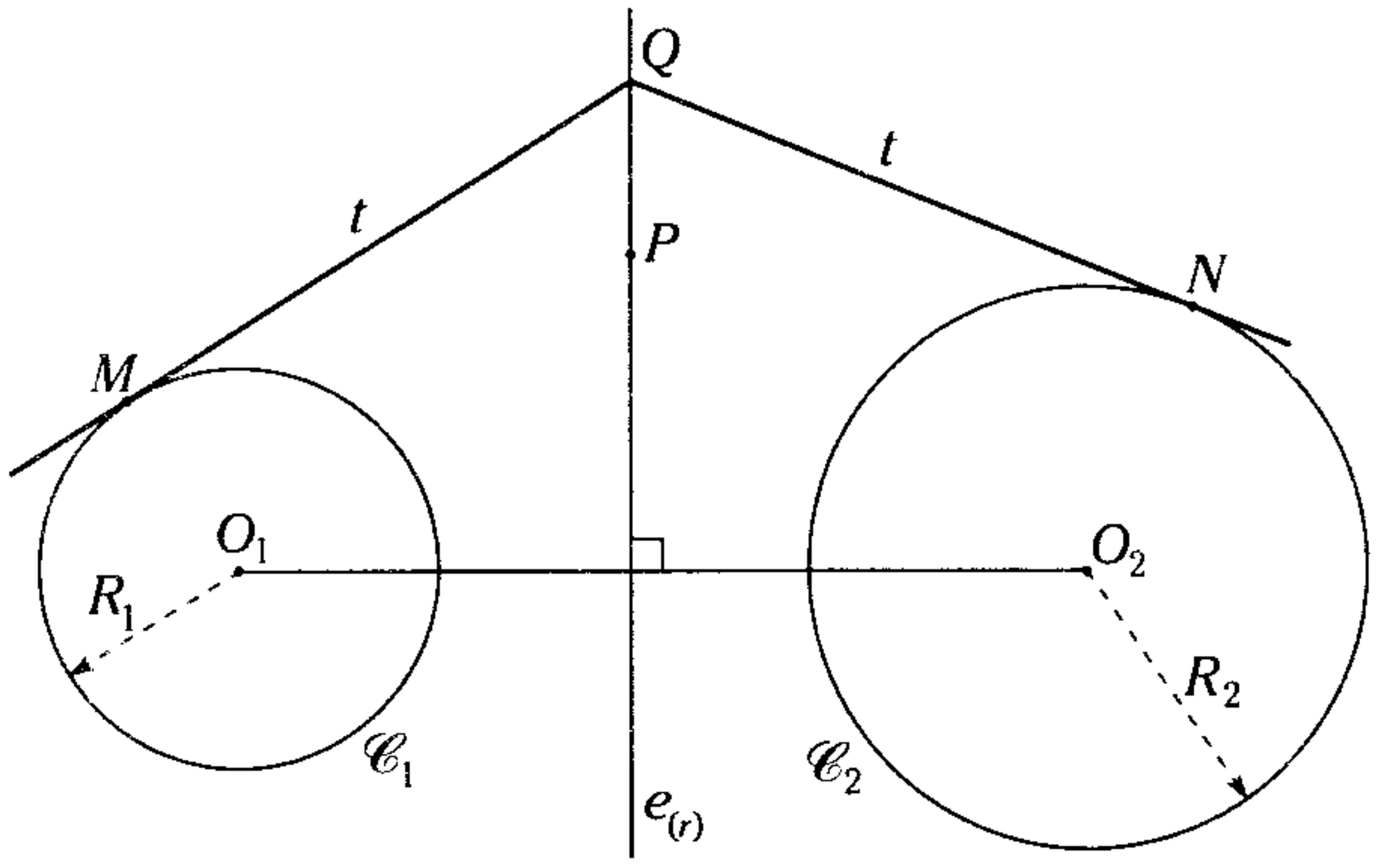


Figura 16.17

Si $Q \in e_{(r)}$

$e_{(r)}$: eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

$\rightarrow$ Pot. $Q(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $Q(\mathscr{C}_2)$

Es decir, $(QM)^2 = (QN)^2$

$\therefore$ $QM = QN$

Teorema

El eje radical de dos circunferencias secantes es la recta que pasa por sus puntos de intersección.

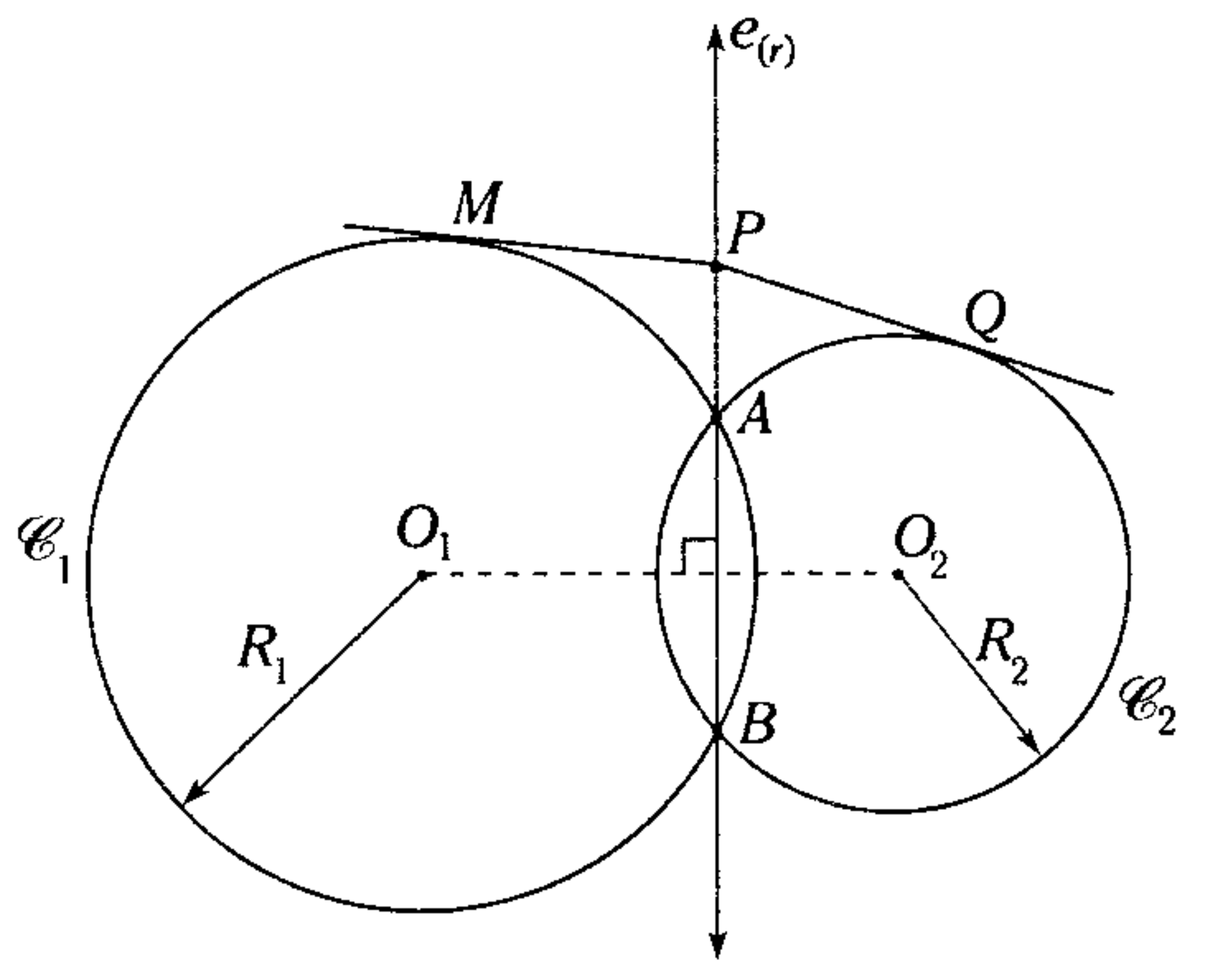


Figura 16.18

Sea $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A; B\}$

$\rightarrow$ la $\overleftrightarrow{AB}$ es el $e_{(r)}$

$e_{(r)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Demostración

Pot. $A(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $A(\mathscr{C}_2)$ = cero

Pot. $B(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $B(\mathscr{C}_2)$ = cero

Dado que los puntos A y B pertenecen al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, pero se sabe que una recta está determinada por dos puntos, entonces la recta AB es el eje radical respecto de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

PROPIEDAD

Si $P \in e_{(r)}$,

$\rightarrow$ $PM = PQ$.

Resultando así que M y Q puntos de tangencia.

Teorema

El eje radical de dos circunferencias tangentes exteriores es la recta tangente común interior.

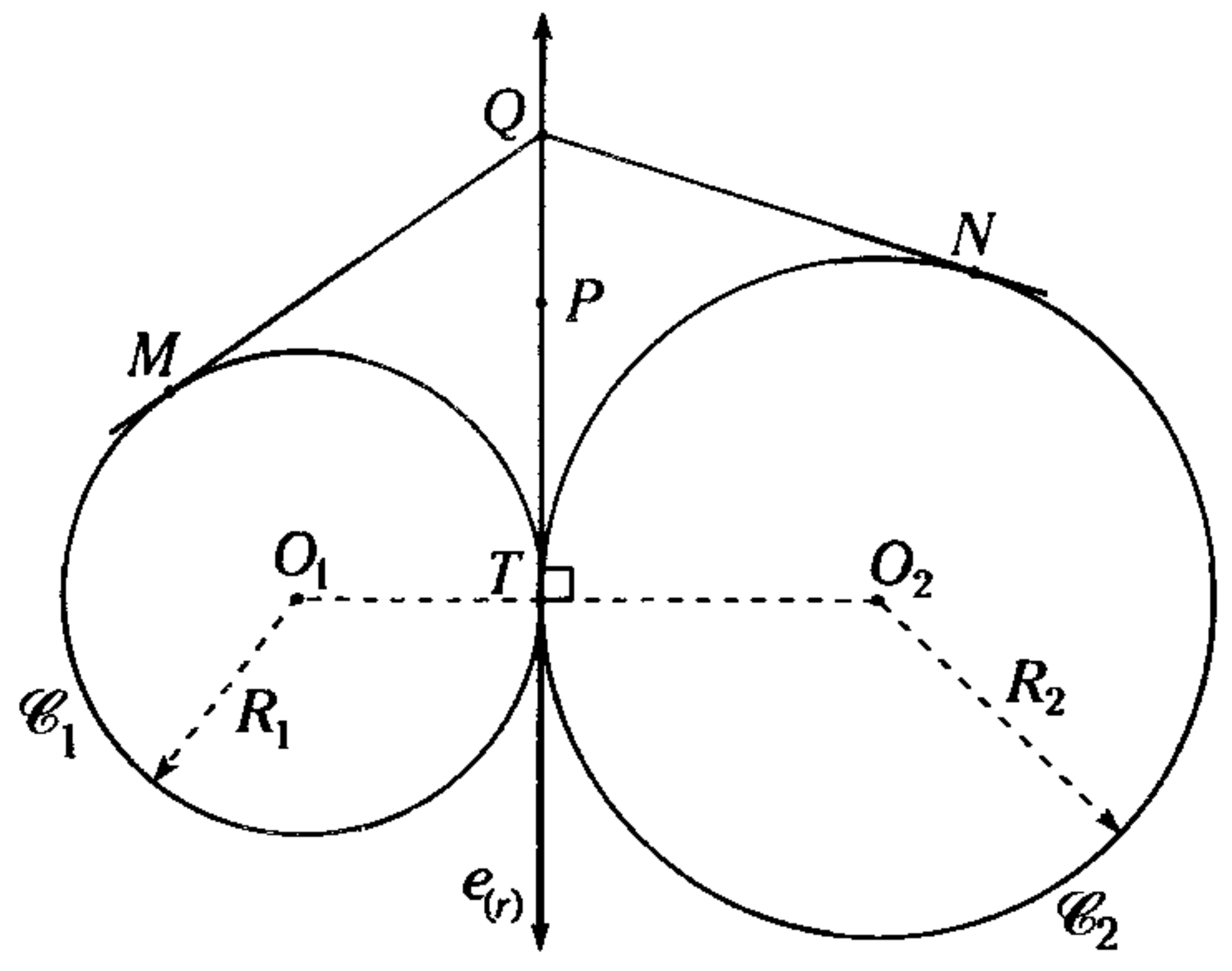


Figura 16.19

Sea $\overleftrightarrow{PT}$ la recta tangente común interior de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

$\rightarrow$ $\overleftrightarrow{PT}$: es el eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Demostración

En $\mathscr{C}_1$: $QT = QM$ (M y T : puntos de tangencia)

En $\mathscr{C}_2$: $QT = QN$ (N y T : puntos de tangencia)

$\rightarrow$ $QM = QN$

$\therefore$ Pot. $Q(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $Q(\mathscr{C}_2)$

Es decir, Q pertenece al eje radical ($e_{(r)}$), así también

Pot. $T(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $T(\mathscr{C}_2)$ = cero

Al pertenecer T al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PT}$ es el eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Teorema

El eje radical de dos circunferencias tangentes interiores es la recta tangente común exterior.

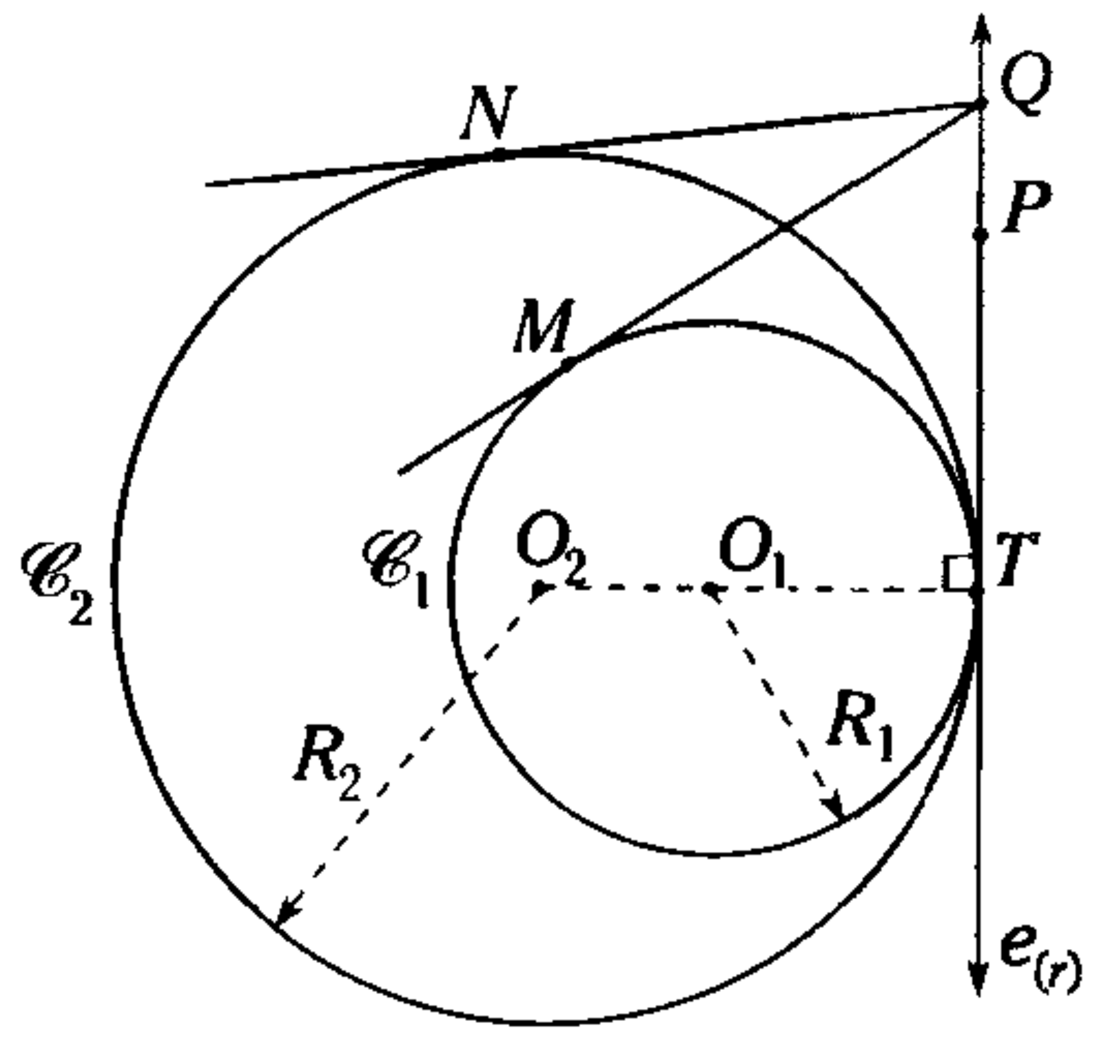


Figura 16.20

Demostración

En $\mathscr{C}_1$: $QT = QM$ (T y M: puntos de tangencia)

En $\mathscr{C}_2$: $QT = QN$ (T y N: puntos de tangencia)

$\rightarrow$ $QM = QN$

$\therefore$ Pot. $Q(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $Q(\mathscr{C}_2)$

Es decir, Q pertenece a $e_{(r)}$ (eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$), también Pot. $T(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $T(\mathscr{C}_2)$ = cero

Por lo tanto, análogamente al caso anterior, $\overleftrightarrow{PT}$ es eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

MÉTODO GRÁFICO PARA HALLAR EL EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS INTERIORES O EXTERIORES

Dadas dos circunferencias coplanares, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, de centros O_1 y O_2, respectivamente, que no tienen un punto en común.

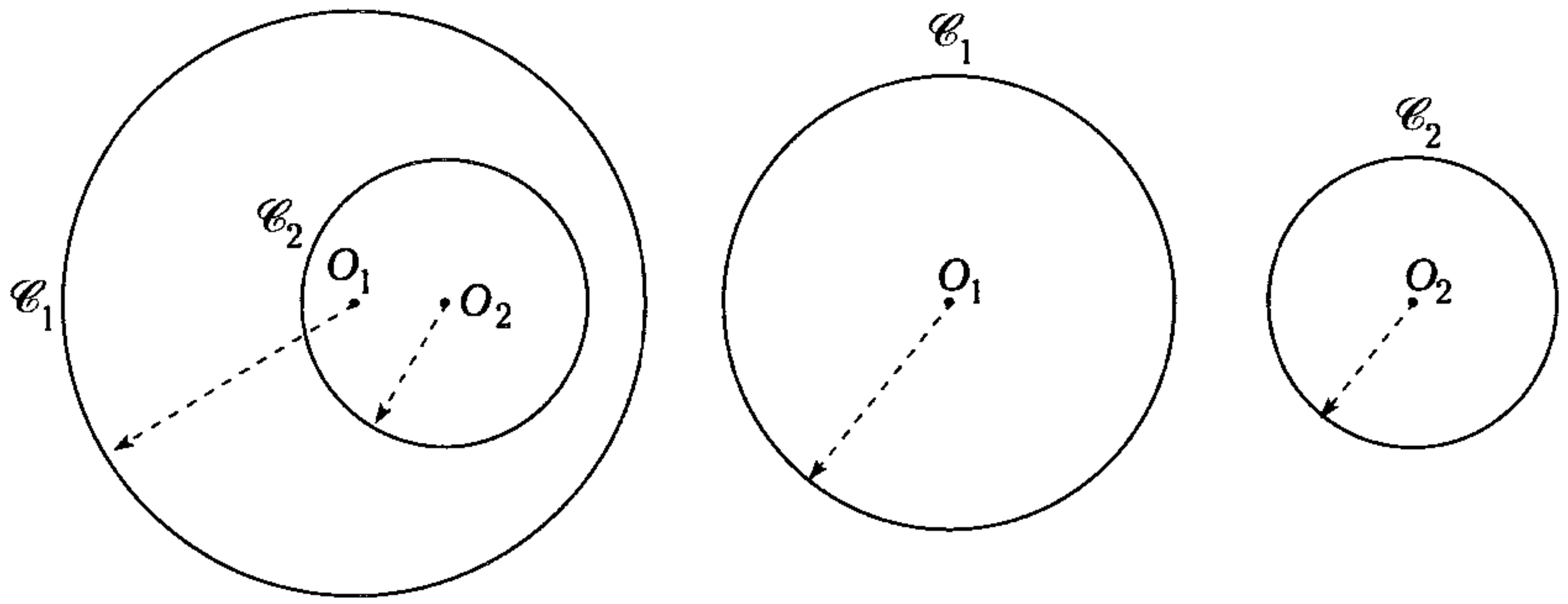


Figura 16.21

Se traza una circunferencia $\mathscr{C}$ que interseca a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en A_1, B_1 y A_2, B_2, respectivamente. Sea P el punto de intersección de las rectas A_1B_1 y A_2B_2.

La recta perpendicular a la $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ trazada por P es eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Interiores (Caso I)

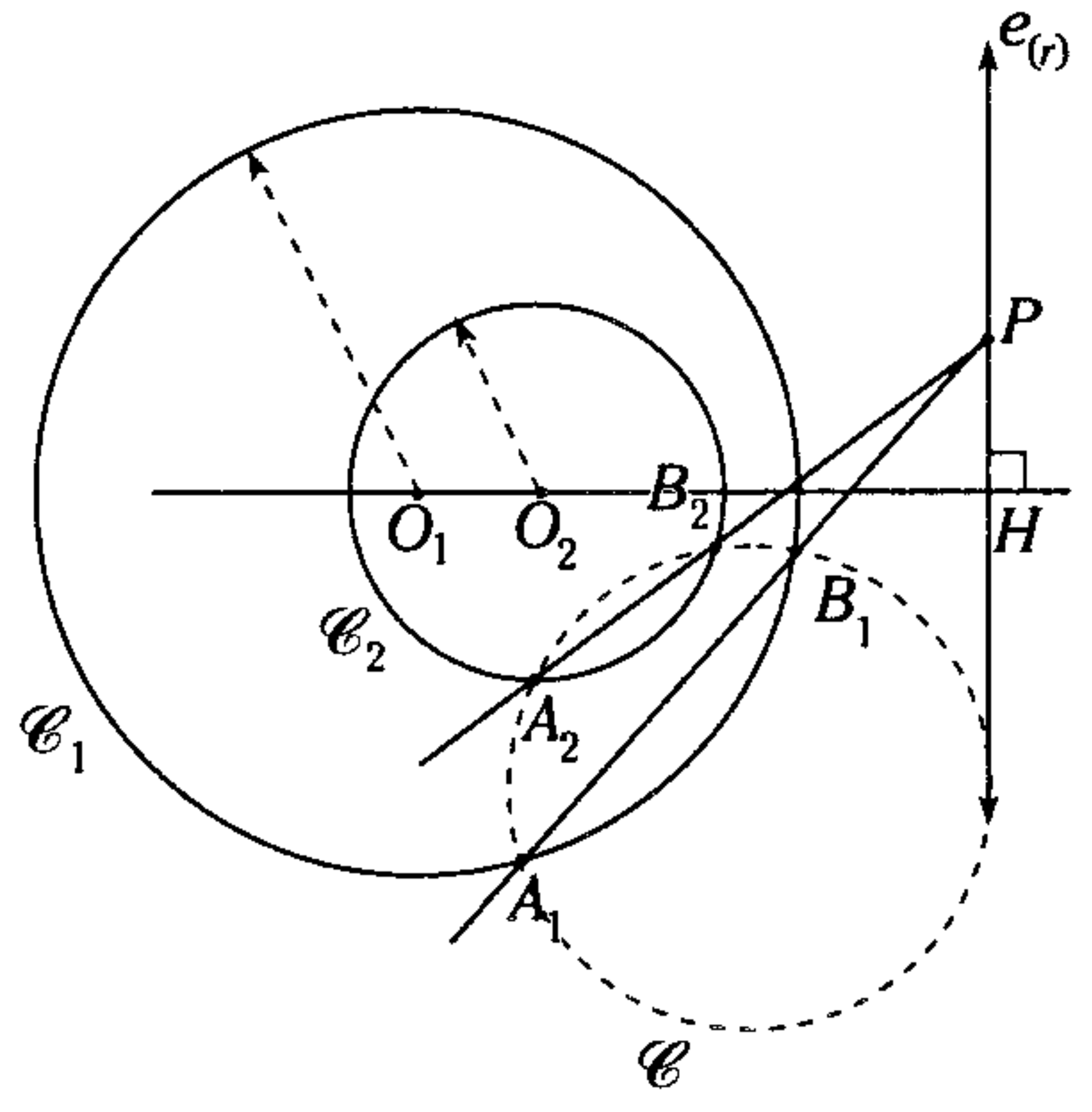


Figura 16.22

En $\mathscr{C}$: $(PA_1).(PB_1) = (PA_2).(PB_2)$

$\rightarrow$ Pot. $P(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $P(\mathscr{C}_2)$

Por lo tanto, P es un punto del eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Como $e_{(r)}$ es perpendicular a la $\overleftrightarrow{O_1O_2}$.

$\rightarrow$ $\overleftrightarrow{PH}$ es eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

$e_{(r)}$: eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Exteriores (Caso II)

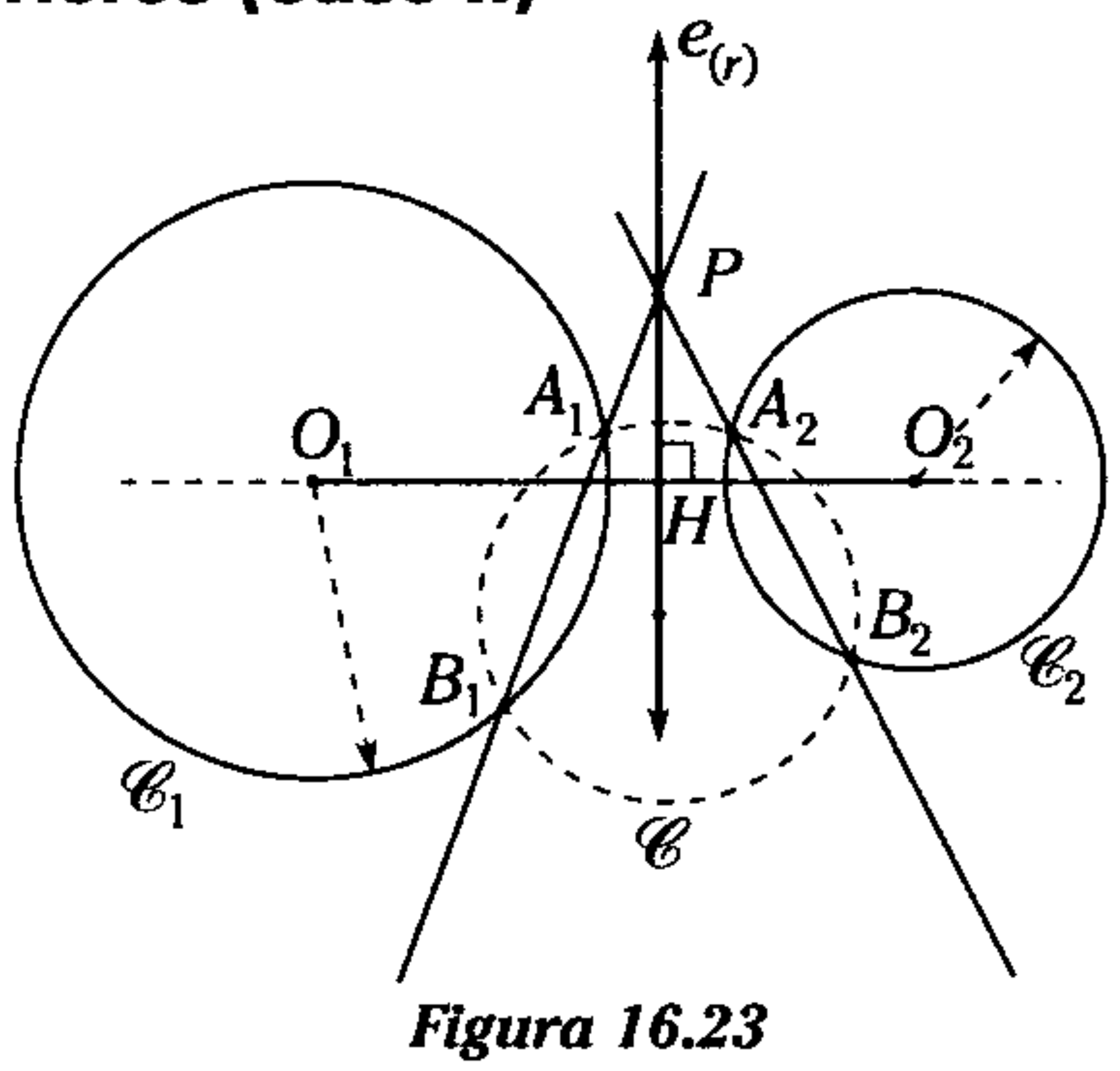


Figura 16.23

En $\mathscr{C}$: $(PA_1).(PB_1) = (PA_2).(PB_2)$

$\rightarrow$ Pot. $P(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $P(\mathscr{C}_2)$

Por lo tanto, P es un punto del eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Como $e_{(r)}$ es perpendicular a la $\overleftrightarrow{O_1O_2}$

$\rightarrow$ $\overleftrightarrow{PH}$ es eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Nota

Cuando las circunferencias son concéntricas (caso particular de interiores), el punto P se encuentra en el infinito, es decir, el eje radical no está determinado para este caso.

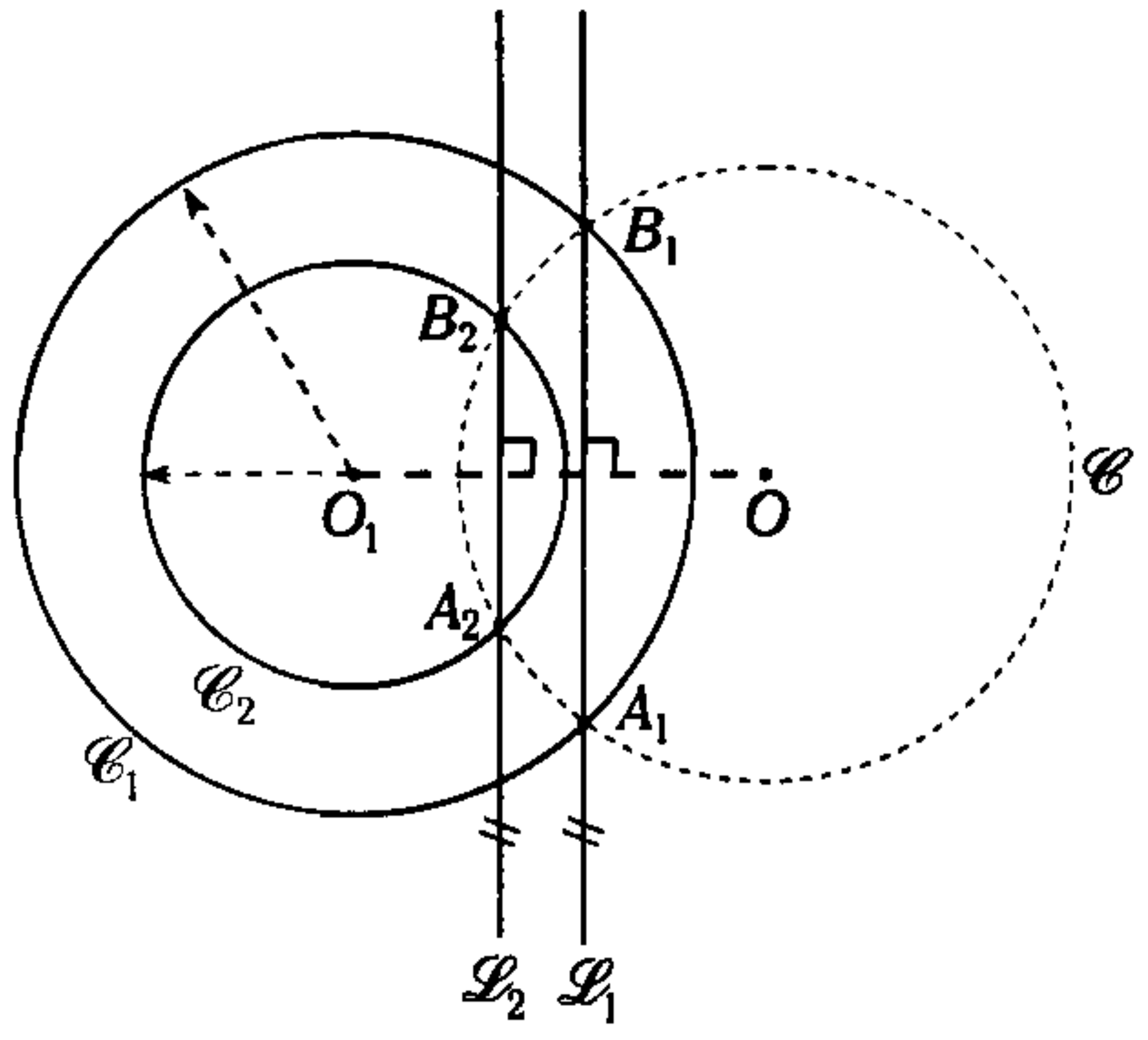


Figura 16.24

Sea O centro de $\mathscr{C}$

$\rightarrow \overline{O_1O} \perp \overline{A_1B_1}$;

$\therefore \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

Entonces P, que es la intersección de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, y se encuentra en el infinito.

Observación

Dos rectas paralelas se intersecan en el infinito. (Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 \rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 = \phi$).

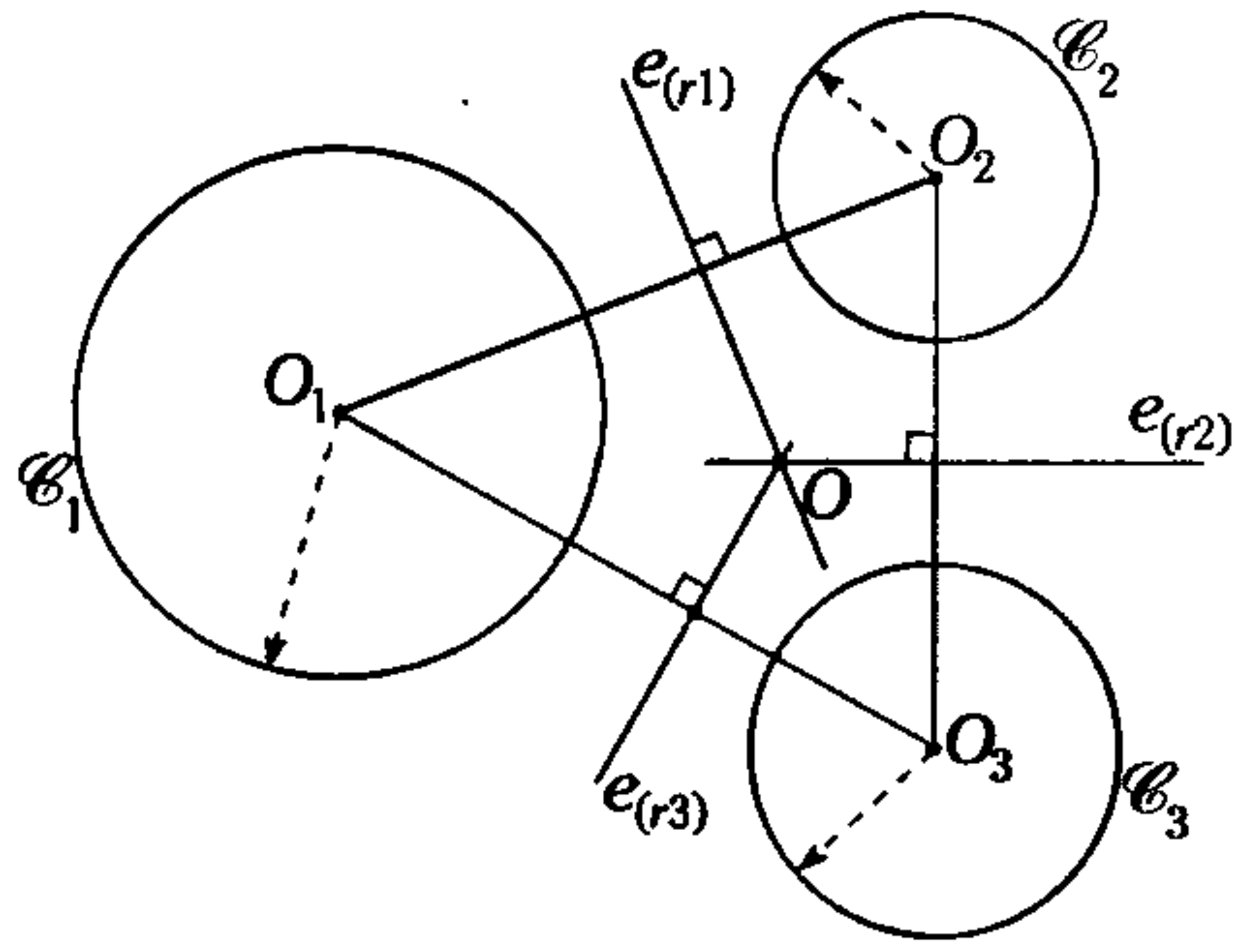
- En Geometría Proyectiva, el punto de intersección de dos rectas paralelas es llamado **punto impropio**, por lo que el eje radical para este caso es una recta impropia.

CENTRO RADICAL

DEFINICIÓN

Es el punto de concurrencia de los ejes radicales de tres circunferencias tomados de dos en dos.

O: centro radical respecto de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$.



(a)

$e_{(r1)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

$e_{(r2)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

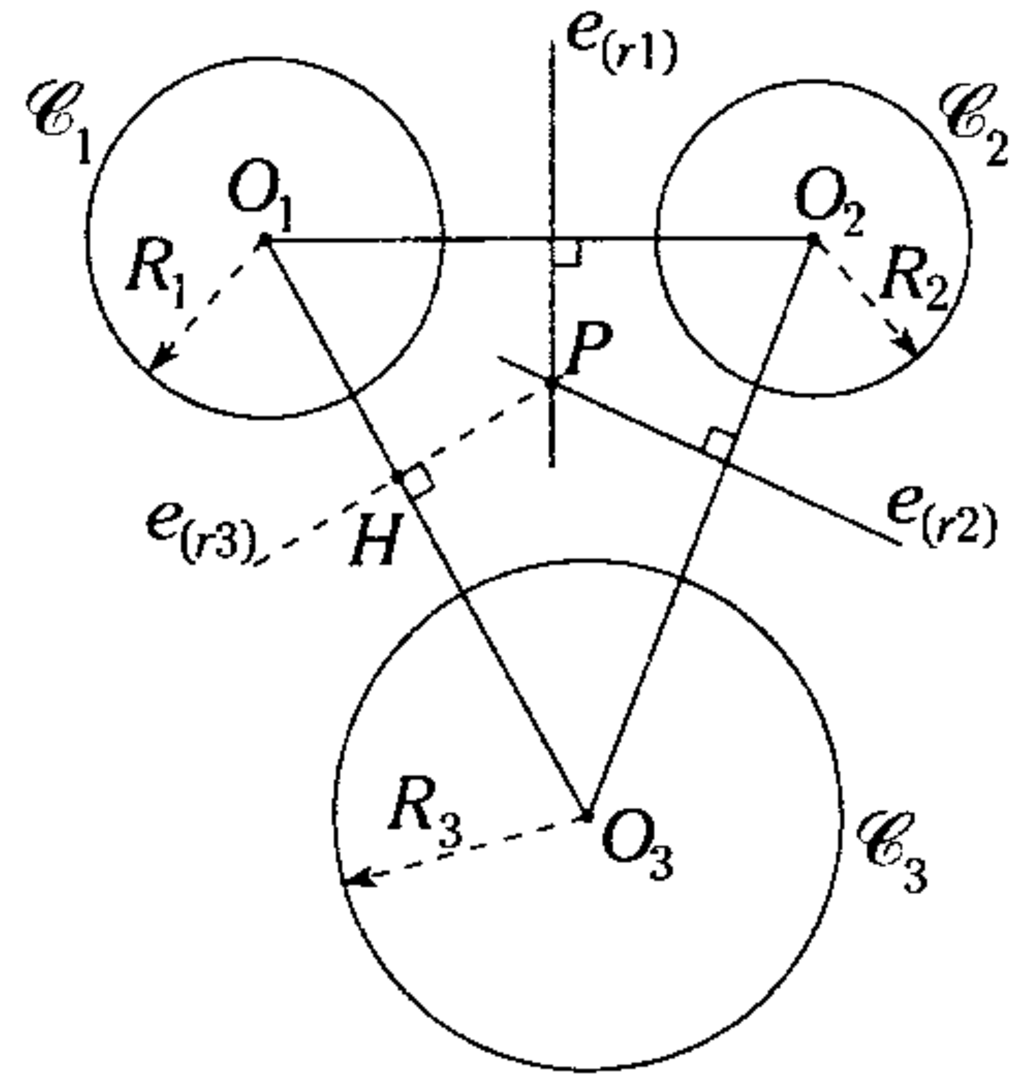
$e_{(r3)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_1$

Teorema

Dadas tres circunferencias coplanares no concéntricas, cuyos centros no son colineales, los ejes radicales de las circunferencias tomadas de dos en dos son concurrentes.

Demostración

Sea P el punto de intersección de los ejes radicales de $\mathscr{C}_1$; $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_2$; $\mathscr{C}_3$.



(b)

Figura 16.25

Entonces

$$\text{Pot}\,P(\mathscr{C}_1)=\text{Pot}.\,P(\mathscr{C}_2)$$

$$(PO_1)^2-R_1^2=(PO_2)^2-R_2^2 \qquad \text{(I)}$$

$$\text{Pot}.\,P(\mathscr{C}_2)=\text{Pot}.\,P(\mathscr{C}_3)$$

$$(PO_2)^2-R_2^2=(PO_3)^2-R_3^2 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) $(PO_1)^2-R_1^2=(PO_3)^2-R_3^3$

Entonces P pertenece al eje radical de $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_1$.

Por lo tanto, $\overleftrightarrow{PH}$ es eje radical de $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_1$, con lo cual queda demostrado que los ejes radicales de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_1$ son concurrentes en P.

$\therefore\ P=O$

O: centro radical respecto de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$.

Casos particulares

I.

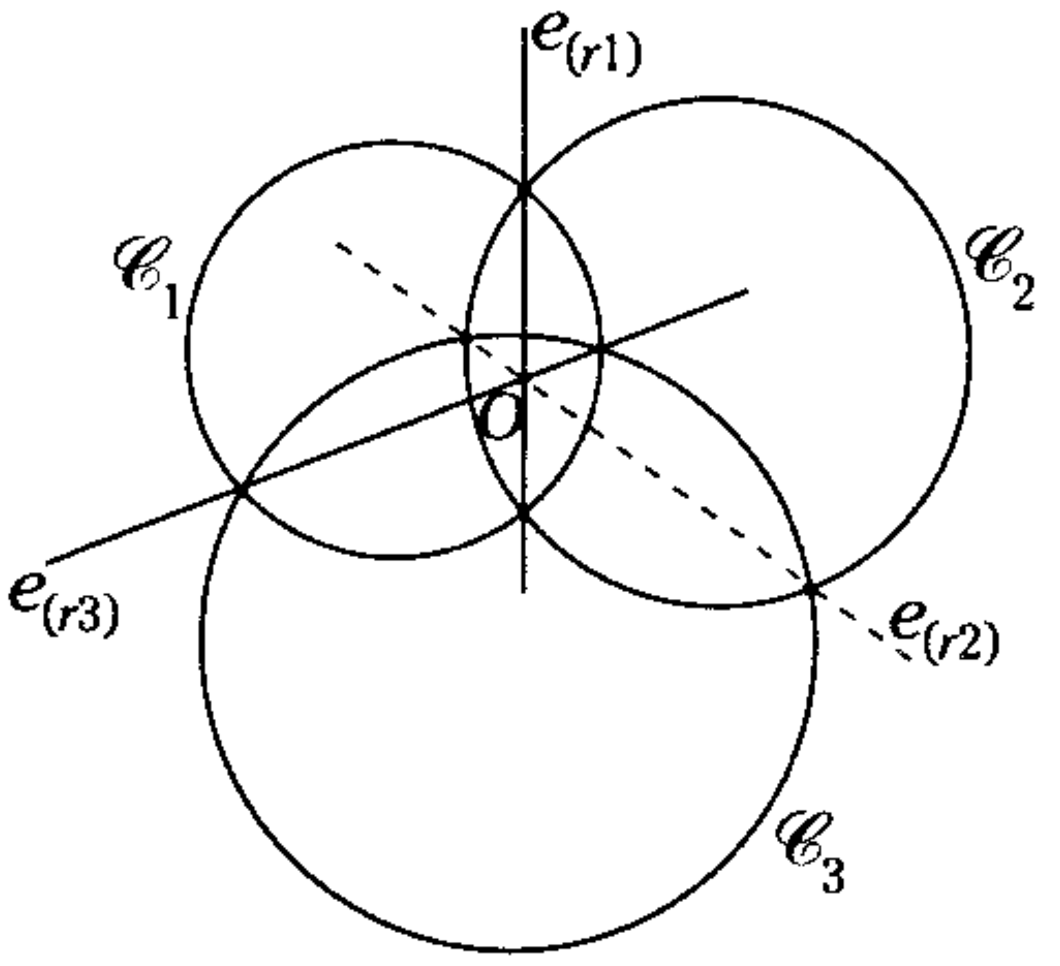


Figura 16.26

$e_{(r1)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$
$e_{(r2)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$
$e_{(r3)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_1$
O : centro radical respecto de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

II.

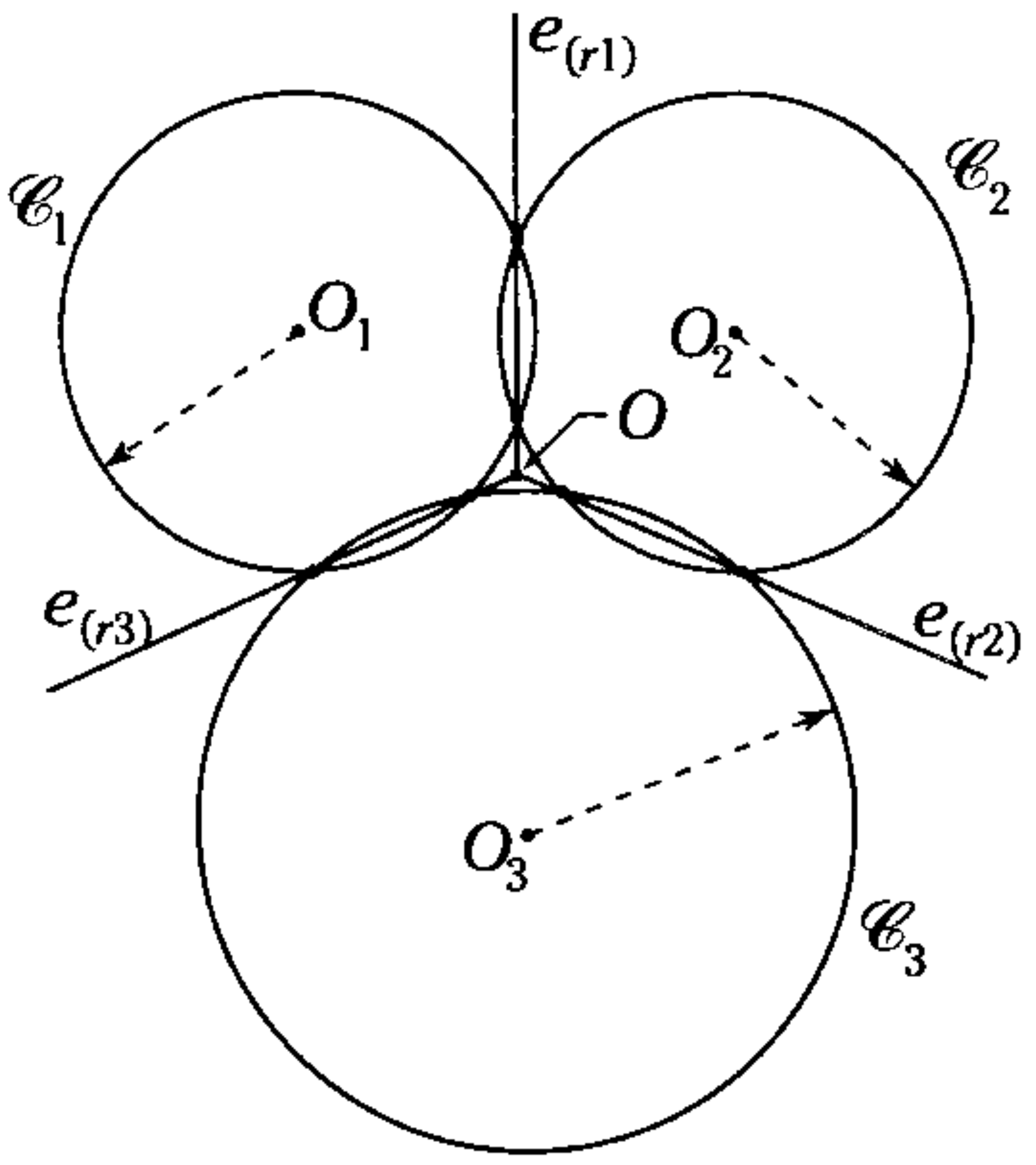
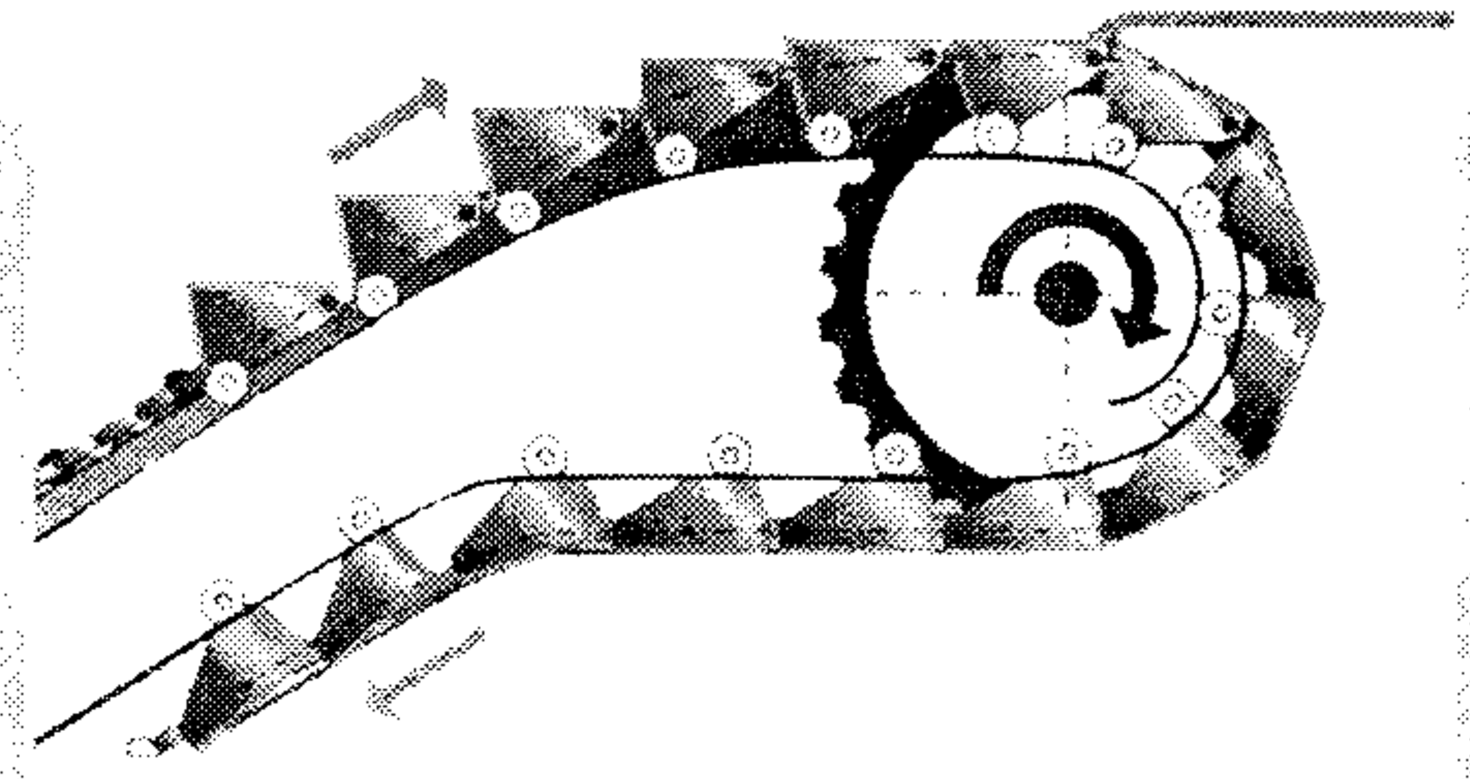


Figura 16.27

O: centro radical, respecto de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

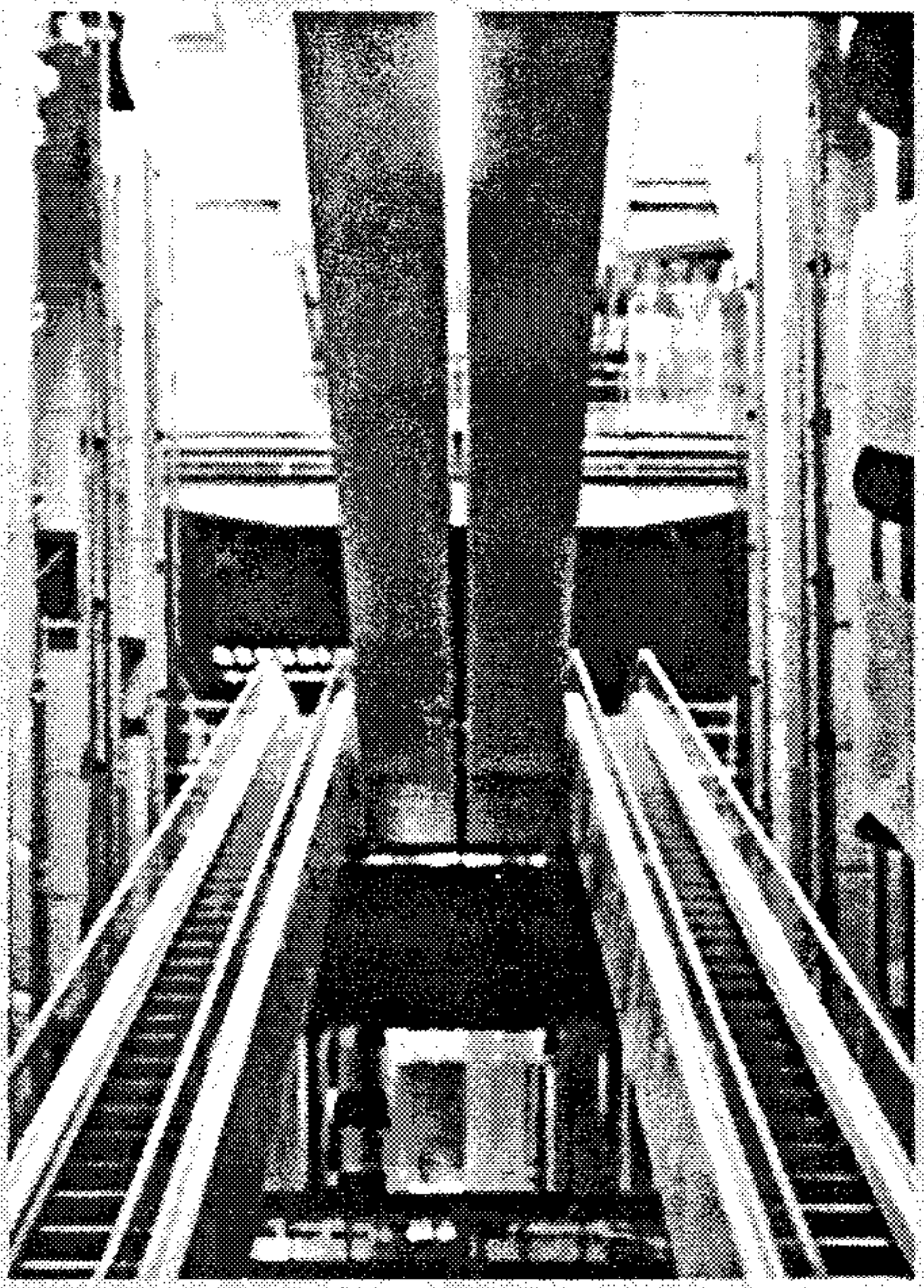
LECTURA

¿CÓMO FUNCIONAN LAS ESCALERAS ELÉCTRICAS?



Corte transversal de una escalera eléctrica.

Los escalones, que son unidades independientes; pero unidas con mucha precisión, están enganchados a una cadena sinfín formada por ruedas de goma. Esta cadena está montada en una rueda motriz dentada que hace girar a la cadena de arrastre; otra rueda dentada, conectada a la rueda motriz mediante un eje, se conecta a un motor eléctrico, que es el que mueve el mecanismo, situado en la parte superior de la escalera. El motor hace que la escalera funcione a una velocidad de 30 metros por minuto. Dado que la escalera tiene una inclinación de 30° y la mitad de los escalones que suben funciona como contrapeso de la que baja, el motor solo mueve el peso de la gente que se transporta.



Las escaleras eléctricas son muy comunes en aeropuertos y paraderos de trenes.

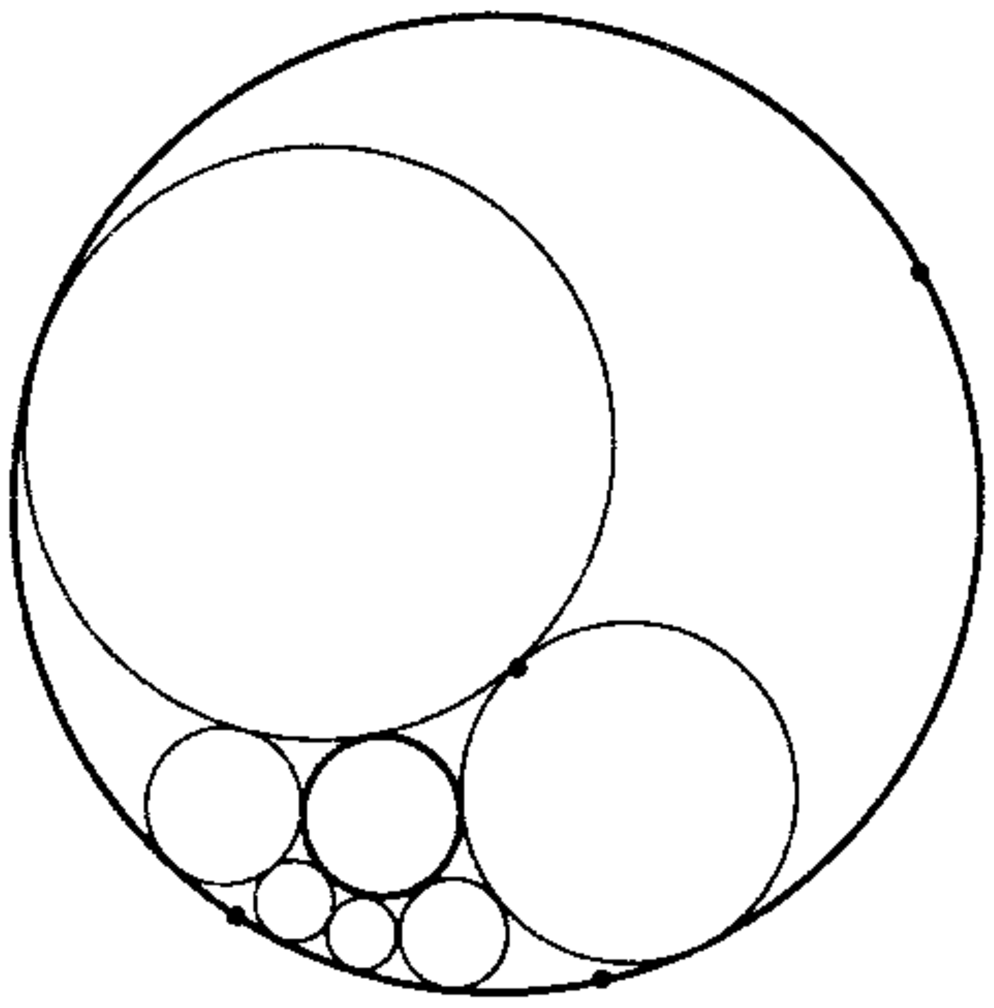
En cada escalón hay un par de ruedas a cada lado, una externa y otra interna, que se deslizan por unos rieles ubicados en la parte inferior de la escalera. Estos rieles están alineados, salvo en la parte superior de la escalera, en donde el riel interno está debajo del externo, de tal forma que cada escalón se desplaza hasta el nivel del próximo. Por consiguiente, los escalones forman y permiten que se entre y se salga de la escalera de una manera sencilla.

BIOGRAFÍA

JACOB STEINER (Utzenstorf 1796 - Berna 1863)

Nació el 18 de marzo de 1796 en Suiza y murió el 01 de abril de 1863 en Suiza. Jacob Steiner no aprendió a leer ni escribir hasta los 14 años y fue solamente a la escuela en la edad de 18 años, contra los deseos de sus padres. Pudo estudiar en las universidades Heidelberg y de Berlín, con el apoyo de una renta muy modesta, del curso particular.

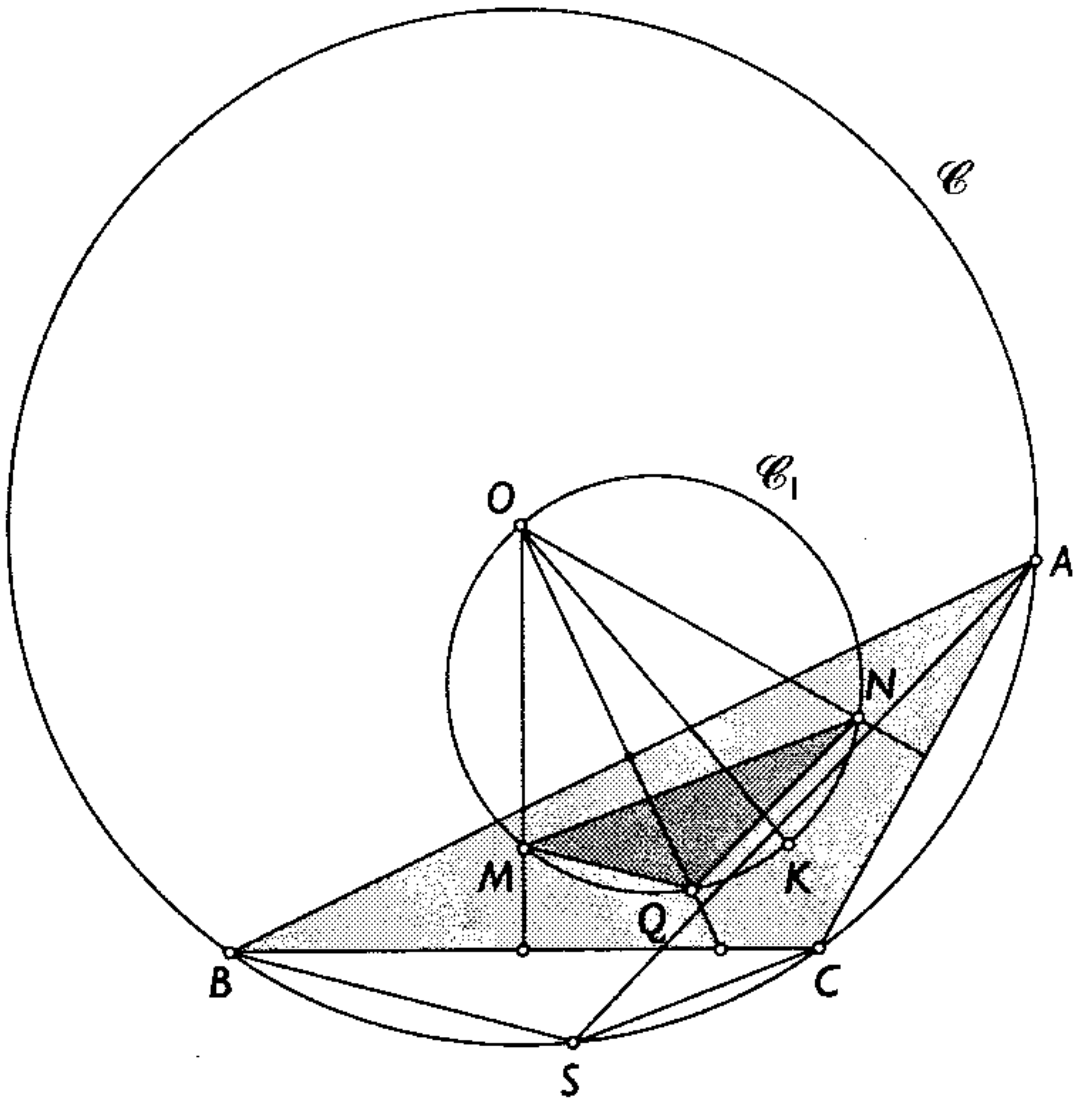
Steiner contribuyó tempranamente en el diario de Crelle, primer diario que se dedicaba totalmente a las matemáticas fundadas en 1826. No obstante, en 1834, le designan a un puesto en la universidad de Berlín, que lo llevó a cabo hasta su muerte.



El porismo de Steiner es sin duda uno de los grandes aportes de este notable matemático.

Steiner fue uno de los contribuidores más grandes a la Geometría Descriptiva; también, descubrió la superficie de Steiner que tiene un infinito doble de secciones cónicas en ella.

Steiner tuvo aversión al Álgebra y al Análisis y creyó que el Cálculo sustituira al pensamiento, mientras que la Geometría estimulaba el pensamiento.



El punto de Steiner

O: circuncentro del $\triangle ABC$.

K: punto simediano del $\triangle ABC$.

$\overline{OK}$: diámetro de la circunferencia de Brocard.

$\mathscr{C}_1$: circunferencia de Brocard.

$\overleftrightarrow{OM} \perp \overline{BC}$; $\overleftrightarrow{ON} \perp \overline{AC}$ y $\overleftrightarrow{OQ} \perp \overline{AB}$

$\triangle MNQ$: triángulo de Brocard.

$\overline{AS} \parallel \overline{NQ}$; $\overline{BS} \parallel \overline{MQ}$; $\overline{CS} \parallel \overline{MN}$

S: punto de Steiner ($S \in \mathscr{C}$)

Son innumerables las contribuciones de Steiner en la Geometría, desde teorías, propiedades y soluciones ingeniosas.

Problemas Resueltos

Problema 1

Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos circunferencias que se intersecan en A y B; luego, se traza la tangente común $\overleftrightarrow{RS}$ más próxima a A ($R \in \mathscr{C}_1$ y $S \in \mathscr{C}_2$). Las rectas SA y RA intersecan a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en N y M, respectivamente.
Si $RN = 2$ y $SM = 5$, calcule E.

$$E = \text{Pot.}\, S(\mathscr{C}_1) + \text{Pot.}\, R(\mathscr{C}_2)$$

A) 36 B) 10 C) 20
D) 40 E) 50

Resolución

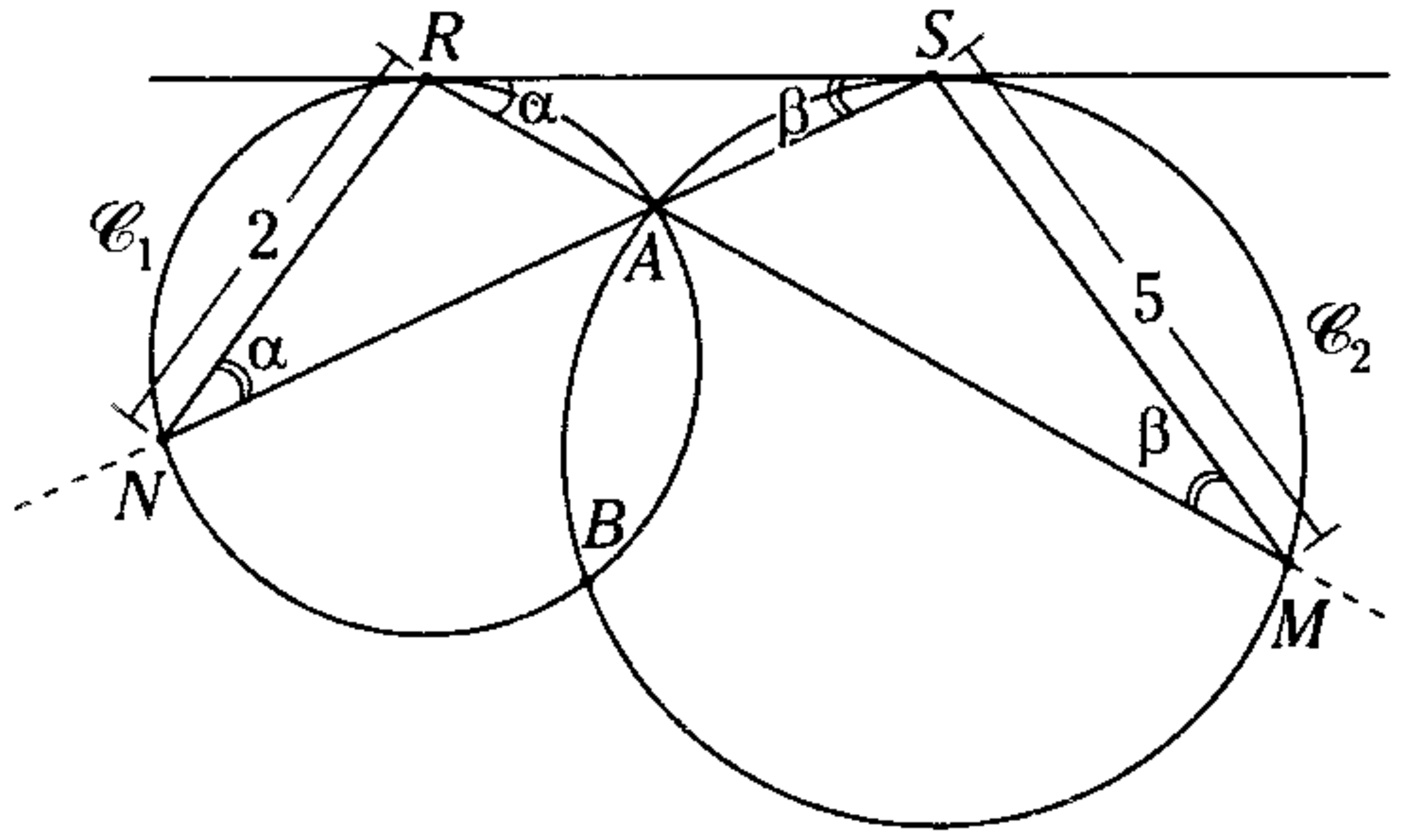


Figura 16.28

Piden

$E = \text{Pot.}\, S(\mathscr{C}_1) + \text{Pot.}\, R(\mathscr{C}_2)$

En $\mathscr{C}_1$

$m\measuredangle ARS = m\measuredangle ANR = \alpha$

En $\mathscr{C}_2$

$m\measuredangle ASR = m\measuredangle AMS = \beta$

$\rightarrow \triangle NRS \sim \triangle RMS$

$\therefore \dfrac{RN}{RS} = \dfrac{RS}{SM}$

$\rightarrow (RS)^2 = (RN).(SM) = (2).(5)$

$\rightarrow (RS)^2 = 10$

Como piden

$E = \text{Pot.}\, S(\mathscr{C}_1) + \text{Pot.}\, R(\mathscr{C}_2) = (SR)^2 + (RS)^2$

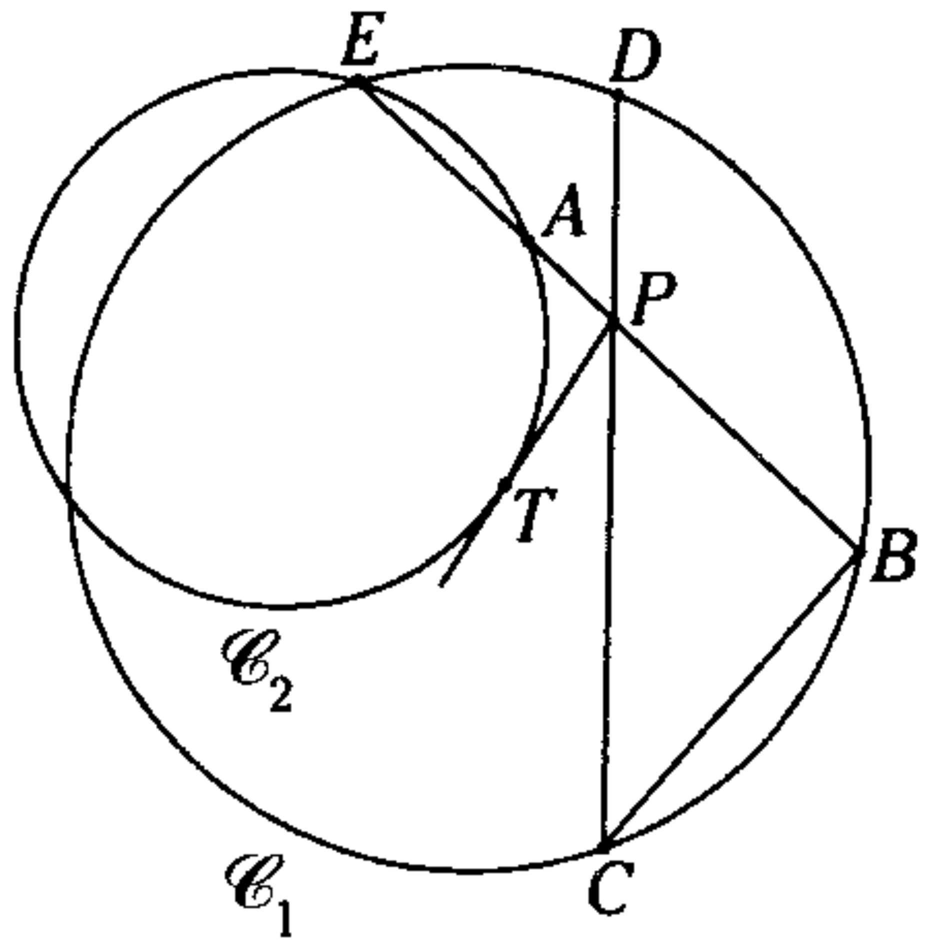
$\rightarrow E = 2(RS)^2$

$\therefore E = 20$

CLAVE C

Problema 2

En la figura, la razón entre las potencias del punto P con respecto a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, respectivamente, es -2. Si $m\widehat{BD} = m\widehat{AT}$; $\overline{PT} // \overline{CB}$; $BC = 6$ y T es punto de tangencia, halle PT.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) –2

Resolución

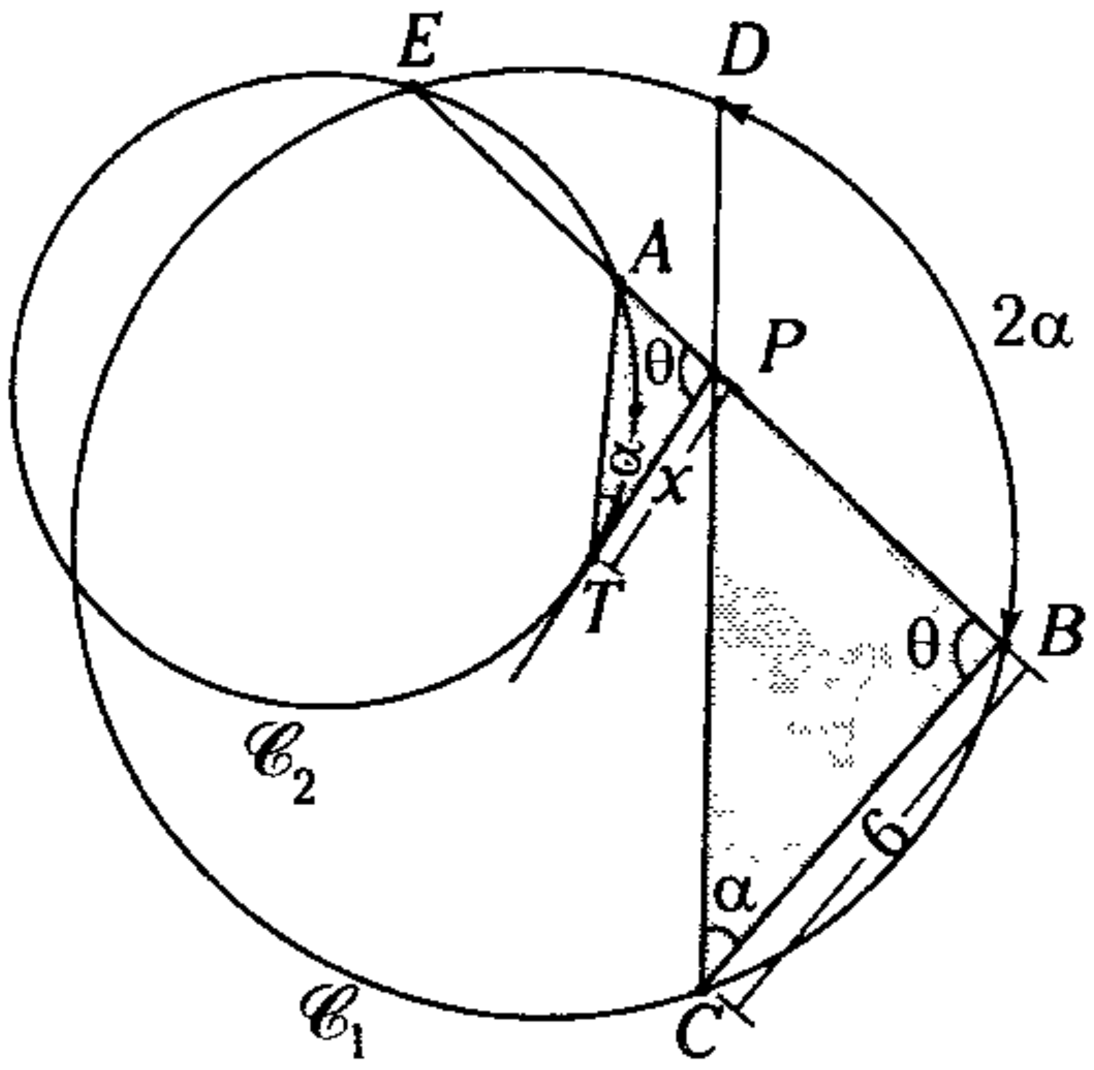


Figura 16.29

Piden $PT = x$

Sea $m\widehat{BD} = m\widehat{AT} = 2\alpha$

$\rightarrow m\measuredangle ATP = \alpha$ y $m\measuredangle DCB = \alpha$

Como $\overline{PT} // \overline{CB}$

$\rightarrow m\measuredangle APT = m\measuredangle PBC = \theta$

De la figura 16.29, se tiene

$\triangle APT \sim \triangle PBC \quad \rightarrow \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{x}{6}$

$\rightarrow (AP).6 = (PB).(x) \qquad \text{(I)}$

Del dato

$$\frac{\text{Pot. }P(\mathscr{C}_1)}{\text{Pot. }P(\mathscr{C}_2)}=-2 \rightarrow \frac{-(PE).(PB)}{(PE).(PA)}=-2$$

$\therefore\ PB=2(PA)$ (II)

De (II) en (I)

$6(AP)=2(PA)(x)$

$\therefore\ x=3$

CLAVE C

Problema 3

Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia circunscrita al triángulo ABC de incentro I y excentro E relativo al lado BC; si $EI=10$, calcule S.

$$S=\text{Pot. }I(\mathscr{C})+\text{Pot. }E(\mathscr{C})$$

A) 10 B) 25 C) 50
D) 100 E) 20

Resolución

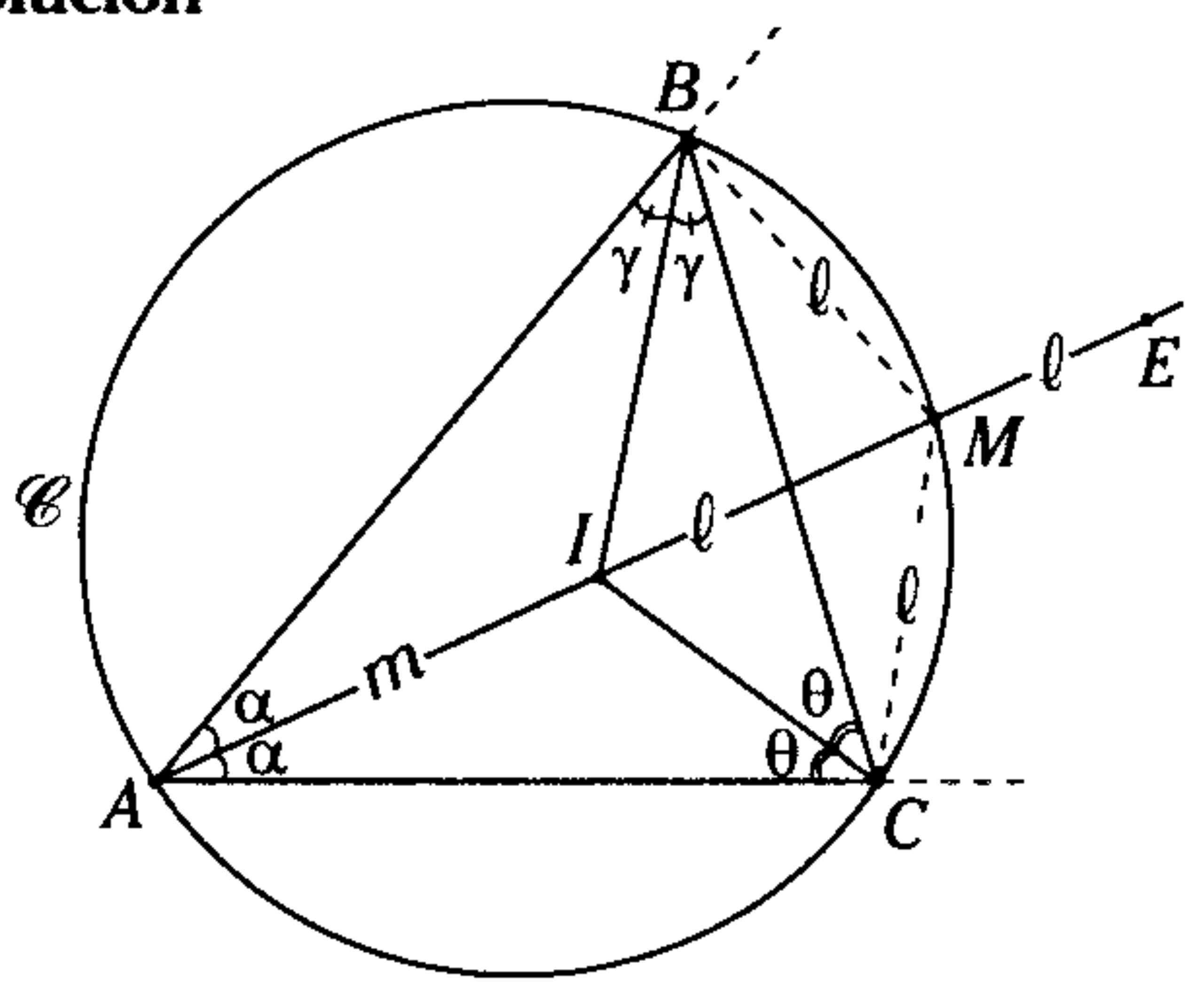


Figura 16.30

Sabemos que $\mathscr{C}$ biseca al $\overline{IE}$, entonces $IM=ME=\ell$.

Sea $AI=m$

$\rightarrow$ Pot. $I(\mathscr{C})=-m.\ell$ (I)

$\rightarrow$ Pot. $E(\mathscr{C})=(m+2\ell).\ell=m.\ell+2\ell^2$ (II)

Reemplazando (I) y (II) y ordenando

Pot. $I(\mathscr{C})$ + Pot. $E(\mathscr{C})=2\ell^2$

Como $2\ell=10$ (dato del problema)

$\therefore$ Pot. $I(\mathscr{C})$ + Pot. $E(\mathscr{C})=50$

CLAVE C

Problema 4

Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos circunferencias exteriores de centros O_1 y O_2, respectivamente. Si $\overline{O_1O_2}$ interseca a $\mathscr{C}_1$ en A y a $\mathscr{C}_2$ en B, la circunferencia $\mathscr{C}_3$ es tangente a $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\overline{AM}$ en M, Q y N, respectivamente, y las rectas MA y QB se intersecan en P; calcule

$$\frac{\text{Pot. }P(\mathscr{C}_1)}{\text{Pot. }P(\mathscr{C}_2)}$$

A) 1 B) 2 C) 0,5
D) 0,25 E) 0,33

Resolución

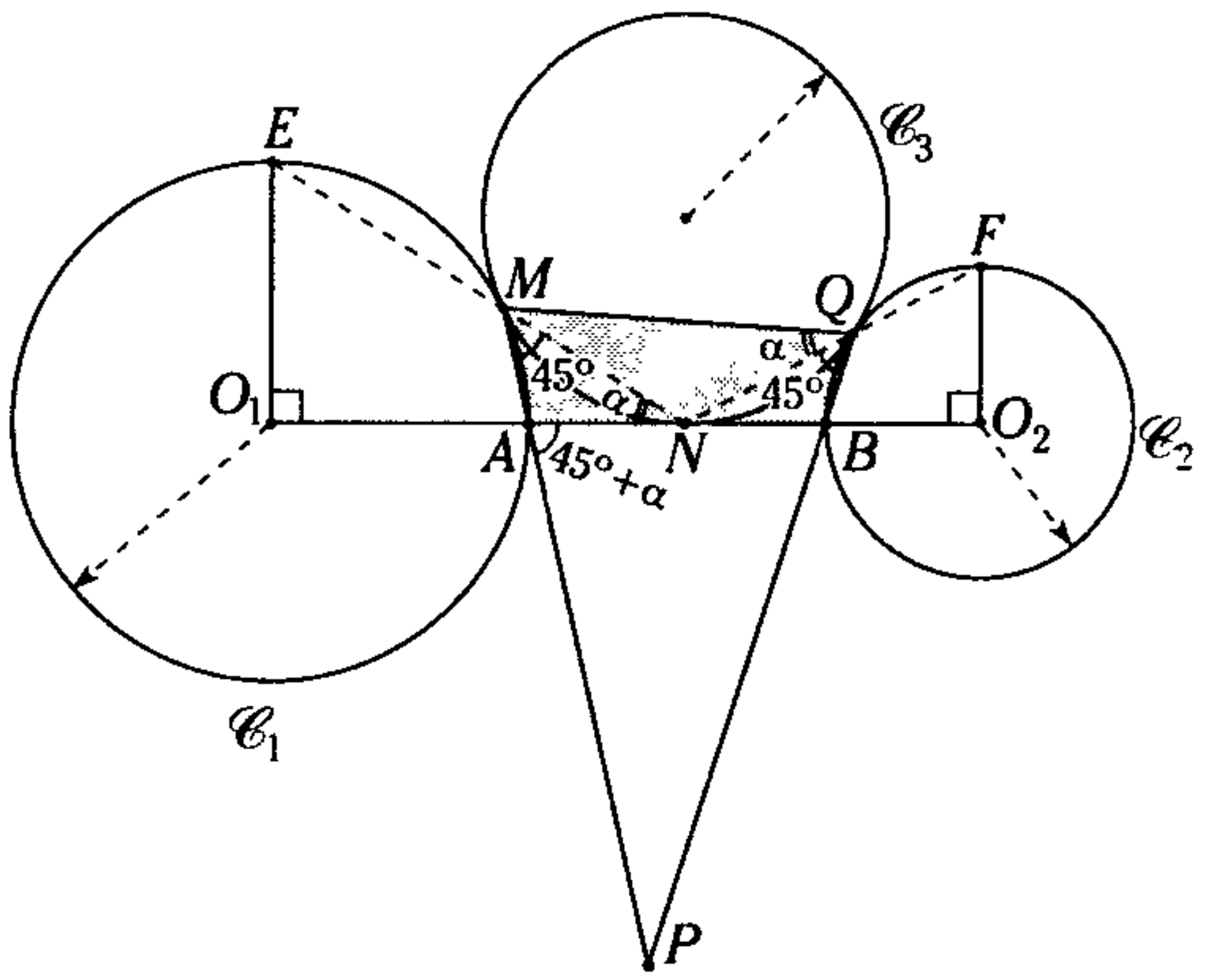


Figura 16.31

Del capítulo de circunferencia, sabemos que m∢$NMA=45°$; análogamente, m∢$NQB=45°$.

En $\mathscr{C}_3$, m∢ANM = m∢$NQM=\alpha$

Por lo tanto el cuadrilátero $AMQB$: inscriptible

$\rightarrow$ $(PM).(PA)=(PQ).(PB)$

(relación métrica en la circunferencia)

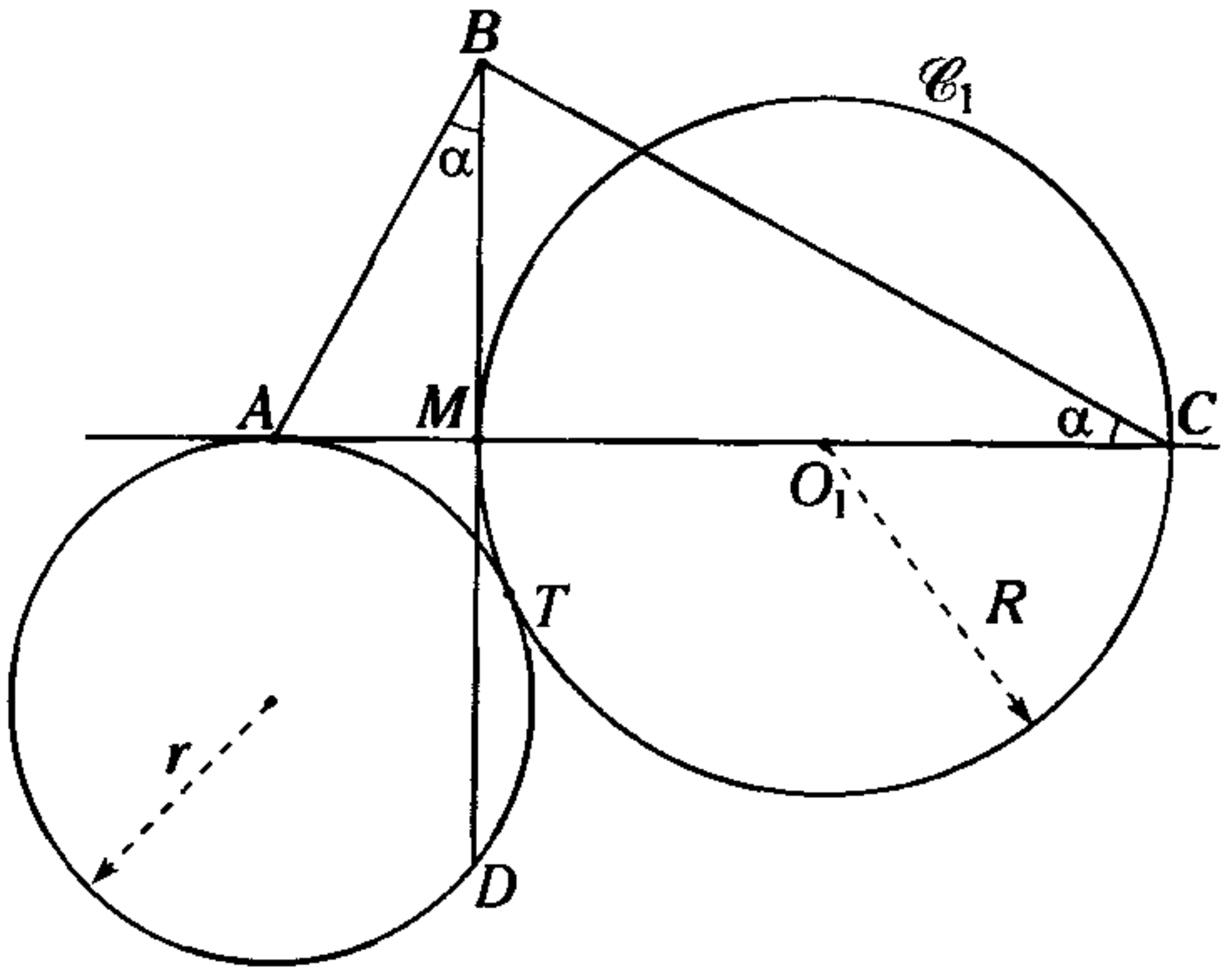
$\therefore$ Pot. $P(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $P(\mathscr{C}_2)$

$$\rightarrow \frac{\text{Pot. }P(\mathscr{C}_1)}{\text{Pot. }P(\mathscr{C}_2)}=1$$

CLAVE A

Problema 5

En la figura mostrada, Pot. $B(\mathscr{C}_1) = 64\ u^2$ $\frac{r}{R}=\frac{5}{8}$. Si A, M y T son puntos de tangencia, indique Pot. $D(\mathscr{C}_1)$.



A) 32 u² B) 64 u² C) 50 u²
D) 72 u² E) 128 u²

Resolución

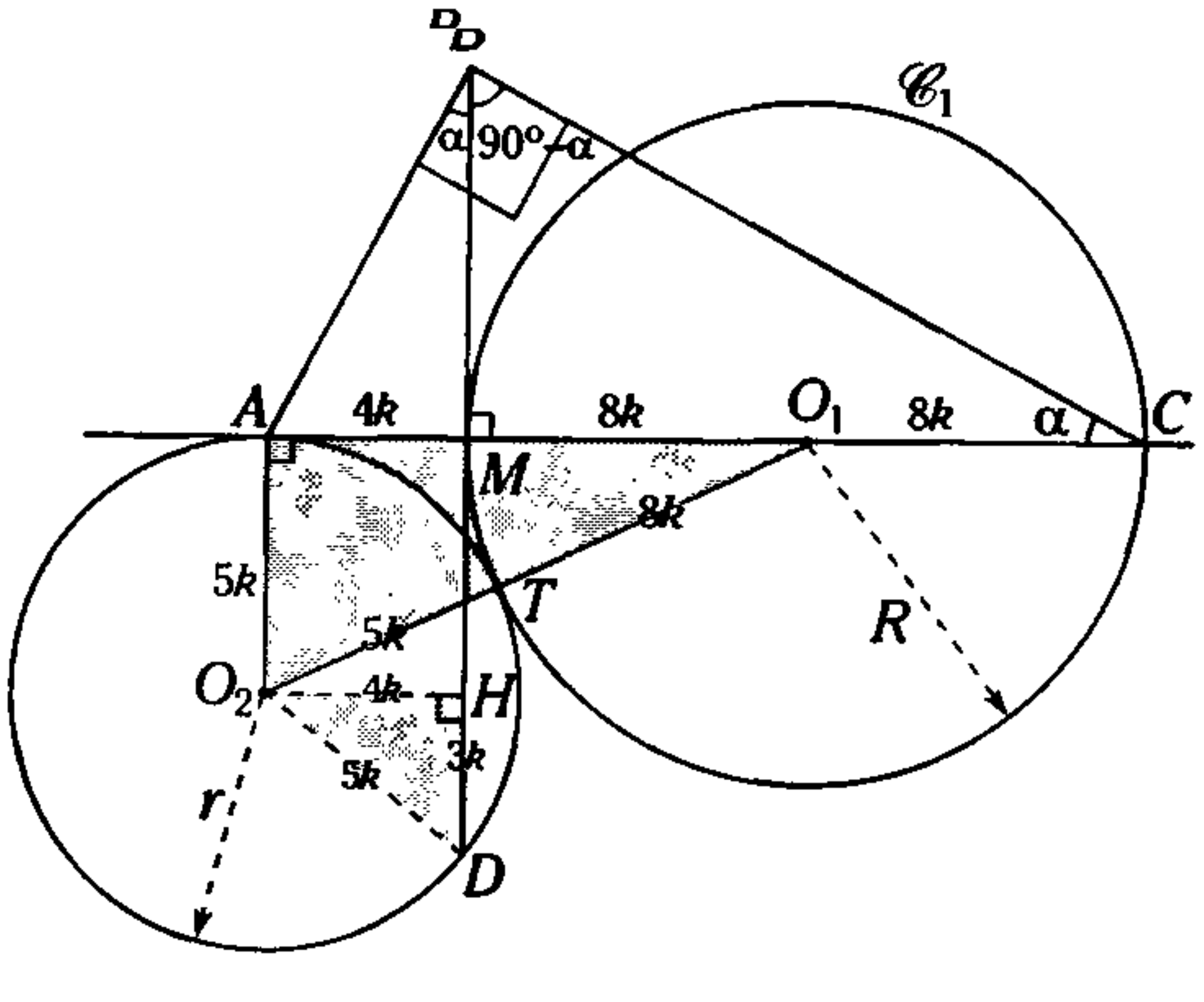


Figura 16.32

Dato Pot. $B(\mathscr{C}_1) = 64 \rightarrow (BM)^2 = 64$

$\frac{r}{R}=\frac{5}{8} \rightarrow r=5k$ y $R=8k$

$O_2T=5k$ y $O_1T=8k$

$\therefore\ O_1O_2=13k$

$\triangle O_1AO_2: O_1A=12k \rightarrow AM=4k$

$O_2H=AM=4k \rightarrow \triangle O_2HD$: Not. (37° y 53°)

$\therefore\ HD=3k$

Como $HM=O_2A=5k$

$\rightarrow DM=3k+5k=8k$

$\therefore$ Pot. $D(\mathscr{C}_1)=(DM)^2=(8k)^2=64k^2$ (I)

Pero en el $\triangle ABC$

$\underbrace{(BM)^2}_{64}=(AM)(MC)$ (II)

$64 = (4k)(16k)=64k^2$

De (I) y (II)

Pot. $D(\mathscr{C}_1) = 64\ u^2$

CLAVE B

Problema 6

Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos circunferencias concéntricas de radios r y R, respectivamente ($R > r$). Calcule el radio del lugar geométrico de los puntos S, donde se cumple que

Pot. $S(\mathscr{C}_1) = -$ Pot. $S(\mathscr{C}_2)$

A) $\sqrt{\frac{R^2+r^2}{2}}$ B) $\sqrt{R.r}$ C) $\frac{Rr}{R+r}$

D) $\sqrt{R^2+r^2}$ E) $2\sqrt{R.r}$

Resolución

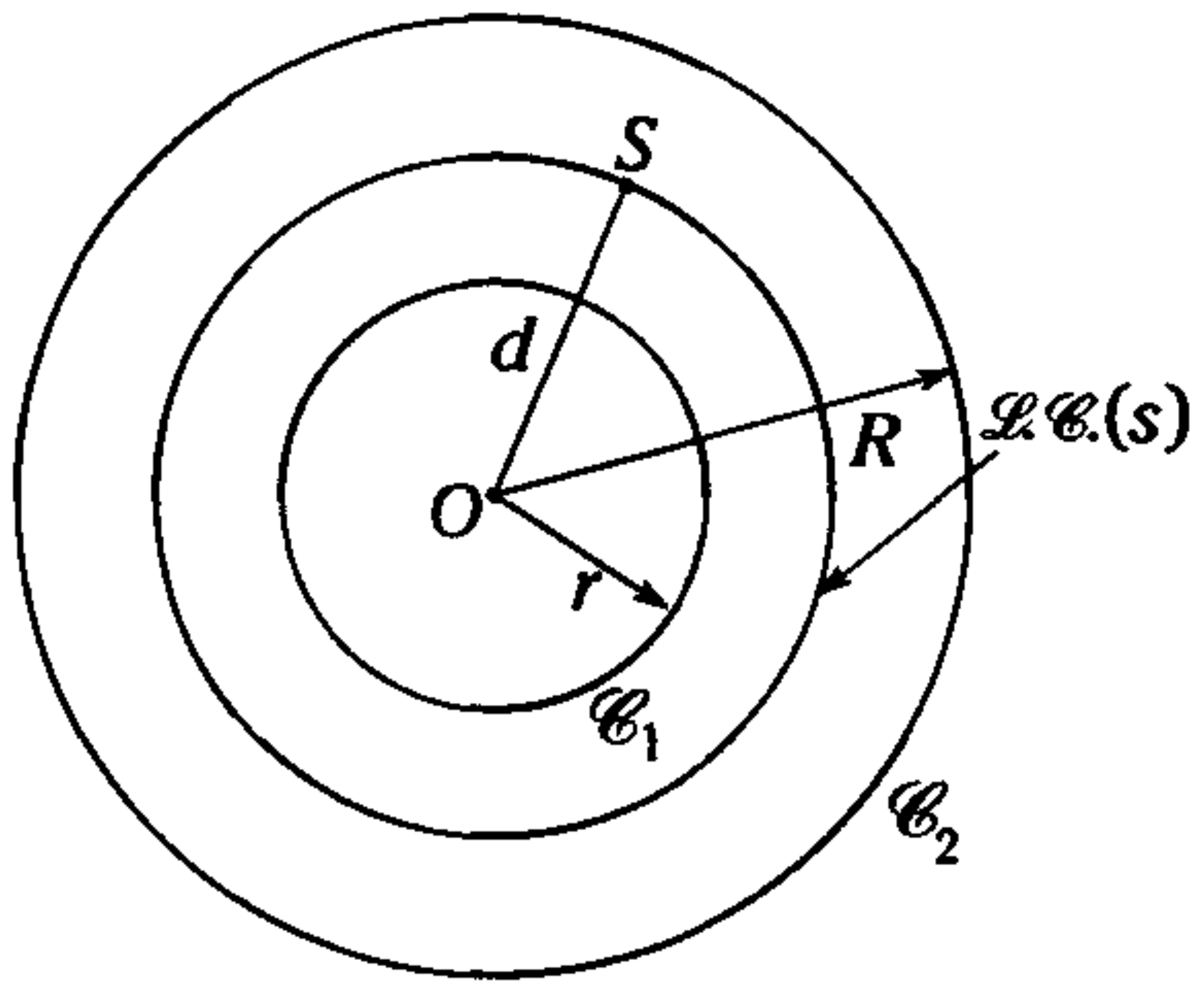


Figura 16.33

Sea S un punto entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, en donde se cumple la condición del problema.

$$\text{Pot. } S(\mathscr{C}_1) = -\text{Pot. } S(\mathscr{C}_2)$$

Entonces $(d^2 - r^2) = -(d^2 - R^2)$

$$\therefore\ 2d^2 = R^2 + r^2$$

$$\rightarrow d = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$$

Nota

No existe un punto S en la región interna de $\mathscr{C}_1$ o en la región externa de $\mathscr{C}_2$, en donde se cumpla la condición del problema, ya que $R \neq r$.

CLAVE A

Problema 7

Sean I el incentro de un triángulo y O su circuncentro; además, r y R son el inradio y circunradio respectivamente, de dicho triángulo. Halle IO (teorema de Euler).

A) $\sqrt{R(R-r)}$ B) $\sqrt{r(2R-r)}$ C) $\sqrt{2R(R-r)}$

D) $\sqrt{R(2R-r)}$ E) $\sqrt{R(R-2r)}$

Resolución

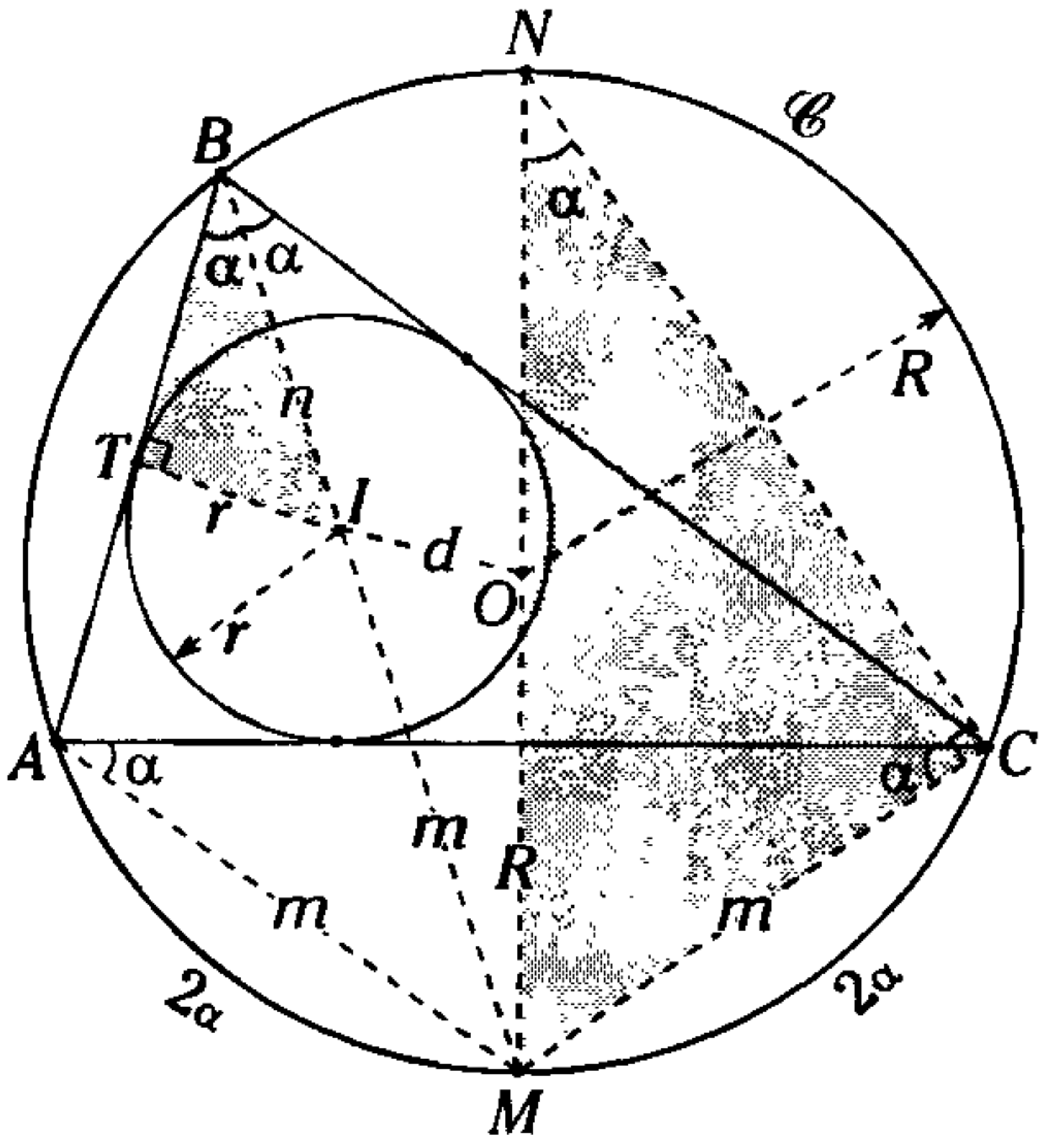


Figura 16.34

Sabemos por propiedad de circunferencia

$$MA = MI = MC = m$$

$\overline{MON}$: diámetro

$$\rightarrow m\measuredangle MCN = 90° \text{ y } m\measuredangle CNM = \frac{m\overset{\frown}{MC}}{2} = \alpha$$

$\overline{IT} \perp \overline{BA}$ $(IT = r)$

$$\text{Pot. } I(\mathscr{C}) = (IO)^2 - R^2 = d^2 - R^2 = -m.n$$

$\triangle ITB \sim \triangle MCN$

$$\frac{r}{m} = \frac{n}{2R} \quad \rightarrow \quad m.n = 2Rr$$

$$\rightarrow\ d^2 - R^2 = -2Rr$$

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

$$\therefore\ d = \sqrt{R(R-2r)}$$

CLAVE E

Problema 8

En un triángulo ABC, de circuncentro O y circunradio R, se ubica el excentro E relativo al lado BC. Calcule EO, si el exradio relativo a BC es r_a.

A) $\sqrt{R(R+2r_a)}$

B) $\sqrt{R(2r_a-R)}$

C) $\sqrt{r_a(R+r_a)}$

D) $\sqrt{2R.r_a}$

E) $2\sqrt{R(R+r_a)}$

Resolución

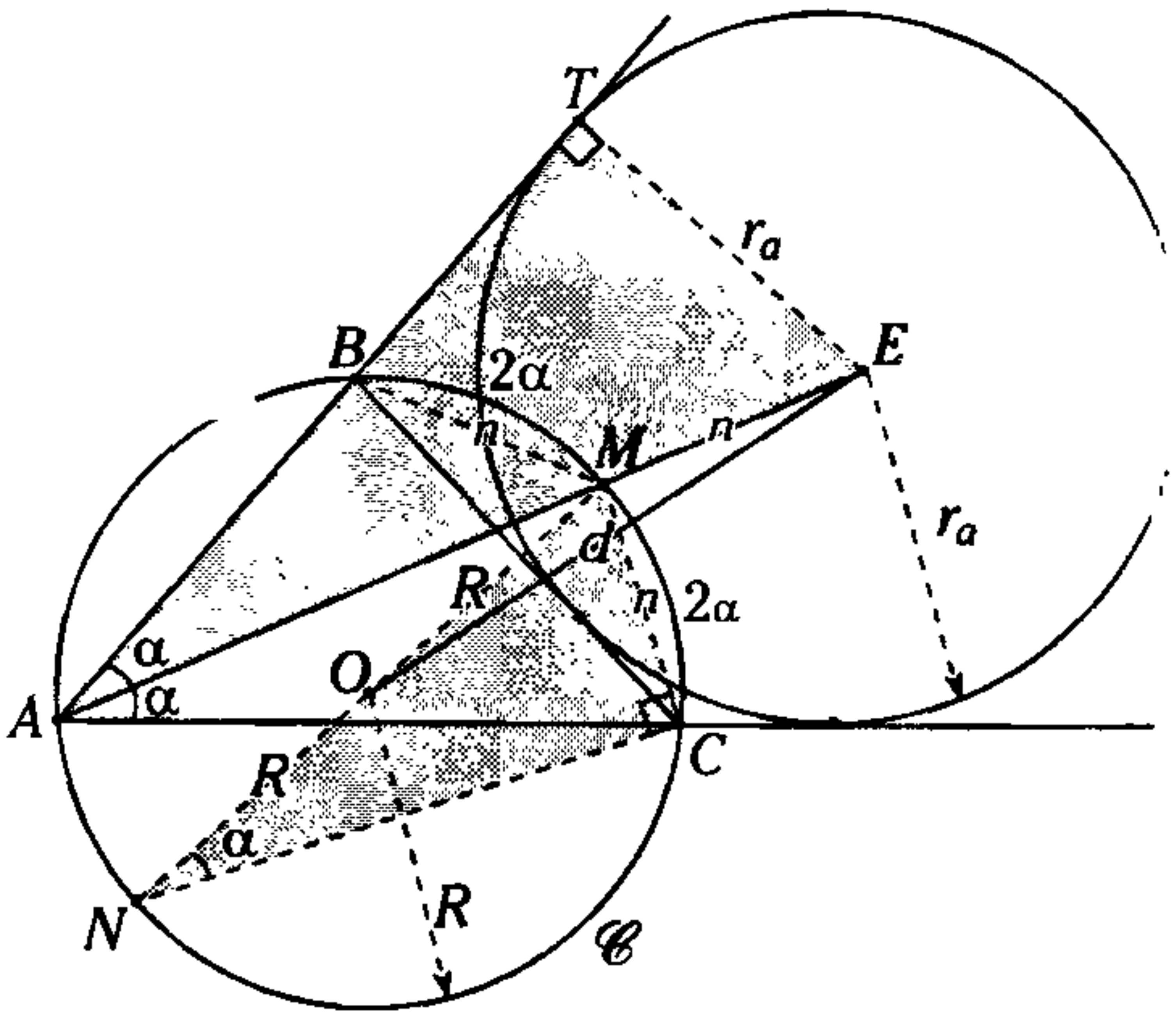


Figura 16.35

Pot. $E(\mathscr{C}) = (EA)(EM) = (EO)^2 - R^2$

$\rightarrow\ d^2 - R^2 = (EA).n$ (I)

$\triangle MCN \sim \triangle ETA$

$\frac{n}{r_a} = \frac{2R}{EA} \rightarrow (EA).n = 2R.r_a$

Reemplazando en (I)

$d^2 - R^2 = 2Rr_a$

$\therefore\ d = \sqrt{R(R+2r_a)}$

CLAVE A

Problema 9

Calcule el inradio de un cuadrilátero bicéntrico de circunradio R, siendo la distancia entre los centros de la circunferencia inscrita y circunscrita es d; además, $\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = 0{,}25$

A) 1 B) 2 C) 0,5
D) $\sqrt{2}$ E) 4

Resolución

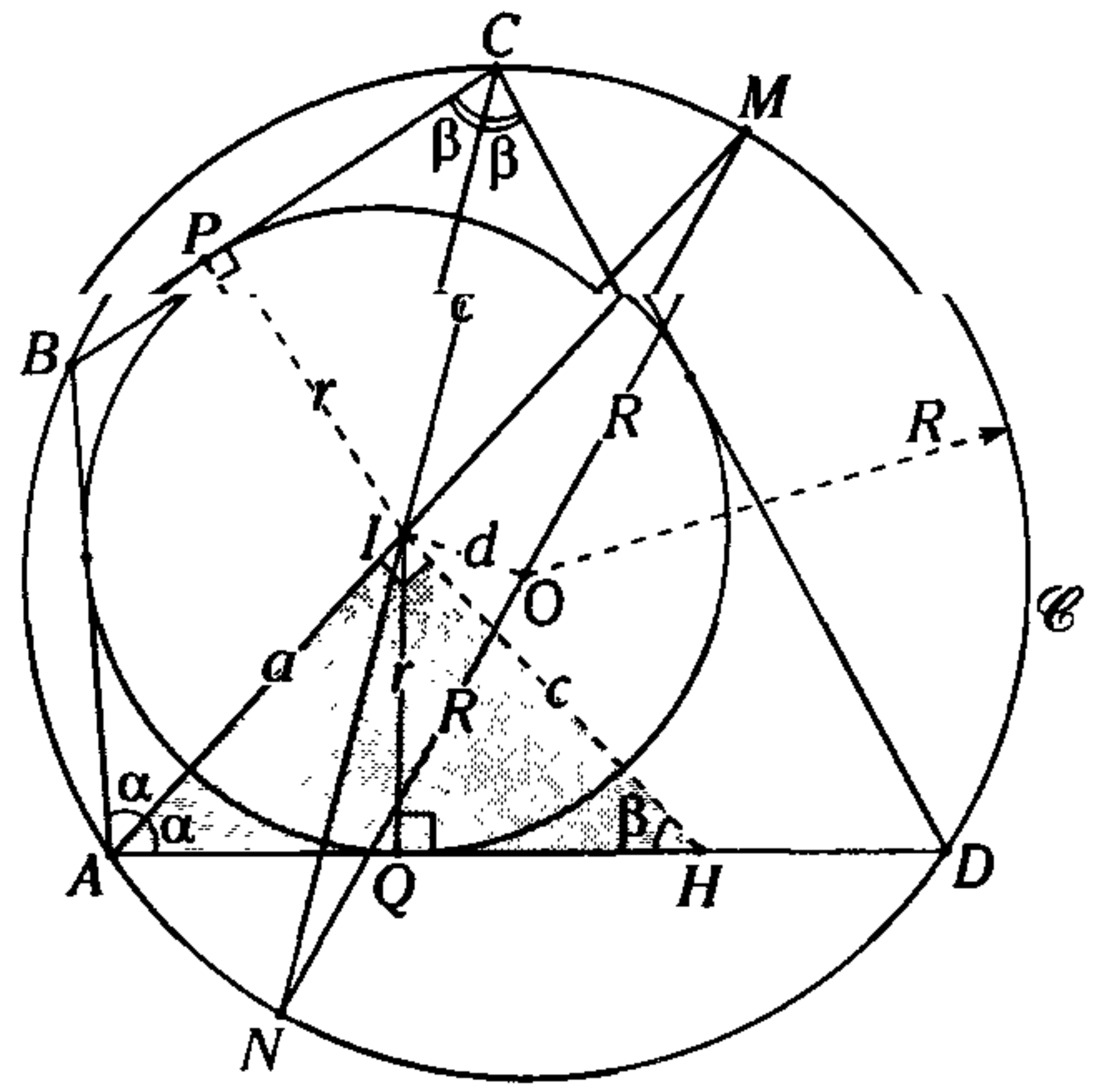


Figura 16.36

En el cuadrilátero inscrito $ABCD$:

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$\rightarrow \alpha + \beta = 90°$

Construimos el $\triangle IQH \cong$ al $\triangle IPC$.

$\rightarrow$ m$\measuredangle AIH = 90°$

$\therefore\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{r^2}$ (I)

En el $\triangle MIN$: (teorema de la mediana)

$(MI)^2 + (NI)^2 = 2d^2 + 2R^2$ (II)

Pot. $I(\mathscr{C}) = -(R^2 - d^2) = -(MI).(a) = -(NI).(c)$

$\therefore\ (MI)^2 = \left(\frac{R^2-d^2}{a^2}\right)^2$ y $(NI)^2 = \left(\frac{R^2-d^2}{c^2}\right)^2$

Reemplazando en (II)

$$(R^2-d^2)^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 2(R^2 + d^2) \quad \text{(III)}$$

De (I) en (III)

$$(R^2-d^2)^2\left(\frac{1}{r^2}\right) = 2(R^2+d^2)$$

$$\therefore \frac{1}{r^2} = \frac{2R^2+2d^2}{(R+d)^2(R-d)^2} = \frac{(R-d)^2+(R+d)^2}{(R+d)^2(R-d)^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}$$

$\therefore\ r = 2$

CLAVE B

Problema 10

Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos circunferencias tangentes exteriores, en cuyo eje radical se ubica el punto L y se trazan las secantes LCB y LDA a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, respectivamente. Si en LC se ubica el punto N, tal que $\overline{DN} // \overline{AC}$, $BL = a$ y $NL = b$; indique DL.

A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{a^2+b^2}$
D) $\sqrt{ab+b^2}$ E) $\sqrt{ab+a^2}$

Resolución

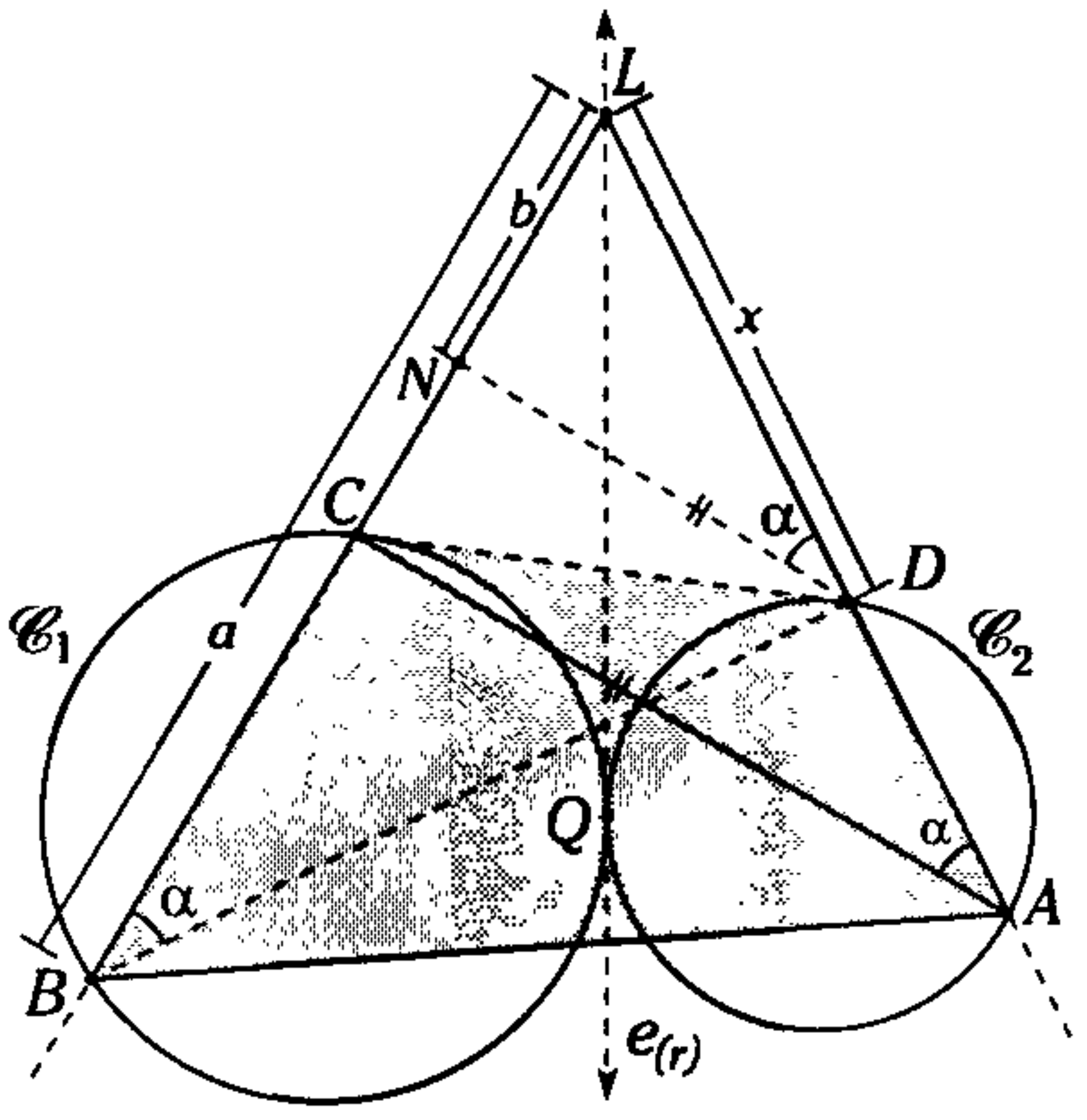


Figura 16.37

Piden $DL = x$

Dato $L \in e_{(r)}$ ($\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$)

$\rightarrow$ Pot. $L(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $L(\mathscr{C}_2)$

$\square BCDA$: es inscriptible

$\rightarrow$ m$\sphericalangle CBD$ = m$\sphericalangle CAD = \alpha$

Como $\overline{ND} \,//\, \overline{CA}$ $\rightarrow$ m$\sphericalangle LDN$ = m$\sphericalangle LAC$ = c

$\triangle BDL$: $\triangle DLN \sim \triangle BDL$ (A.A.A.)

Por propiedad

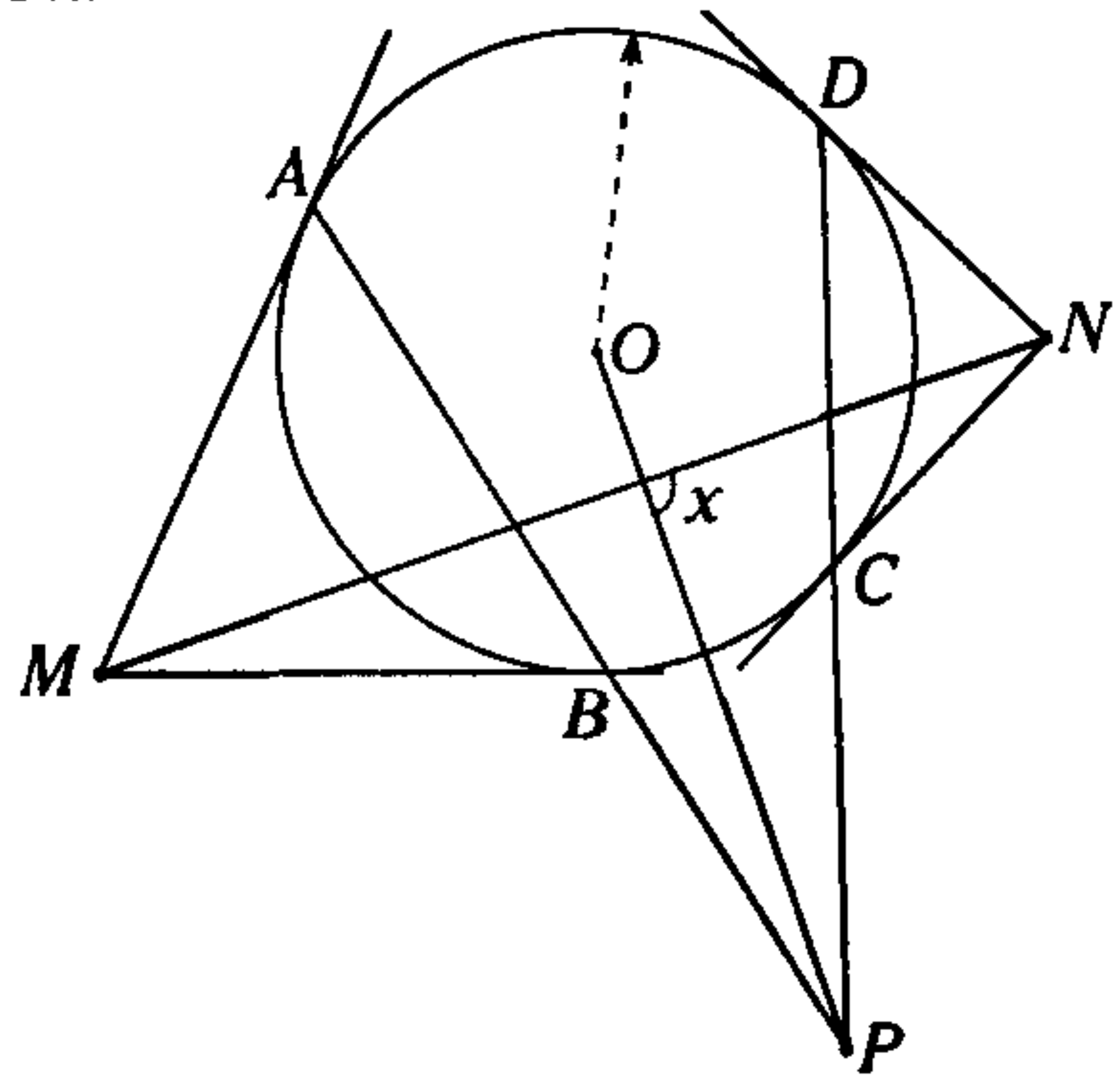
$x^2 = a \cdot b$

$\therefore\ x = \sqrt{a \cdot b}$

CLAVE B

Problema 11

En la figura, *A*, *B*, *C* y *D* son puntos de tangencia. Señale *x*.



A) 75° B) 90° C) 100°

D) 72° E) 105°

Resolución

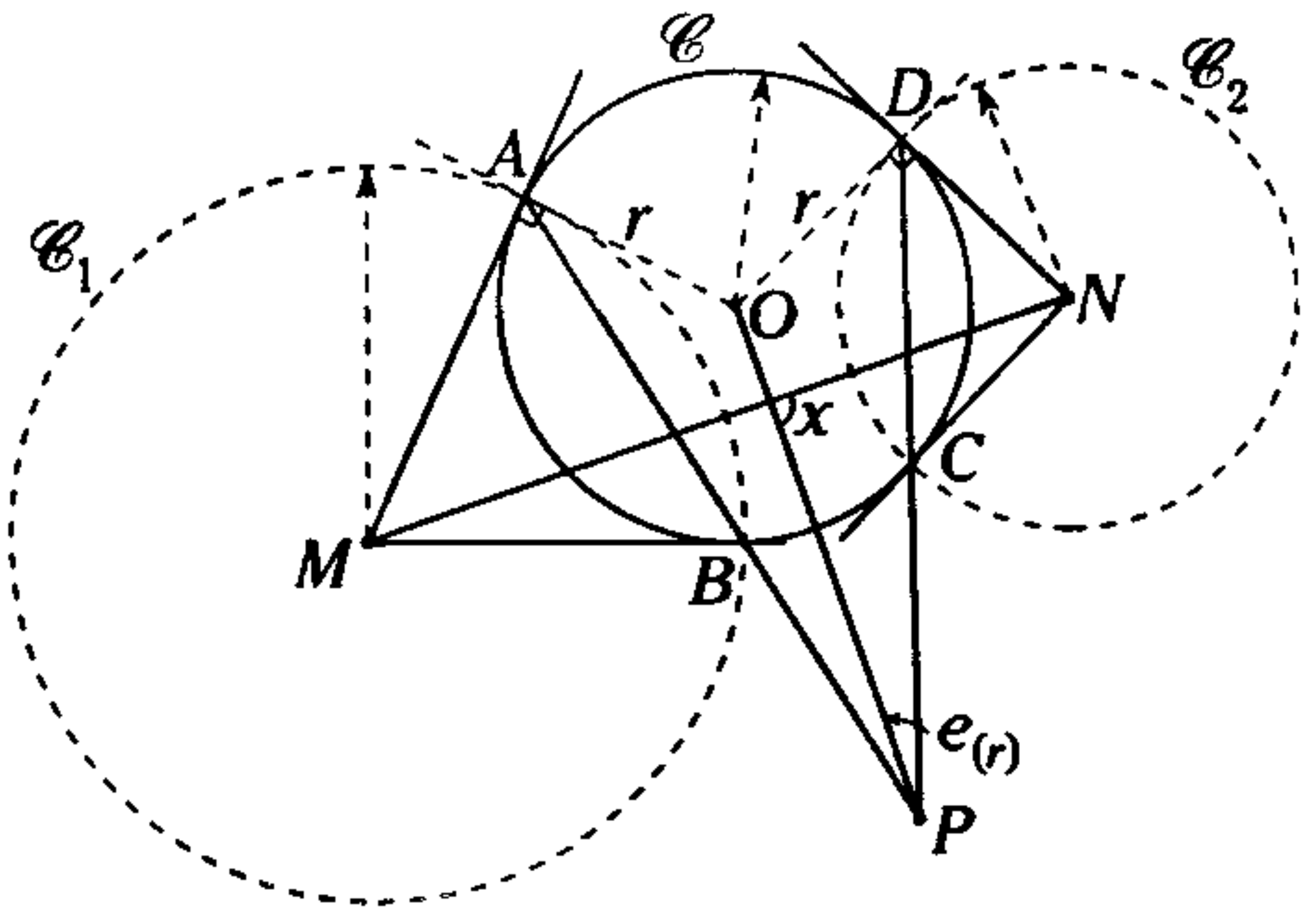


Figura 16.38

Con centro en *M* y radio *MA*, trazamos la circunferencia $\mathscr{C}_1$ que pasa por *B*.

Con centro en *N* y radio *ND*, trazamos la circunferencia $\mathscr{C}_2$ que pasa por *C*.

En $\mathscr{C}$: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Quiere decir que

Pot. $P(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $P(\mathscr{C}_2)$

Por lo cual $P \in$ al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

De la figura 16.38 se tiene

$\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{MA}$, $\overline{OD} \perp \overleftrightarrow{DN}$ y como $OA = OD = r$

$\rightarrow$ Pot. $O(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $O(\mathscr{C}_2)$

Por lo cual $O \in$ al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Por lo tanto $\overleftrightarrow{OP}$ es el eje radical ($e_{(r)}$) de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Como se sabe

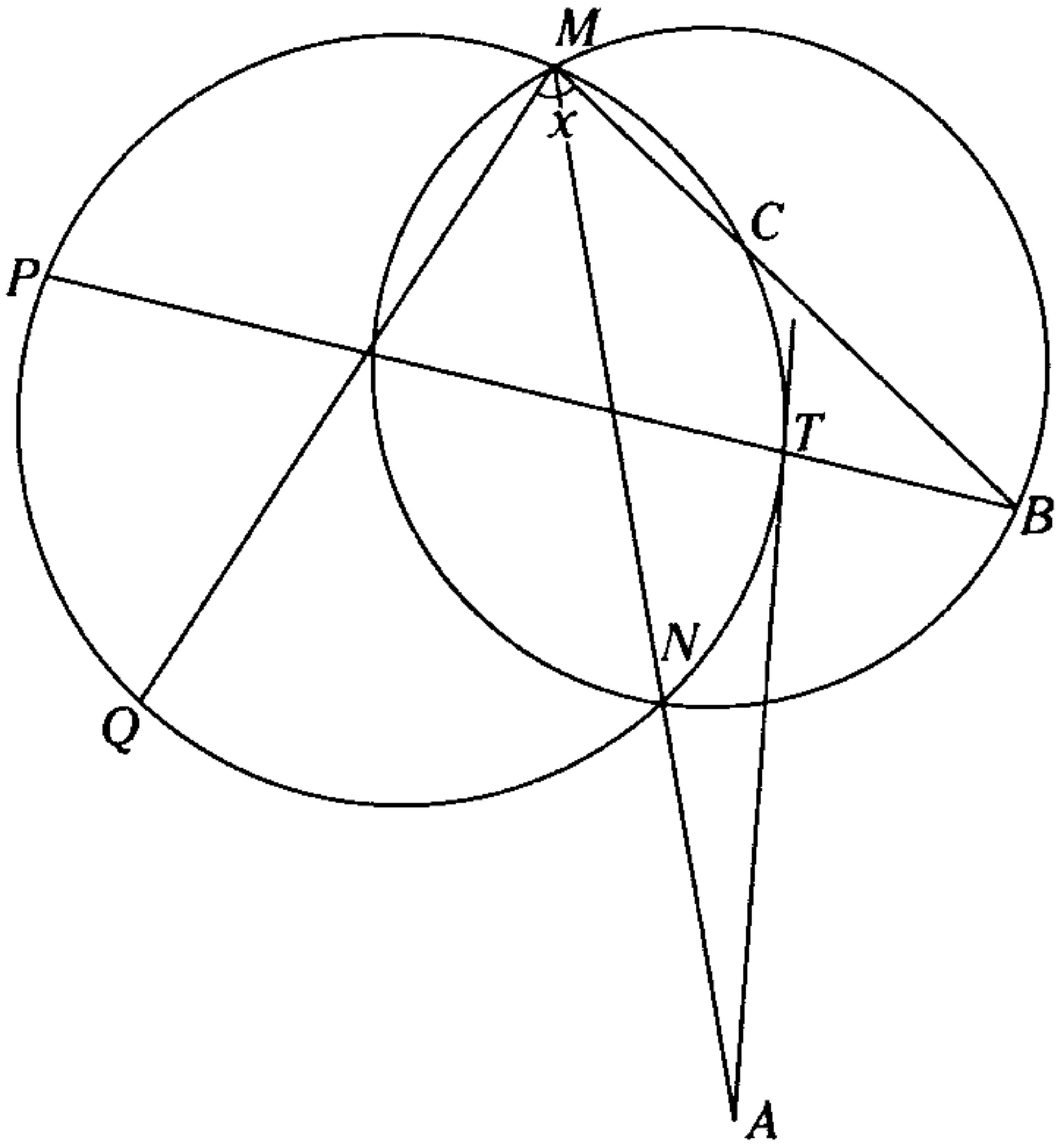
$\overleftrightarrow{MN} \perp e_{(r)}$

$\therefore\ x = 90°$

CLAVE B

Problema 12

En la figura, T es punto de tangencia. Si $BT = 14$ y $TA = 25$, $m\overset{\frown}{PMC} = m\overset{\frown}{TNQ}$, señale x.



A) 45°　　B) 60°　　C) 53°
D) 74°　　E) 90°

Resolución

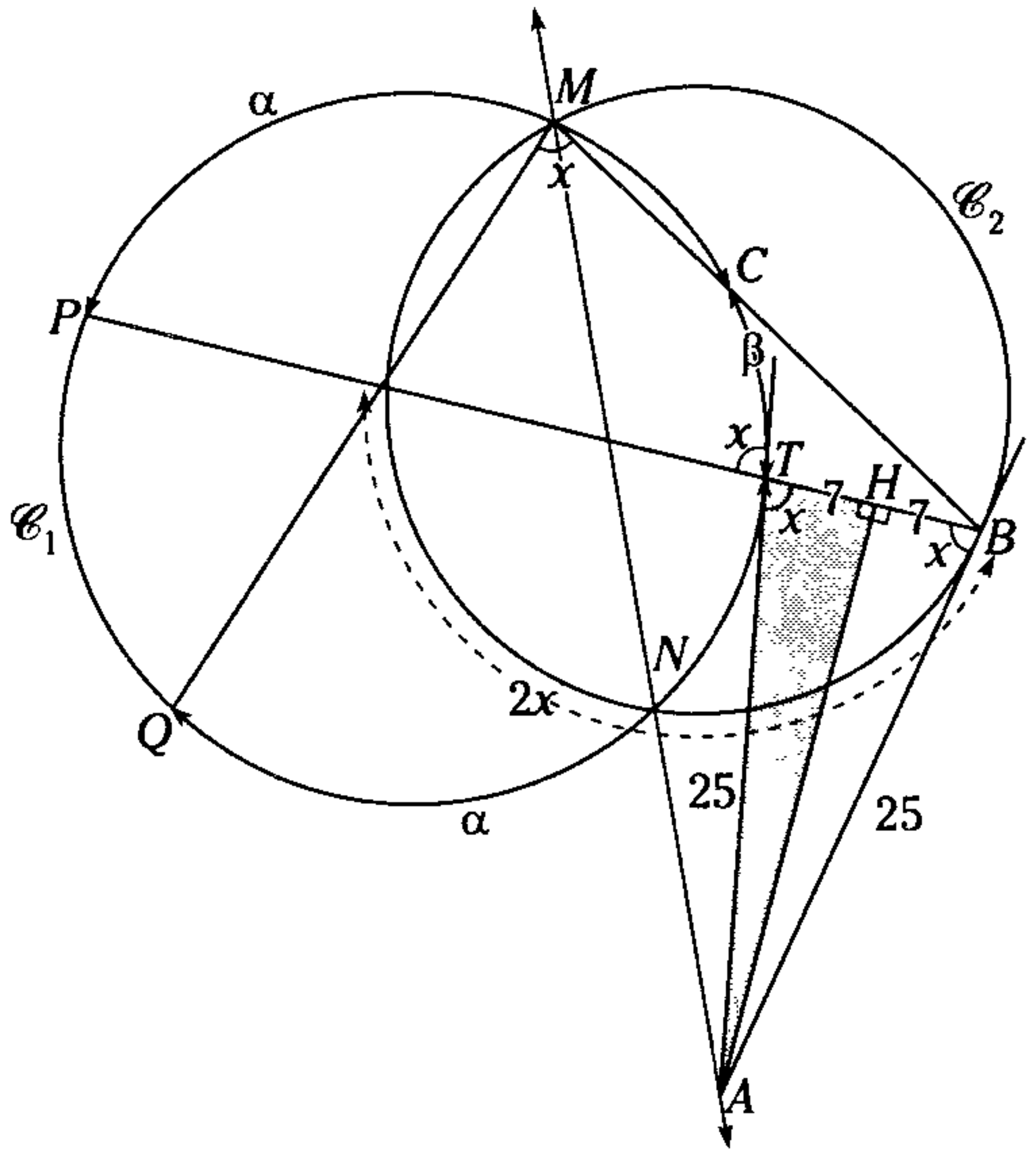


Figura 16.39

Piden x

$\overleftrightarrow{MN}$ es el eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Al trazar la tangente por B, $m\measuredangle PBA = x$.

Se nota de la figura 16.39 que $m\hat{T} = x$ $(\alpha + \beta = 2x)$

Entonces se forma un triángulo isósceles

Las tangentes trazadas a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ por T y B respectivamente, se intersecan en A', que debe pertenecer al eje radical.

$\therefore\ A' = A \ \rightarrow\ AB = AT = 25$

Se traza $\overline{AH} \perp \overline{BT}$ $\rightarrow$ $TH = HB = 7$

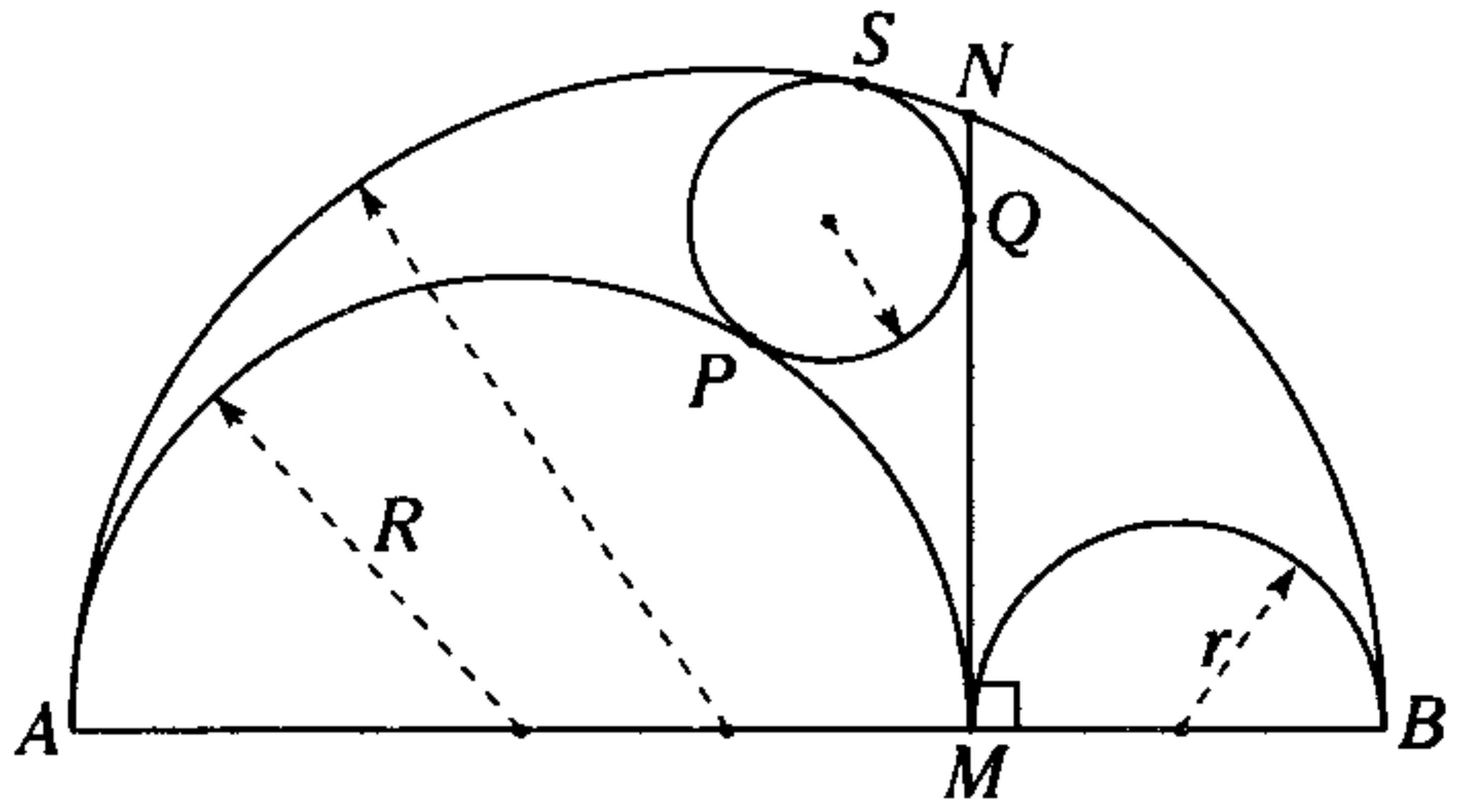
⊿ ATH: notable de 16° y 74°

$\therefore\ x = 74°$

CLAVE D

Problema 13

Según la figura, $AM = 2R$ y $MB = 2r$. Si S, P y Q son puntos de tangencia, indique PB en función de R y r.



A) $\sqrt{(R+r)r}$　　B) $\sqrt{(R-r)r}$　　C) $\sqrt{(R+r)R}$

D) $2\sqrt{(R+r)r}$　　E) $\sqrt{(R+2r)r}$

Resolución

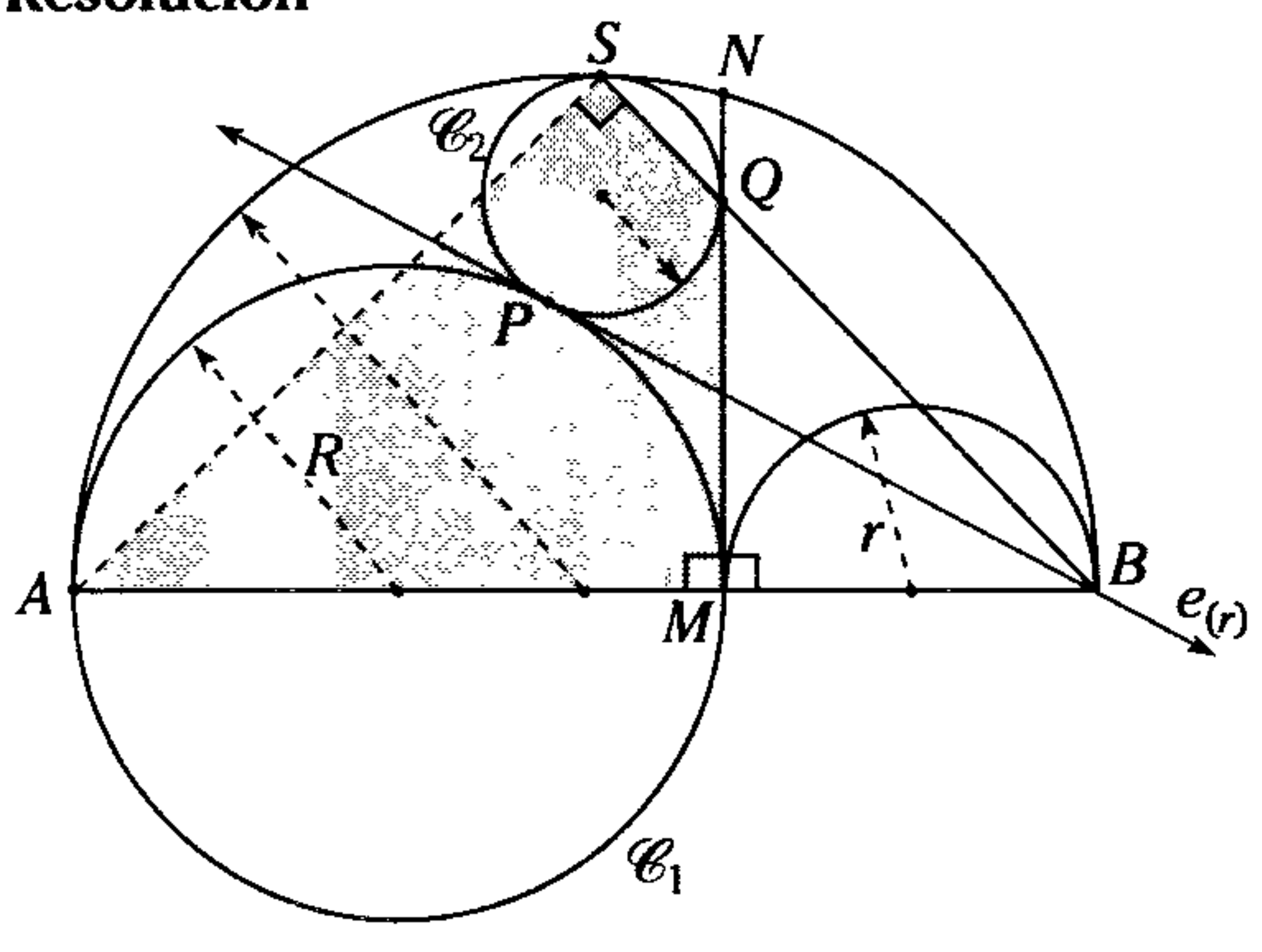


Figura 16.40

Piden PB

Por teorema en una circunferencia sabemos que S, Q y B son colineales.

Por Relac. Met. $\triangle ASQM$

$$(BS).(BQ) = (BA).(BM)$$

$$\rightarrow \text{ Pot. } B(\mathscr{C}_2) = \text{Pot. } B(\mathscr{C}_1)$$

Por lo tanto B pertenece al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Como la tangente común interior de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ es su eje radical ($e_{(r)}$)

Entonces B pertenece a $e_{(r)}$.

En $\mathscr{C}_1$ $(PB)^2=(BA).(BM)=(2(R+r)).(2r)$

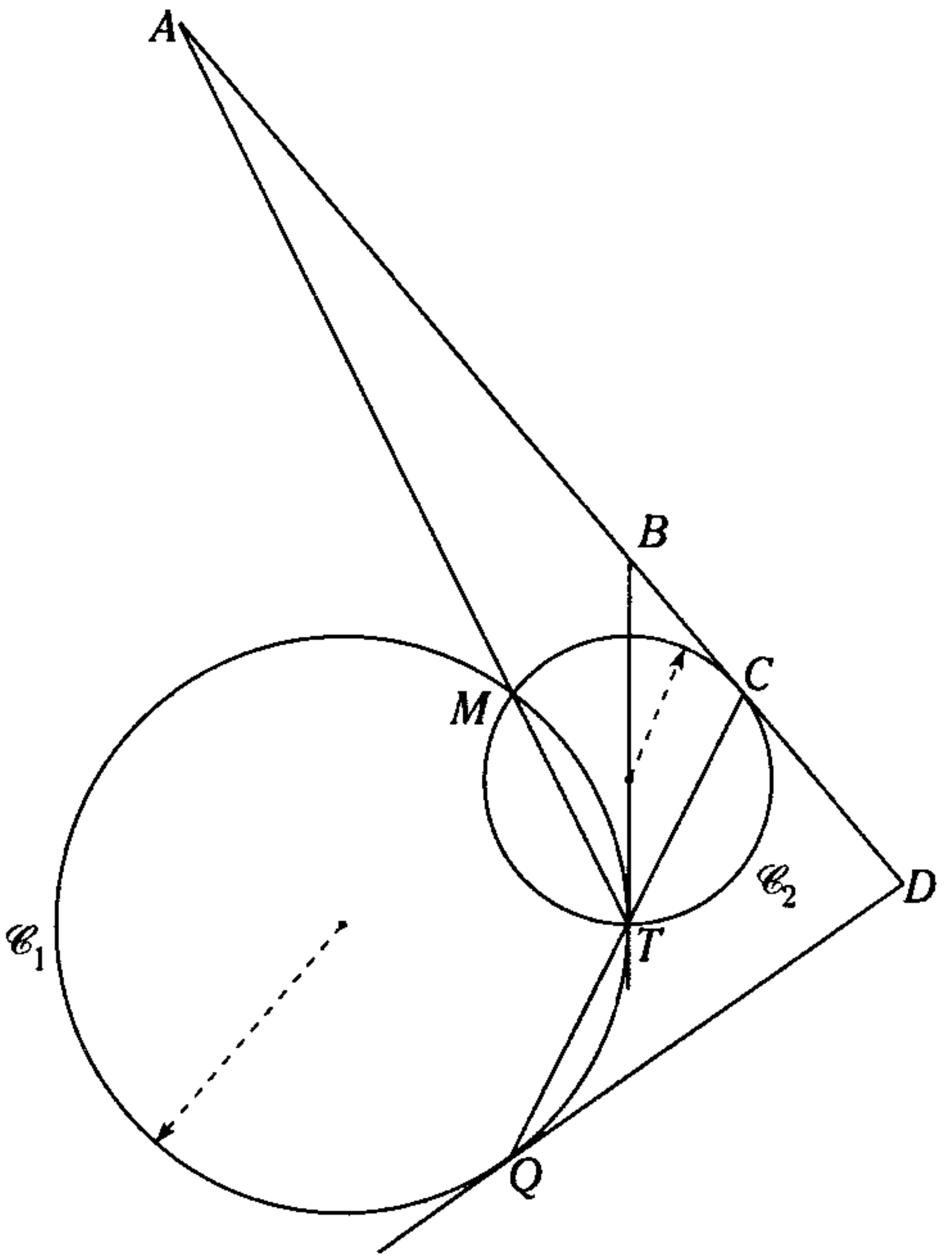
$$\therefore\ PB = 2\sqrt{(R+r)r}$$

CLAVE D

Problema 14

En la figura, C, T y Q son puntos de tangencia.

Si $AB=9$ y $BD=7$, señale BC.



A) 2 B) 3 C) 4

D) 2,5 E) 3,5

Resolución

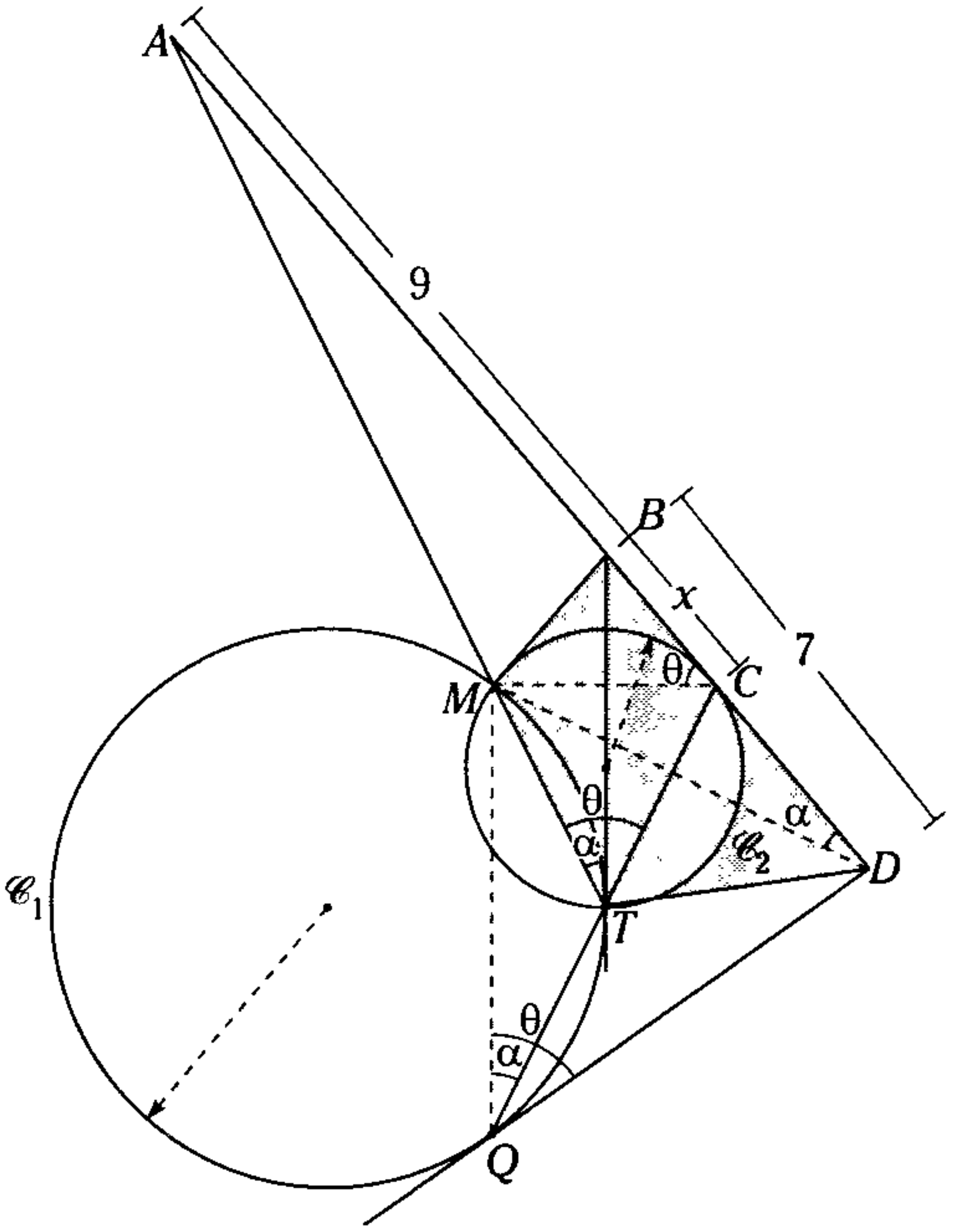


Figura 16.41

Piden $BC = x$

Se trazan $\overline{MQ}$ y $\overline{MC}$

En $\mathscr{C}_1$: $m\measuredangle CTM = m\measuredangle DQM = \theta$

En $\mathscr{C}_2$: $m\measuredangle MCB = m\measuredangle MTC = \theta$

$\rightarrow\ m\measuredangle DQM = m\measuredangle MCB,$

Por lo cual, $CMQD$ es un cuadrilátero inscriptible y $m\measuredangle MQC = m\measuredangle MDC = \alpha$

Como $m\measuredangle MTB = m\measuredangle MDB = \alpha$

$\rightarrow$ $MBDT$: $\triangle$ inscriptible

Por relaciones métricas en la circunferencia

$$(AT)(AM) = (AD)(AB)$$

$$(AT)(AM) = 16(9)$$

En $\mathscr{C}_2$: Pot. $A(\mathscr{C}_2) = (AC)^2 = (AT)(AM)$

$$\rightarrow\ AC^2=16(1)$$

$$AC = 12$$

$$\therefore\ x=3$$

CLAVE B

Problema 15

En un triángulo ABC, se trazan las alturas AM y CQ. Que en las prolongaciones de $\overline{QM}$ y $\overline{AC}$ se intersecan en P. Si la potencia de P, respecto de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, es 10 u^2; calcule la potencia de P, respecto de la circunferencia circunscrita al triángulo mediano del triángulo ABC.

A) 5 u^2 B) 10 u^2 C) 15 u^2
D) 20 u^2 E) 100 u^2

Resolución

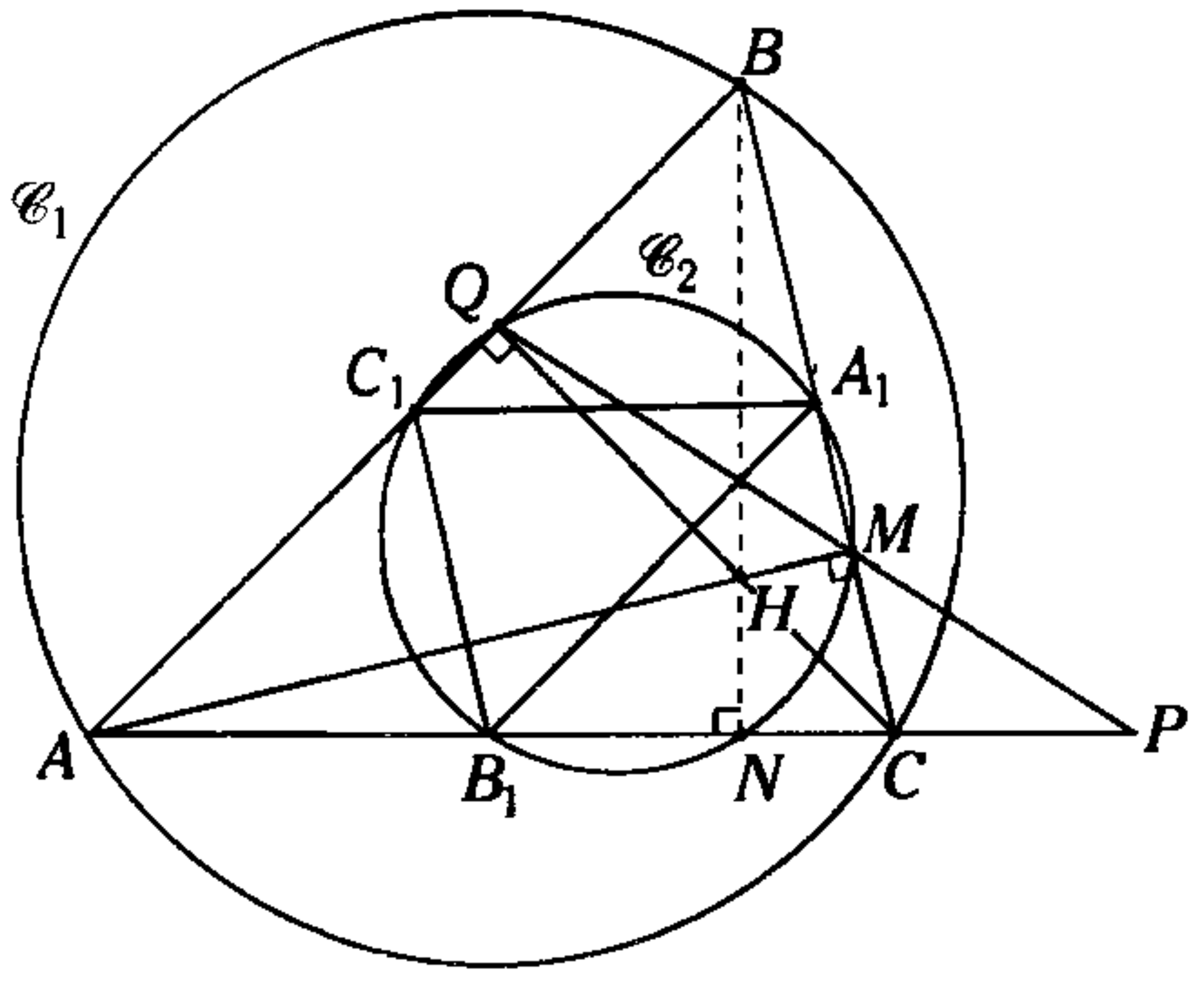


Figura 16.42

Sean A_1, B_1 y C_1 los puntos medios de BC, AC y AB del triángulo ABC; entonces, el $\triangle A_1B_1C_1$ es el triángulo mediano del $\triangle ABC$.
La circunferencia circunscrita al $\triangle A_1B_1C_1$ ($\mathscr{C}_2$), es la circunferencia de los 9 puntos (Feuerbach); por lo tanto, $\mathscr{C}_2$ pasa por M, N y Q.
Se sabe

$\rightarrow$ Pot. $P(\mathscr{C}_2) = (PQ).(PM)$ y la
Pot. $P(\mathscr{C}_1) = (PA).(PC) = 10$ u^2

Como el cuadrilátero $AQMC$ es inscriptible

$\rightarrow$ $(PQ)(PM) = (PA)(PC)$
$\therefore$ Pot. $P(\mathscr{C}_2) = 10$

CLAVE B

Problema 16

Sean tres circunferencias tangentes exteriores dos a dos, ¿qué punto notable del triángulo, cuyas vértices son los centros de las circunferencias dadas, es el centro radical de las tres circunferencias?

A) ortocentro
B) baricentro
C) circuncentro
D) incentro
E) punto de Steiner

Resolución

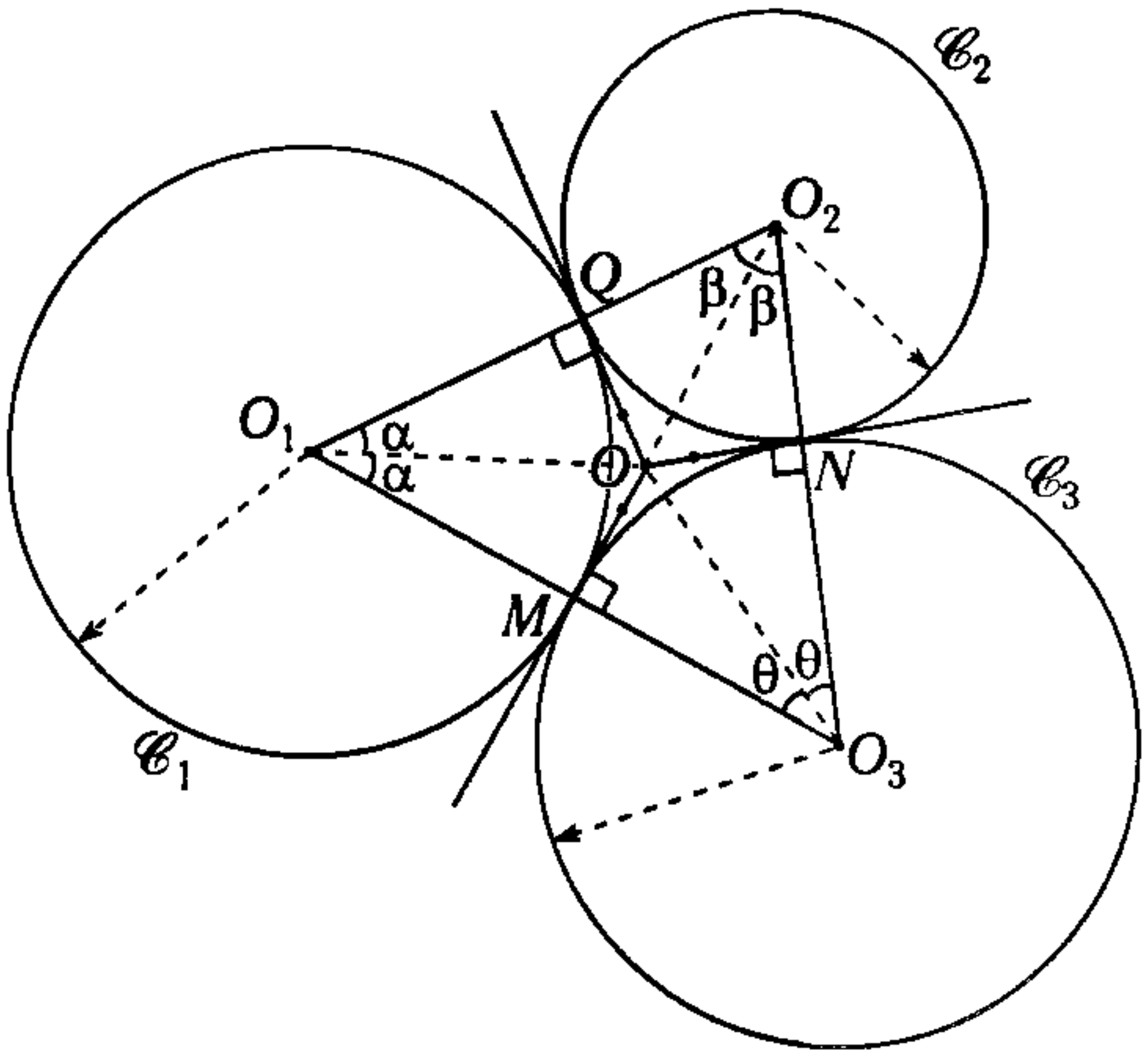


Figura 16.43

Las tangentes comunes interiores de $\mathscr{C}_1$; $\mathscr{C}_2$; $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_1$ son sus respectivos ejes radicales, los cuales se intersecan en O. (O: centro radical), pero $OM = ON = OQ = a$

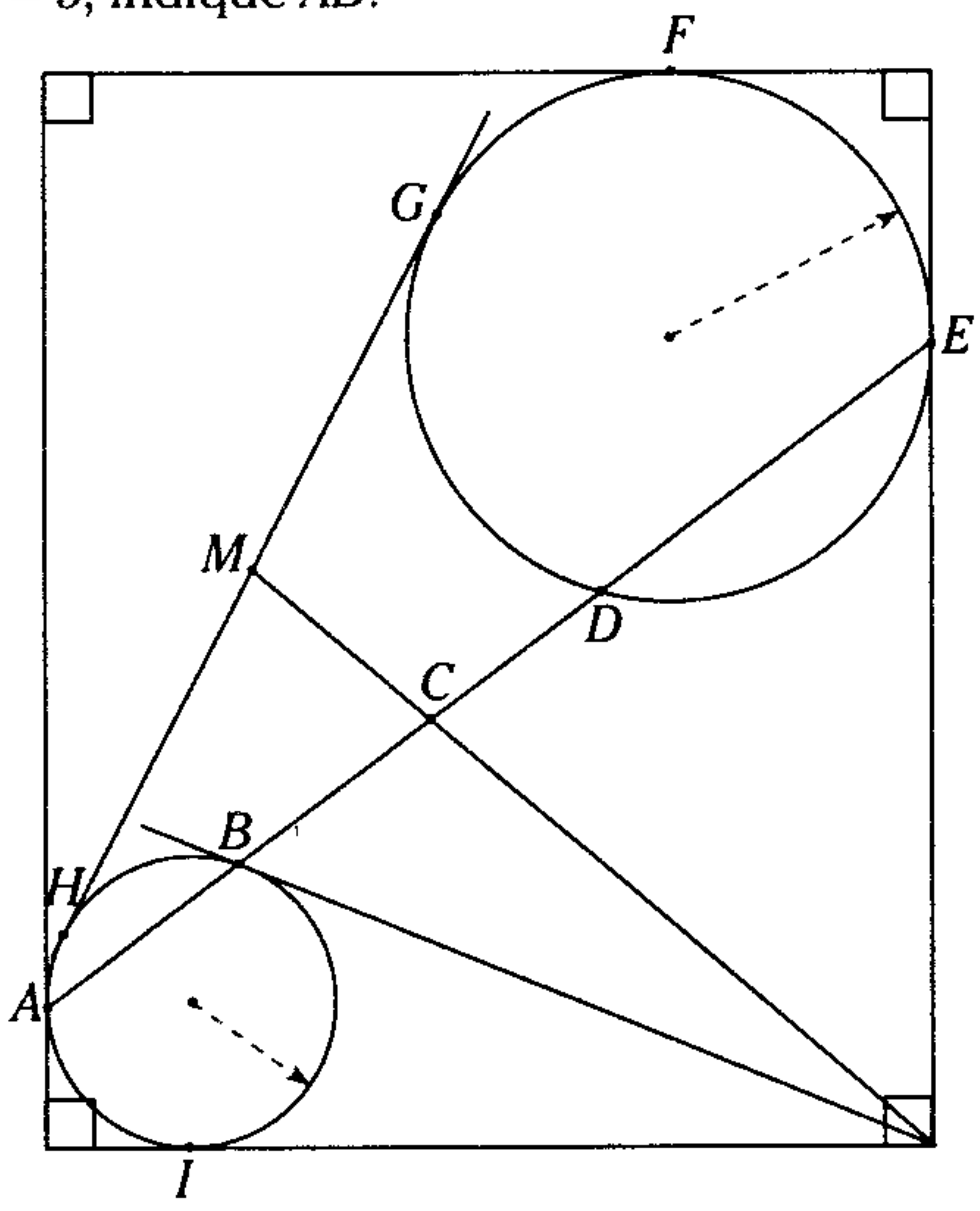
$\rightarrow$ OO_1: bisectriz del $\sphericalangle O_3O_1O_2$

Análogamente, OO_2 y OO_3 son bisectrices de los ángulos $O_1O_2O_3$ y $O_1O_3O_2$. De esta manera, O es incentro del $\triangle O_1O_2O_3$

CLAVE D

Problema 17

En la figura mostrada, A, B, E, F, G, H e I son puntos de tangencia. Si $GM=MH$, $ED=12$, $DC=3$ y $BC=5$, indique AB.



A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

Resolución

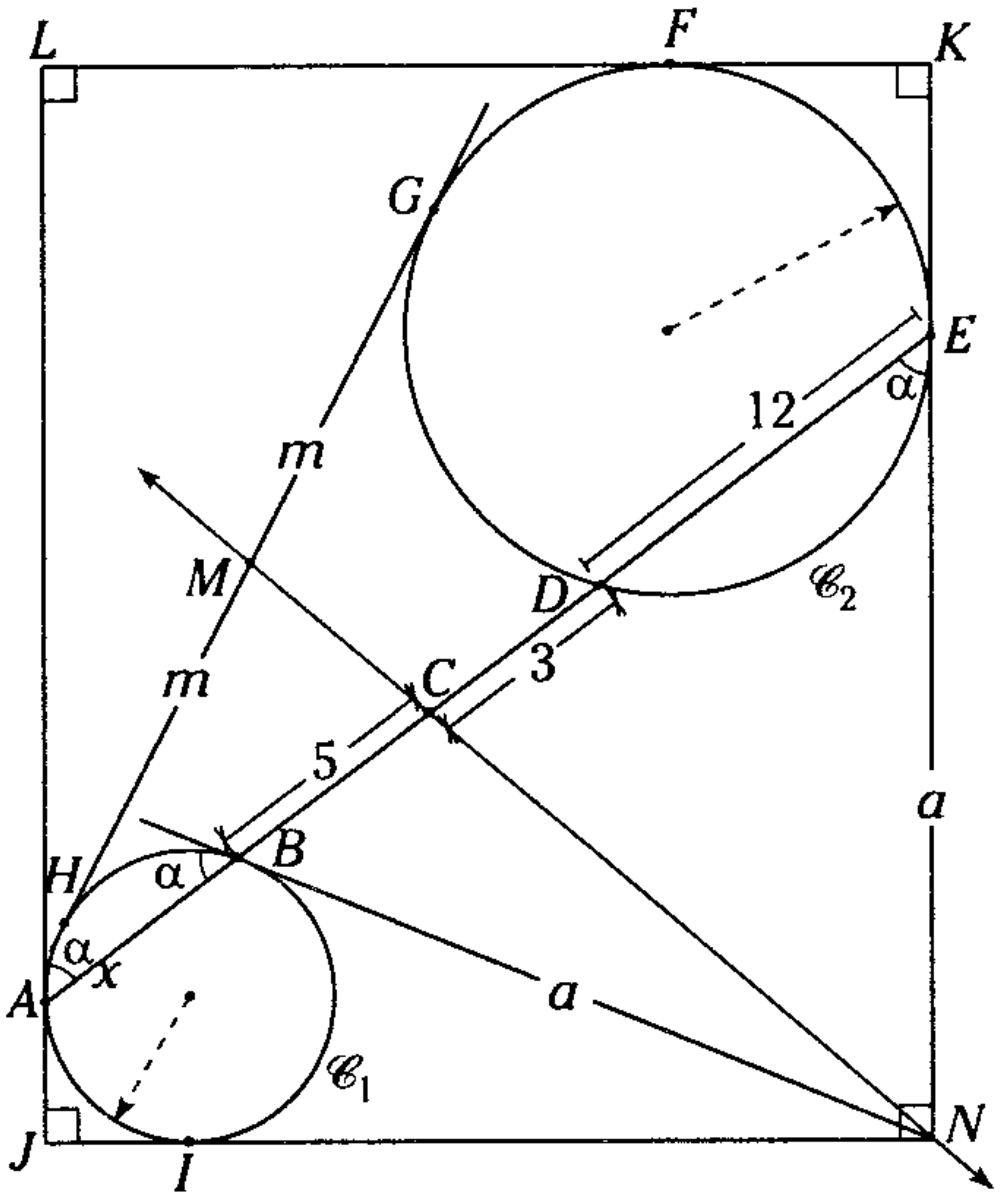


Figura 16.44

Si M es punto medio de $\overline{HG}$ (tangente común), entonces M pertenece al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Se observa $\overline{LJ} \,//\, \overline{NK}$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle LAE = m\sphericalangle NEA = \alpha$

y $NE = NB = a$

Por lo tanto, N también pertenece al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Ahora podemos decir que $\overleftrightarrow{DN}$ es $e_{(r)}$ (eje radical) de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

$\rightarrow$ $(CA)(CB) = (CE)(CD)$

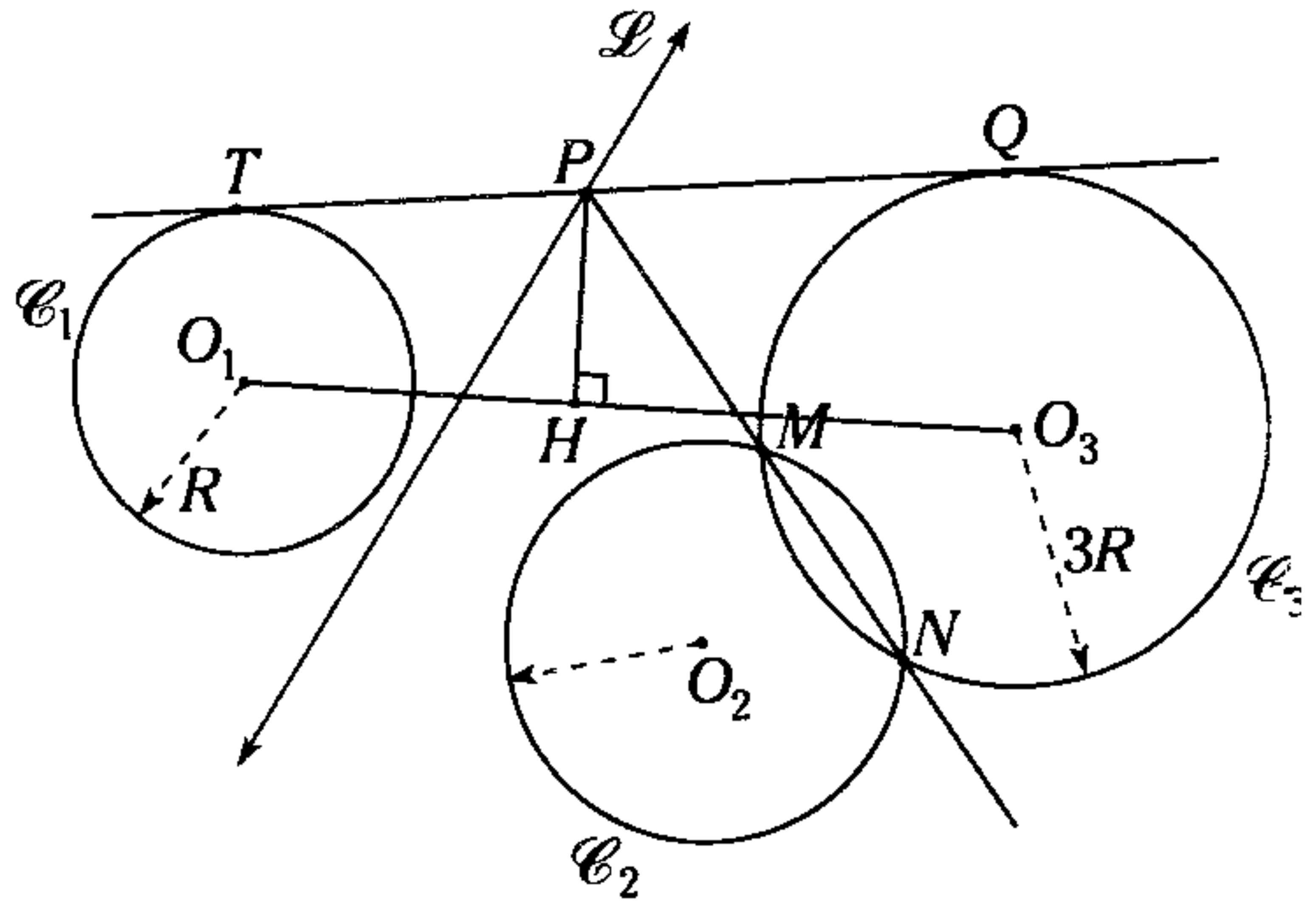
$(5+x).5 = (15).(3)$

$\therefore \quad x=4$

CLAVE B

Problema 18

Según la figura, la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es eje radical de las circunferencias de centros O_1 y O_2. Si $(HO_3)^2-(HO_1)^2=144$ (siendo T y Q puntos de tangencia), determine R.



A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{3}$ E) 6

Resolución

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ y $\overline{MN}$ es eje radical de $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$, entonces P es centro radical.

Se sabe

$\rightarrow$ Pot. $P(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $P(\mathscr{C}_3)$

$(PO_1)^2-(R)^2=(PO_3)^2-(3R)^2$

$\therefore\ (PO_3)^2-(PO_1)^2=8R^2$ (I)

En el $\triangle O_1PO_3$:

$(PO_3)^2-(PO_1)^2=(HO_3)^2-(HO_1)^2$ (II)

Del dato y reemplazando (I) en (II)

$8R^2=144$

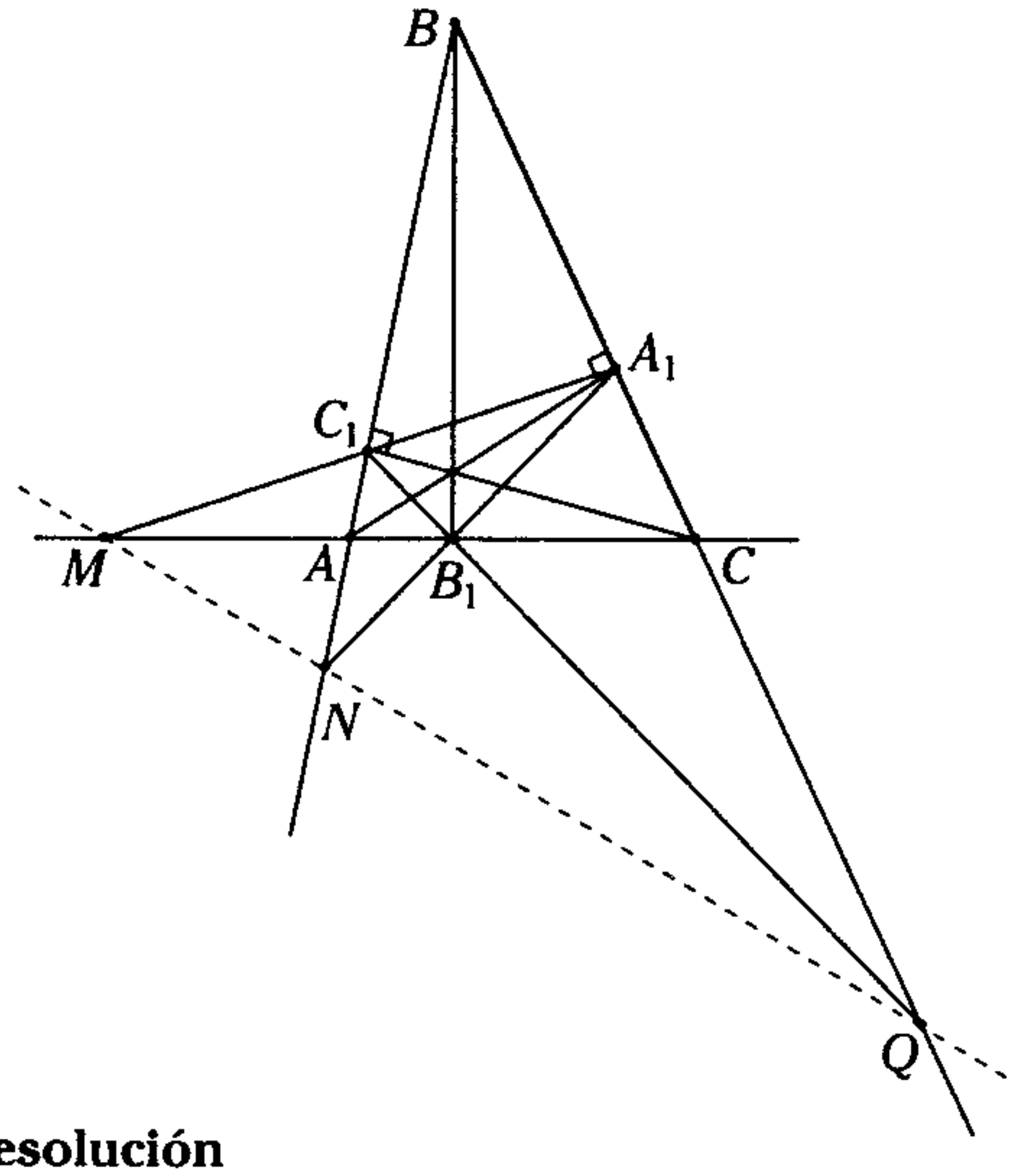
$R^2=18$

$\therefore\ R=3\sqrt{2}$

CLAVE B

Problema 19

En la figura mostrada, demuestre que los puntos M, N y Q son colineales utilizando el concepto de potencia y eje radical.



Resolución

Sean A_2, B_2 y C_2 puntos medios de BC, AC y AB, respectivamente, y A_3, B_3 y C_3 puntos medios de AH, BH y CH.

$\rightarrow$ $A_1A_2A_3B_1B_2B_3C_1C_2C_3$ pertenecen a la circunferencia de los 9 puntos ($\mathscr{C}_2$).

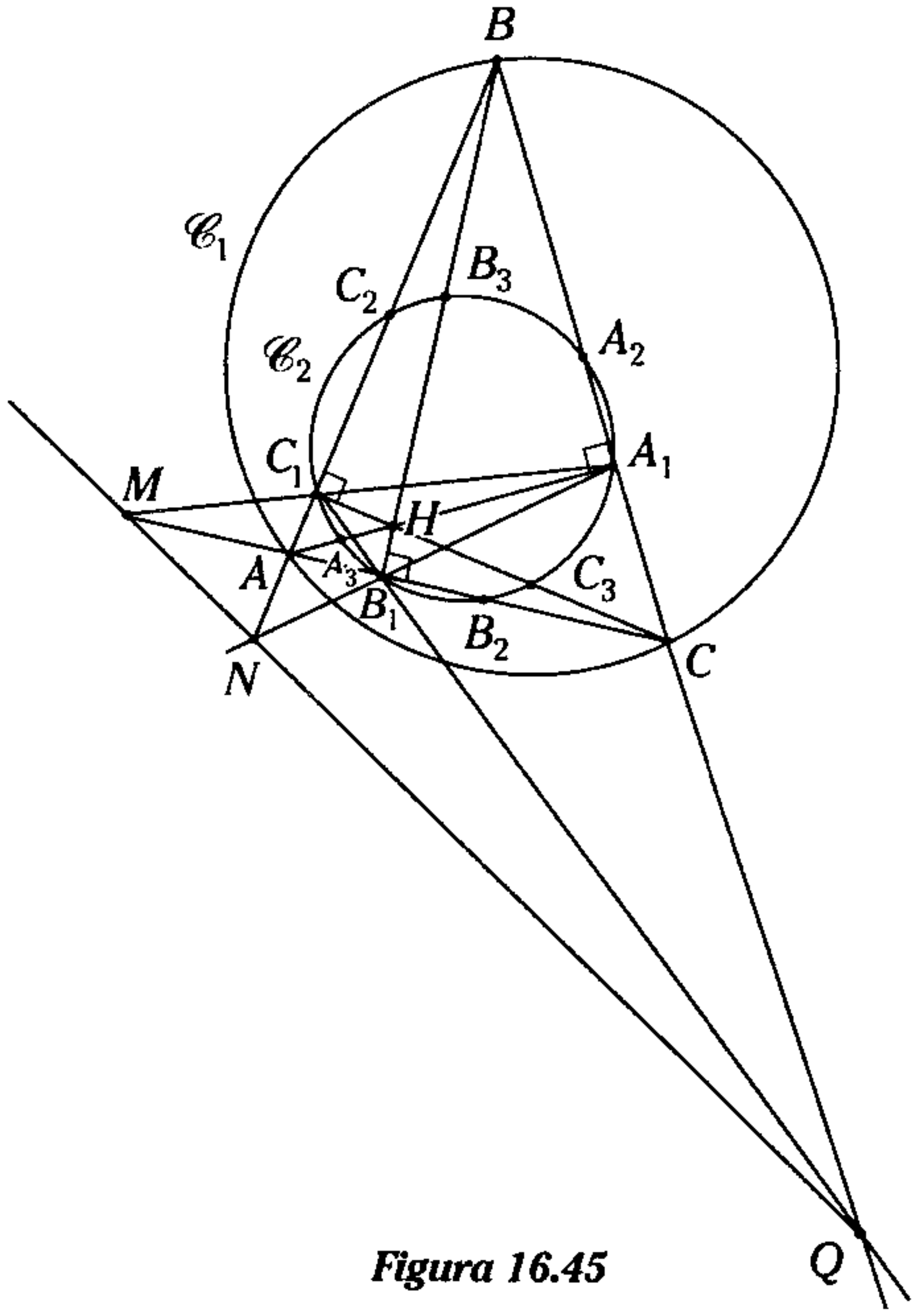


Figura 16.45

Sea $\mathscr{C}_1$ la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$

Pot. $M(\mathscr{C}_1)=(MC).(MA)$ y

Pot. $M(\mathscr{C}_2)=(MA_1)(MC_1)$

$⏢ AC_1A_1C$: inscriptible

$(MC)(MA)=(MA_1)(MC_1)$

$\rightarrow$ Pot. $M(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $M(\mathscr{C}_2)$

Análogamente

Pot. $N(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $N(\mathscr{C}_2)$

Pot. $Q(\mathscr{C}_1)$ = Pot. $Q(\mathscr{C}_2)$

$\rightarrow$ M, N y Q pertenecen al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

$\therefore$ M, N y Q son colineales.

Problema 20

Dadas las circunferencias secantes $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$; además, S representa un punto del plano, indique qué lugar geométrico forman los puntos S, en donde Pot. $S(\mathscr{C}_1)$ = – Pot. $S(\mathscr{C}_1)$

A) Una recta
B) Dos rectas paralelas
C) Un punto
D) Una circunferencia
E) una circunferencia y una recta secante

Resolución

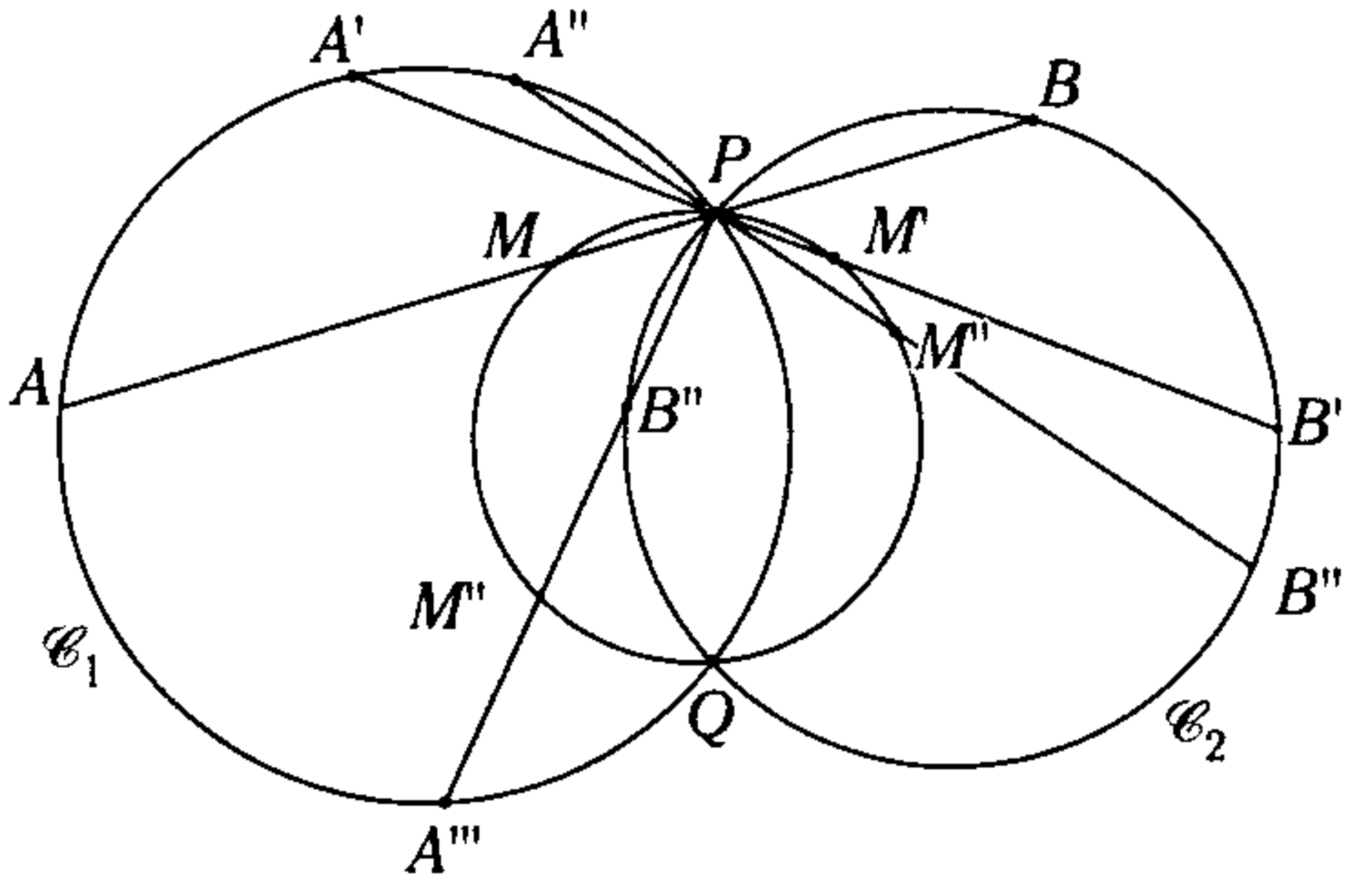


Figura 16.46

Por P trazamos la recta AB (A en $\mathscr{C}_1$ y B en $\mathscr{C}_2$)
Sea M el punto medio de $\overline{AB}$ ($AM = MB$)
Para $\mathscr{C}_1$: Pot. $M(\mathscr{C}_1) = -(AM).(MP)$
Para $\mathscr{C}_1$: Pot. $M(\mathscr{C}_2) = (MB).(MP)$
Como $AM = MB$

$\rightarrow$ Pot. $M(\mathscr{C}_1) = -$Pot. $M(\mathscr{C}_2)$

$\therefore\ M = S$

Análogamente, al ser M', M'' y M''' puntos medios de $\overline{A'B'}$, $\overline{A''B''}$, $\overline{A'''B'''}$; entonces, $M'= S$, $M''=S$. Así, el lugar geometrico se da en los puntos medios de los segmentos AB. Ahora demostraremos que los puntos medios de los segmentos AB (A en $\mathscr{C}_1$ y B en $\mathscr{C}_2$) pertenecen a una circunferencia.

Primer método

Demostrando que dichos puntos medios equidistan los puntos medios del segmento que une los centros (O_1 y O_2) de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

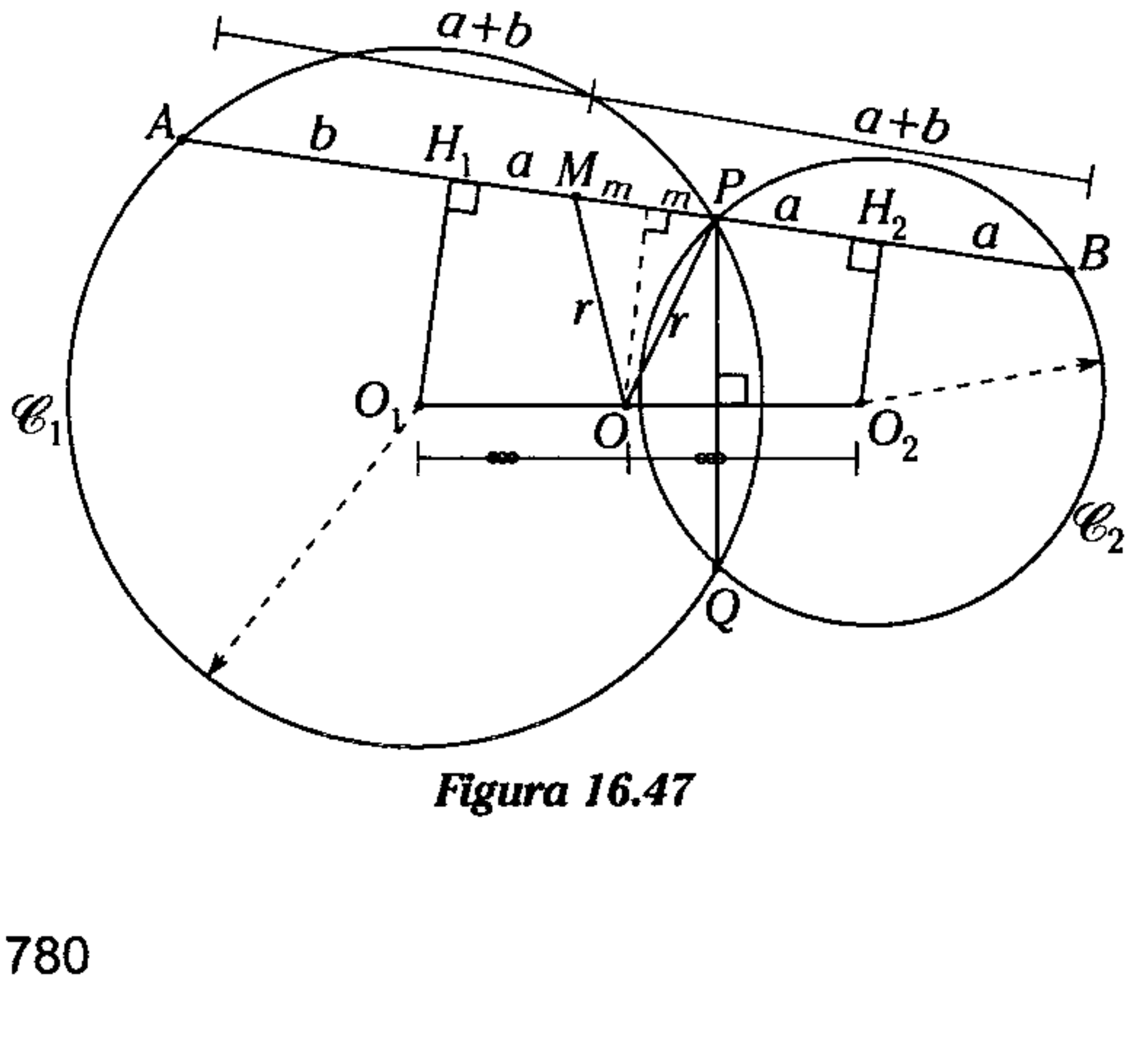


Figura 16.47

Sea O punto medio del O_1O_2 y M punto medio del $\overline{AB}$

Si $AH_1 = b$ y $BH_2 = a$ $\rightarrow$ $AM = MB = a + b$

$\therefore\ H_1M = a$ y $H_2M = b$,

pero como $PH_2 = a$

$\rightarrow\ OM = OP = r =$ cte.

Por lo tanto, para cualquier AB que satisfaga la condición del problema, la distancia del punto medio M al punto O será igual a OP, que es fijo e igual a r.

Entonces todo punto M equidista del punto fijo O, siendo así el lugar geométrico una circunferencia.

Segundo método

Demostrando que dos de dichos puntos medios con los puntos fijos P y Q son puntos fijos concíclicos.

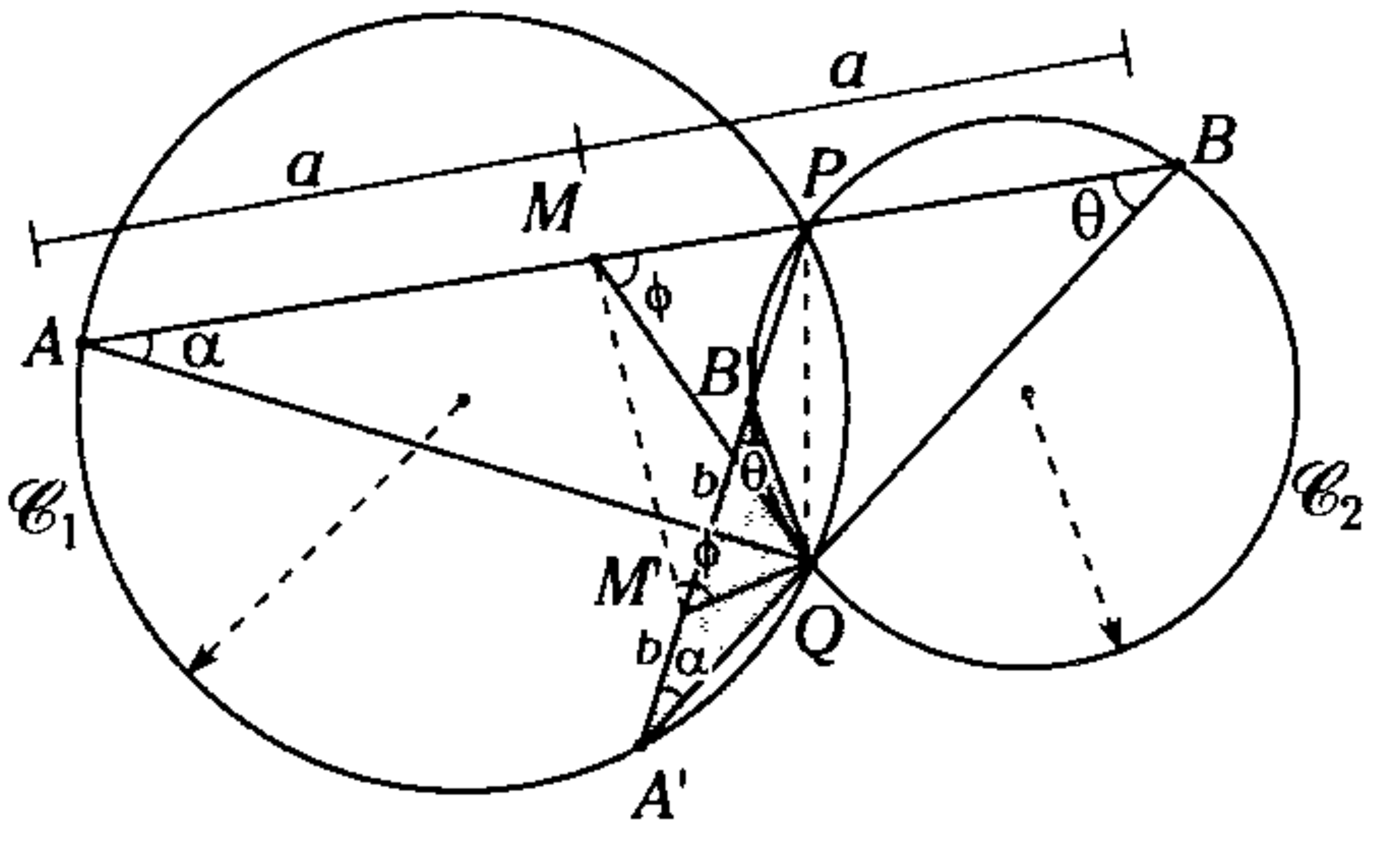


Figura 16.48

En $\mathscr{C}_1$: m$\measuredangle PAQ$ = m$\measuredangle PA'Q = \alpha$

En $\mathscr{C}_2$: m$\measuredangle A'B'Q$ = m$\measuredangle PBQ = \theta$

Por ende al ser los triángulos; $A'QB'$ y AQB semejantes, QM' y QM son medianas homólogas de lo cual m$\measuredangle QM'P$ y $QMB = \phi$

Entonces el cuadrilátero $QM'MP$ es inscriptible.

Por lo tanto M', M, P y Q son concíclicos.

Resulta así, que el lugar geométrico de los puntos M es una circunferencia.

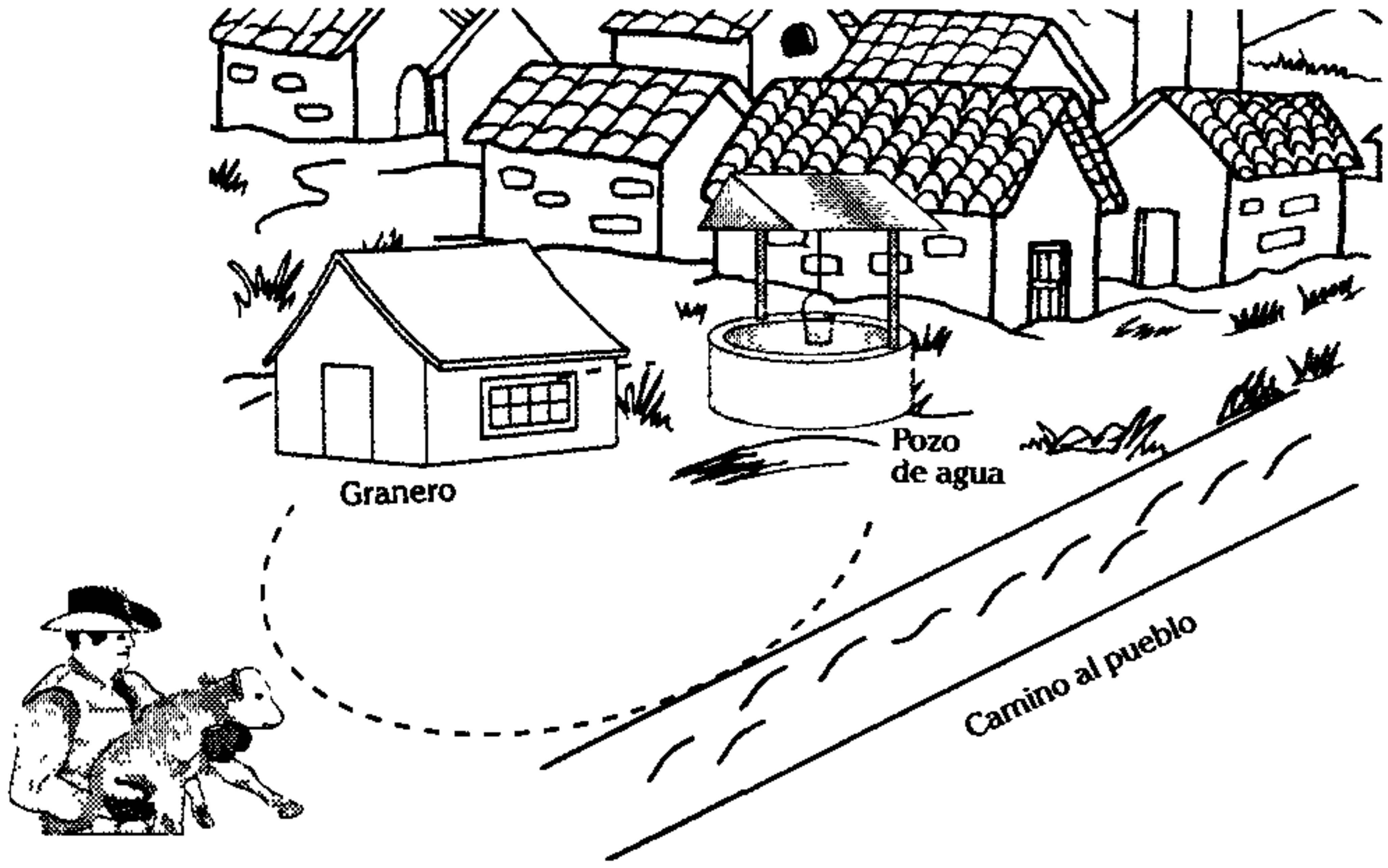
Como podemos ver, el lugar geométrico de los puntos S, donde Pot. $S(\mathscr{C}_1) = -$ Pot. $S(\mathscr{C}_2)$, es una circunferencia.

CLAVE D

Problemas Recreativos

1. El corral de un granjero

Un granjero desea construir un corral de forma circular, de tal modo que la cerca pase por dos puntos fijos, el pozo de agua y el granero, y que a la vez sea tangente a la carretera que lleva al pueblo, siendo esta rectilínea en el tramo donde se pretende construir el corral. ¿Podría ayudar al granjero a realizar el trazo circular por donde debe construir el cerco?



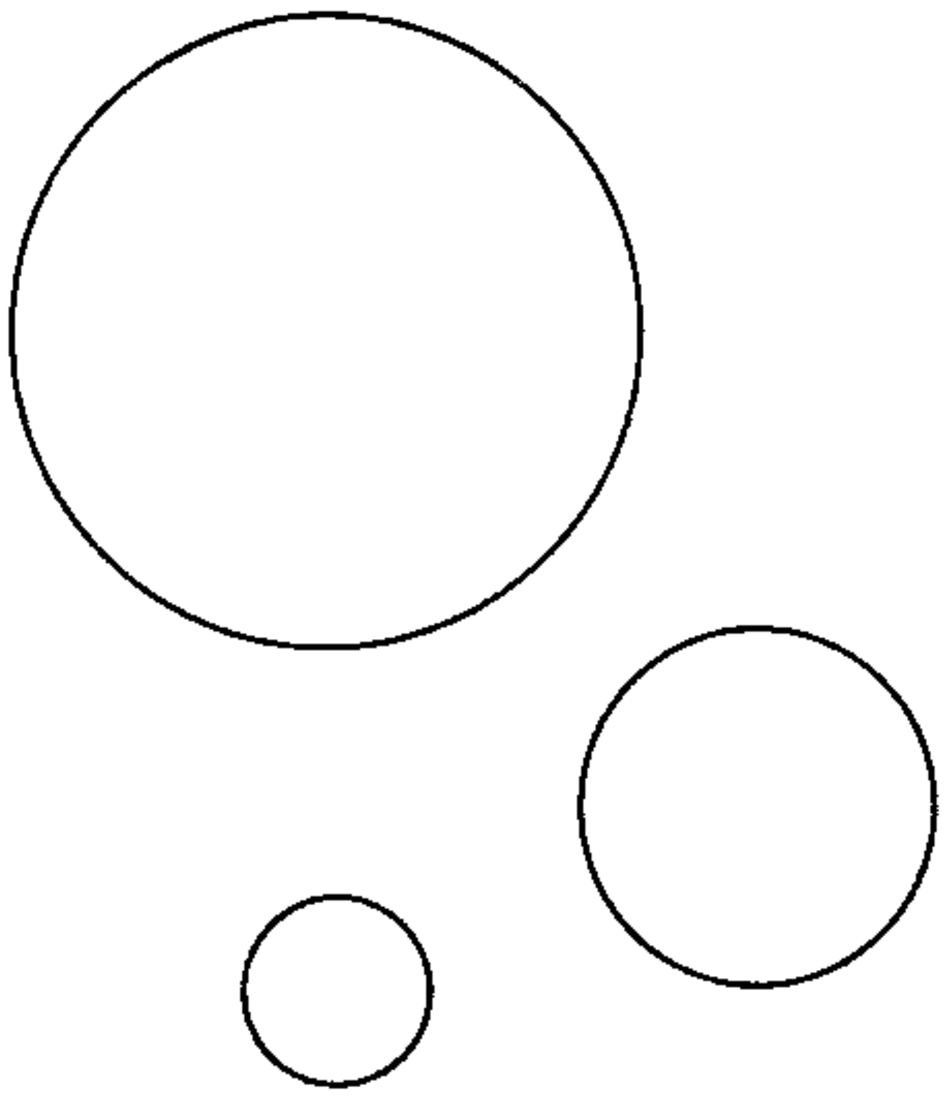
2. Las ocho circunferencias de Apolonio

El problema de Apolonio, conocido también como el problema de las ocho circunferencias, fue creado y resuelto por el tercer gran matemático del periodo helenístico, Apolonio (260-217 a.n.e.), nacido en Perga, ciudad del Asia menor.

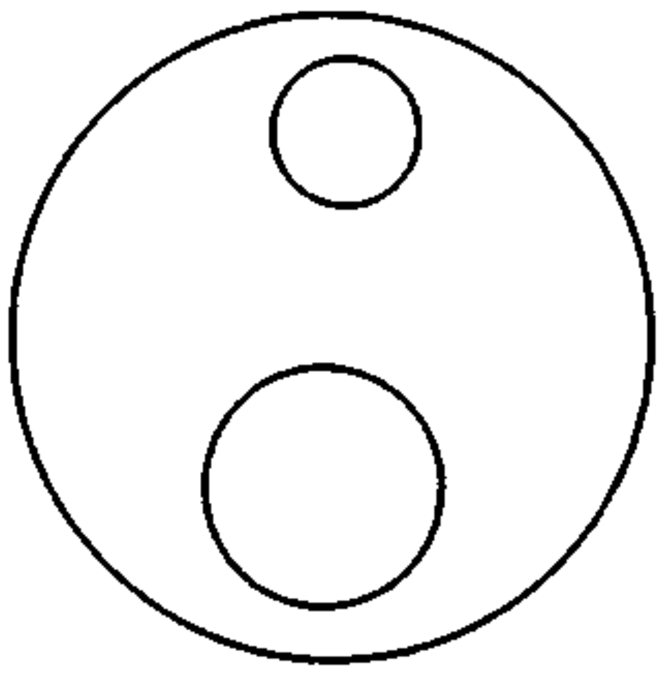
Este problema se halla en su obra *De tactionibus* (sobre los contactos) en la que estudia numerosos casos particulares, que hoy conocemos, en conjunto, como problema de Apolonio. Desafortunadamente, la solución del matemático se perdió.

El problema se enuncia *Trace las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas.* (Resuelva solo el caso I)

Caso I

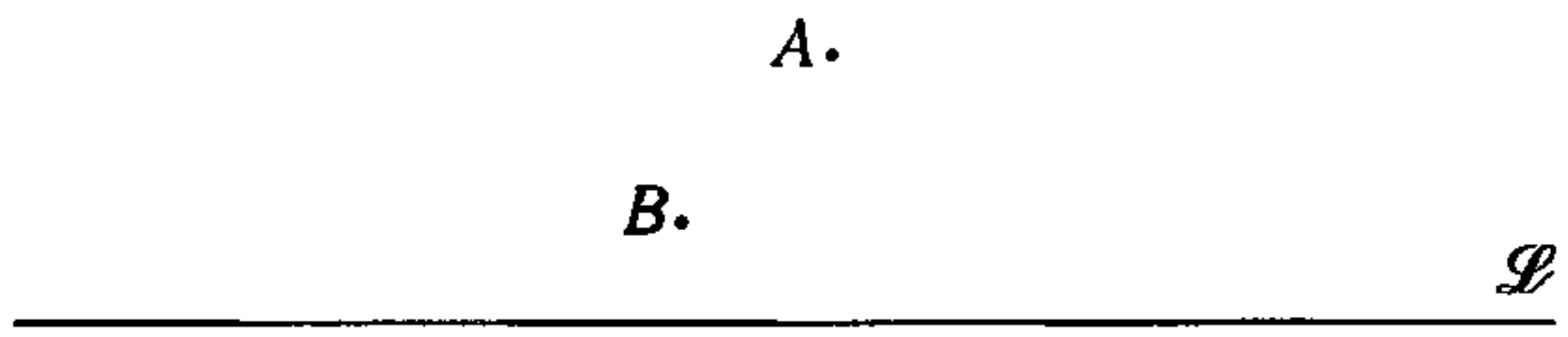


Caso II

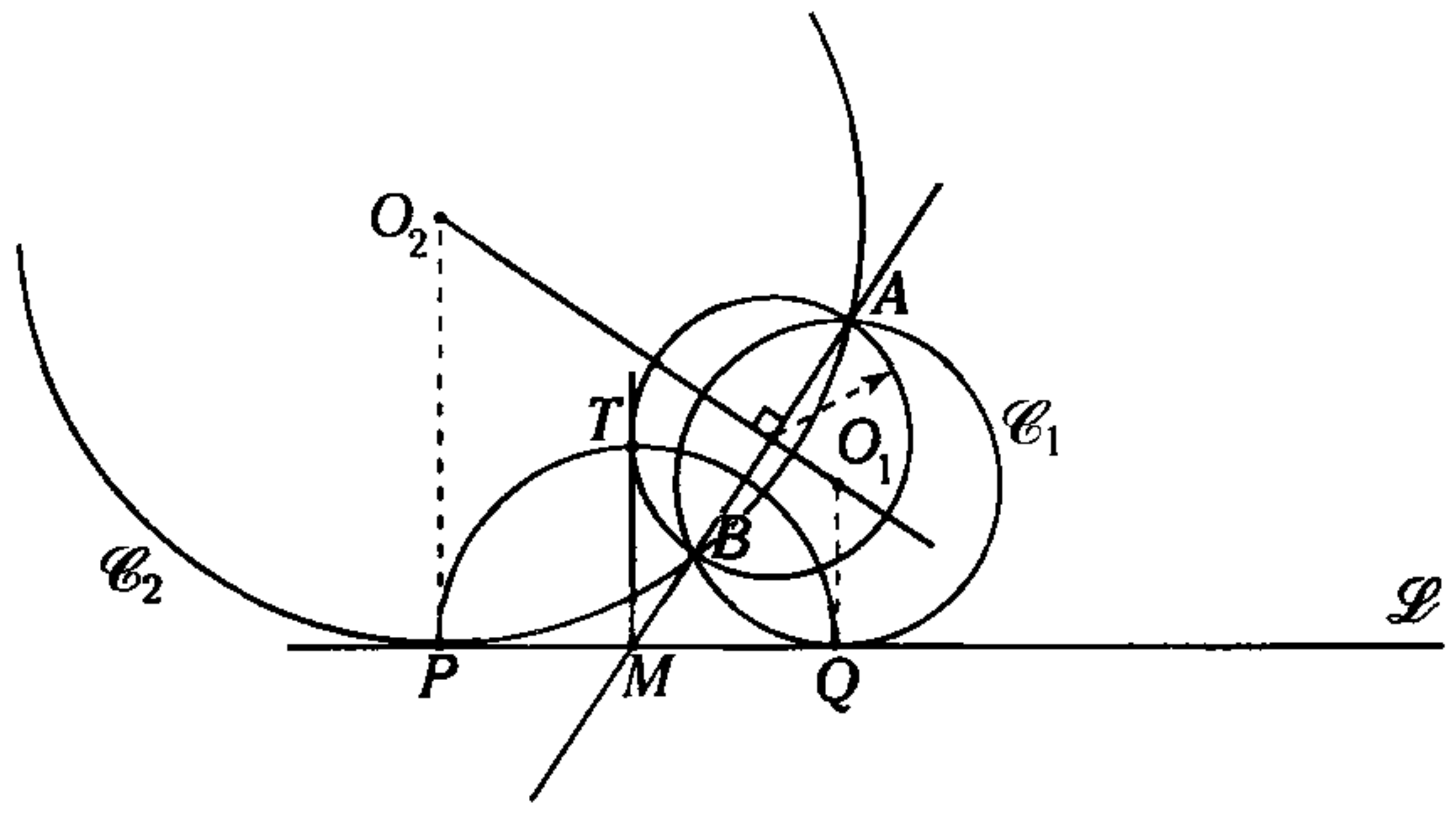


Resolución 1

El corral de un granjero. El problema se reduce a construir una circunferencia que pase por dos puntos fijos y que sea tangente a una recta dada.

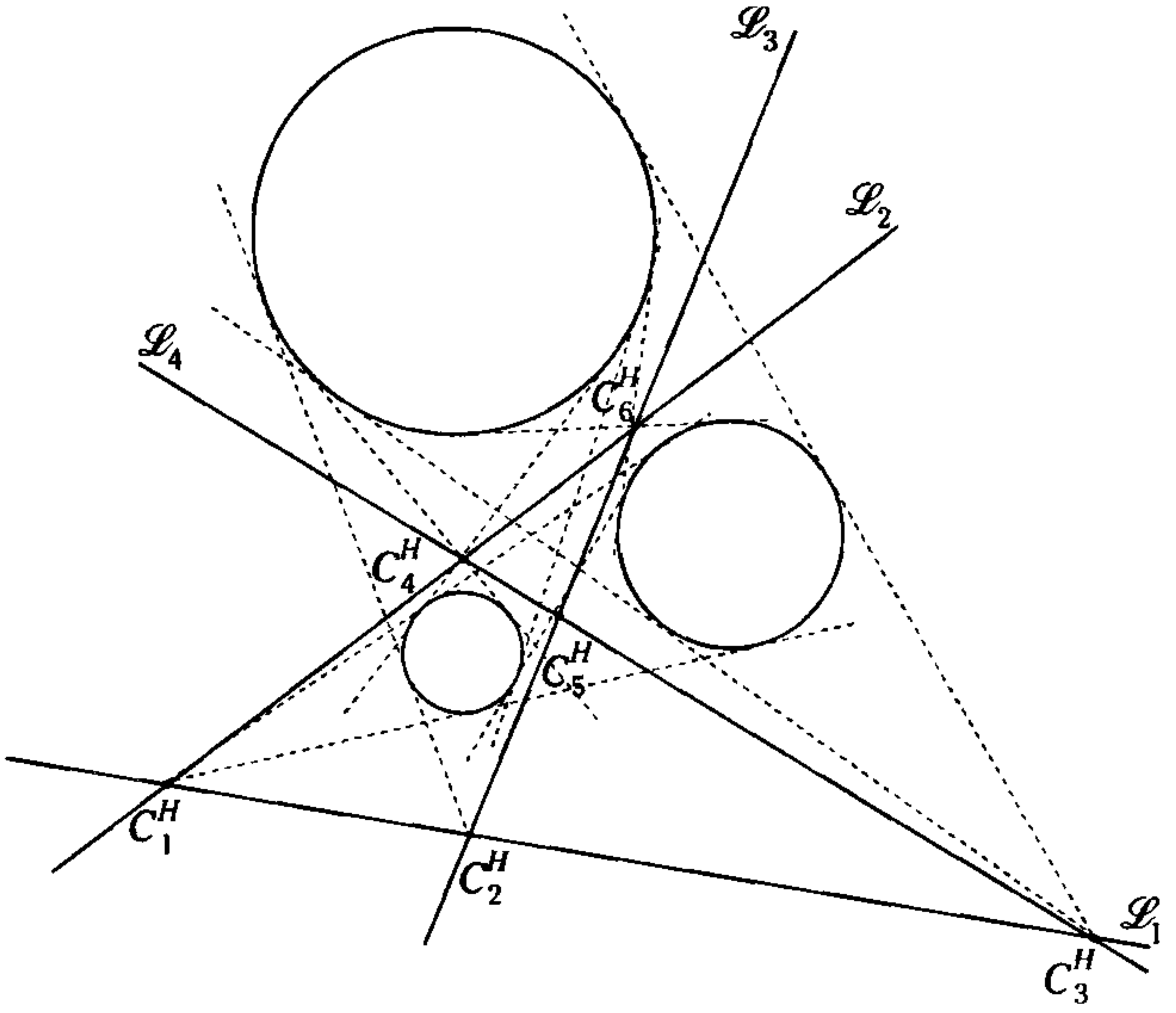


La solución se basa en el concepto de eje radical de dos circunferencias secantes.
Unimos los puntos A y B dados y prolongamos hasta intersecar a la recta $\mathscr{L}$ en M; luego, trazamos la circunferencia con diámetro AB, y seguidamente una tangente a esta, desde M. Considerando a T como el punto de tangencia, con centro M y radio MT trazamos una semicircunferencia que interseca a la recta dada en dos puntos P y Q. Por estos puntos pasan las circunferencias buscadas, con lo cual encontramos dos soluciones.



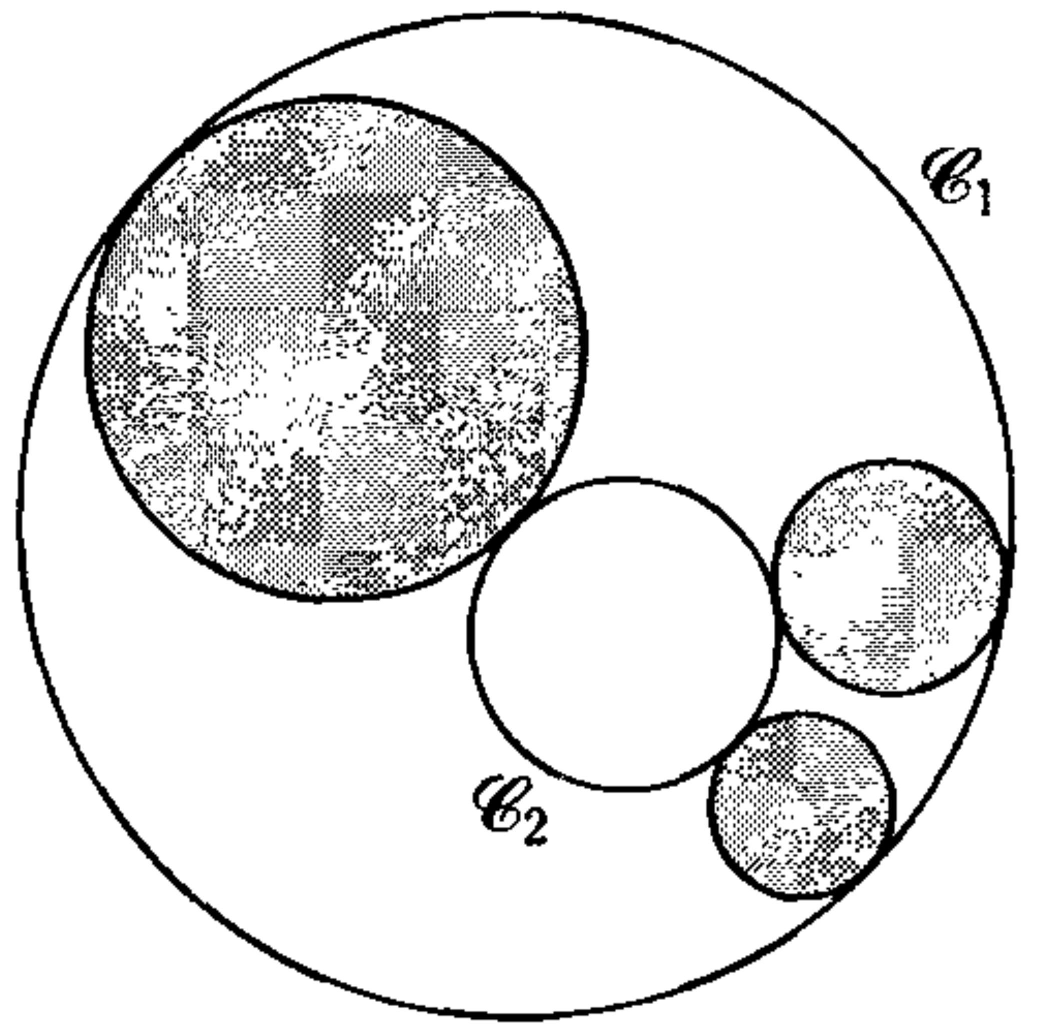
Resolución 2

El problema de Apolonio. Durante la época del Renacimiento (1600), el matemático francés, Francisco Vieta (1540-1603), retomó el problema de Apolonio para así hallar, por separado, sus diferentes soluciones. *C.F.* Gauss (1777-1855), J. V. Poncelet (1778-1867), E. Bobillier (1797-1832), J. Diaz Gergonne (1771-1859) y otros, quizás más recientes como Fouchet y Peterson, también obtuvieron soluciones; pero la más sencilla, que al mismo tiempo resuelve el problema de manera general, es del francés Gergonne.
¿Cómo se han obtenido estas soluciones? En primer lugar, calculamos los seis centros de homotecias (tres internos y tres externos) de los tres círculos. Estos 6 puntos resultan estar en cuatro rectas. Tomamos una de estas rectas y hallamos el polo respecto de cada una de las tres circunferencias. Unimos el centro radical de las circunferencias con los tres polos y obtenemos los puntos de tangencia de las circunferencias buscadas con las circunferencias dadas.
Ahora, basta elegir convenientemente entre los seis puntos de tangencia encontrados para trazar dos circunferencias tangentes. Este mismo proceso se repite con las otras tres rectas determinadas por los centros de homotecia y obtenemos las ocho soluciones al problema de Apolonio.

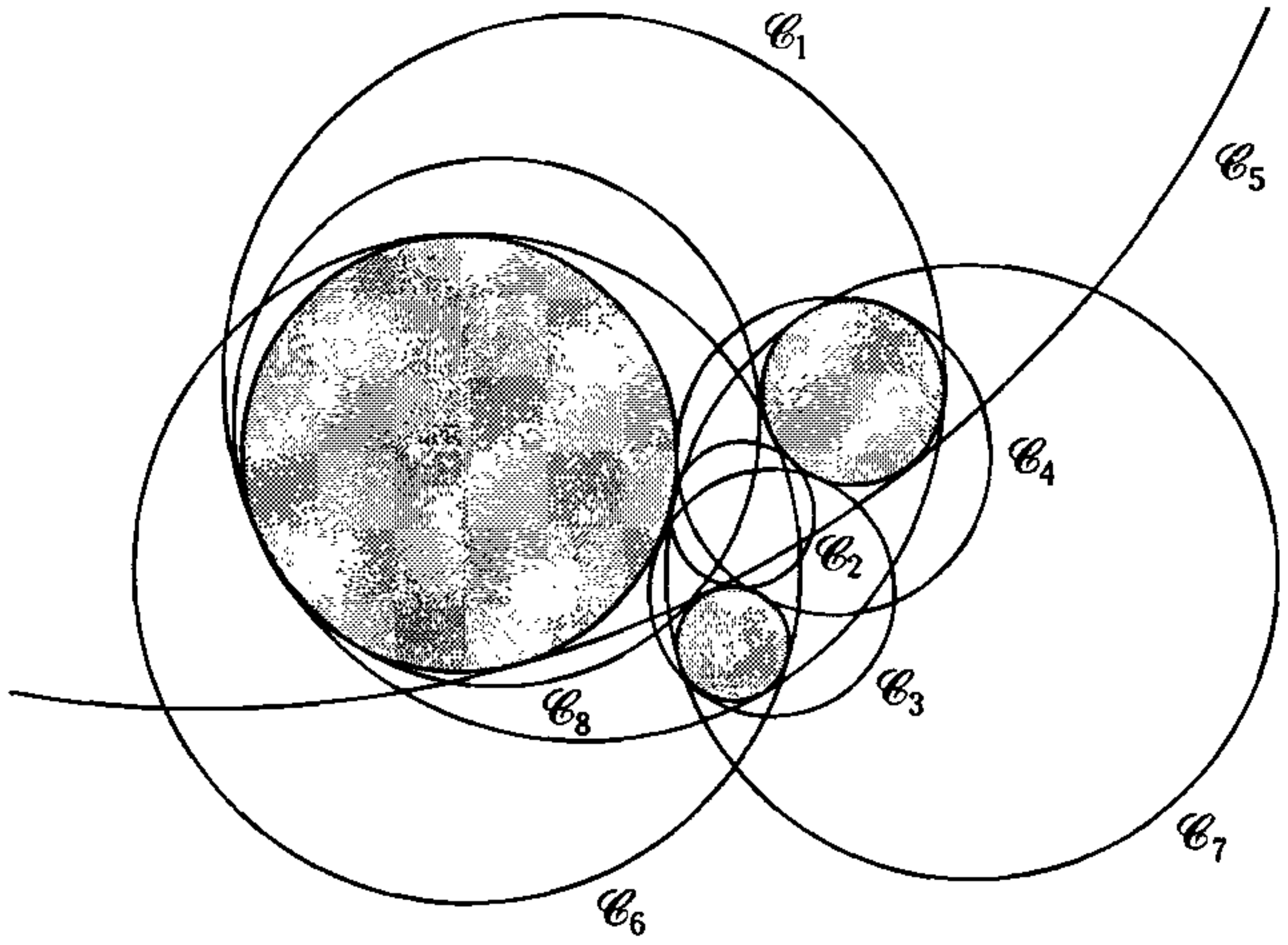


C_1^H, C_2^H, C_3^H; son centros de homotecia externos y C_4^H, C_5^H, C_6^H; son centros de homotecia internos.

$\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_3$ y $\mathscr{L}_4$ son las rectas que contienen a los 6 centros de homotecia.



En la figura, se muestra el caso de la circunferencia tangente interior con las 3 circunferencias dadas ($\mathscr{C}_1$) y el caso de la circunferencia tangente exterior con las tres ($\mathscr{C}_2$).

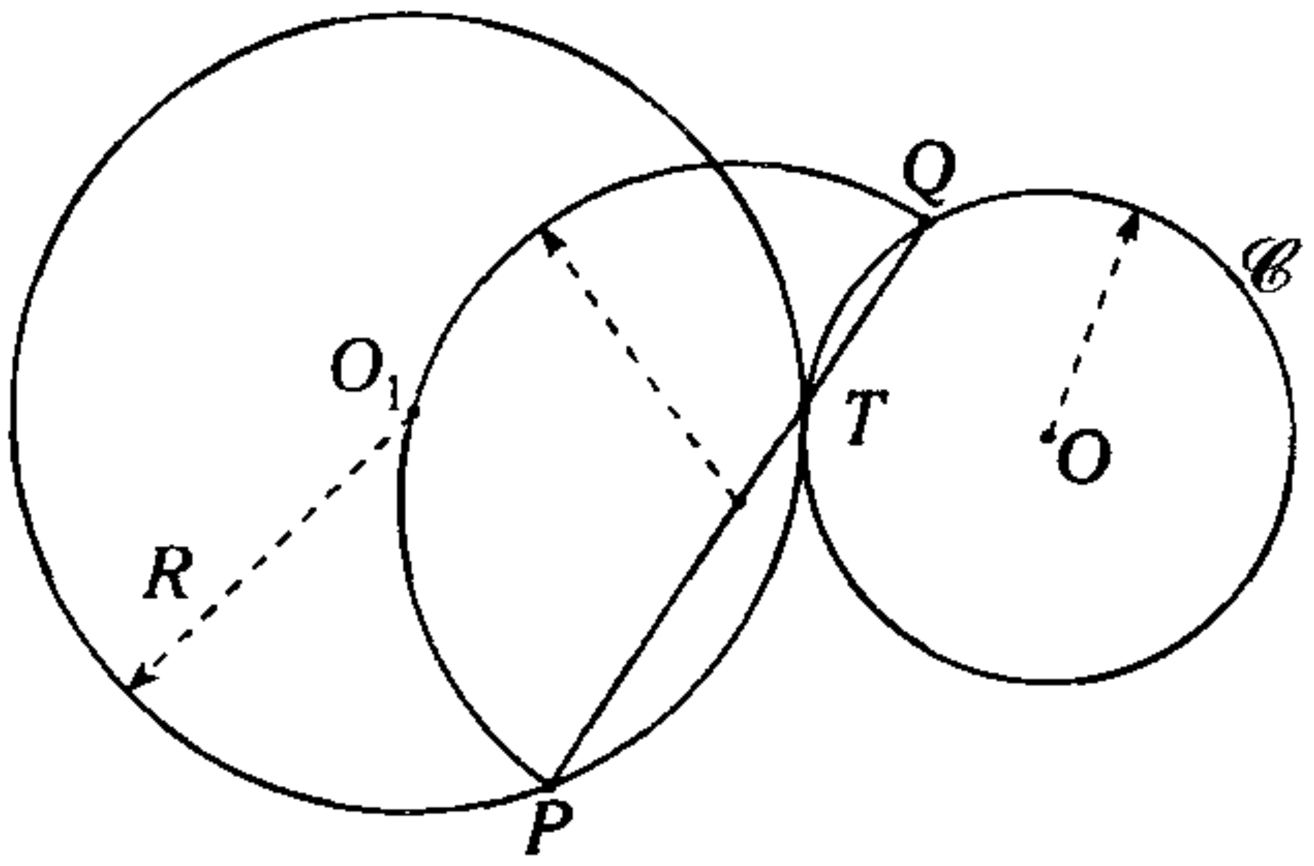


Las otras 6 circunferencias son 3 circunferencias tangentes exteriores a dos dadas y tangente interior a la tercera, mientras que las otras 3 son circunferencias tangentes interiores a dos dadas, pero tangente exterior a la tercera[1].

1 (Ver solución más detallada en la página Bella Geometría www.ctv.es/users/pacoga/bella/htm/_) de Francisco Javier García Capitán, 2 000. pacoya@ctv.es.

Problemas Propuestos

1. En la figura mostrada, T es punto de tangencia. Calcule la potencia de P, respecto de $\mathscr{C}$.

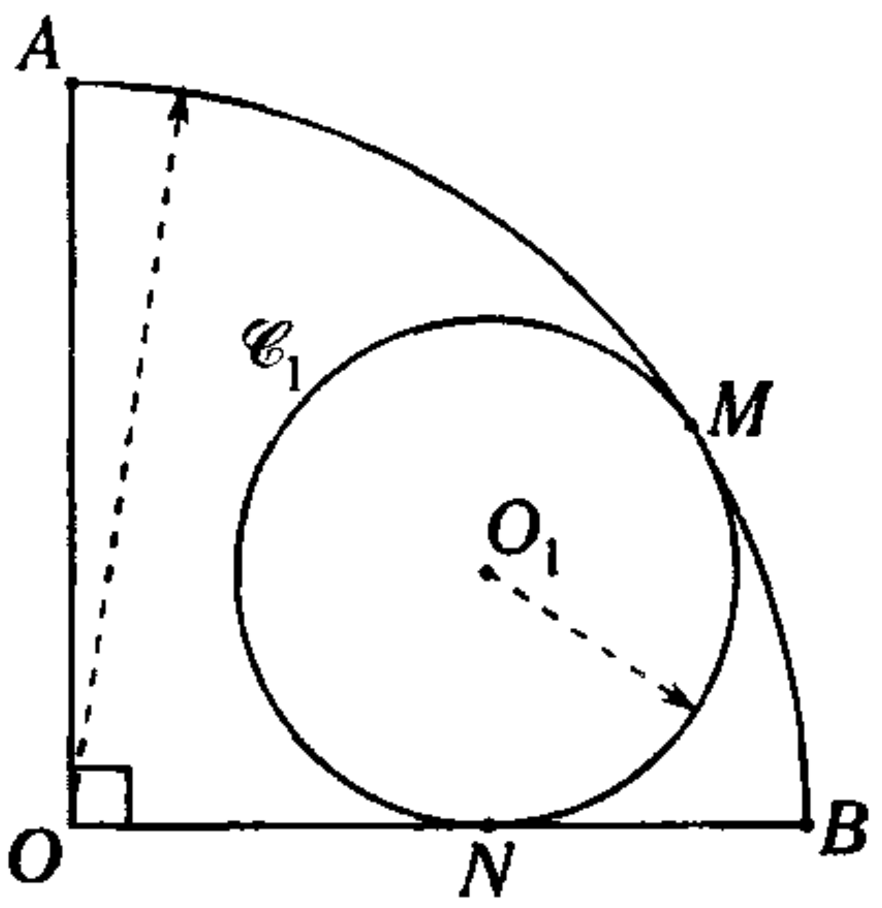


A) R^2 B) $2R^2$ C) $3R^2$
D) $4R^2$ E) $8R^2$

2. Dado que $ABCD$ es un trapecio rectángulo (recto en B y C), las prolongaciones de BC y AD se intersecan en P y la circunferencia circunscrita al triángulo ABC interseca a $\overline{PD}$ en Q, si $PQ = QD$ y $(AB).(CD) = 36$, señale la potencia de P, respecto de la circunferencia mencionada.

A) 6 B) 12 C) 18
D) 36 E) 72

3. En la figura mostrada, M y N son puntos de tangencia y la potencia de A, respecto de $\mathscr{C}_1$, es $2a^2$. Calcule ON.



A) $2a$ B) $a\sqrt{2}$ C) a
D) $a\sqrt{3}$ E) $\frac{a}{2}$

4. En un triángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O, M es el pie de la altura trazada desde B. Halle $(OA)^2 - (OH)^2$, si $(HB).(HM) = 8\text{ u}^2$

A) 2 u^2 B) 4 u^2 C) 8 u^2
D) 16 u^2 E) 32 u^2

5. Sobre el radio OA de una circunferencia de centro O, se ubica un punto P, por el cual se traza una recta perpendicular a $\overline{OA}$ y una cuerda $\overline{BC}$(P en $\overline{BC}$). Si $\overline{AB}$ y la prolongación de $\overline{AC}$ intersecan a dicha perpendicular en M y Q, respectivamente, halle el radio. Considere que $PM = 2$; $PQ = 4$ y $PO = 1$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 9

6. ¿Qué punto notable de un triángulo es el centro radical de las circunferencias cuyos diámetros son los lados de dicho triángulo?

A) incentro B) baricentro C) ortocentro
D) circuncentro E) excentro

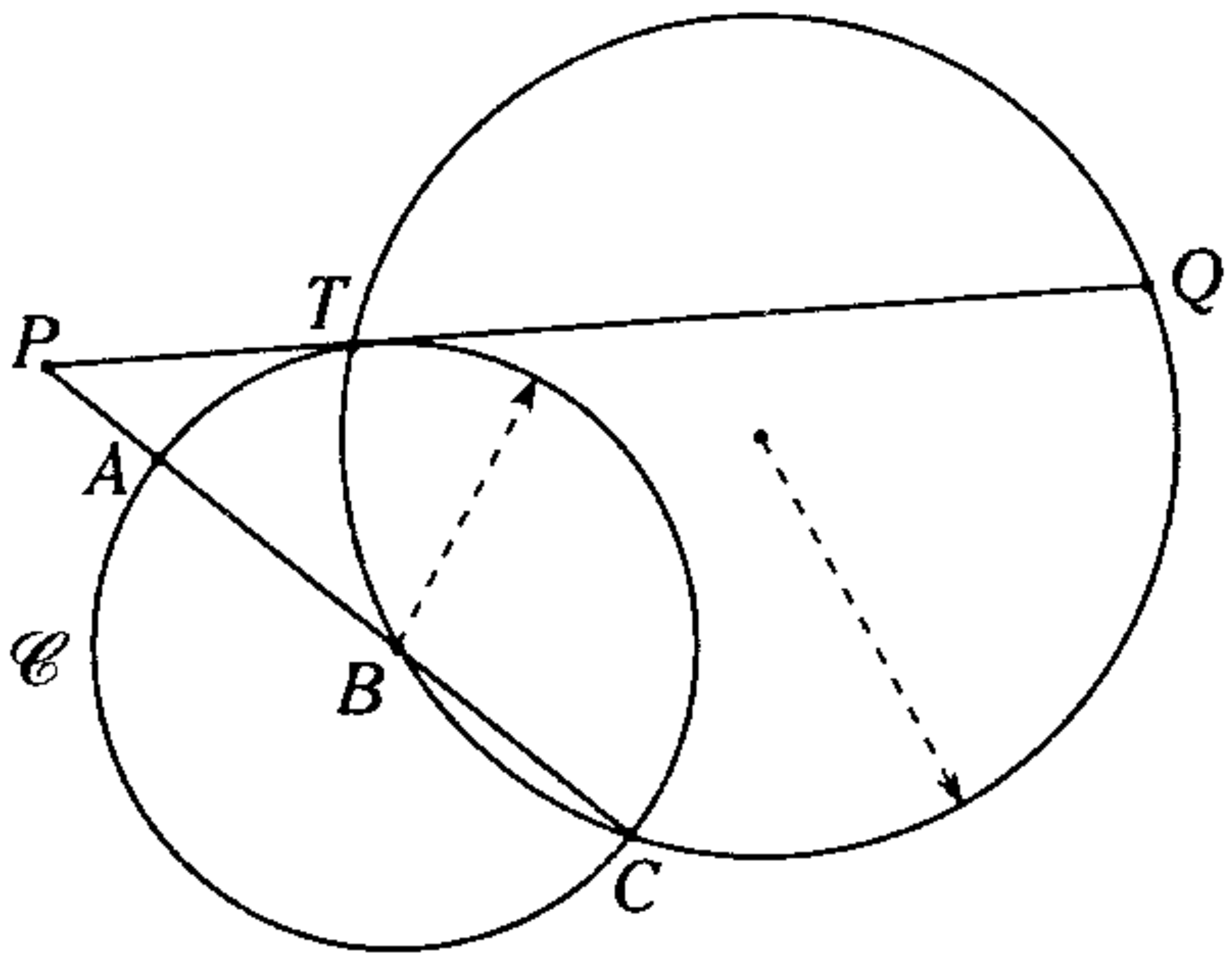
7. En un trapecio isósceles $ABCD(\overline{BC}//\overline{AD}$ M y N son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Sea $\overline{RT}$ la base media del trapecio (T en $\overline{CD}$); $RT = m$ y $RM =$ indique la suma de potencias de A, B, C y respecto a la circunferencia ($AD > BC$).

A) $2mn$ B) $m.n$ C) $4(m^2+n^2$
D) $4n^2+m^2$ E) $4m^2+n^2$

8. Sean dos circunferencias tangentes exteriores $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ (tangentes en T); además, A y B equidistan del eje radical de dichas circunferencias ($A \in \mathscr{C}_2$ y $B \in \mathscr{C}_1$). Si $\overline{AB} \cap \mathscr{C}_2 = \{P\}$; T es la proyección ortogonal de A sobre el eje radical y $m\overset{\frown}{TP} = 53°$, indique la razón de radios.

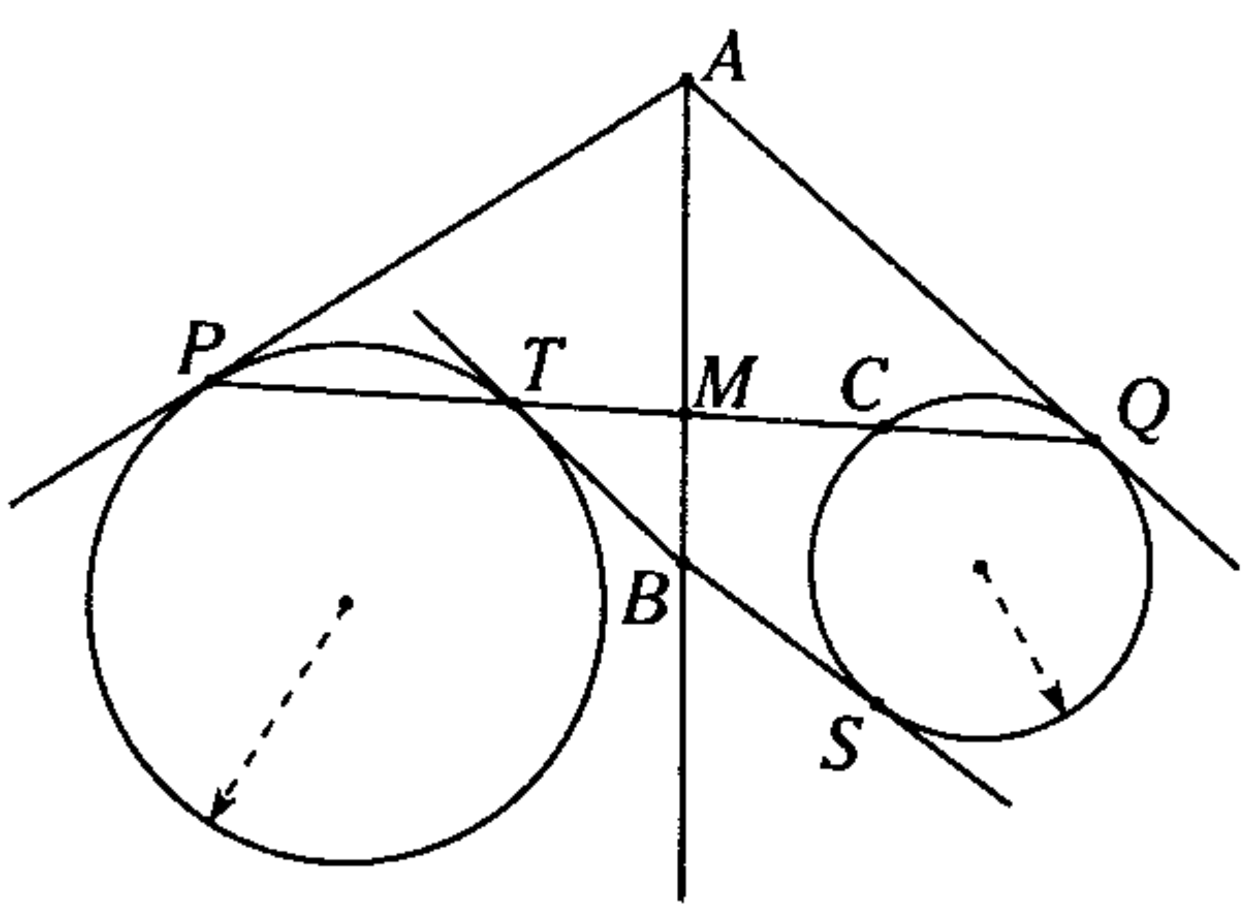
A) 1 B) 2 C) 3
D) 3/2 E) 1/4

9. En la figura, T es punto de tangencia, la razón de potencias de Q y P, con respecto a $\mathscr{C}$, es 4 y $PA = 1$, señale AB.



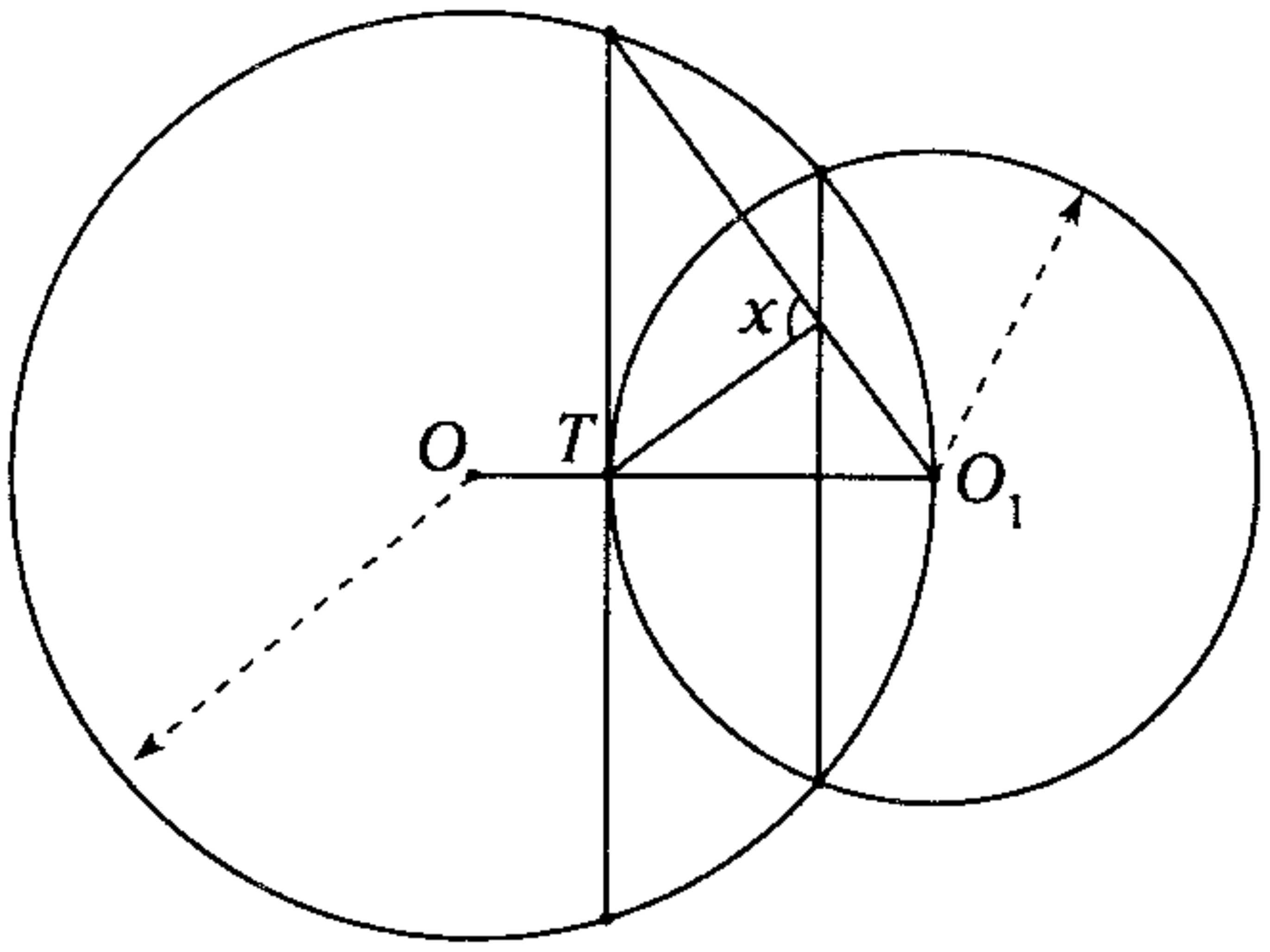
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 3/2

10. Según la figura, P, T y S son puntos de tangencia. Si $PT = 5$; $TM = 4$; $MC = 3$; $BT = BS$ y $\overline{AQ} \,//\, \overline{TB}$, indique CQ.



A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 9

11. En la figura mostrada, T es punto de tangencia. Calcule x.



A) 90° B) 60° C) 75°
D) 45° E) 105°

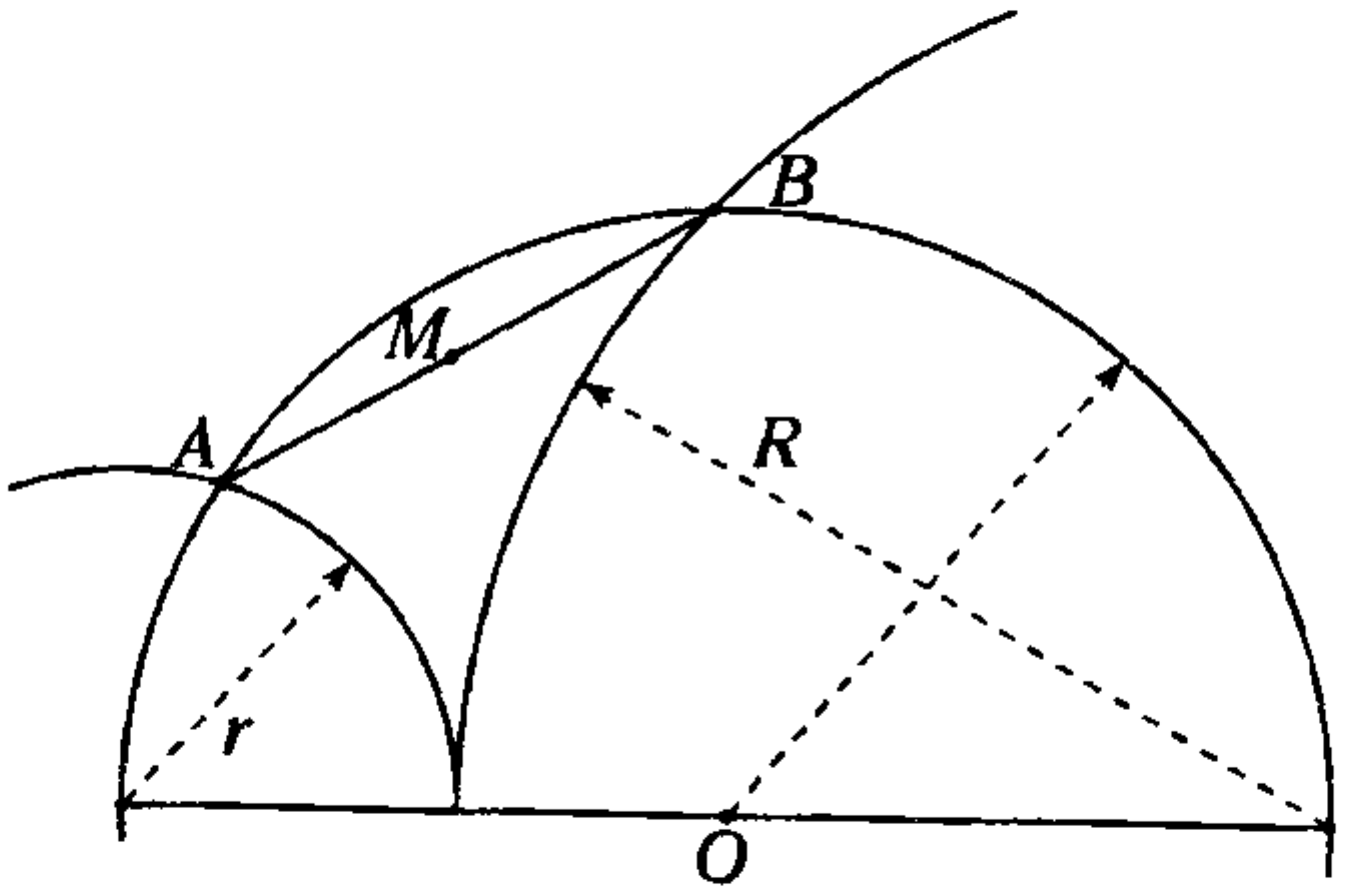
12. En un triángulo ABC, de incentro I y excentro E (relativo a BC), $\mathscr{C}$ es la circunferencia circunscrita y $\dfrac{1}{\text{Pot.}I(\mathscr{C})} + \dfrac{1}{\text{Pot.}E(\mathscr{C})} = \dfrac{1}{K}$. Determine $(AB).(AC)$.

A) $\dfrac{1}{K}$ B) K C) $-K$
D) $-2K$ E) $\dfrac{K}{2}$

13. En un triángulo ABC, la circunferencia $\mathscr{C}$ pasa por B y es tangente a AC en T, tal que $CT = 2(AT)$, además $\mathscr{C}$ interseca a $\overline{BC}$ en N ($BN = NC$). Si $BC = a$, señale Pot. $A(\mathscr{C})$.

A) $\dfrac{a^2}{2}$ B) $\dfrac{a^2}{4}$ C) $\dfrac{a^2}{6}$
D) $\dfrac{a^2}{3}$ E) $\dfrac{a^2}{8}$

14. En la figura, $AM=MB$. Si $R=3$ y $r=2$, calcule la potencia de M, respecto de la circunferencia de centro O.



A) $\left(\frac{2\sqrt{21}-3}{5}\right)^2$

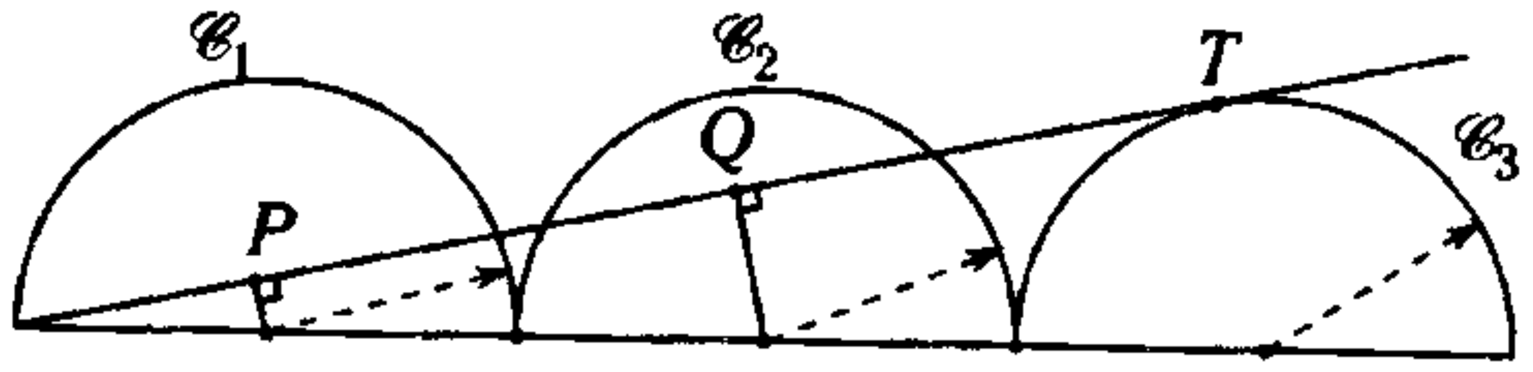
B) $\left(\frac{3-2\sqrt{21}}{5}\right)^2$

C) $-\left(\frac{2\sqrt{21}-3}{5}\right)^2$

D) 1

E) –5

15. Según la figura, las semicircunferencias son congruentes. Si T es punto de tangencia, halle $\frac{\text{Pot.}P(\mathscr{C}_1)}{\text{Pot.}Q(\mathscr{C}_2)}$.



A) $\frac{2}{3}$

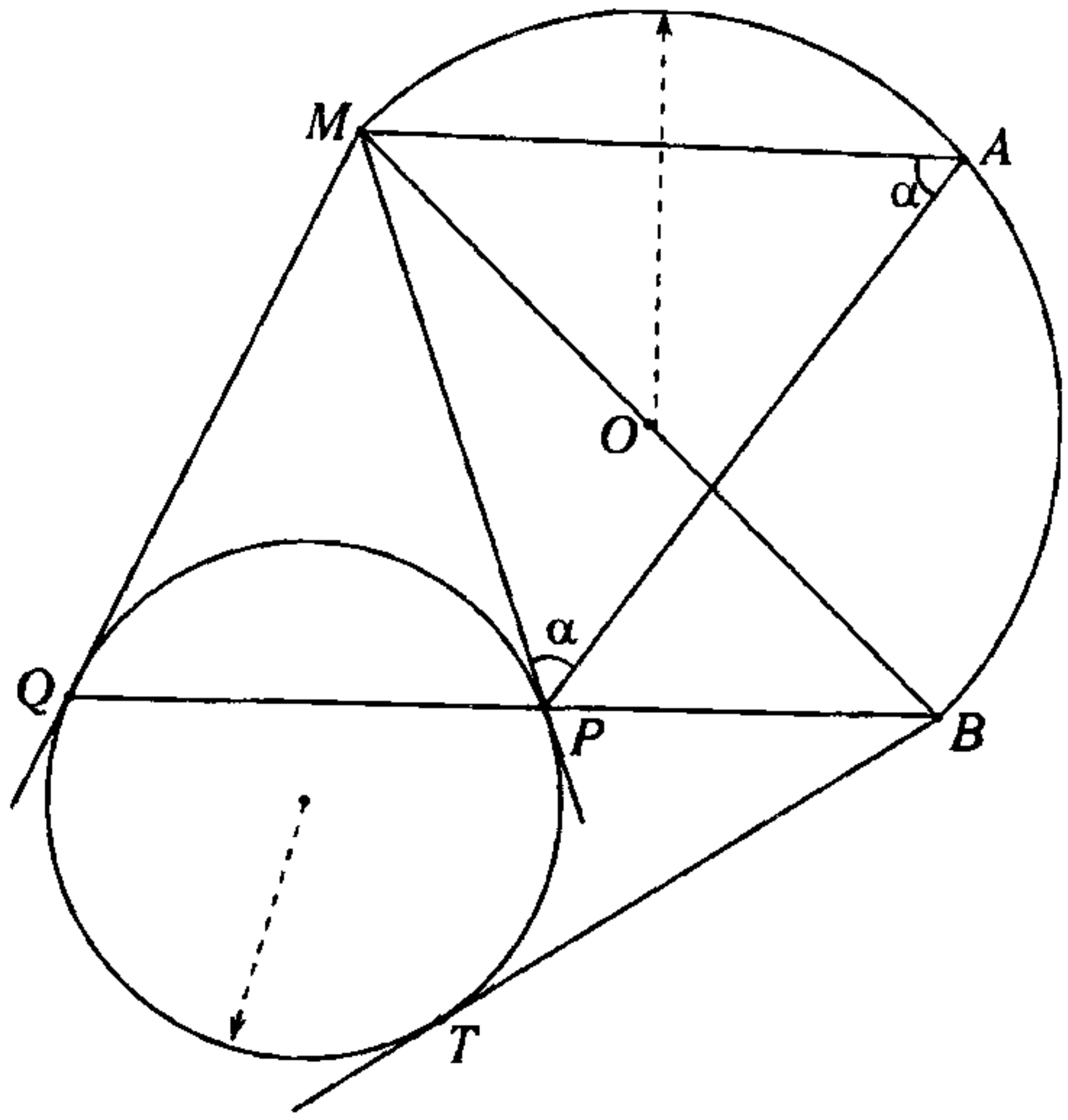
B) $\frac{3}{2}$

C) $-\frac{3}{2}$

D) $\frac{9}{4}$

E) $\frac{8}{9}$

16. En la figura, T, P y Q son puntos de tangencia. Si $AB=a$, calcule BT.



A) a

B) $2a$

C) $3a$

D) $3/4\ a$

E) $a\sqrt{2}$

17. Se tienen dos circunferencias tangentes interiores (tangentes en T). En la circunferencia mayor, se traza una cuerda AB secante a la circunferencia menor en M y N ($M\in\overline{AN}$), tal que $m\widehat{ATB}=m\widehat{MN}$. Si las tangentes trazadas por A y M a las circunferencias se intersecan en Q, halle la medida del ángulo determinado por $\overline{TM}$ y $\overline{OQ}$. Considere a O como el centro de la circunferencia menor.

A) 60°

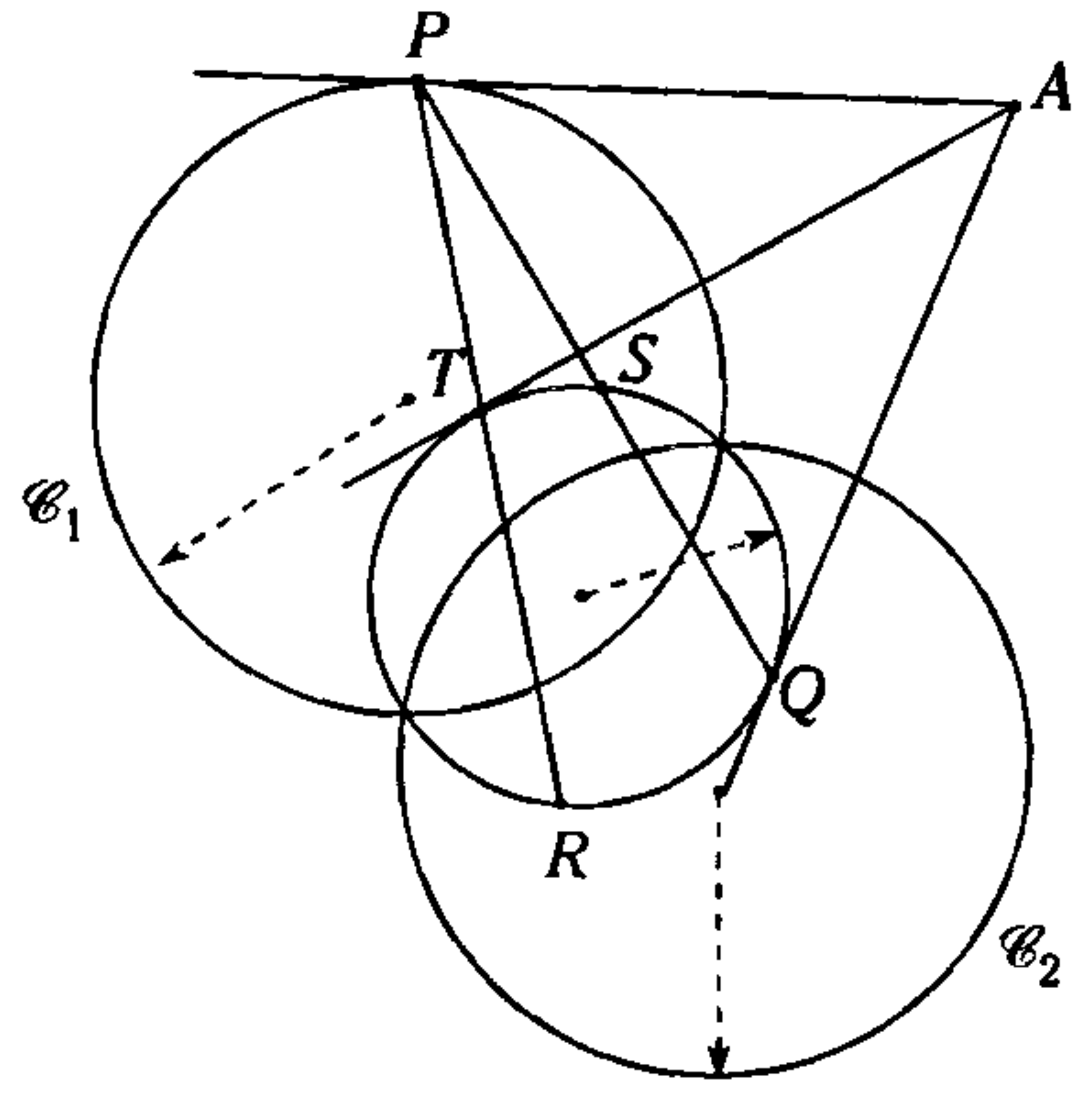
B) 90°

C) 80°

D) 100°

E) 120°

18. En la figura, T, P y Q son puntos de tangencia. Si A pertenece al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, indique la $m\overset{\frown}{RQS}$.

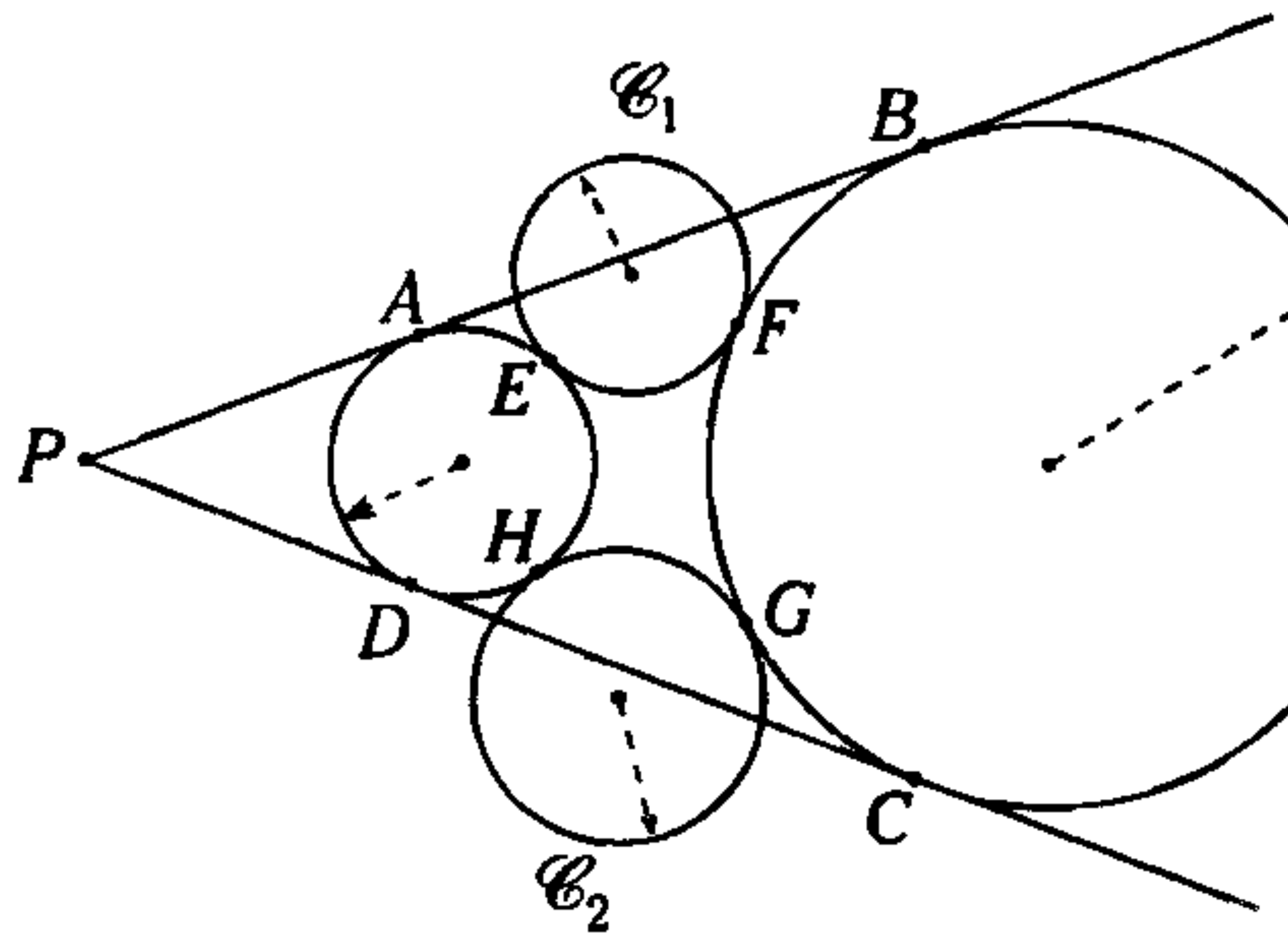


A) 120° B) 240° C) 150°
D) 180° E) 135°

19. Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos circunferencias exteriores y $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos rectas paralelas tangentes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en P y S, respectivamente $\overline{PS}$ interseca a $\mathscr{C}_1$ en T y a $\mathscr{C}_2$ en Q; la tangente a $\mathscr{C}_1$, trazada por T, interseca a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ en A y la tangente a $\mathscr{C}_2$, trazada por Q, interseca a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ en C. Si $\overline{AC}$ interseca a $\overline{TQ}$ en N, calcule QS. Considere que $PT=45$, $TN=4$ y $NQ=3$ ($\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ están en la región interna de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$).

A) 8 B) 10 C) 12
D) 9 E) 6

20. En la figura, A; B; C; D; E; F; G y H son puntos de tangencia.
Si Pot. $P(\mathscr{C}_1)=K$, señale Pot. $P(\mathscr{C}_2)$.



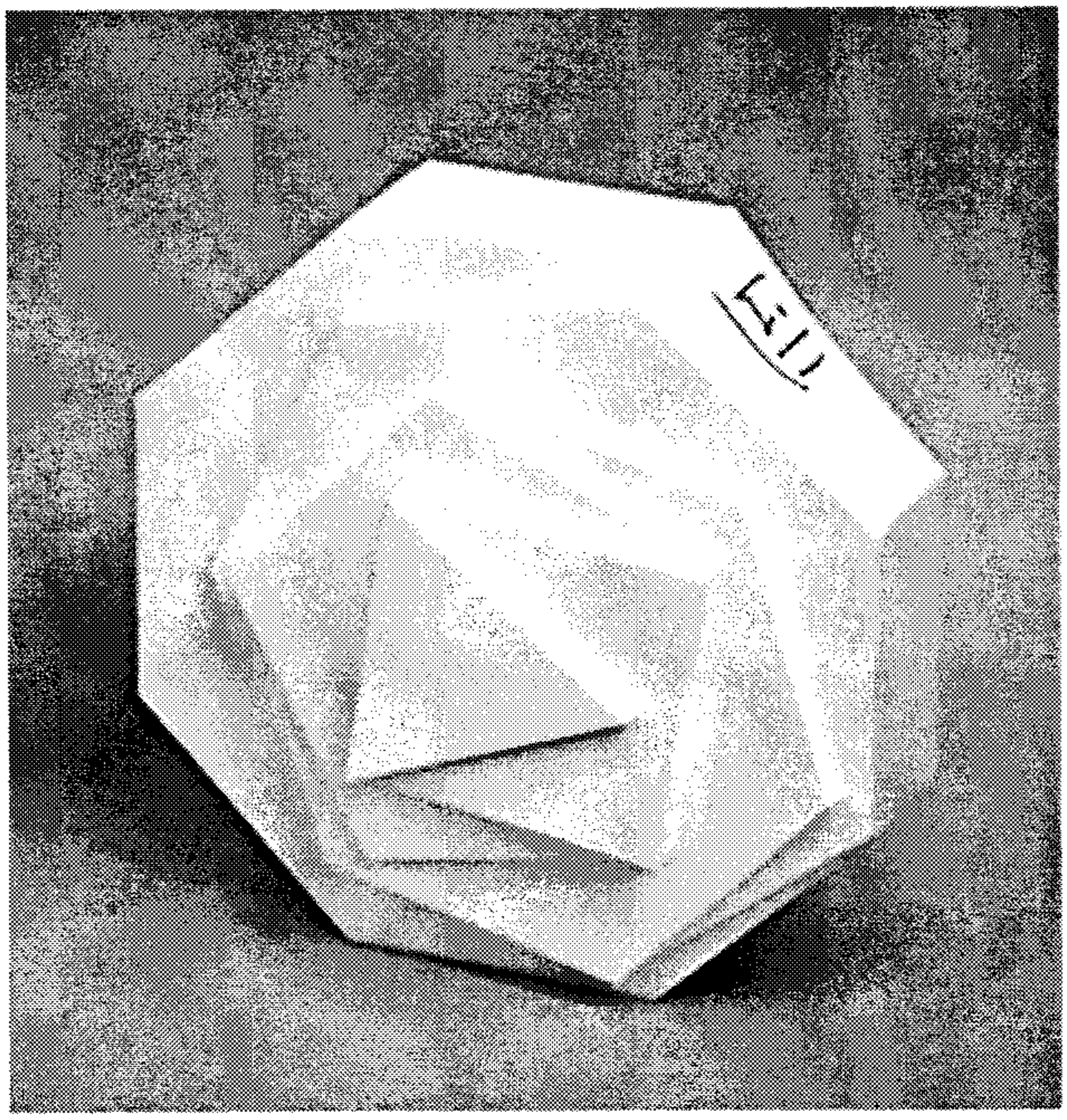
A) K B) $2K$ C) $-K$
D) $K\sqrt{2}$ E) $-2K$

1	B
2	D
3	C
4	D
5	B
6	C
7	D
8	B
9	B
10	E
11	A
12	D
13	E
14	C
15	B
16	A
17	B
18	D
19	D
20	A

Claves

Capítulo XVII

Polígonos regulares



El escultor suizo Max Bill (1908 - 1994) realiza en algunas de sus obras un homenaje a los polígonos regulares, desde el triángulo equilátero hasta el octágono regular.

Polígonos regulares

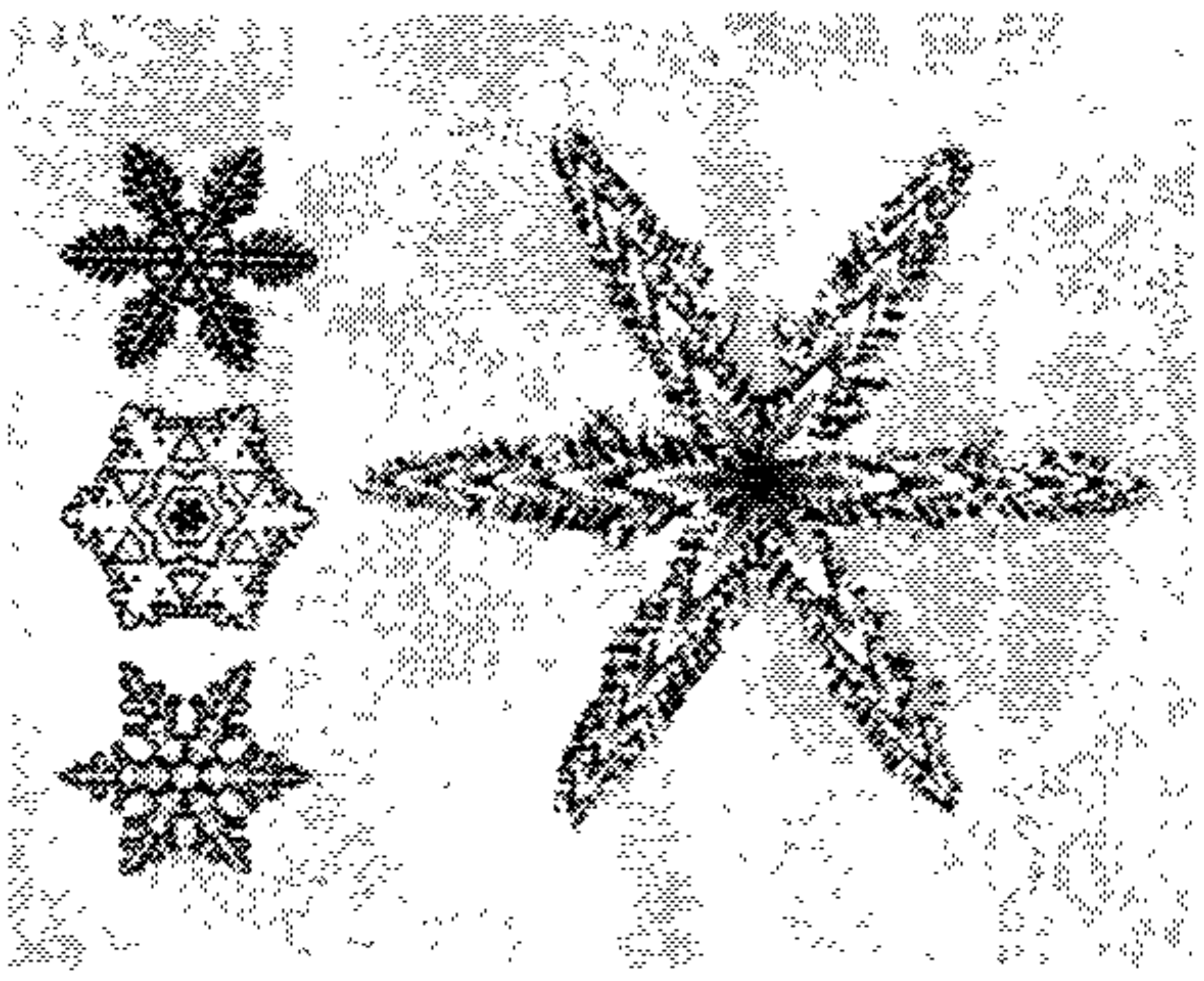
OBJETIVOS

- Definir el polígono regular, indicando sus elementos.
- Conocer los teoremas fundamentales de un polígono regular.
- Establecer las relaciones métricas entre las principales líneas asociadas al polígono regular tales como el lado, circunradio, apotema, etc.
- Estudiar los principales polígonos regulares y la relación con la circunferencia.

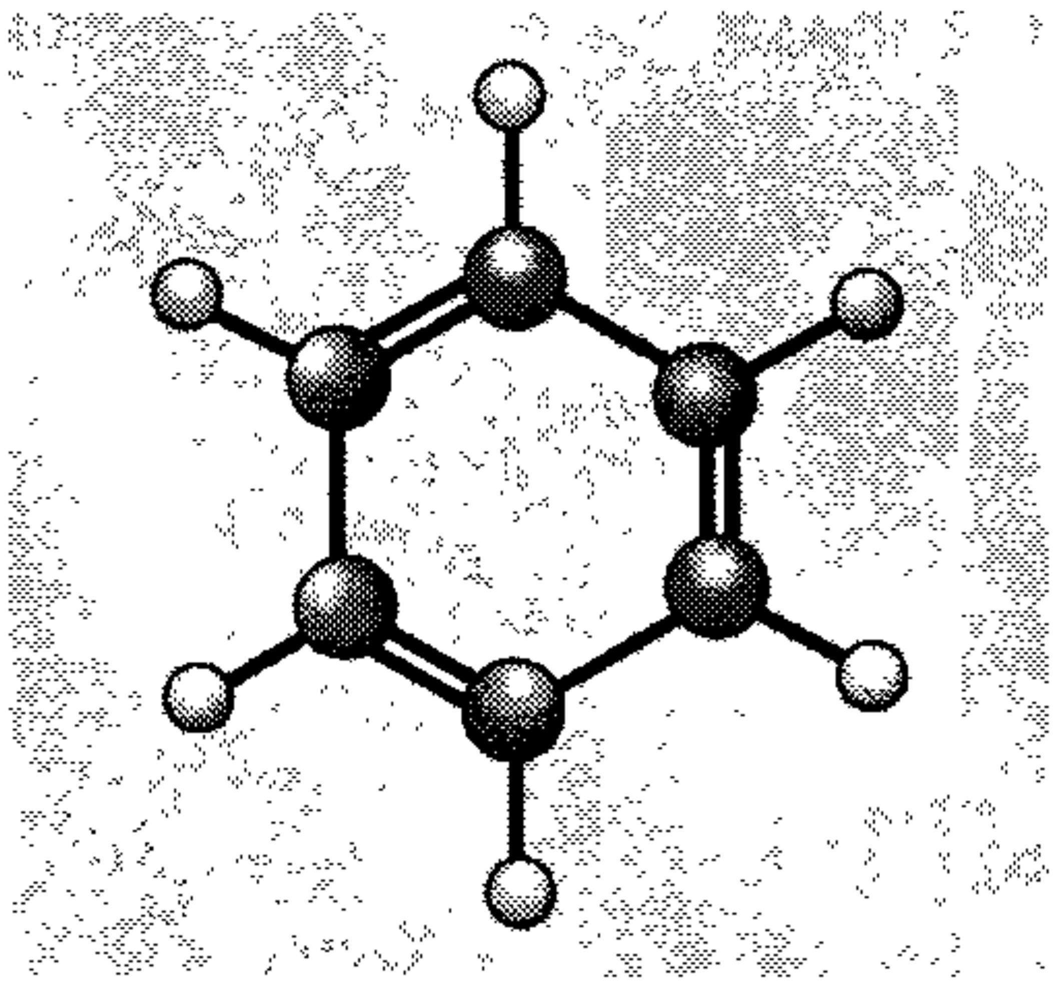
INTRODUCCIÓN

Debemos tener en cuenta que desde la más remota antigüedad, el hombre, con el transcurrir del tiempo y al conocer más la naturaleza, descubrió que en algunos elementos se establecía la regularidad; por ejemplo, los pétalos de una rosa, las formas de los cristales, panal de abejas, etc. Esto lo llevó a decorar sus viviendas con dibujos y ornamentaciones con forma regular.

Posteriormente, el hombre usó las formas poligonales regulares, no solo por consideraciones estéticas, sino también, para realizar aplicaciones más objetivas, como el diseño de tuercas, por ejemplo.



En los copos de nieve no hay dos cristales de nieve iguales pero la simetría de todos es la misma (de forma hexagonal aunque desde un punto de vista estrictamente cristalográfico, trigonal).



El benzeno es uno de los muchos compuestos de carbono e hidrógeno. Su molécula adopta la forma de un exágono regular.

POLÍGONO REGULAR

DEFINICIÓN

Es aquel polígono equilátero, donde los pares angulares que forman sus lados son congruentes.

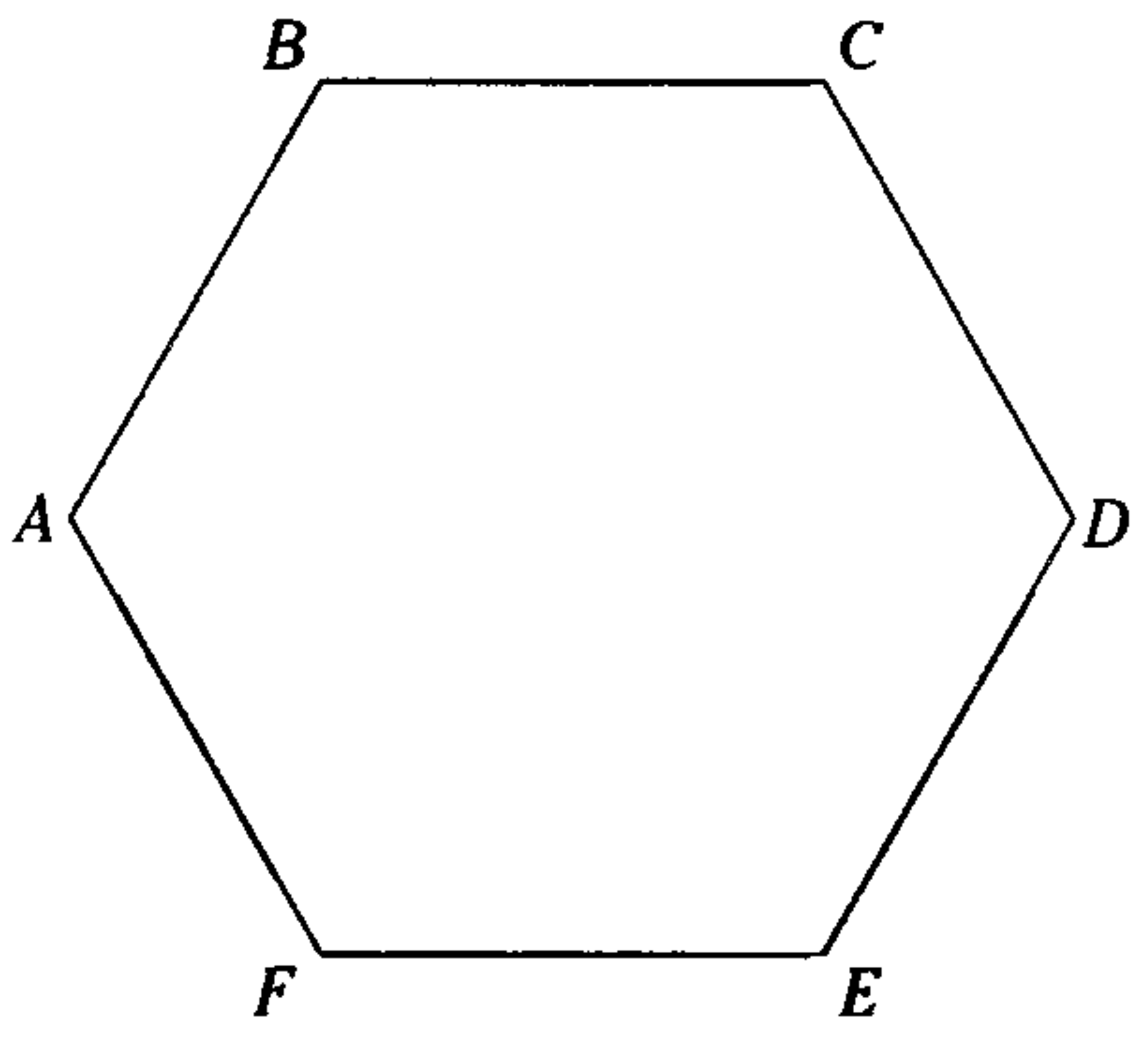


Figura 17.1

Según la figura

Si $AB = BC = CD = DE = EF = AF$ y

$\angle ABC \cong \angle BCD \cong \angle CDE \cong \angle DEF \cong \angle EFA \cong \angle FAB$,

entonces $ABCDEF$ es un polígono regular.

ELEMENTOS ASOCIADOS

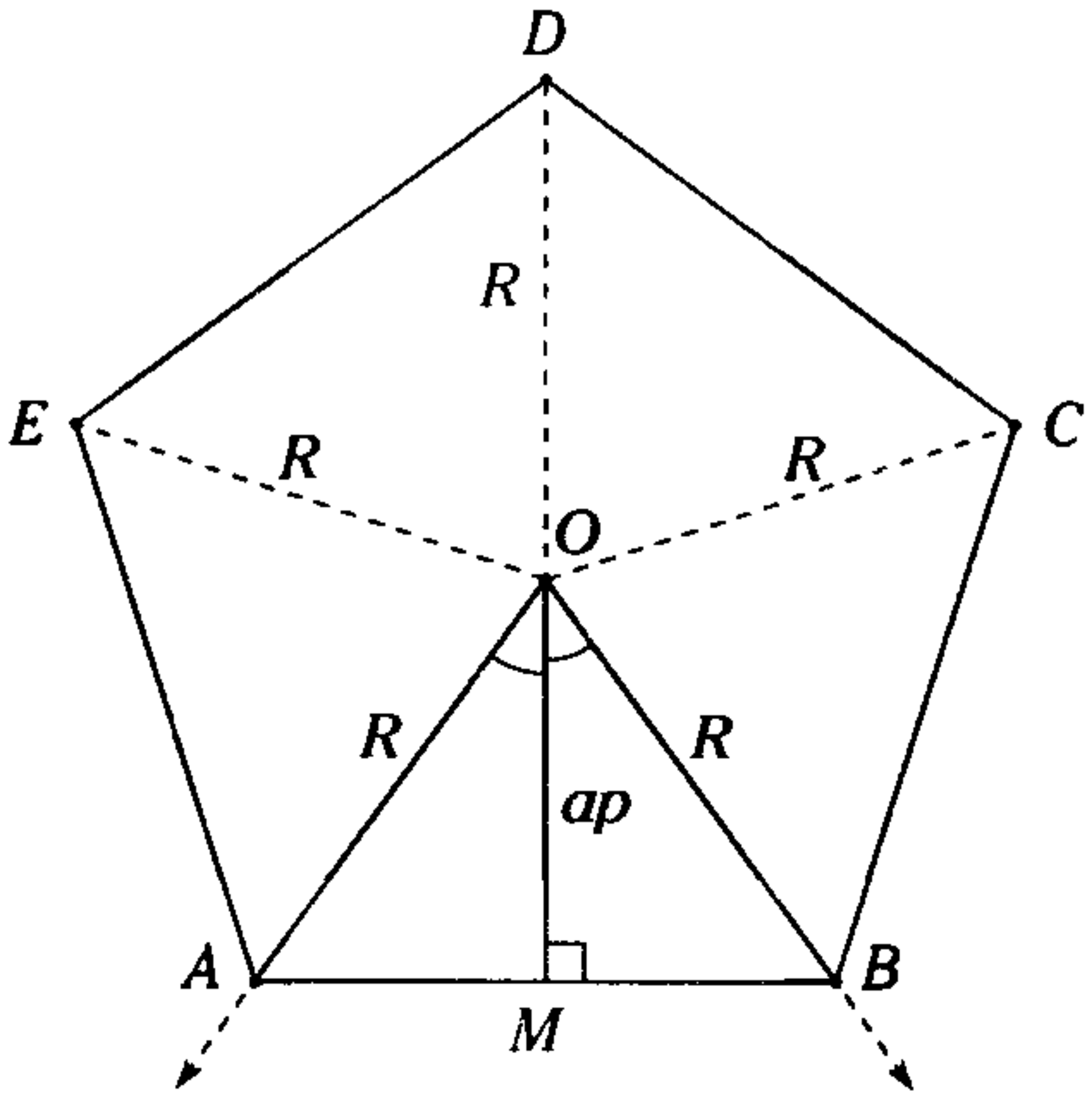


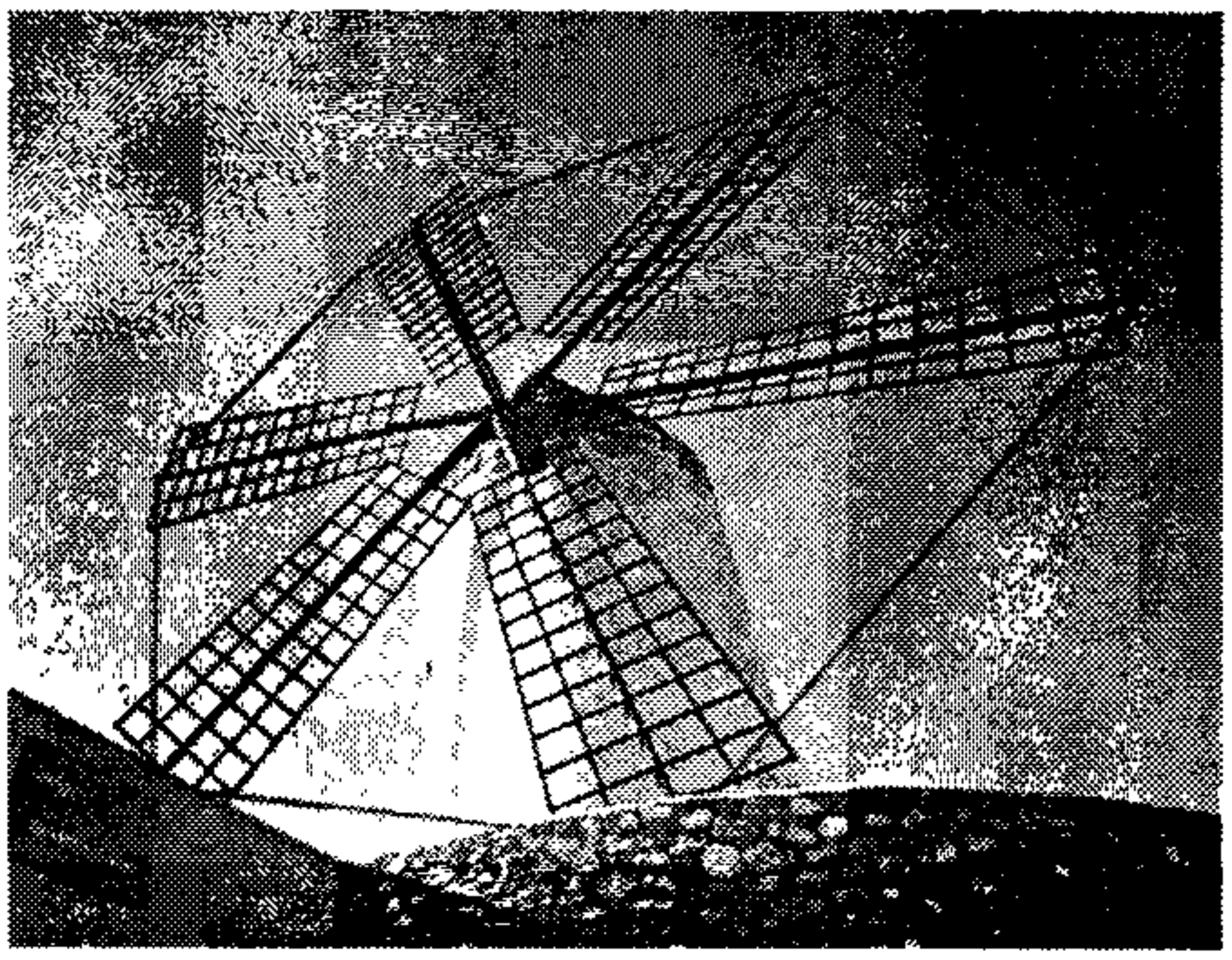
Figura 17.2

O: centro; R: circunradio; OM: apotema (a_p)

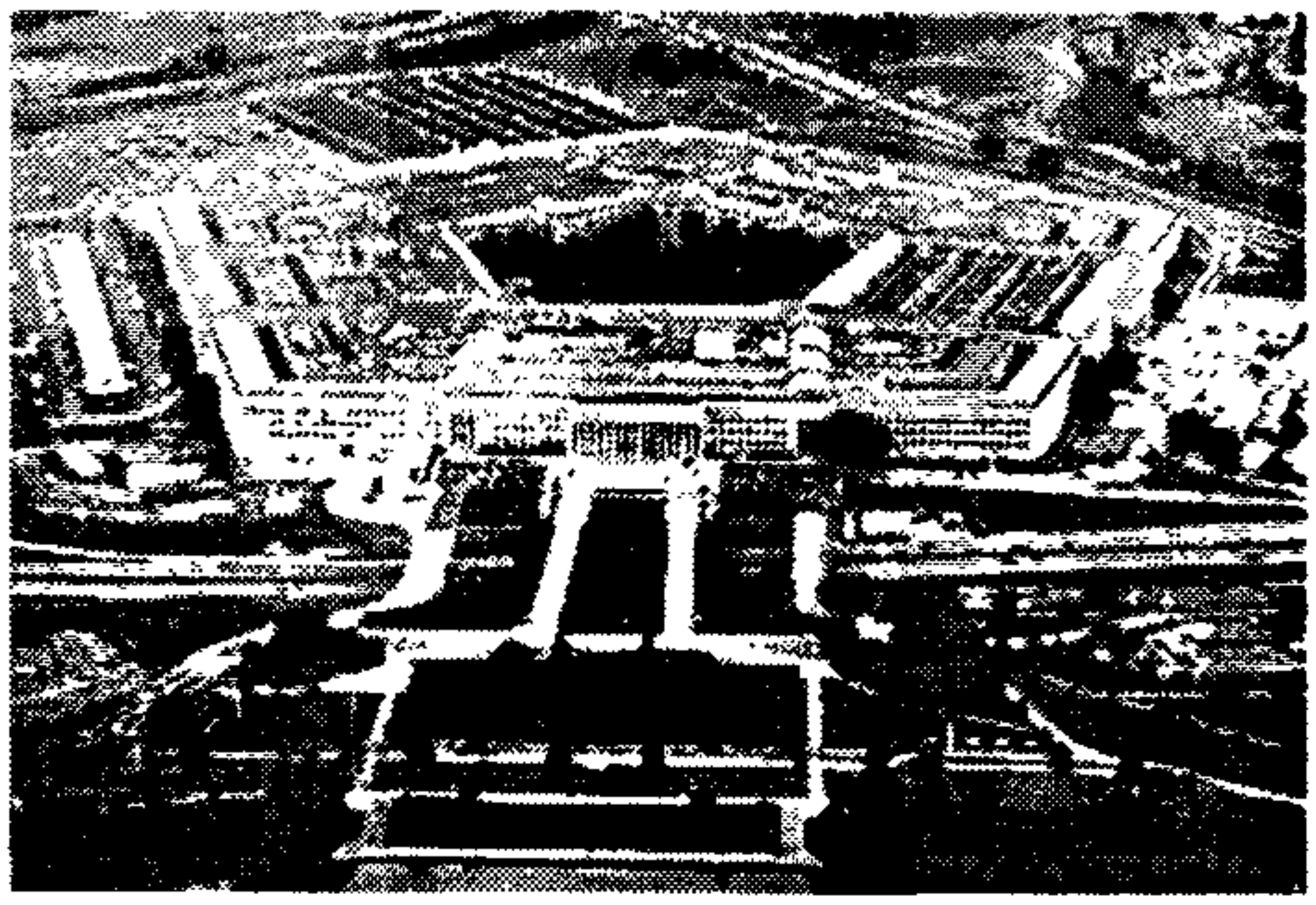
($\overline{OM} \perp \overline{AB}$); ($AM = MB$)

$\triangle AOB$: triángulo elemental del polígono

$\sphericalangle AOB$: $\sphericalangle$central



Las aspas de un molino de viento son radios del exágono regular cuyos vértices son los extremos de las aspas.



***El Pentágono.** La sede del departamento de Defensa de EE.UU. es una estructura que tiene forma de pentágono regular.*

Teorema

Al dividir una circunferencia en n partes iguales $(n \in \mathbb{Z})(n > 2)$ y al unir en forma consecutiva los puntos de división, mediante segmentos de recta, se forma un polígono regular.

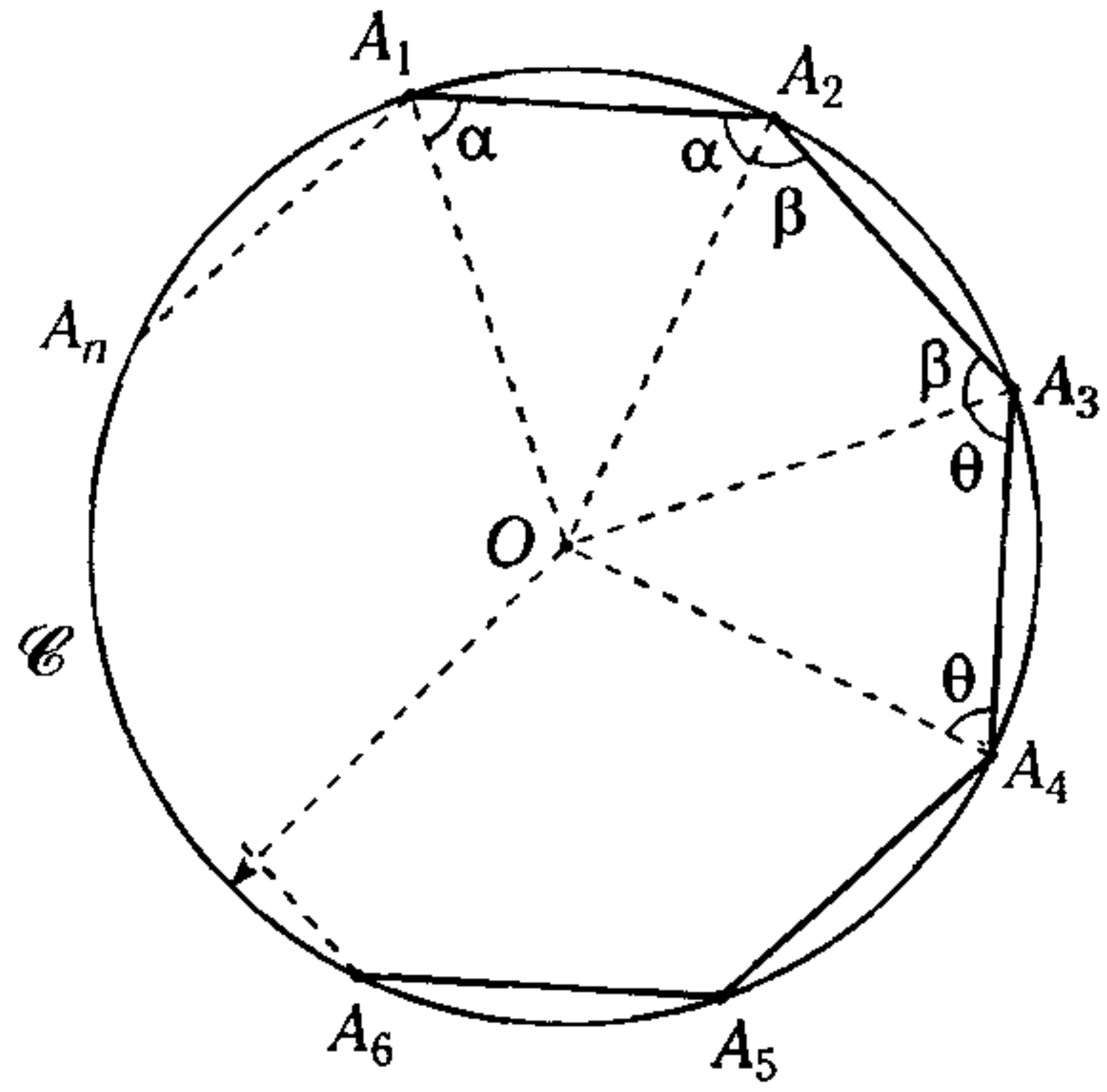


Figura 17.3

Según la figura, n: número de divisiones en la $\mathscr{C}$

y $m\overset{\frown}{A_1A_2} = m\overset{\frown}{A_2A_3} = m\overset{\frown}{A_3A_4} = \ldots = m\overset{\frown}{A_nA_1}$

Del teorema en la circunferencia

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots = A_nA_1$$

Por congruencia de triángulos

$$\triangle A_1A_2O \cong \triangle A_2A_3O \cong \triangle A_3A_4O \cong \ldots \text{ (LLL)}$$

$$\rightarrow \alpha = \beta = \theta = \ldots$$

y $m\sphericalangle A_1A_2A_3 = m\sphericalangle A_2A_3A_4 = m\sphericalangle A_4A_5A_6 = \ldots$

Por lo tanto el polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ es un polígono regular.

TEOREMA RECÍPROCO

Todo polígono regular es inscriptible.

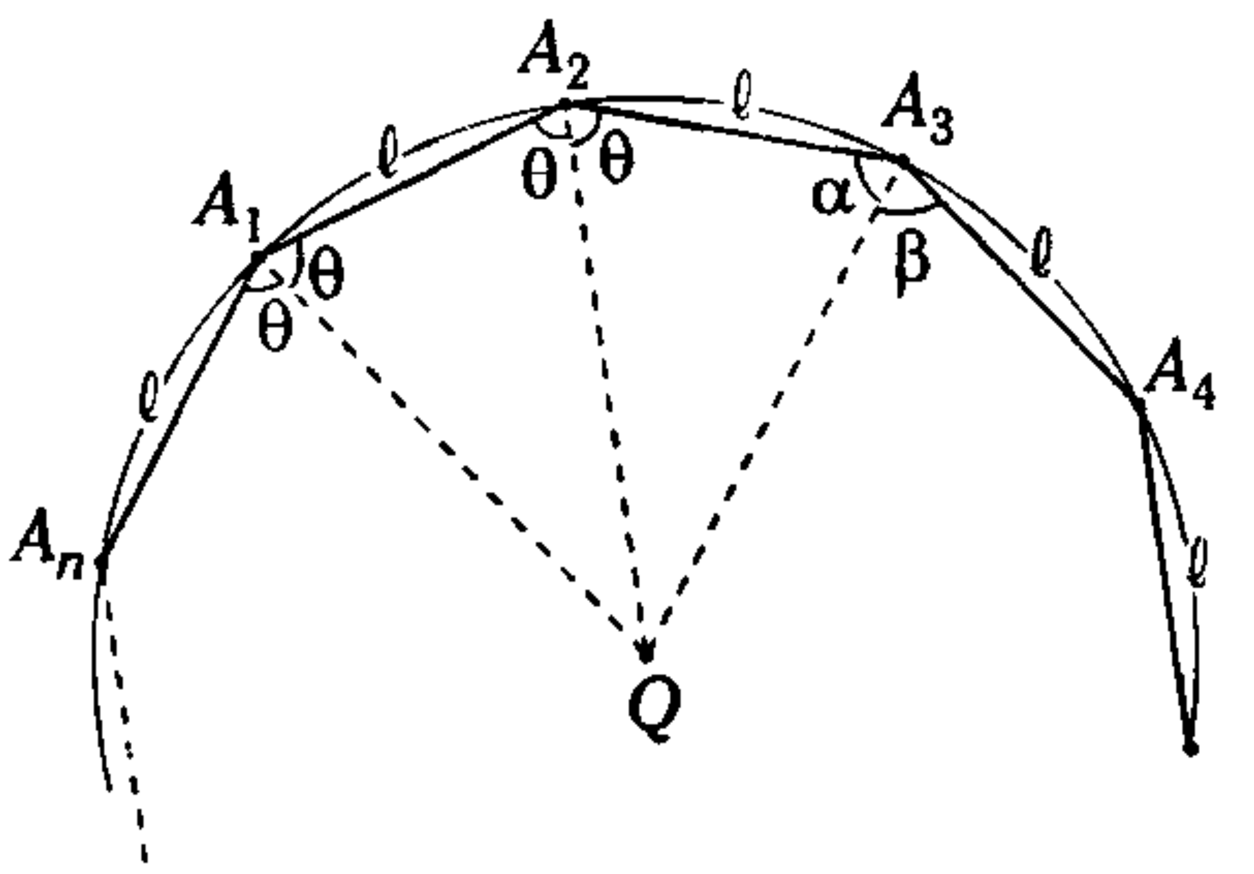


Figura 17.4

Sea el polígono regular $A_1A_2A_3 \ldots : A_n$, al trazar las bisectrices de los ángulos $A_nA_1A_2$; $A_1A_2A_3$

Se tiene $\triangle A_1A_2Q \cong \triangle A_2A_3Q$ (LAL) $\rightarrow \alpha = \theta$

Como $\alpha + \beta = 2\theta \rightarrow \beta = \theta$

Quiere decir que $A_1Q = A_2Q = A_3Q$

Analizando de manera análoga para los demás vértices, se tiene $A_1Q = A_2Q = A_3Q = \ldots = A_nQ$

$\therefore A_1, A_2, A_3 \ldots = A_n$ es un polígono regular.

Teorema

Si al dividir una circunferencia en n partes iguales $(n > 2)$ y por los puntos de división se trazan rectas tangentes, entonces los puntos de intersección de dos rectas tangentes en forma consecutiva son los vértices de un polígono regular circunscrito.

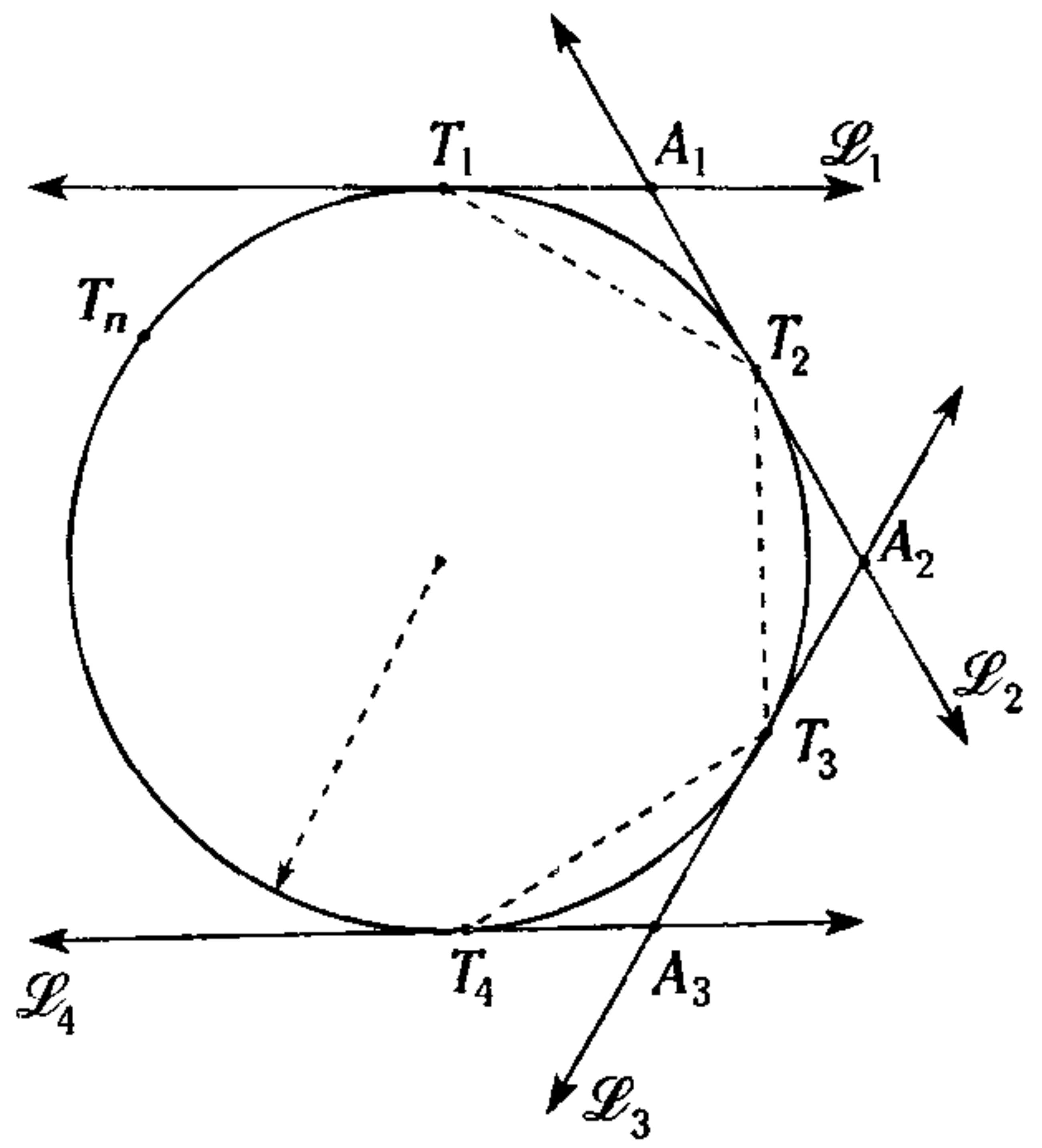


Figura 17.5

Según la figura

$$m\overset{\frown}{T_1T_2} = m\overset{\frown}{T_2T_3} = \ldots = m\overset{\frown}{T_nT_1}$$

Por teorema en la circunferencia

$$T_1T_2 = T_2T_3 = \ldots = T_nT_1$$

Por congruencia de triángulos

$\triangle T_1A_1T_2 \cong \triangle T_2A_2T_3 \cong \ldots \cong \triangle T_{n-1}T_nT_1$ (A.L.A.)

$\rightarrow T_1A_1 = A_1T_2 = T_2A_2 = A_2T_3 = T_3A_3 \ldots A_nT_1$

Por lo que

$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots A_nA_1$

Por lo tanto, el polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ es un polígono regular.

TEOREMA RECÍPROCO

Todo polígono regular es circunscriptible a una circunferencia.

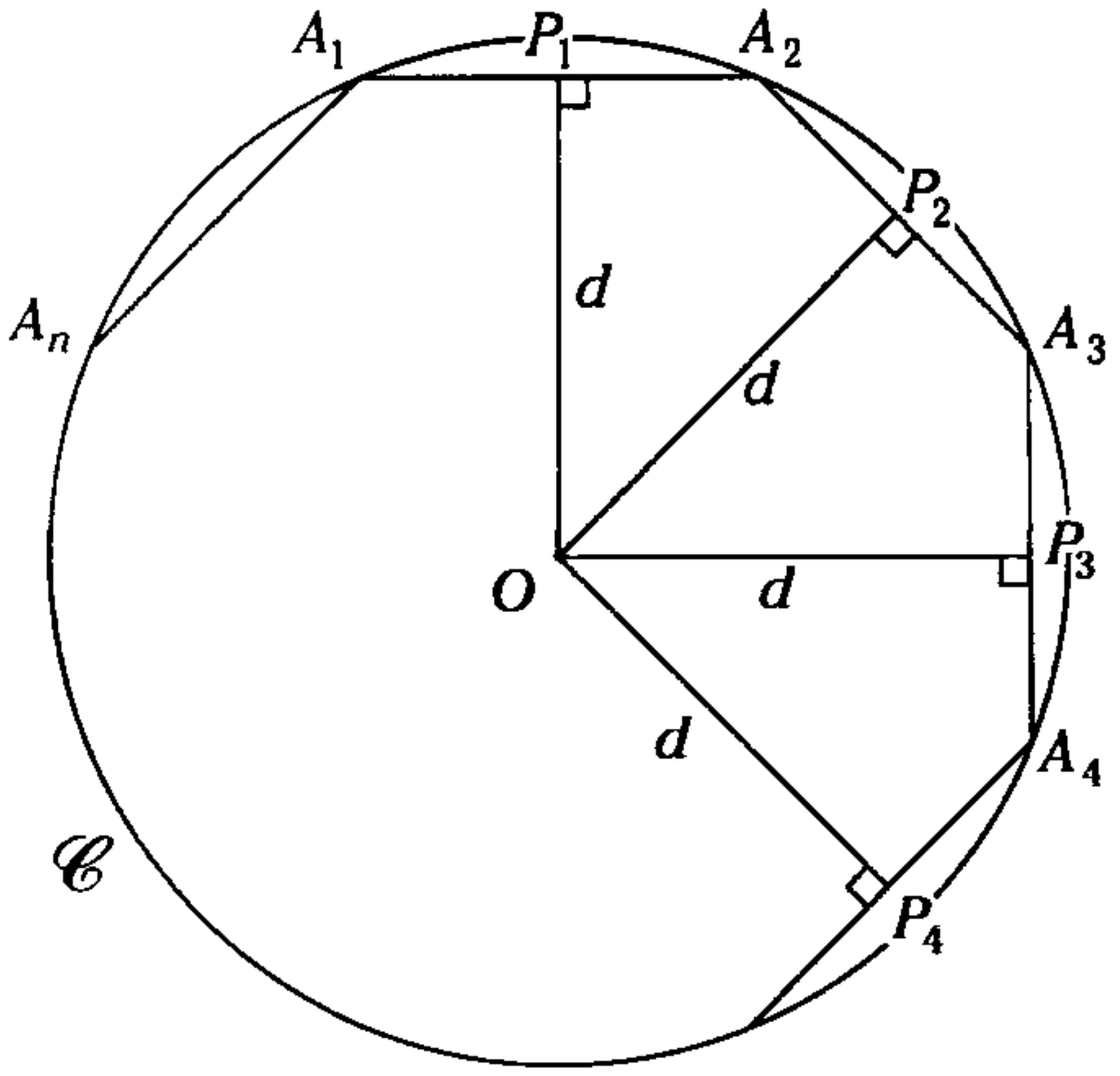


Figura 17.6

Según la figura, $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ es un polígono regular. Por uno de los teoremas anteriores, se sabe que el polígono regular es inscrito a una circunferencia, de esta manera, los lados del polígono son cuerdas de igual longitud para la circunferencia $\mathscr{C}$.

Por teorema en la $\mathscr{C}$, las cuerdas equidistan del centro O de $\mathscr{C}$.

$OP_1 = OP_2 = OP_3 = \ldots OP_n = d$

Así, por $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ se puede trazar una circunferencia de centro O y radio d.

Conclusión

Todo polígono regular se puede inscribir y circunscribir a circunferencias concéntricas. Al centro de dichas circunferencias se le denomina centro del polígono, el circunradio del polígono es el radio de la circunferencia circunscrita y el apotema es el radio de la circunferencia inscrita.

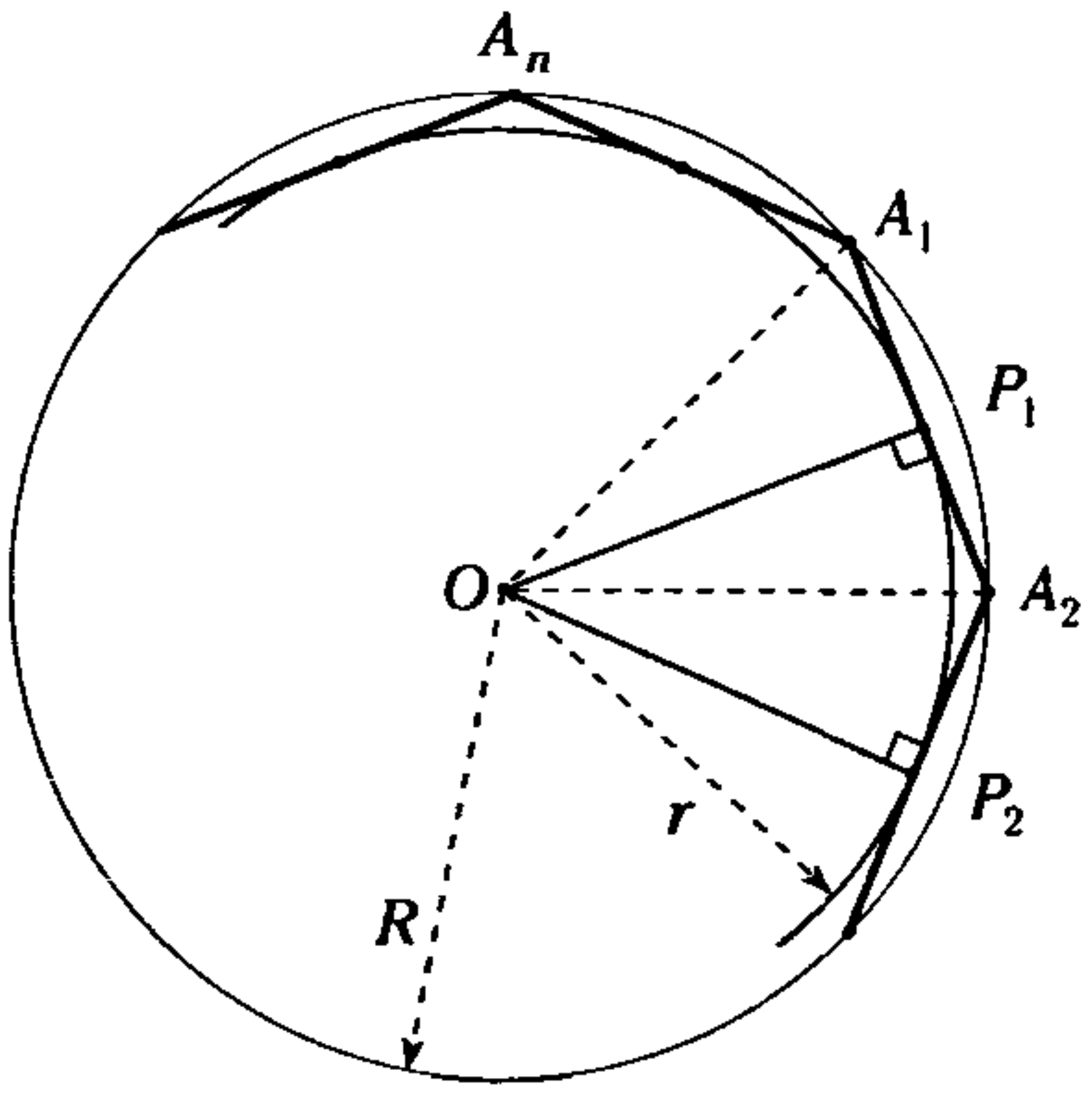


Figura 17.7

Según la figura

O: centro del polígono regular $A_1A_2A_3 \ldots A_n$

$\overline{OP_1}, \overline{OP_2} \ldots, \overline{OP_n}$: apotemas

r: inradio del polígono

R: circunradio del polígono.

$\triangle A_1OA_2$: triángulo elemental

Una malla de alambre con un tejido de forma exagonal.

Cálculo de la longitud del lado de un polígono regular de n lados, en función de su circunradio y de la medida de su ángulo central

La longitud de un lado de un polígono regular es igual al circunradio multiplicado por la raíz cuadrada del doble de la diferencia de la unidad y el coseno del ángulo central.

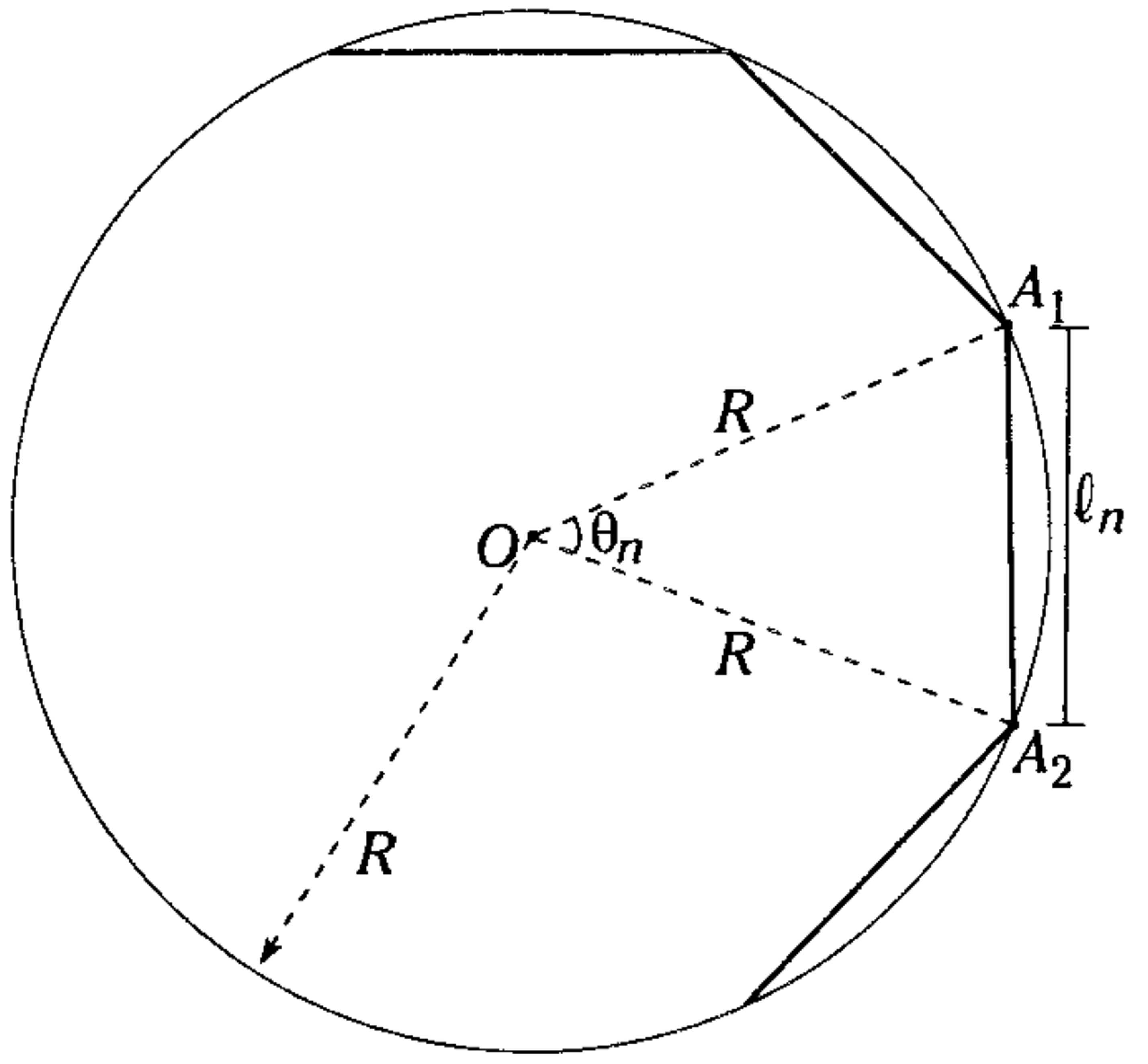


Figura 17.8

Según la figura, $\triangle A_1A_2O$: triángulo elemental del polígono regular.

Por teorema de cosenos

$$(\ell_n)^2 = R^2 + R^2 - 2R(R)\cos\theta_n$$

Operando

$$\boxed{\ell_n = R\sqrt{2(1-\cos\theta_n)}}$$

Cálculo de la longitud del apotema de un polígono regular, en función de su circunradio y de la longitud de su lado

En todo polígono regular, la longitud del apotema es igual a la mitad de la raíz cuadrada de la diferencia de cuadrados, de las longitudes del diámetro y el lado de dicho polígono.

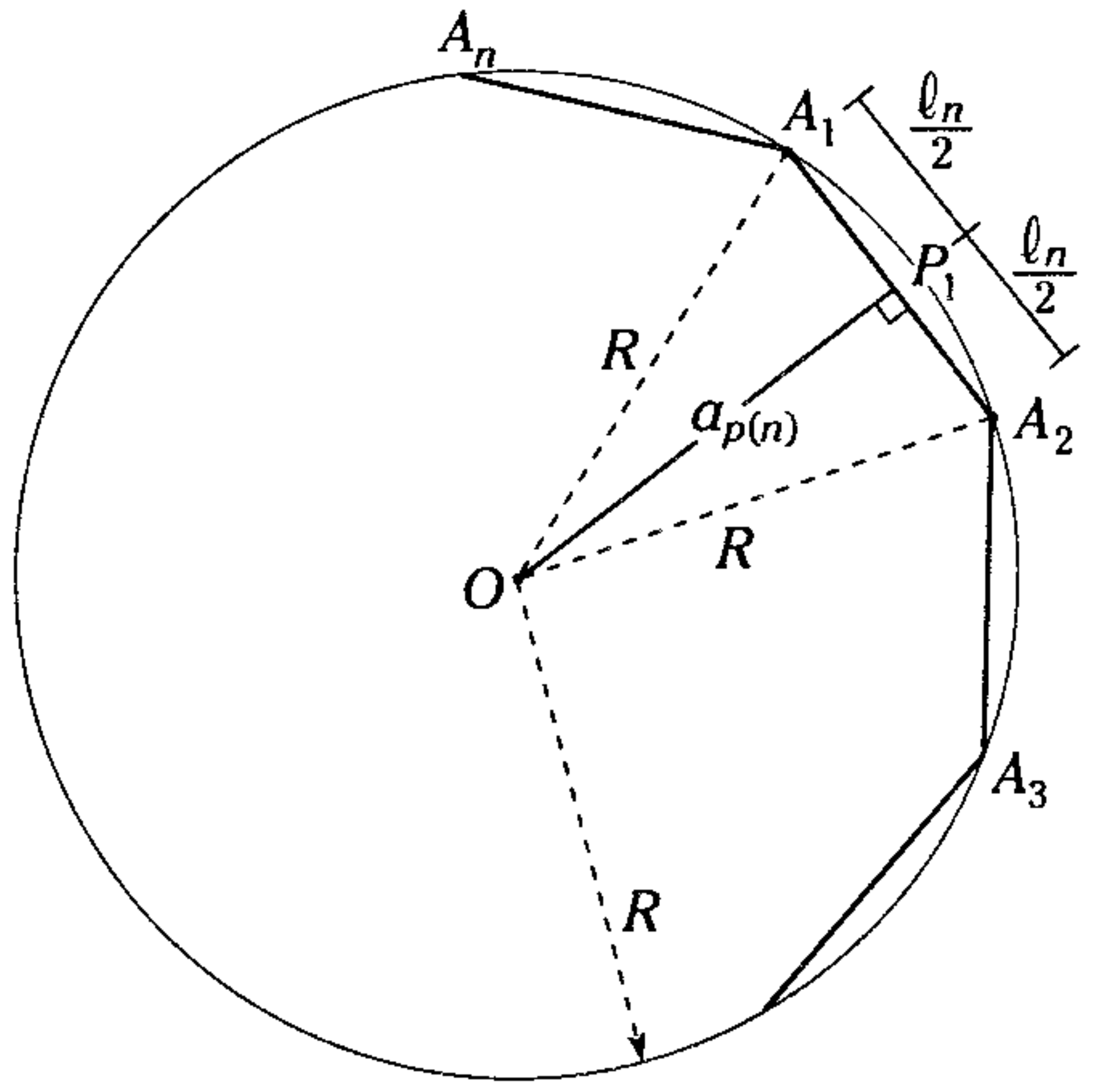


Figura 17.9

En el $\triangle OP_1A_1$, por teorema de Pitágoras

$$(a_{p(n)})^2 = R^2 - \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2$$

$$(a_{p(n)})^2 = R^2 - \frac{(\ell_n)^2}{4}$$

Operando

$$\boxed{a_{p(n)} = \frac{1}{2}\sqrt{(2R)^2 - (\ell n)^2}}$$

Cálculo de la longitud del lado de un polígono regular de 2n lados, en función de su circunradio y la longitud del lado del polígono regular inscrito de n lados

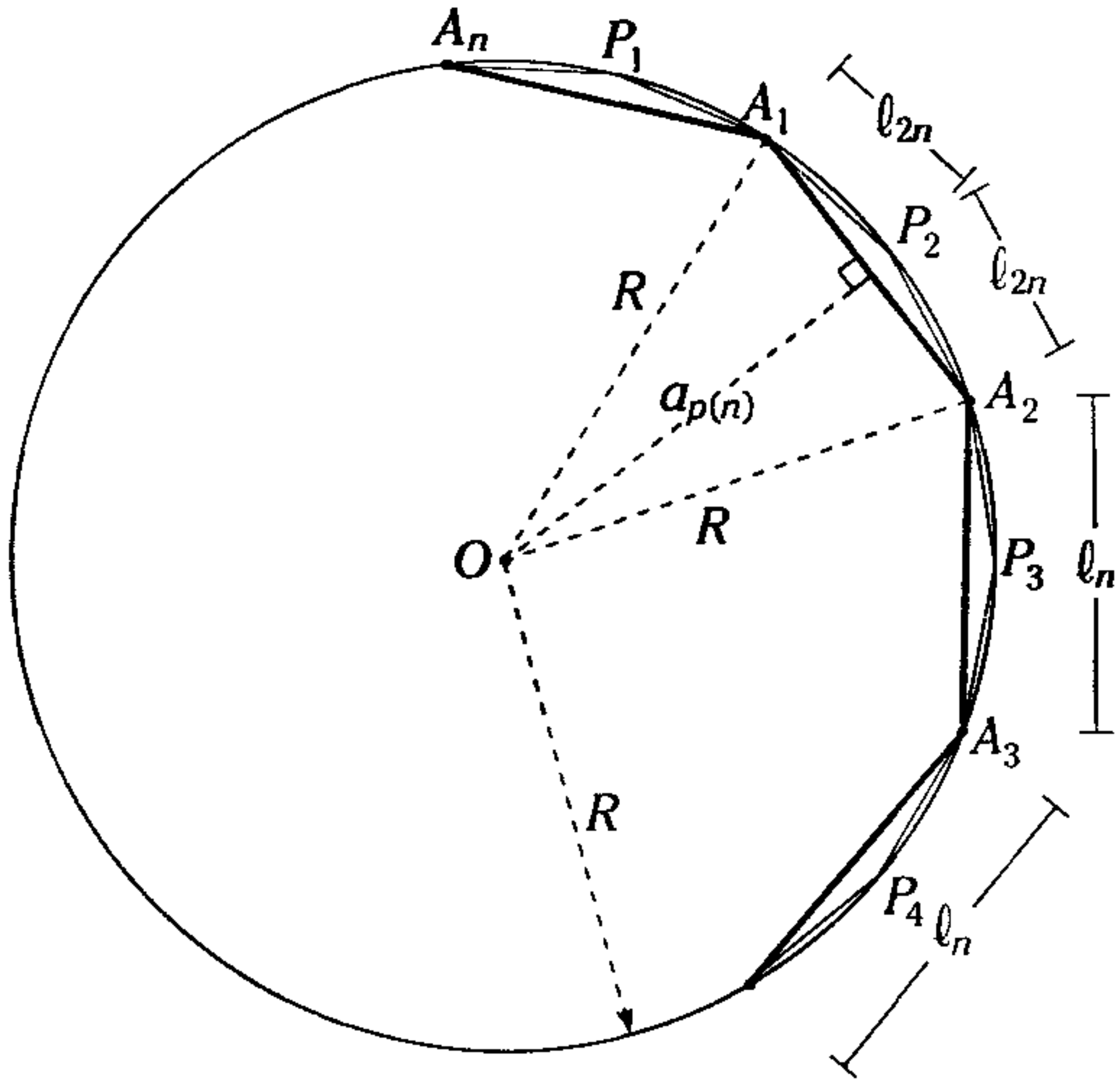


Figura 17.10

Según la figura

ℓ_{2n} : longitud del lado del polígono $2n$ lados

ℓ_n : longitud del lado del polígono de n lados

$\triangle OA_1P_2$: teorema de Euclides

$$(\ell_{2n}) = R^2 + R^2 - 2R(ap_n)$$

$$(\ell_{2n})^2 = 2R^2 - 2R^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell n^2}\right)$$

Operando

$$\boxed{\ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}}$$

Cálculo del lado de un polígono regular circunscrito a una circunferencia, en función del radio de la circunferencia y de la longitud del lado del polígono regular del mismo número de lados inscrito en dicha circunferencia

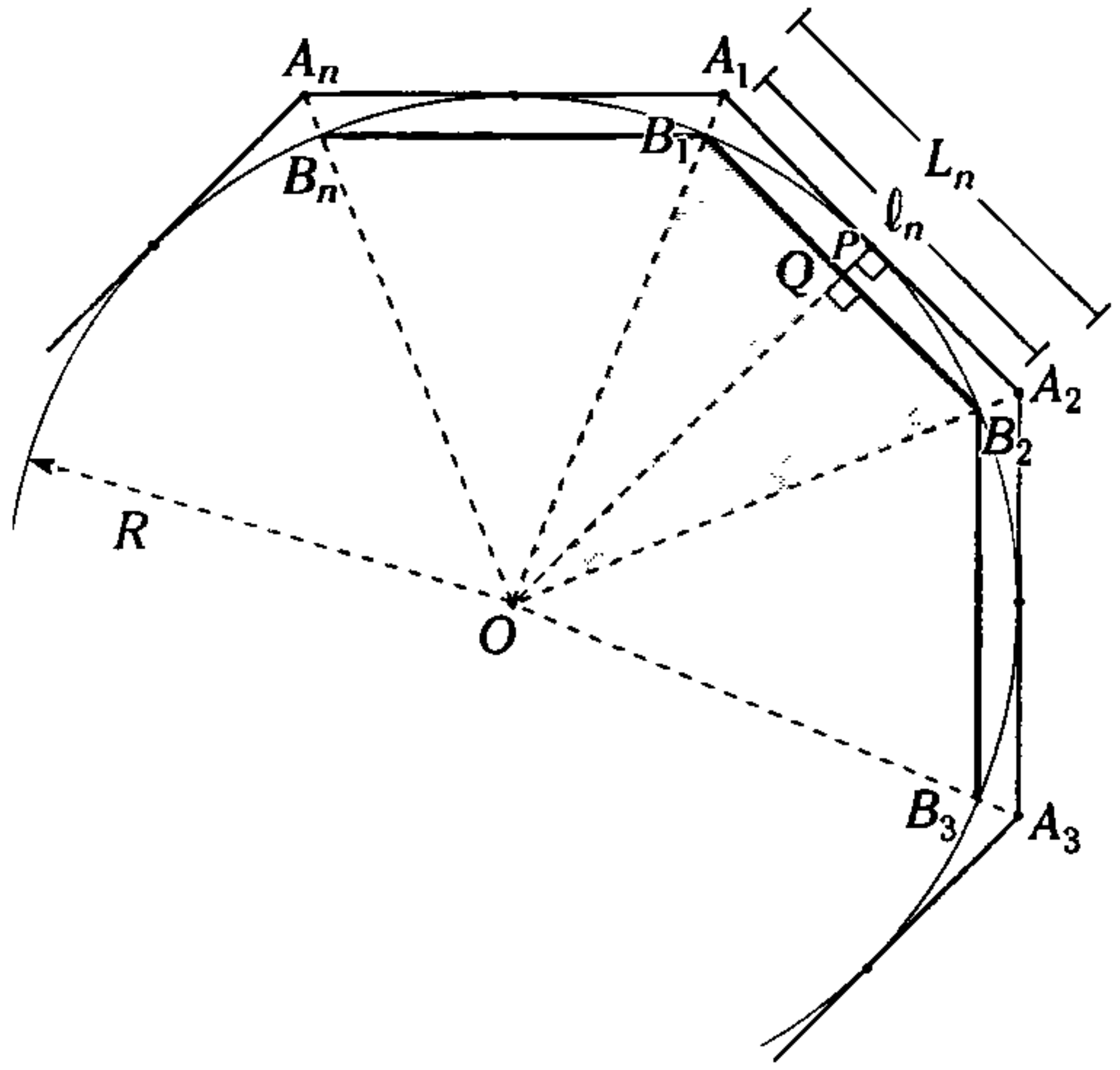


Figura 17.11

Según la figura

ℓ_n: longitud del lado del polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia.

L_n: longitud del lado del polígono regular de n lados circunscrito a la circunferencia de radio R.

$\triangle A_1OA_2 \sim \triangle B_1OB_2$

$$\frac{L_n}{\ell_n} = \frac{OP}{OQ} \qquad \text{(I)}$$

Pero $OP = R$, $OQ = \dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - (\ell_n)^2}$

Reemplazando en (I)

$$\frac{L_n}{\ell_n} = \frac{2R\ell_n}{\sqrt{4R^2 - \ell_n}}$$

$$\boxed{L_n = \frac{2R\ell_n}{\sqrt{4R^2 - (\ell_n)^2}}}$$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

Se divide un segmento $\overline{AB}$ en media y extrema razón, cuando en un punto P ($P \in \overline{AB}$), tal que $AP > PB$, se cumpla que $\overline{AP}$ es media proporcional entre $\overline{AB}$ y $\overline{PB}$.

Interpretación gráfica

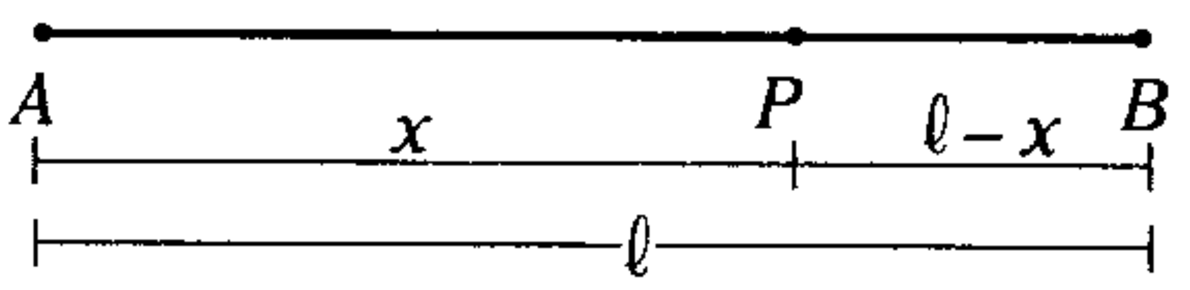


Figura 17.12

Según la figura, $P \in \overline{AB}$, $AP > PB$

y $$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB} \qquad \text{(I)}$$

Reemplazando

$AB = \ell$, $AP = x$, $PB = \ell - x$ en (I)

$$\rightarrow \frac{\ell}{x} = \frac{x}{\ell - x}$$

Operando

$$x^2 + \ell x - \ell^2 = 0$$

$$x = \ell\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \qquad \text{(II)}$$

De (II): $\overline{AP}$ es la sección áurea de $\overline{AB}$.

Nota

$\phi' = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$: es el conjugado del número áureo.

$\phi = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$: es el número áureo.

Proporciones áureas. *Desde tiempos remotos, los arquitectos han proyectado templos, iglesias y mezquitas, en función de estrictas proporciones celestiales (como en esta cúpula gótica de Freiburg).*

Teorema

En un segmento $\overline{AB}$, si P divide en media y extrema razón ($AP > PB$), se cumple que $\overline{PB}$ es la sección áurea de $\overline{AP}$.

Interpretación gráfica

Figura 17.13

Por condición

$$\frac{PB}{AP-PB} = \frac{AP}{PB}$$

Por propiedad de proporciones

$$\frac{PB}{AP-PB} = \frac{AP}{AB-AP} \rightarrow \frac{AP-PB}{PB} = \frac{AB-AP}{AP}$$

Se observa $AB - AP = PB$

Reemplazando

$$\frac{AP-PB}{PB} = \frac{PB}{AP}$$

Operando

$$PB = AP\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

POLÍGONOS REGULARES NOTABLES

Son aquellos polígonos regulares, donde las longitudes de sus lados y su circunradio se encuentran en una relación conocida y fácil de recordar.

TRIÁNGULO REGULAR

Medida del ángulo central (θ_3): $m\sphericalangle A_1OA_2 = \theta_3$

$$\theta_3 = \frac{360^\circ}{3} \rightarrow \theta_3 = 120^\circ$$

- Longitud del lado (ℓ_3)

$$\triangle A_1OA_2\text{: } A_1P = PA_2 = \frac{R}{2}\sqrt{3}$$

$$\ell_3 = A_1P + PA_2 = R\sqrt{3}$$

- Longitud del apotema $(a_{p(3)})$: $a_{p(3)} = OP$

$$a_{p(3)} = \frac{R}{2}$$

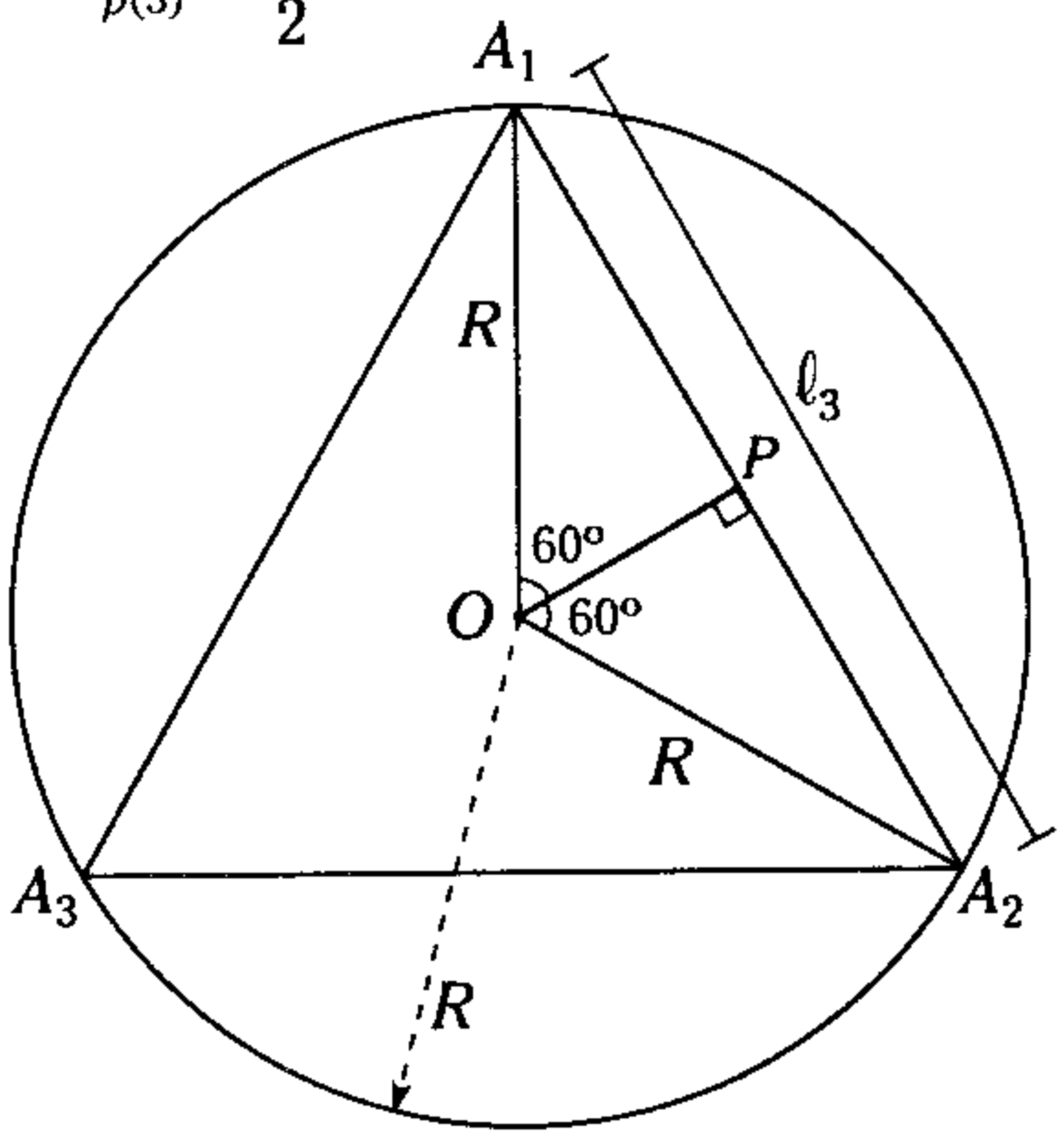


Figura 17.14

La cúpula de la torre en Londres tiene cuatro caras laterales de forma triangular regular.

CUADRILÁTERO REGULAR

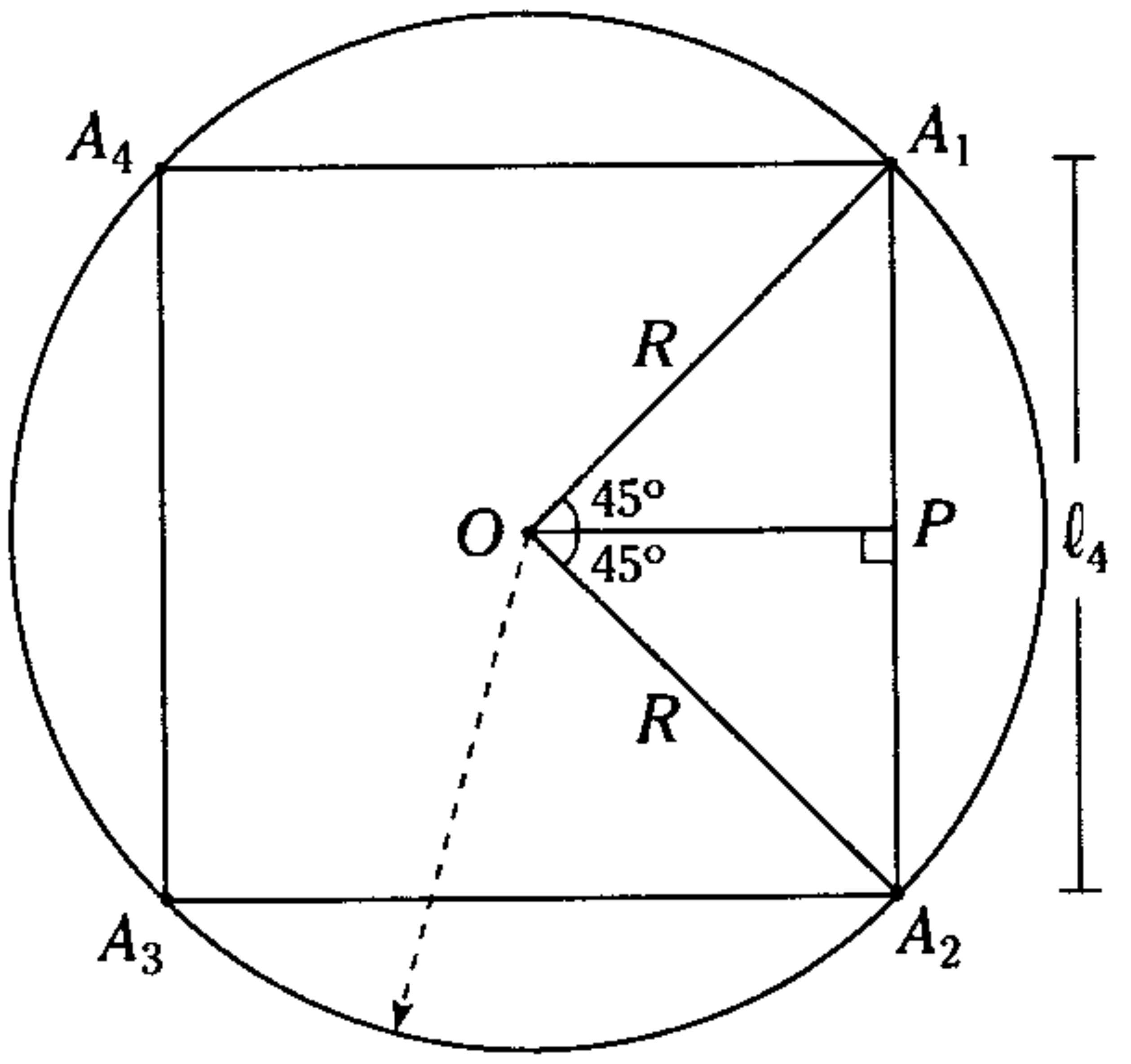


Figura 17.15

Medida del ángulo central (θ_4): $m\sphericalangle A_1OA_2 = \theta_4$

$$\theta_4 = \frac{360^\circ}{4} \rightarrow \theta_4 = 90^\circ$$

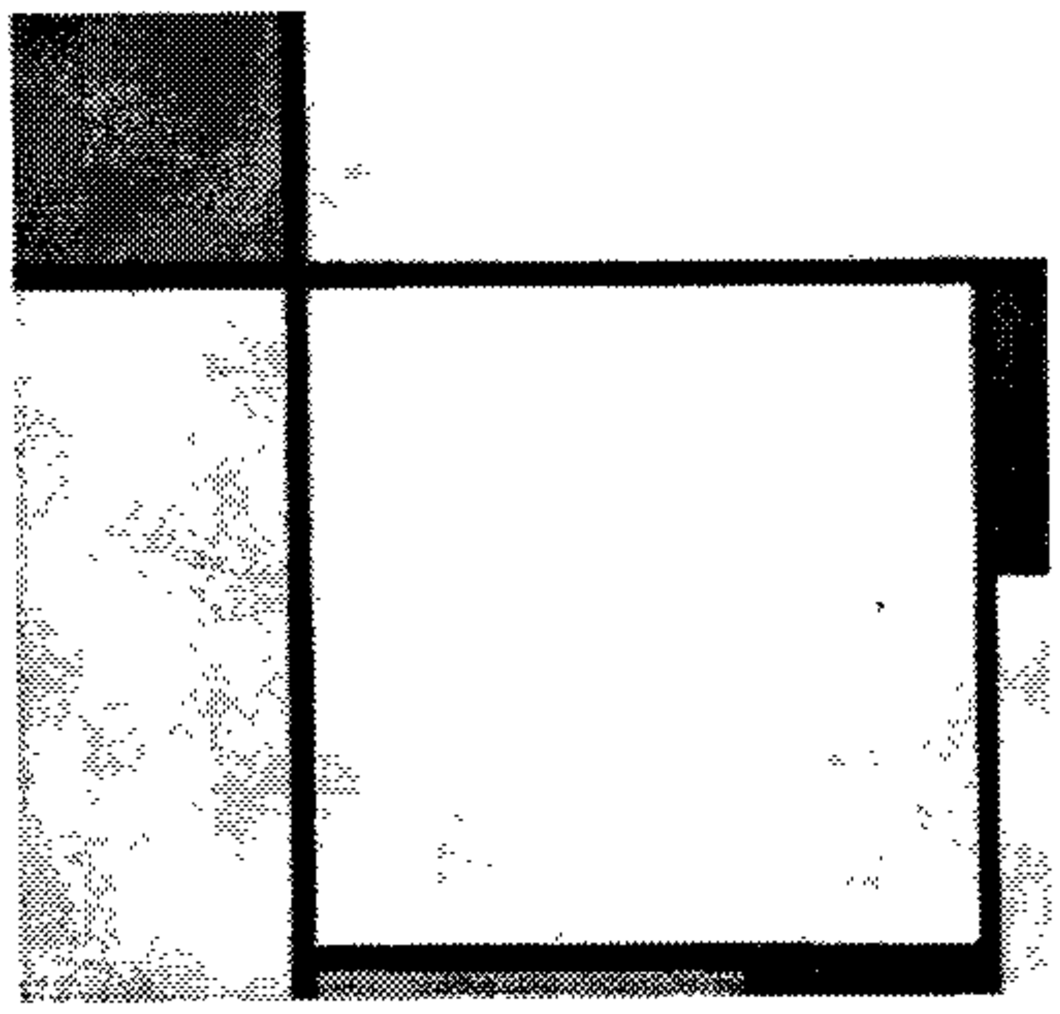
- Longitud del lado (ℓ_4)

$$\triangle A_1OA_2\text{: } A_1P = PA_2 = \frac{R}{2}\sqrt{2}$$

$$\ell_4 = A_1P + PA_2 = R\sqrt{2}$$

- Longitud del apotema $(a_{p(4)})$: $a_{p(4)} = OP$

$$a_{p(4)} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$



Los cuadrados de Mondrian. *Una abstracción lineal de Piet Mondrian incorpora cuadrados a su diseño en su obra Composition (1929) que se encuentra en el museo Guggenheim (New York).*

HEXÁGONO REGULAR

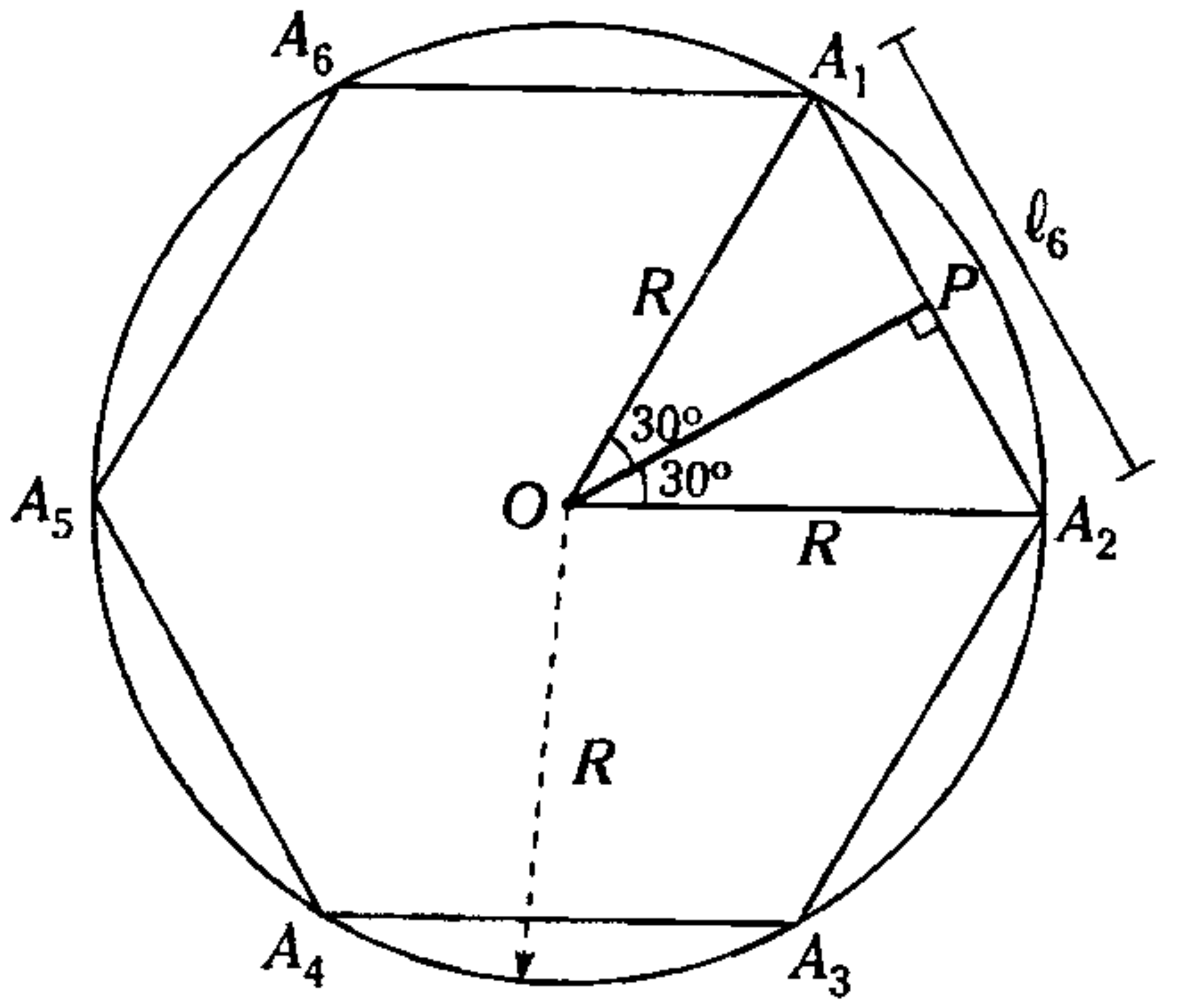


Figura 17.16

Medida del ángulo central (θ_6): $m\sphericalangle A_1OA_2 = \theta_6$

$$\theta_6 = \frac{360^\circ}{6} \rightarrow \theta_6 = 60^\circ$$

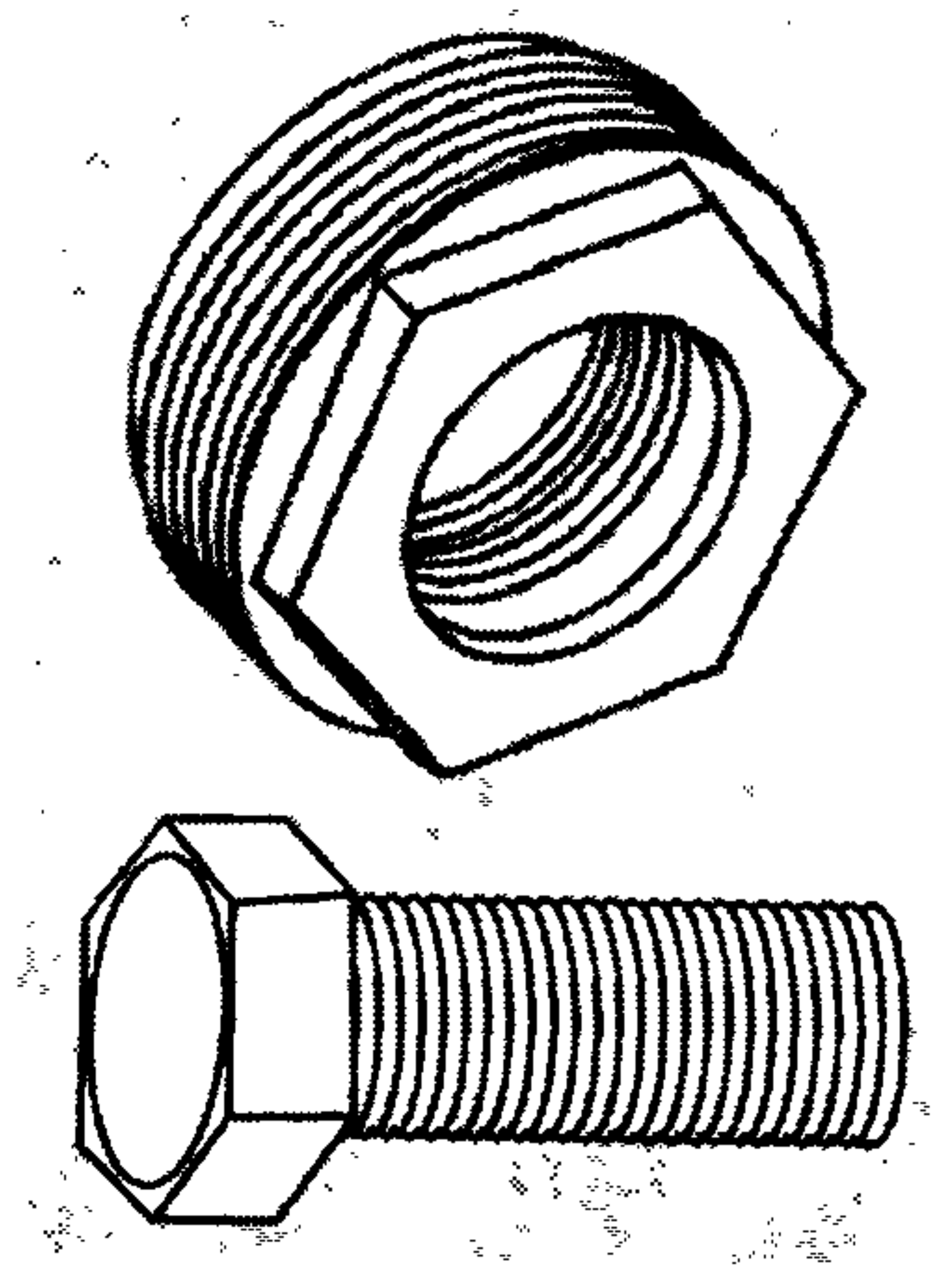
- Longitud del lado (ℓ_6), $\triangle A_1OA_2$ es equilátero

  $\ell_6 = R$

- Longitud del apotema $(a_{p(6)})$: $a_{p(6)} = OP$

  ⊿ OPA_2 el notable de 30° y 60°

  $$a_{p(6)} = \frac{R}{2}\sqrt{3}$$



Los pernos y tuercas para ser manipuladas con facilidad presentan contornos hexagonales regulares.

OCTÁGONO REGULAR U OCTÓGONO REGULAR

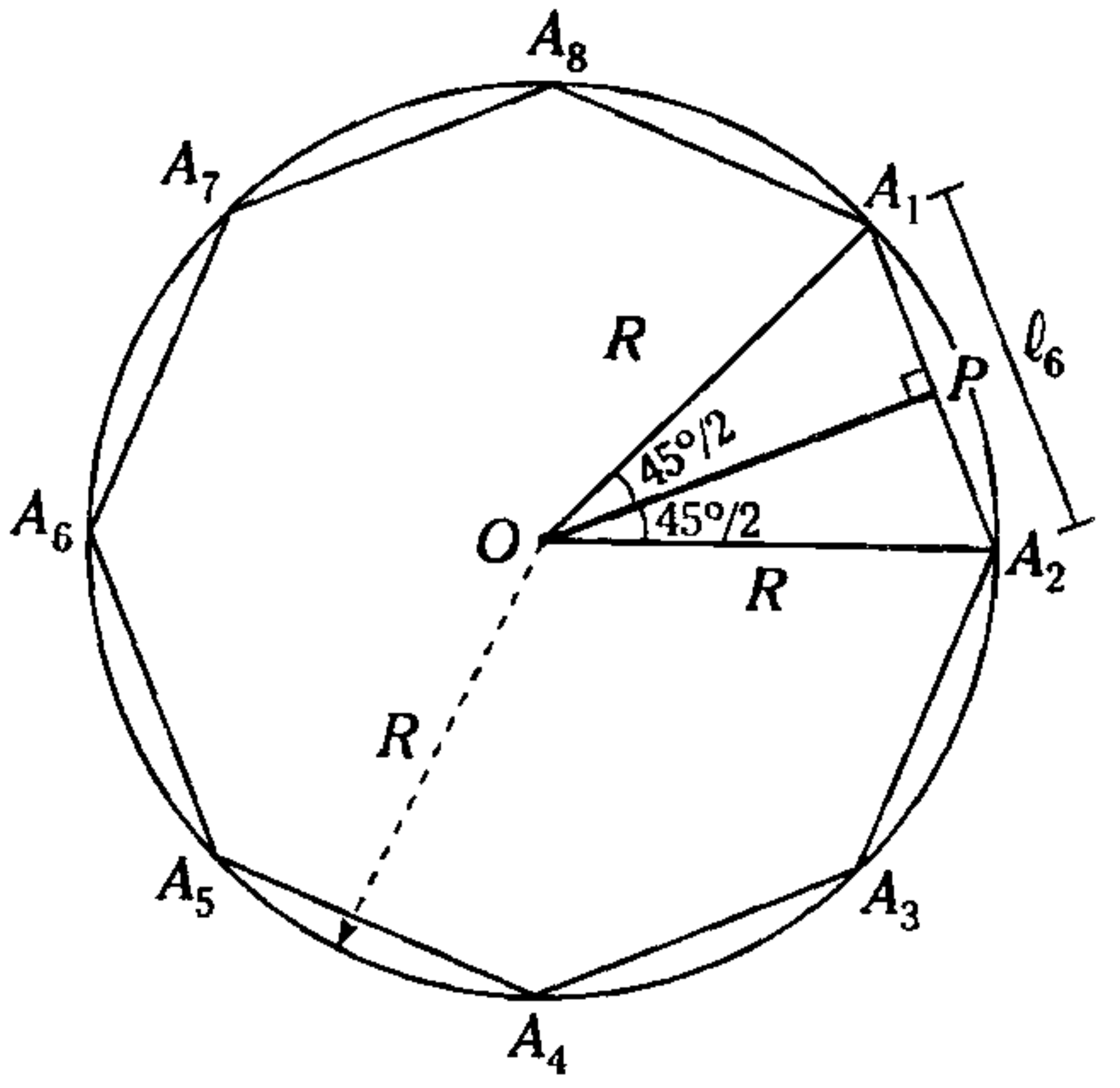


Figura 17.17

Medida del ángulo central (θ_8): $m\sphericalangle A_1OA_2 = \theta_8$

$$\theta_8 = \frac{360^\circ}{8}$$

$$\rightarrow \theta_8 = 45^\circ$$

- Longitud del lado (ℓ_8)

  $\triangle A_1OA_2$: teorema de cosenos

  $$(\ell_8)^2 = R^2 + R^2 - 2(R)(R)\cos 45^\circ$$

  Operando

  $$\ell_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

- Longitud del apotema $(a_{p(8)})$: $a_{p(8)} = OP$

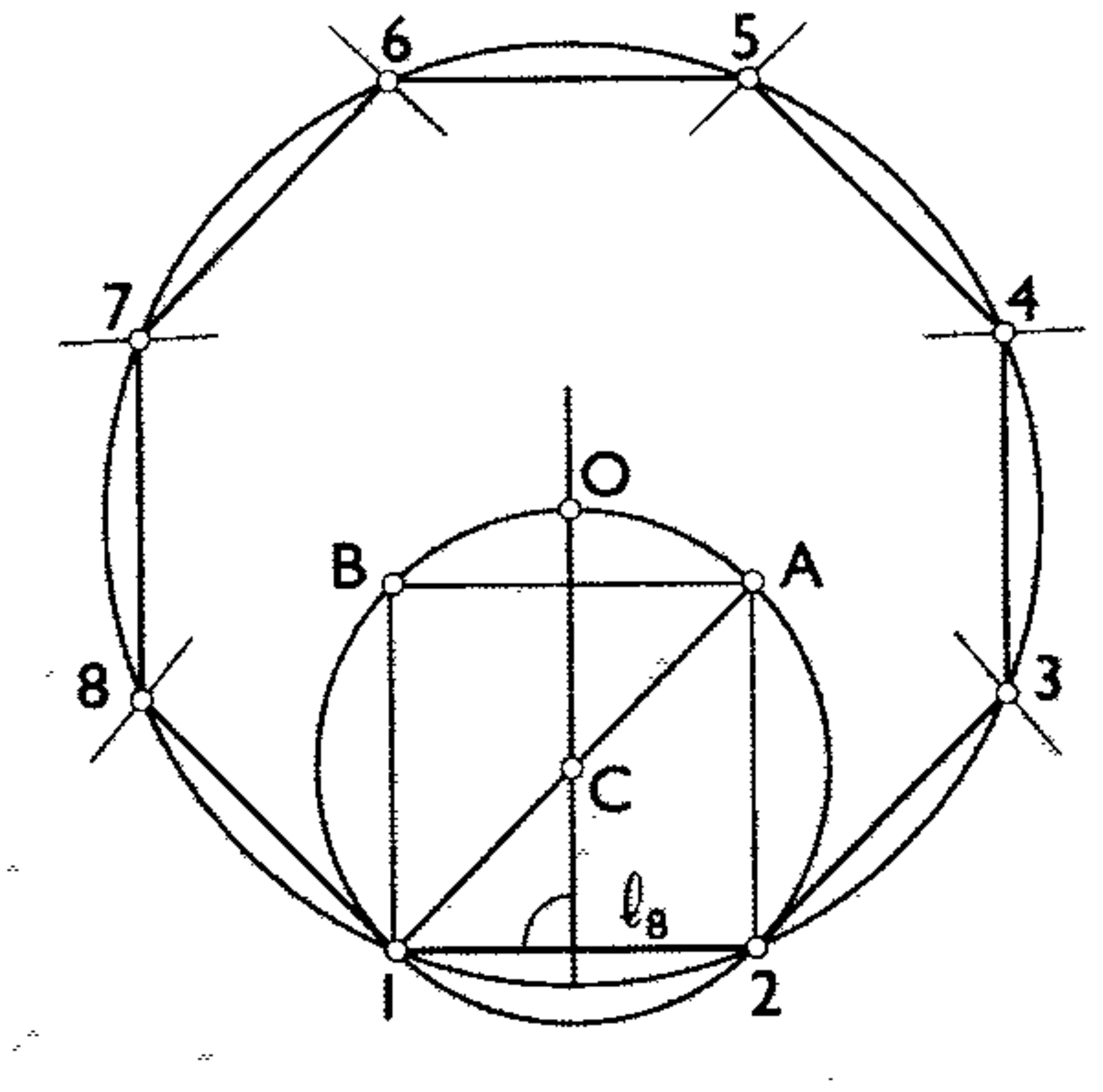
  Se sabe que

  $$a_{p(n)} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$$

  $$a_{p(8)} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_8^2}$$

  Reemplazando y operando

  $$a_{p(8)} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$



Construcción del octógono regular. *Siendo el segmento 1-2 el lado del octógono, construimos el cuadrado 12AB. Trazamos la mediatriz del lado 1-2 y la diagonal del cuadrado, las cuales se intersecan en C. Con centro en C y radio CA se traza la circunferencia que interseca a la mediatriz en O. (O: centro de la circunferencia circunscrita al octógono buscado).*

El sistema de señalización de una carretera tiene forma octagonal regular.

DODECÁGONO REGULAR

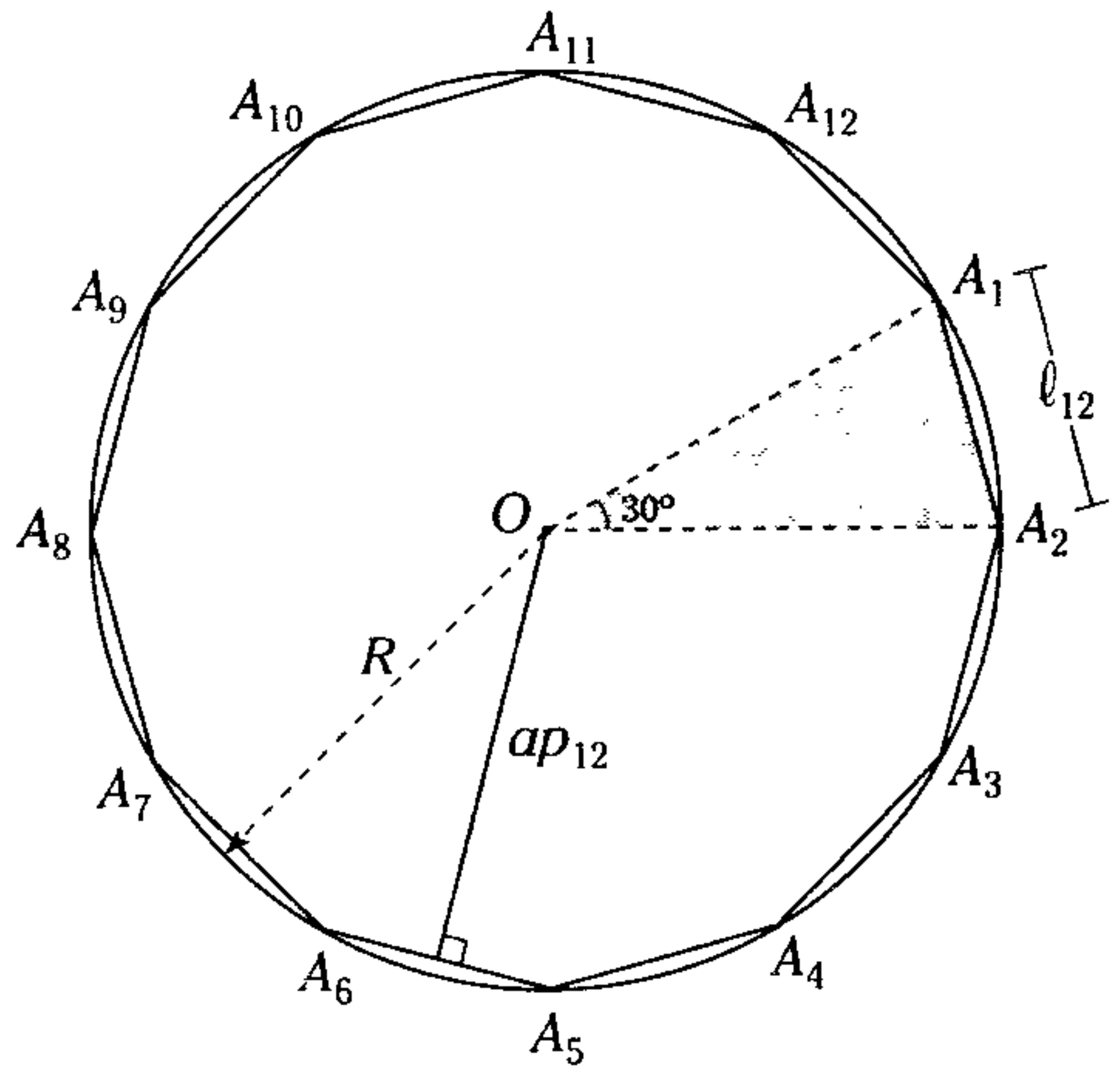


Figura 17.18

Medida del ángulo central (θ_{12})

$$\theta_{12} = \frac{360°}{12}$$

$$\rightarrow \theta_{12} = 30°$$

- Longitud del lado (ℓ_{12})

  $\triangle A_1OA_2$: teorema de cosenos

  $$(\ell_{12})^2 = R^2 + R^2 - 2(R)(R)\cos 30°$$

  Operando

  $$\ell_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

- Longitud del apotema $(a_{p(12)})$

  Se sabe que

  $$a_{p(12)} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$$

  $$a_{p(12)} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_{12}^2}$$

  Reemplazando y operando

  $$a_{p(12)} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

DECÁGONO REGULAR

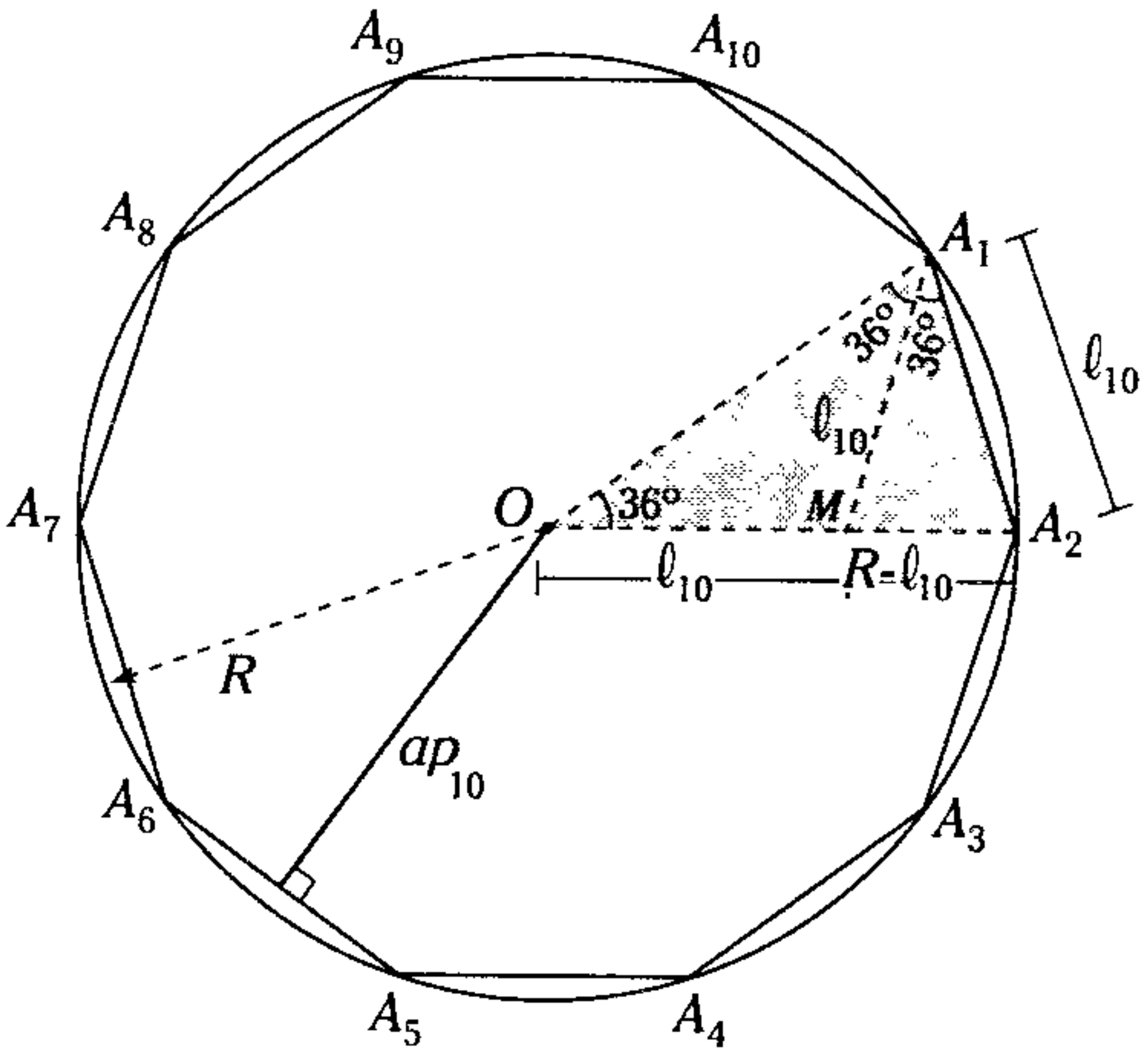


Figura 17.19

Medida del ángulo central (θ_{10})

$$\theta_{10} = \frac{R}{\ell_{10}} = \frac{360°}{10} \rightarrow \theta_{10} = 36°$$

- Longitud del lado (ℓ_{10})

  En el $\triangle A_1OA_2$ se traza la bisectriz interior $\overline{AM}$; así, los triángulos A_1MO y MA_1A_2 son isósceles, es decir

  $$A_1M = MO = \ell_{10}$$

  $$MA_2 = R - \ell_{10}$$

  En el $\triangle A_1OA_2$ se aplica el teorema de la bisectriz interior

  $$\frac{R}{\ell_{10}} = \frac{\ell_{10}}{R-\ell_{10}}$$

  Operando

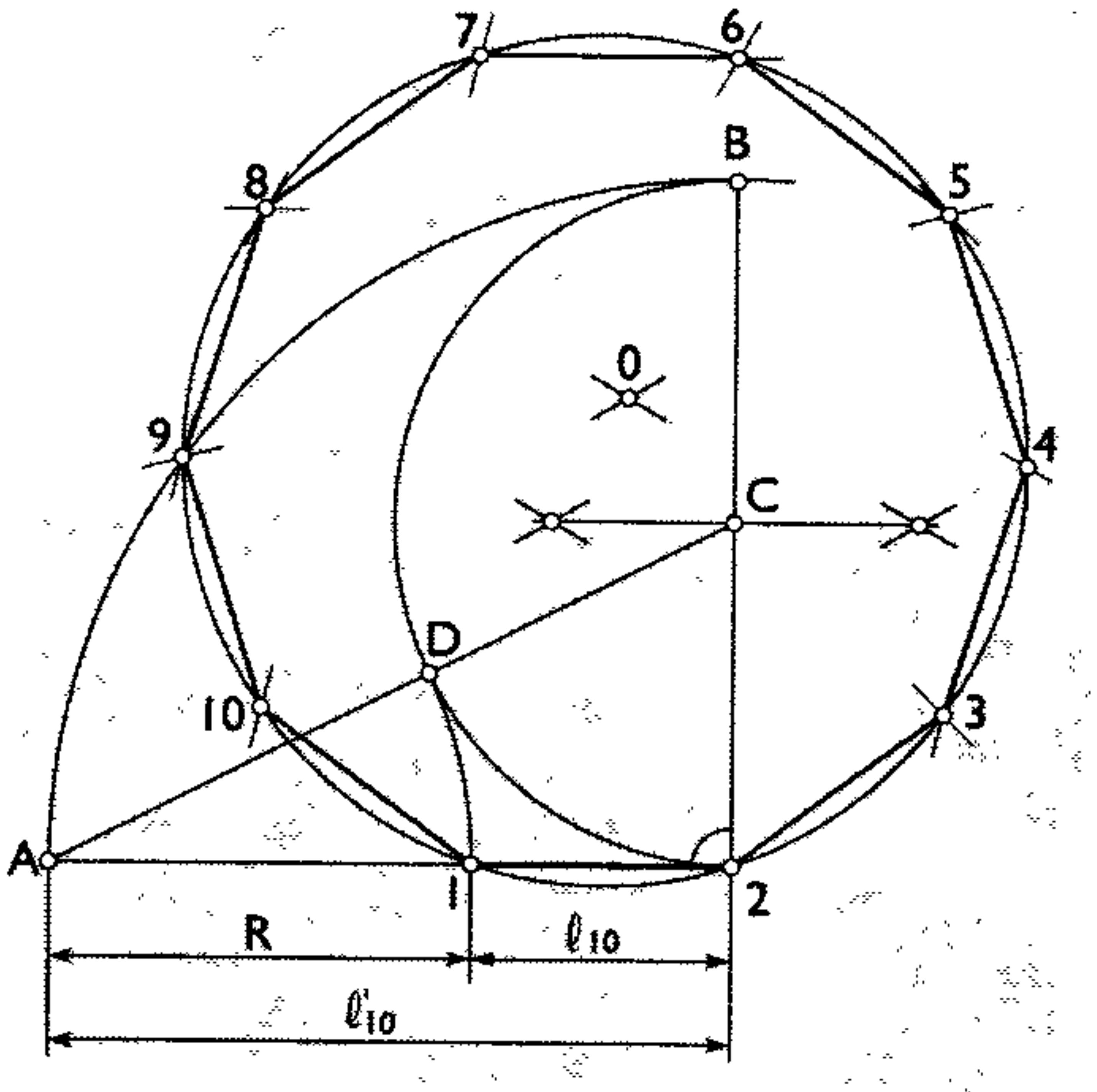
  $$\ell_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

- Longitud del apotema $(a_{p(10)})$

  Se sabe $a_{p(n)} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\ell_n^2}$

  Reemplazando y operando

  $$a_{p(10)} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$



Conociendo el lado del polígono estrellado (ℓ'_{10}). Dividiendo el lado del decágono en media y extrema razón, obtendremos el radio de la circunferencia R y el lado del decágono (ℓ_{10}).

PENTÁGONO REGULAR

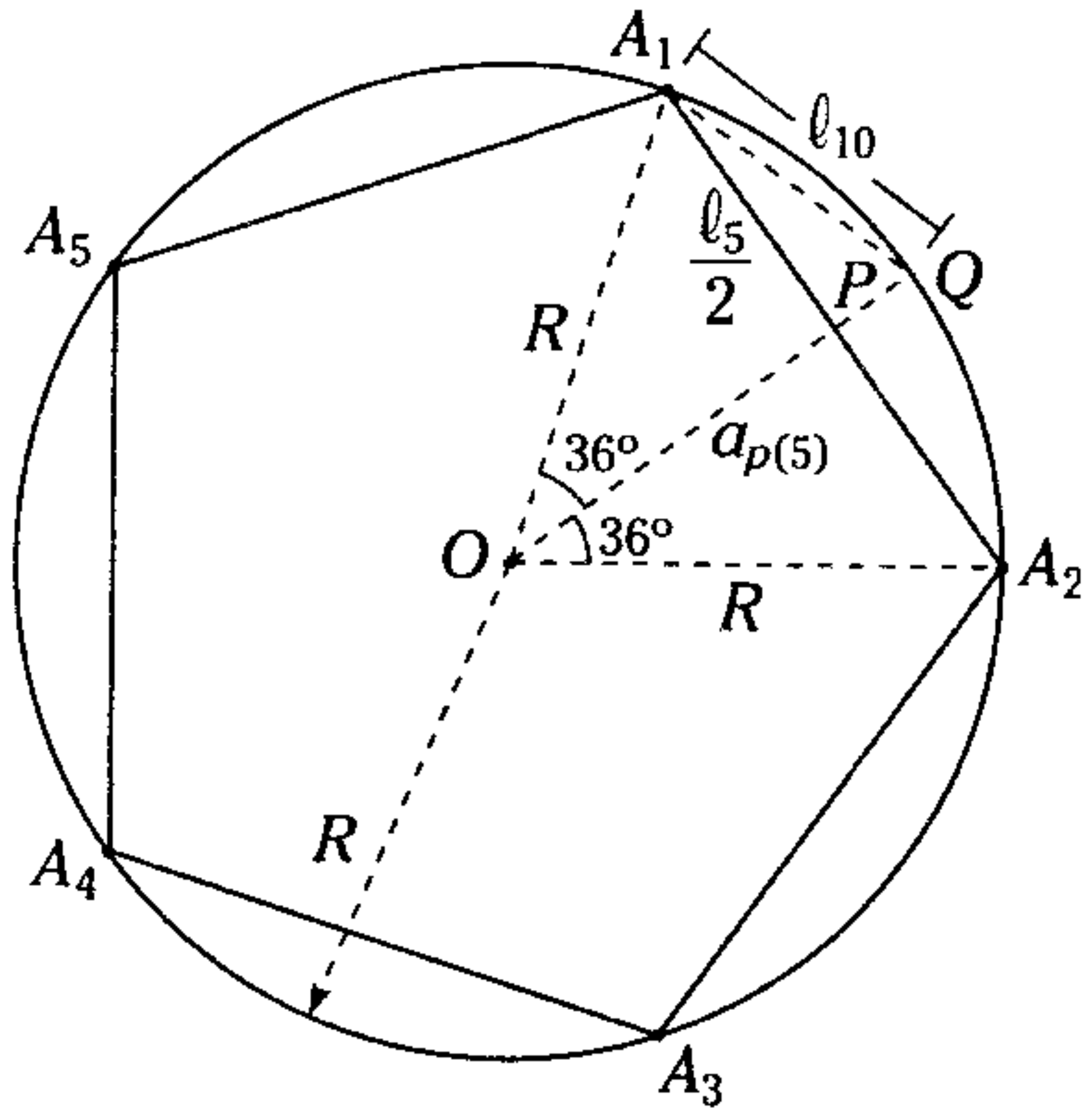


Figura 17.20

Medida del ángulo central (θ_5)

$$\theta_5 = \frac{360°}{5} = 72°$$

- Longitud del apotema $(a_{p(5)})$

  $\triangle A_1QO$: $(\ell_{10})^2 = R^2 + R^2 - 2R(a_{p(5)})$ (I)

  Reemplazando $\ell_{10} = R\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ en (I)

  $$\left(\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}\right)^2 = 2R^2 - 2R(a_{p(5)})$$

Operando

$$a_{p(5)}=\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$$

- Longitud del lado (ℓ_5)

⊿A_1PO: por teorema de Pitágoras

$$\left(\frac{\ell_5}{2}\right)^2=R^2-(a_{p(5)})^2$$

Operando

$$\ell_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Teorema
La longitud del lado de un pentágono regular es igual a la longitud de la sección áurea de su diagonal.

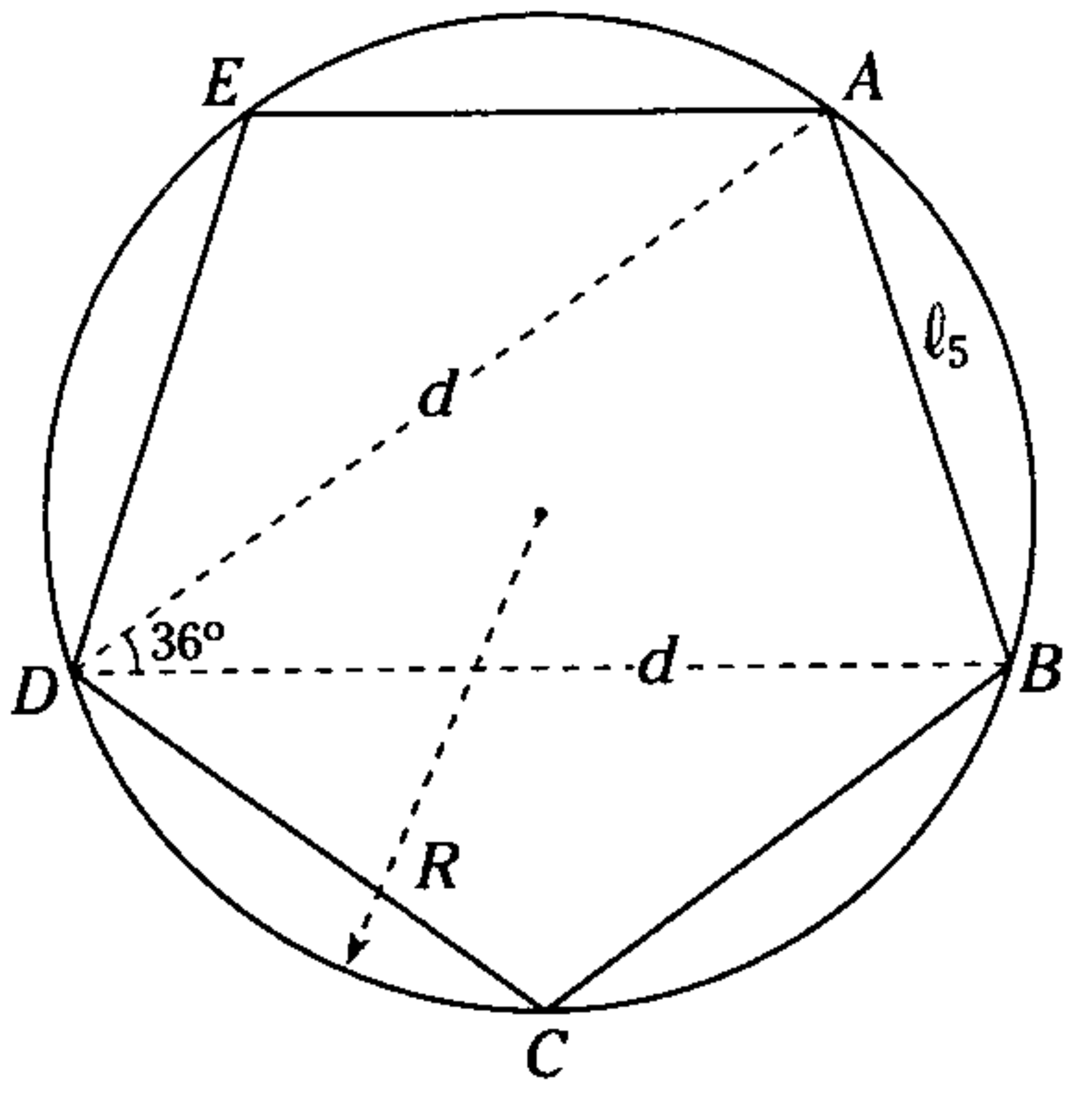


Figura 17.21

Según la figura, *ABCDE*: polígono regular.

△*AOB*: triángulo elemental del decágono regular.

$$\ell_5=d\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

→ ℓ_5 es la longitud de la sección áurea del segmento de longitud *d*, donde *d* es la longitud de la diagonal del pentágono regular.

Una estrella de mar tiene forma de polígono cóncavo de 5 puntas. Estos equinodermos son simétricos respecto a cinco ejes.

Teorema
En todo decágono regular, la longitud de su lado es la sección áurea de la longitud de su circunradio.

Interpretación gráfica

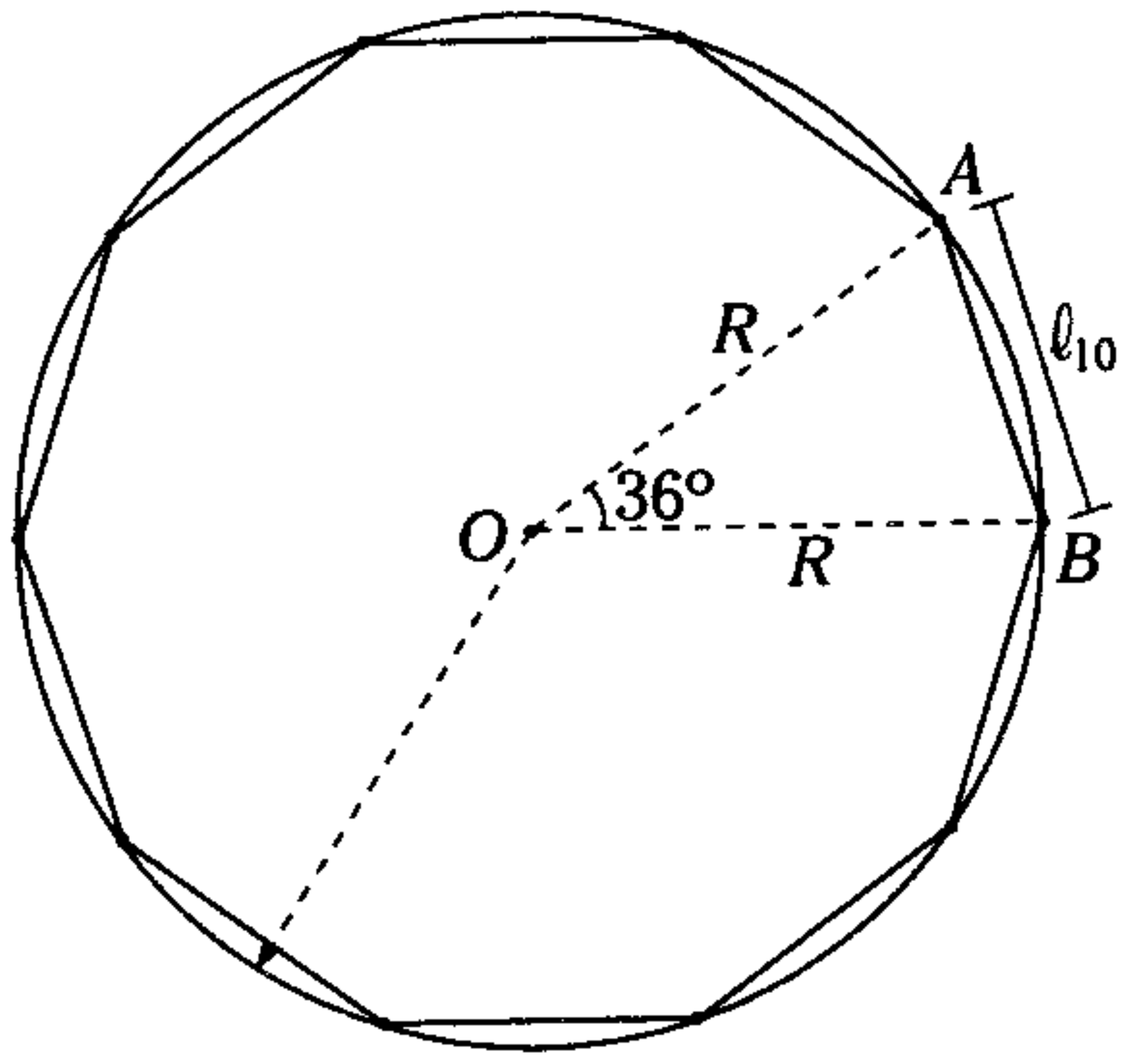


Figura 17.22

De la figura

$$\ell_{10}=R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Se deduce que ℓ_{10} es la sección áurea de *R*.

Teorema

Si en un triángulo las longitudes de sus lados son las longitudes del lado de un pentágono regular, de un hexágono regular y de un decágono regular de un mismo circunradio, entonces el triángulo es rectángulo; donde la hipotenusa es el lado del pentágono regular.

Interpretación geométrica

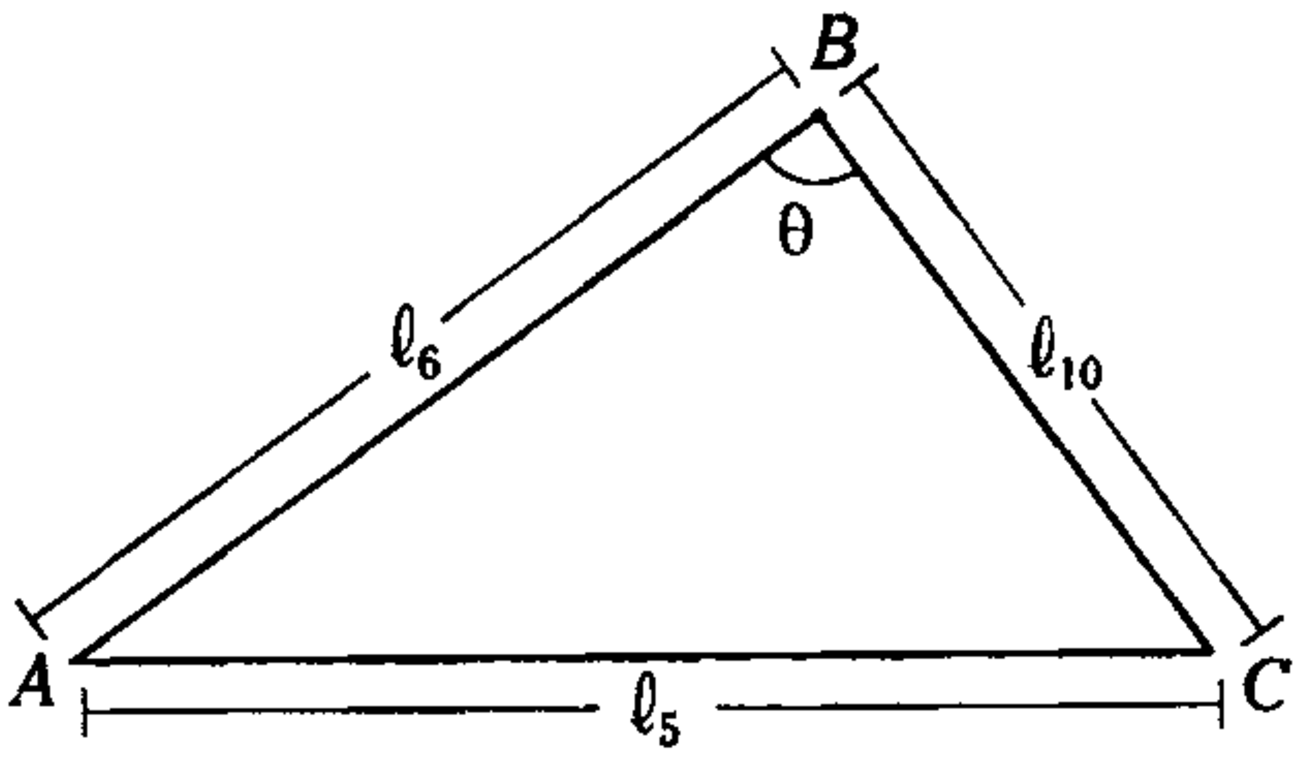


Figura 17.23

Si $AB = \ell_6$; $BC = \ell_{10}$ y $AC = \ell_5$

$\rightarrow\ \theta = 90^\circ$

Demostración

Se sabe que

$$\ell_6 = R$$

$$\ell_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$\ell_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Tomando ℓ_6 y ℓ_{10}

$$\ell_6^2+\ell_{10}^2 = R^2+\left(\frac{R\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

$$\ell_6^2+\ell_{10}^2 = \frac{R}{4}(10-2\sqrt{5}) \qquad \text{(I)}$$

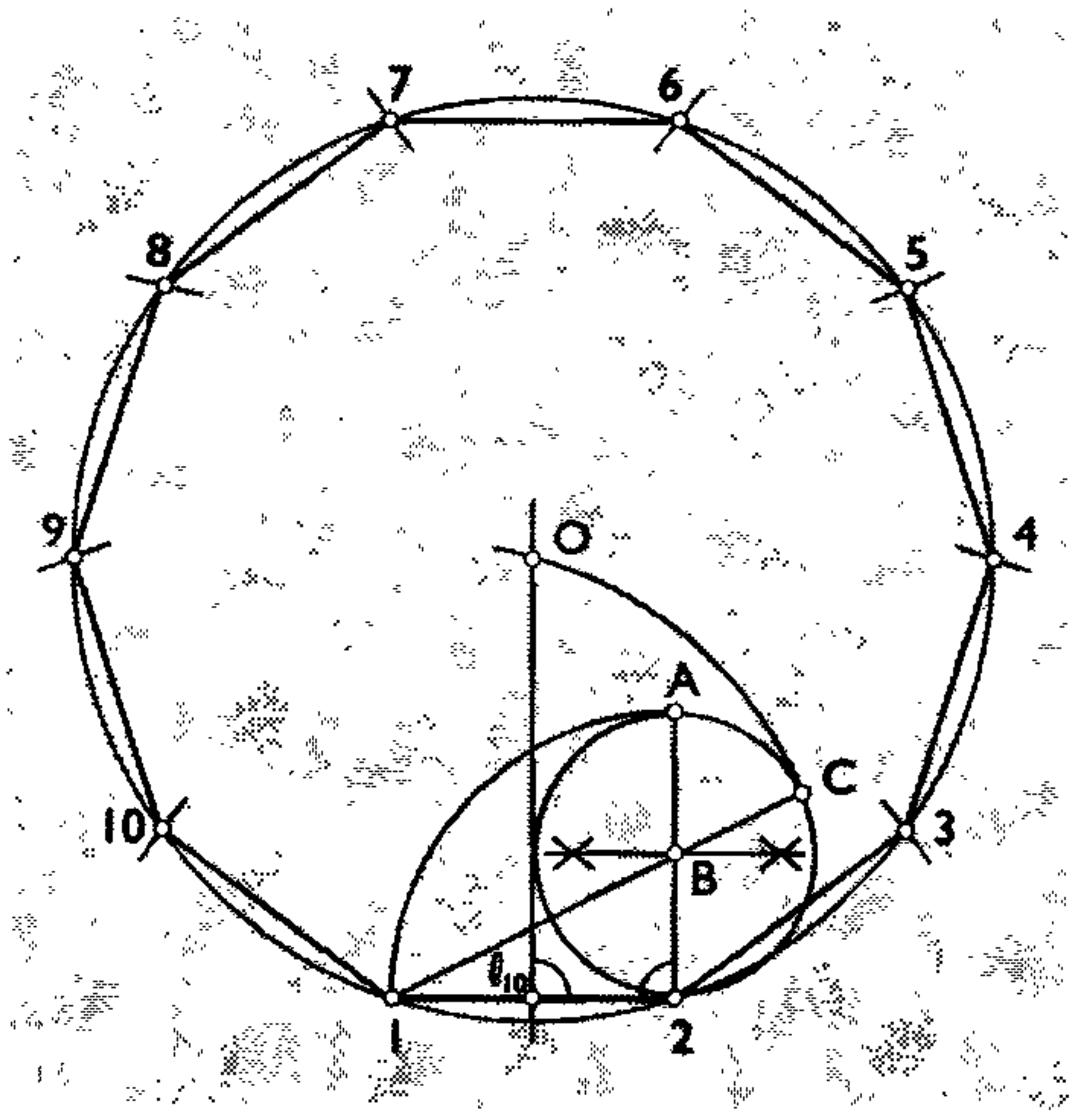
$$\ell_6^2 = \left(\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\ell_5^2 = \frac{R}{4}(10-2\sqrt{5}) \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I) y (II)

$$\boxed{\ell_6^2+\ell_{10}^2 = \ell_5^2}$$

Por lo tanto, se cumple el teorema de Pitágoras, es decir, $\theta = 90^\circ$.



Construcción del decágono regular con solamente regla y compás conociendo el lado del decágono.

Método para calcular gráficamente la relación entre ℓ_6, ℓ_5 y ℓ_{10}

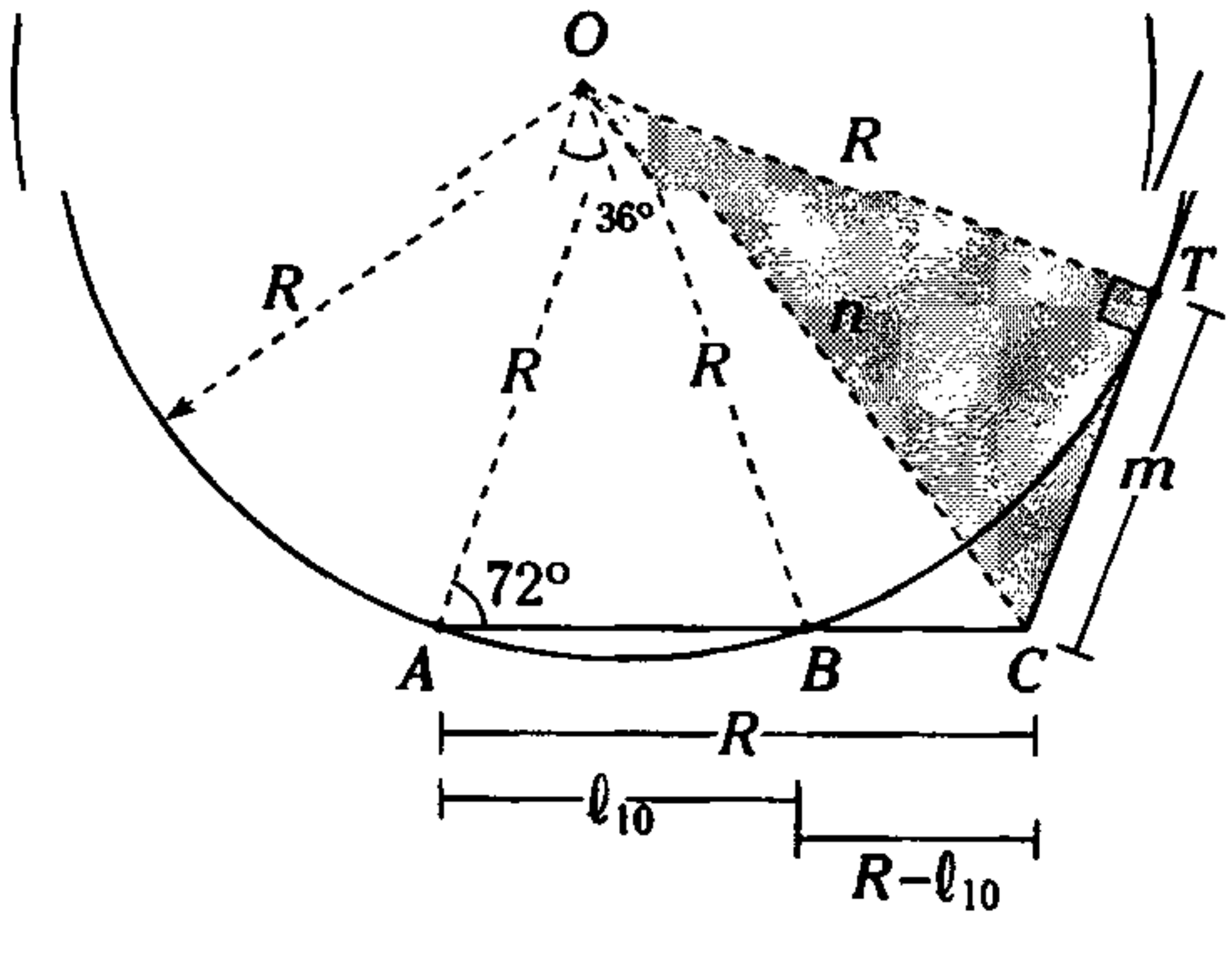


Figura 17.24

Se sabe que $\triangle AOB$ es elemental de ℓ_{10}.

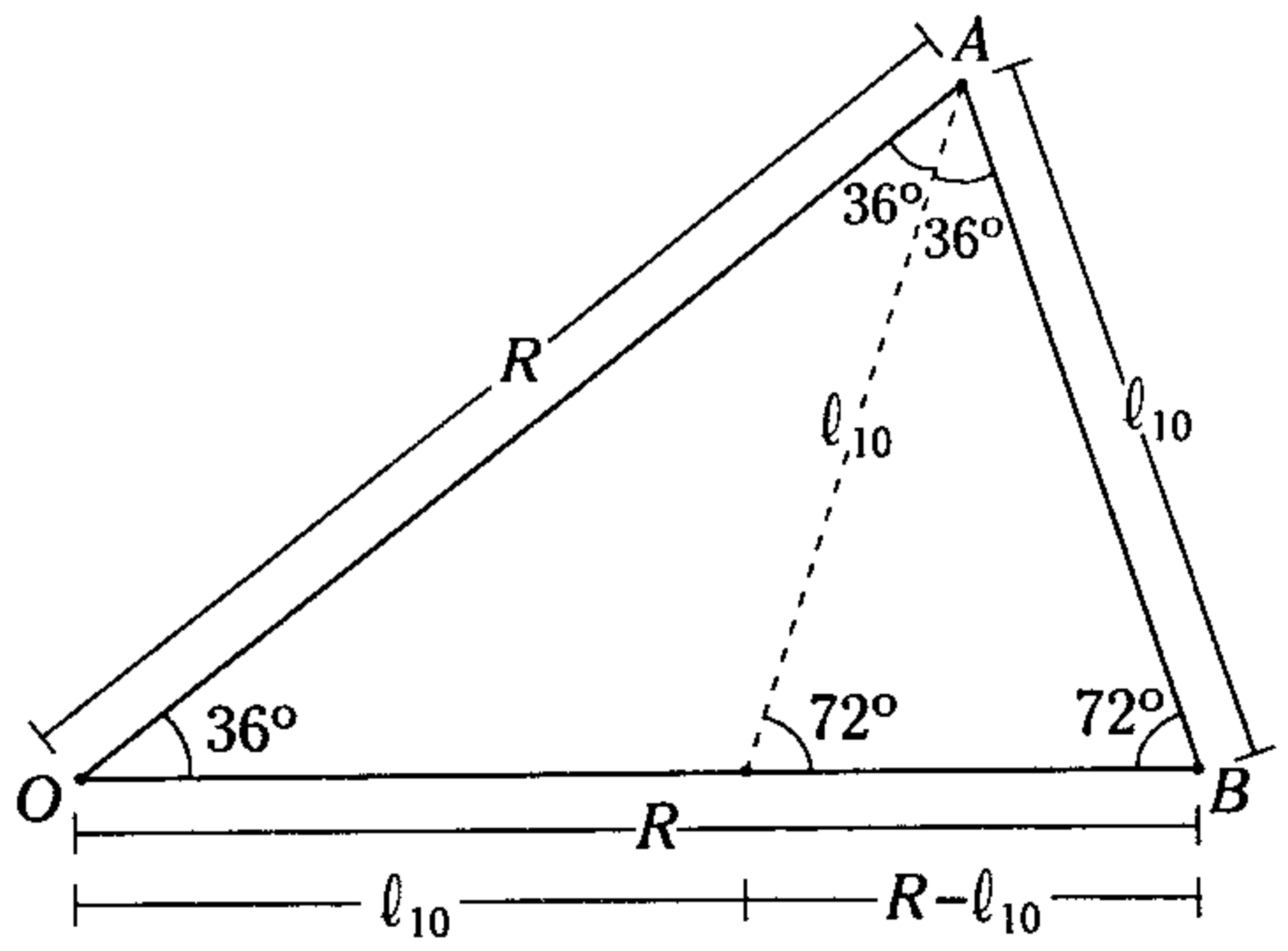


Figura 17.25

Por semejanza de triángulos

$$\frac{\ell_{10}}{R-\ell_{10}}=\frac{R}{\ell_{10}}$$

$$\rightarrow \quad (\ell_{10})^2=R(R-\ell_{10}) \qquad \text{(I)}$$

Según la figura, teorema de la tangente

$$(m)^2=R(R-\ell_{10}) \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$(\ell_{10})^2=m^2$$

$$m=\ell_{10}$$

además

$$R=\ell_6$$

$\triangle OAC$: $\triangle$ elemental de ℓ_5

$$n=\ell_5$$

luego ⊿OTC

$$\boxed{\ell_5^2=\ell_6^2+\ell_{10}^2}$$

Se sabe

$$\ell_6=R$$

$$\ell_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

De la relación

$$(\ell_5)^2=\ell_6^2+\ell_{10}^2$$

Reemplazando

$$(\ell_5)^2=R^2+\left(\frac{R}{2}\sqrt{5}-1\right)^2$$

$$(\ell_5)^2=R^2+\frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{4}$$

$$\boxed{\ell_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

PROPIEDADES

Cálculo de la longitud de una cuerda cuyo arco determinado mide 150°

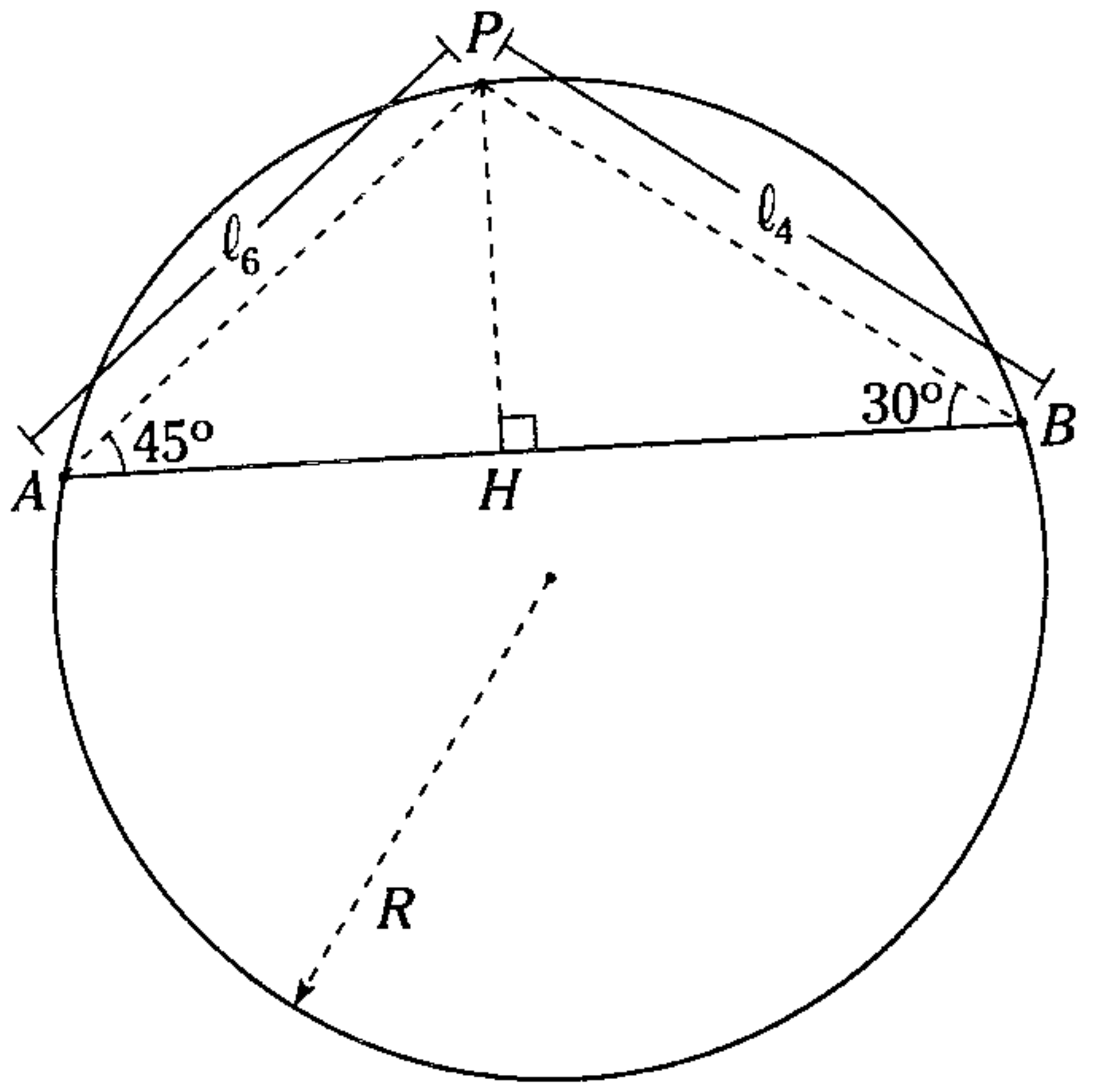


Figura 17.26

Si m$\widehat{AB}$ = 150°, ¿cuál será la longitud de $\overline{AB}$?

Según la figura, se ubica P en $\widehat{AB}$, tal que la m$\widehat{AP}$ = 60° y m$\widehat{PB}$ = 90°.

Luego

$$AH = \ell_6(\cos 45°)$$

$$HB = \ell_4(\cos 30°)$$

Se observa

$$AB = AH + HB$$

Reemplazando

$$AB = \ell_6(\cos 45°) + \ell_4(\cos 30°)$$

Operando

$$\boxed{AB = \frac{R\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3})} \quad \text{o} \quad \boxed{AB = R\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Cálculo de la longitud de una cuerda cuyo arco determinado mide 144°

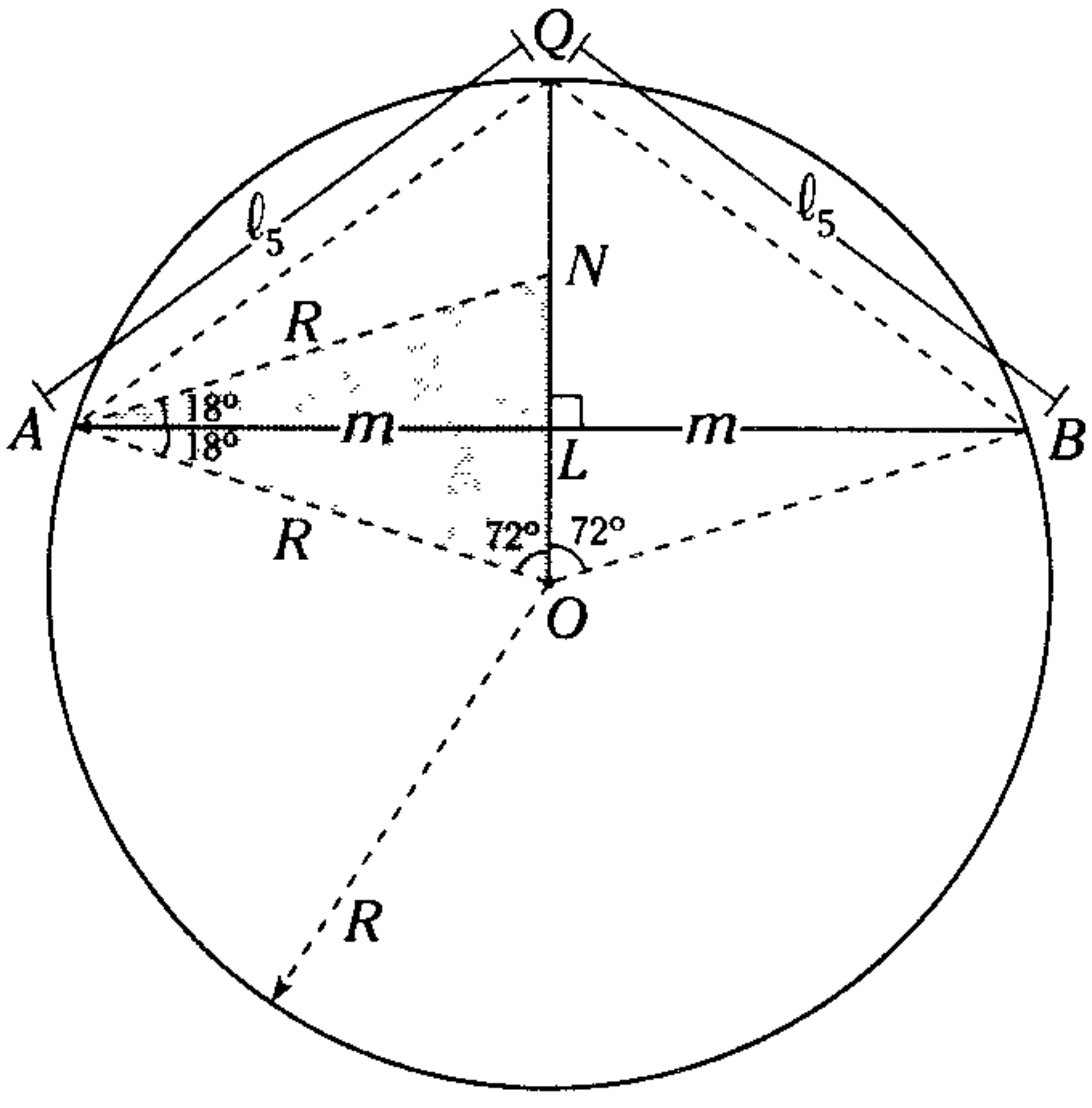


Figura 17.27

Si m$\widehat{AB}$ = 144°, ¿cuál es la longitud de $\overline{AB}$?

Según la figura, se ubica Q en $\widehat{AB}$, tal que la m$\widehat{AQ}$ = m$\widehat{QB}$ = 72°.

Luego se traza $\overline{AN}$, tal que $AN = AO$; así el $\triangle NAO$ es el $\triangle$ elemental del decágono regular.

$$NO = \ell_{10}$$

$$AL = LO = m = a_{p(10)}$$

$$a_{p(10)} = m = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Se observa

$$AB = m + m$$

$$AB = 2\frac{R}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$$

$$\boxed{AB = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} \quad \text{o} \quad \boxed{AB = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

Cálculo de la longitud de una cuerda cuyo arco determinado mide 135°

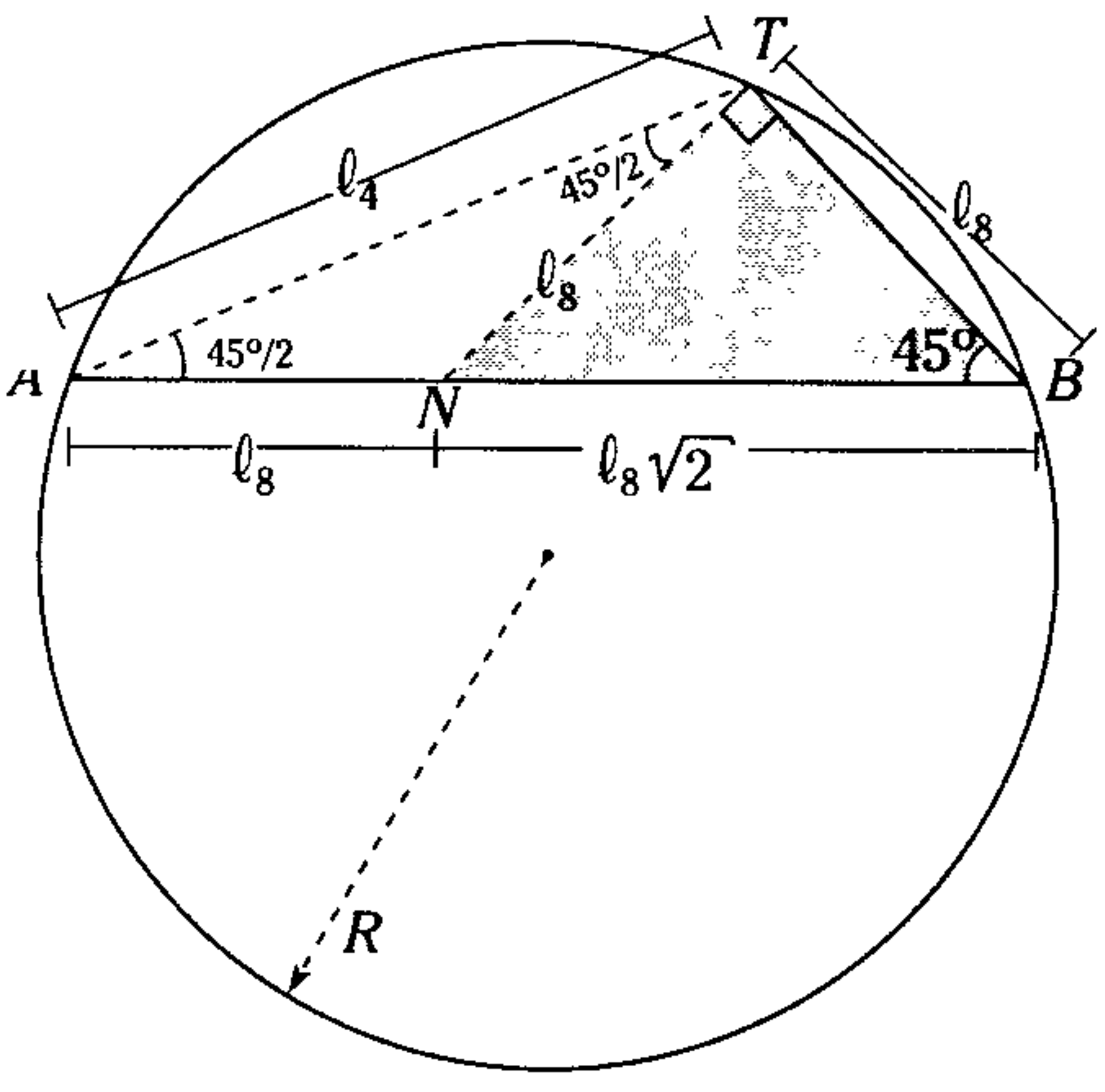


Figura 17.28

Si m$\overset{\frown}{AB}$ = 135°, ¿cuál es la longitud de $\overline{AB}$?

Según la figura, se ubica T en $\overset{\frown}{AB}$, tal que la m$\overset{\frown}{AT}$ = 90° y m$\overset{\frown}{TB}$ = 45°.

Luego se traza $\overline{TN}$, tal que $TN = TB$ y

⊾NTB: $NB = \ell_8(\sqrt{2})$

Se nota $AN = NT = \ell_8$

Lo cual

$$AB = AN + NB$$

$$AB = \ell_8 + \ell_8\sqrt{2}$$

$$AB = \ell_8\,(1+\sqrt{2})$$

$$AB = \ell_8\, R\sqrt{2-\sqrt{2}}\,(1+\sqrt{2})$$

Operando

$$\boxed{AB = R\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Cálculo de la longitud de una cuerda cuyo arco determinado mide 108°

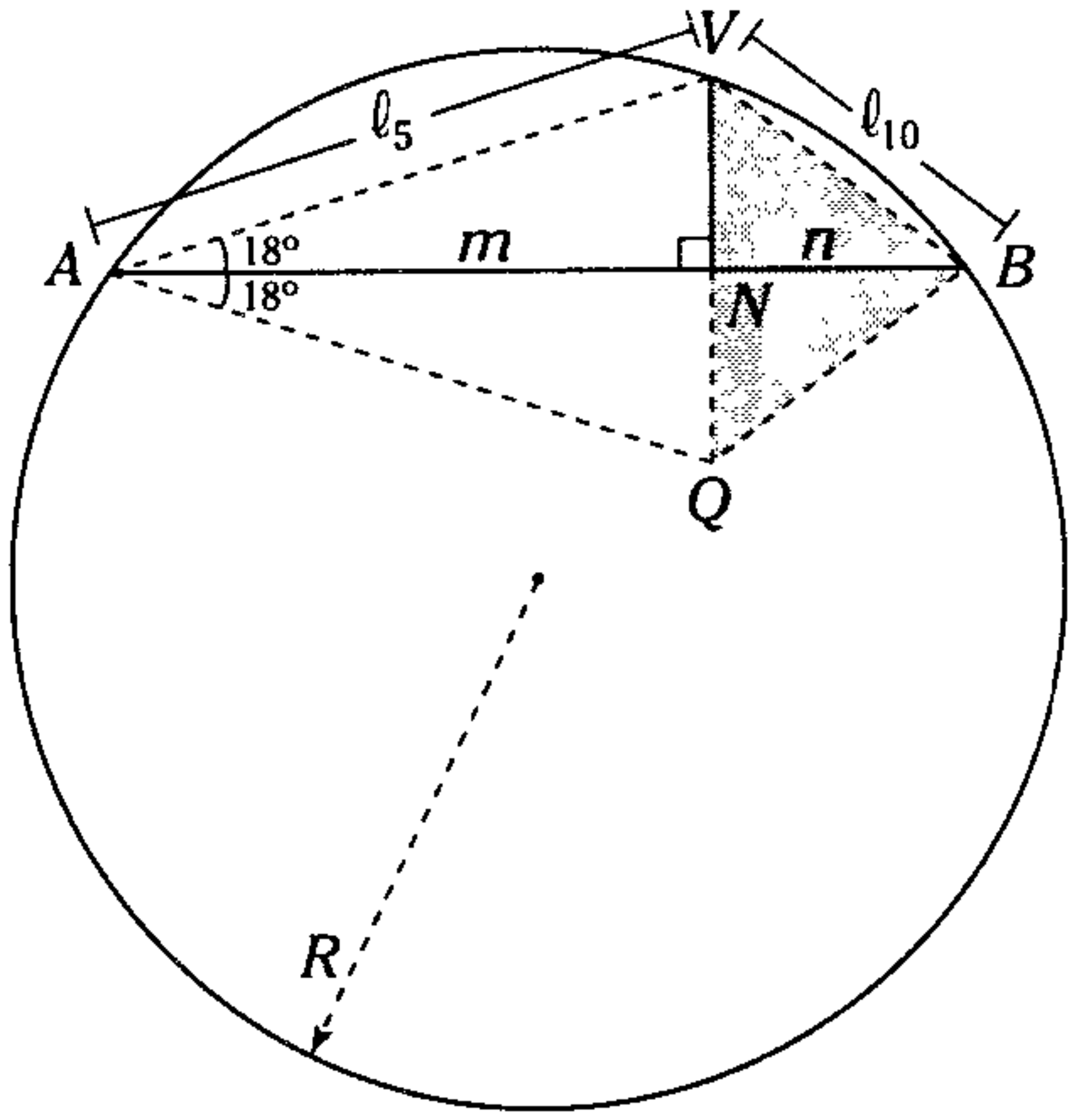


Figura 17.29

Si m$\overset{\frown}{AB}$ = 108°, ¿cuál es la longitud de $\overline{AB}$?

Según la figura, se ubica V en $\overset{\frown}{AB}$, tal que m$\overset{\frown}{AV}$ = 72° y m$\overset{\frown}{VB}$ = 36°.

Luego se ubica Q: simétrico de V con respecto de $\overleftrightarrow{AB}$.

△VAQ: △elemental del decágono regular

$$a_{p(10)} = m = \frac{\ell_5}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

pero

$$\ell_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow\ m = \frac{R\sqrt{5}}{2} \qquad \text{(I)}$$

△VBQ: elemental del pentágono regular

$$a_{p(5)} = n = \frac{\ell_{10}}{4}(\sqrt{5}+1)$$

pero

$$\ell_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$\rightarrow\ n = \frac{R}{2} \qquad \text{(II)}$$

Lo cual

$$AB = m + n \qquad \text{(III)}$$

(I) y (II) reemplazando en (III)

$$\boxed{AB = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)}$$

Método gráfico para encontrar el lado de un pentágono regular

En una circunferencia de centro O, se trazan los diámetros perpendiculares $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, luego en AO se ubica el punto medio O_1 y se traza un arco CE de centro O_1 ($E \in \overline{OB}$); finalmente, se traza un arco CE de centro C ($L \in \overset{\frown}{CB}$). El lado del pentágono regular buscado es $\overline{CL}$.

Interpretación gráfica

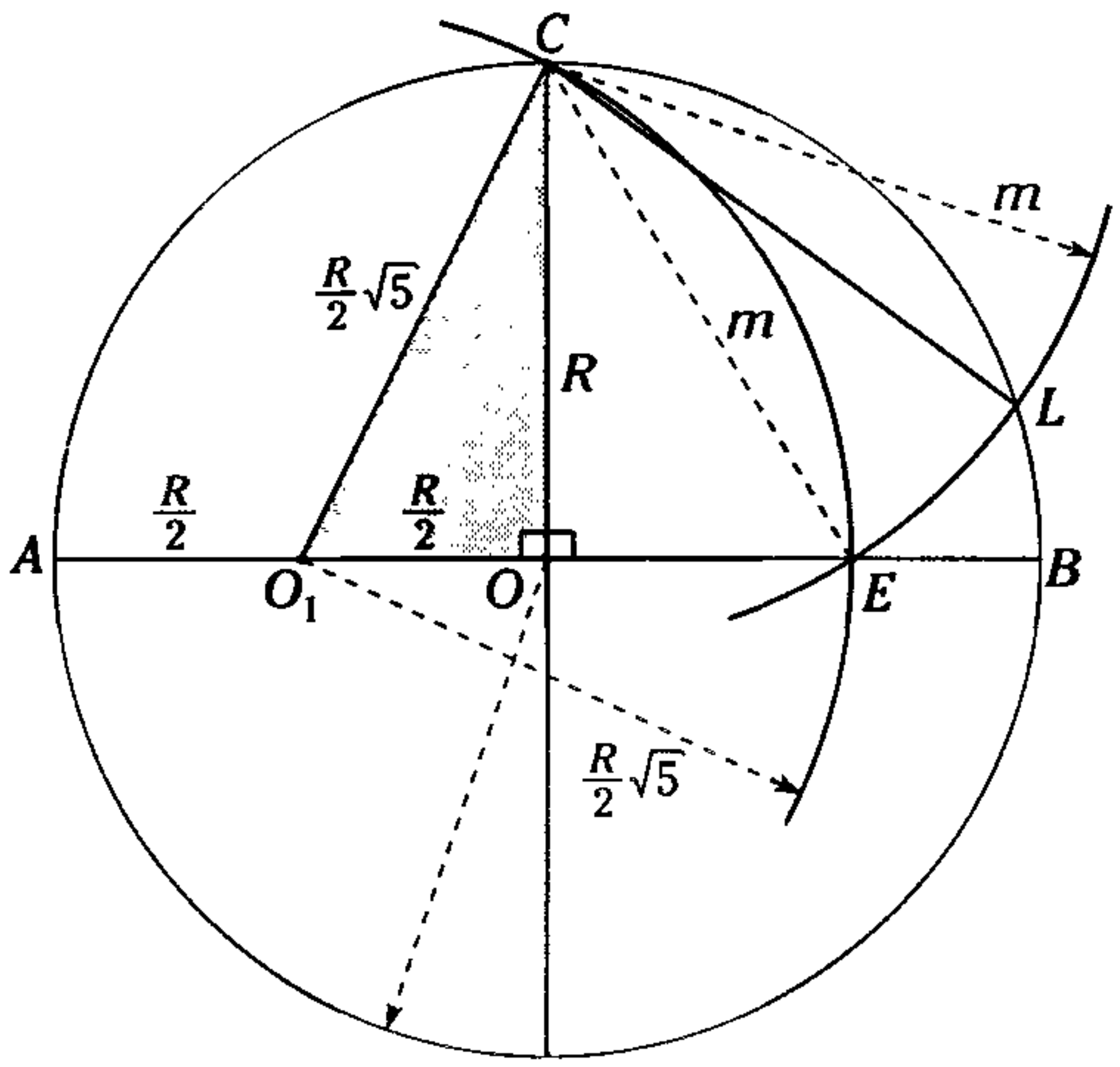


Figura 17.30

Según la figura

$\triangle COE$: teorema de Pitágoras

$$m^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\right)^2$$

Operando

$$m = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\therefore \boxed{m = \ell^5}$$

Observación

De la figura 17.30

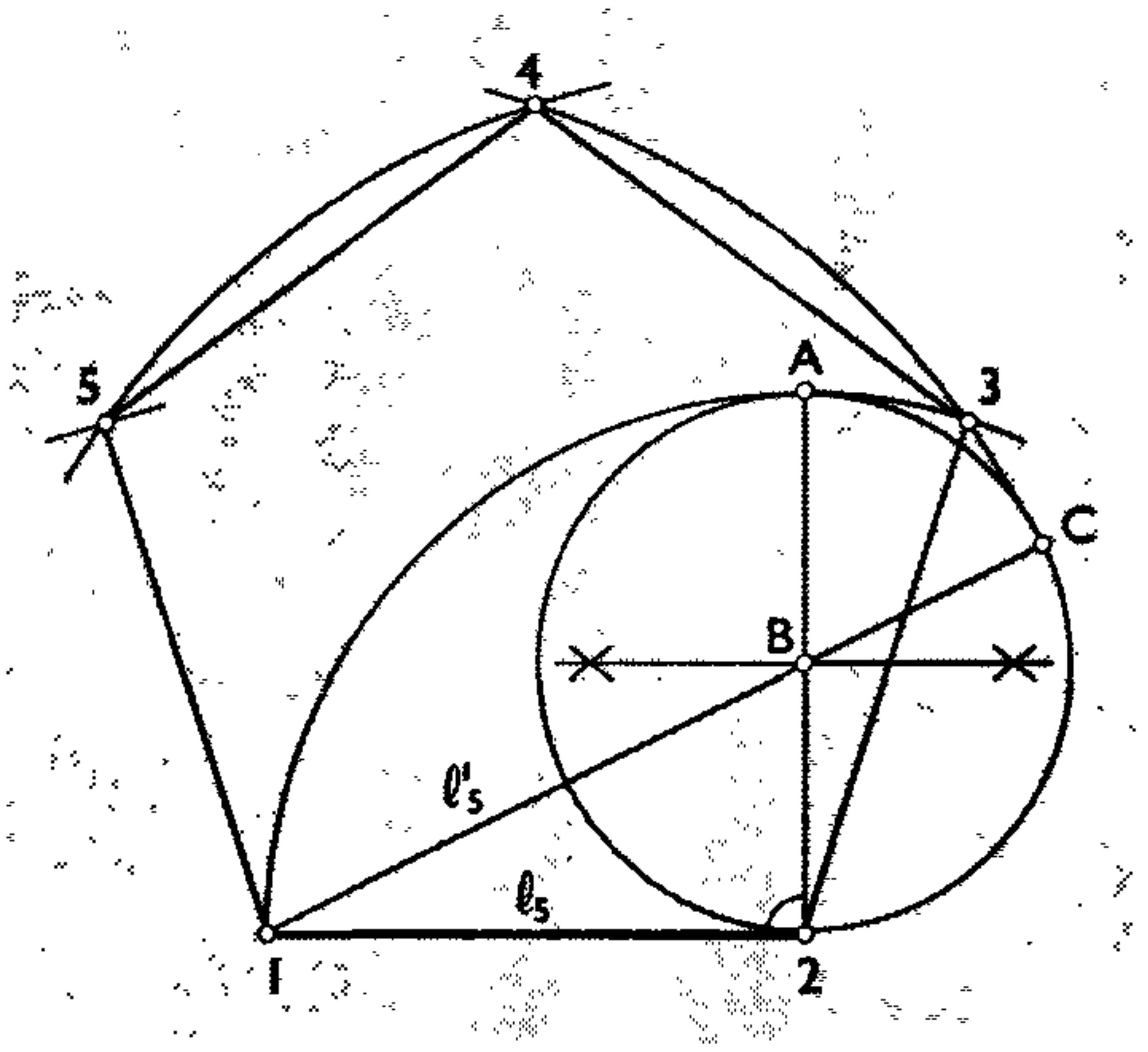
$CO = \ell_6$

$OE = \ell_{10}$

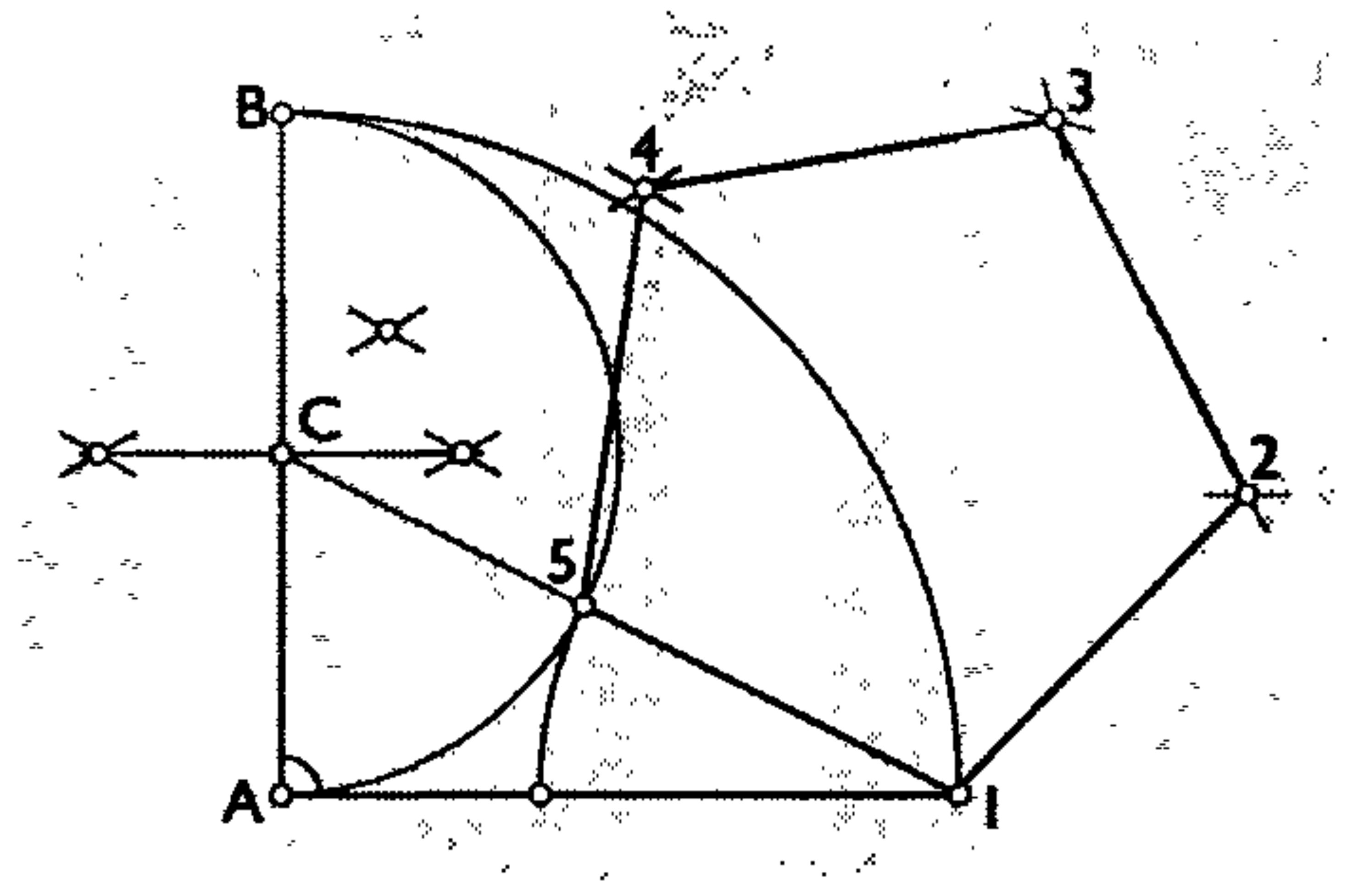
$CE = \ell_5$

$\therefore \boxed{\ell_5^2 = \ell_6^2 + \ell_{10}^2}$

Se demostró lo planteado anteriormente.



Construcción del pentágono (ℓ_5) regular dado el lado del estrellado (ℓ'_5). Operamos como en el caso anterior obteniendo la media y extrema razón del estrellado (ℓ'_5).



Construcción del pentágono regular (ℓ_5) dado el lado del polígono. Dividiendo el lado del pentágono en media y extrema razón, obtendremos la diagonal del pentágono buscado, solo restará construirlo por simple triangulación.

Cálculo de la longitud del pentadecágono regular

Se sabe

$CD = ?$

$m\widehat{CD} = 24°$

$\ell_6 = R \rightarrow m\widehat{AD} = 60°$

$\ell_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \rightarrow m\widehat{AC} = 24°$

$\ell_3 = R\sqrt{3}$, luego $m\widehat{CD} = 24° \rightarrow CD = \ell_{15}$

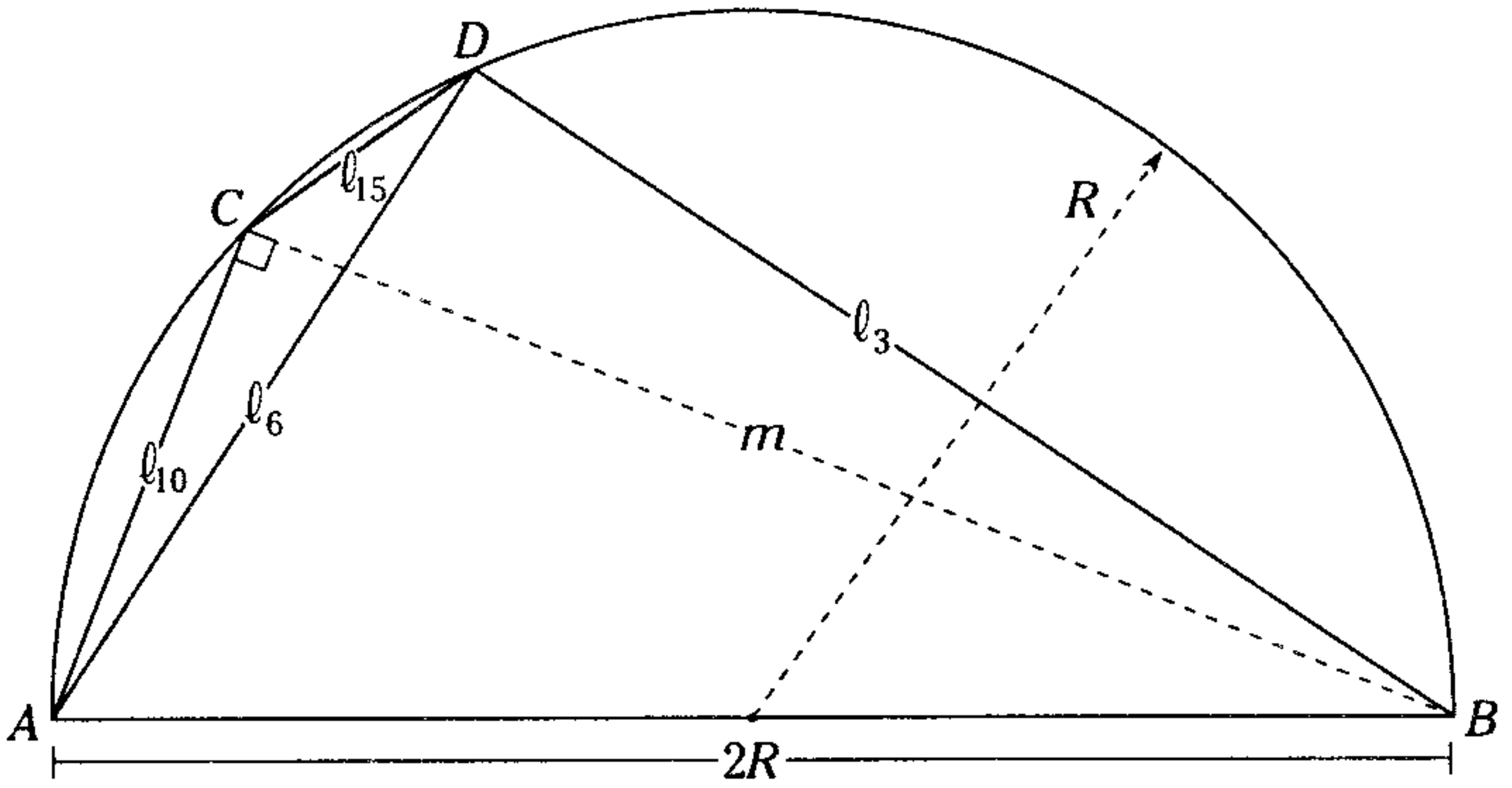


Figura 17.31

Del $\triangle ACB$ (Pitágoras)

$$m^2 = 4R^2 - (\ell_{10})^2$$

Reemplazando

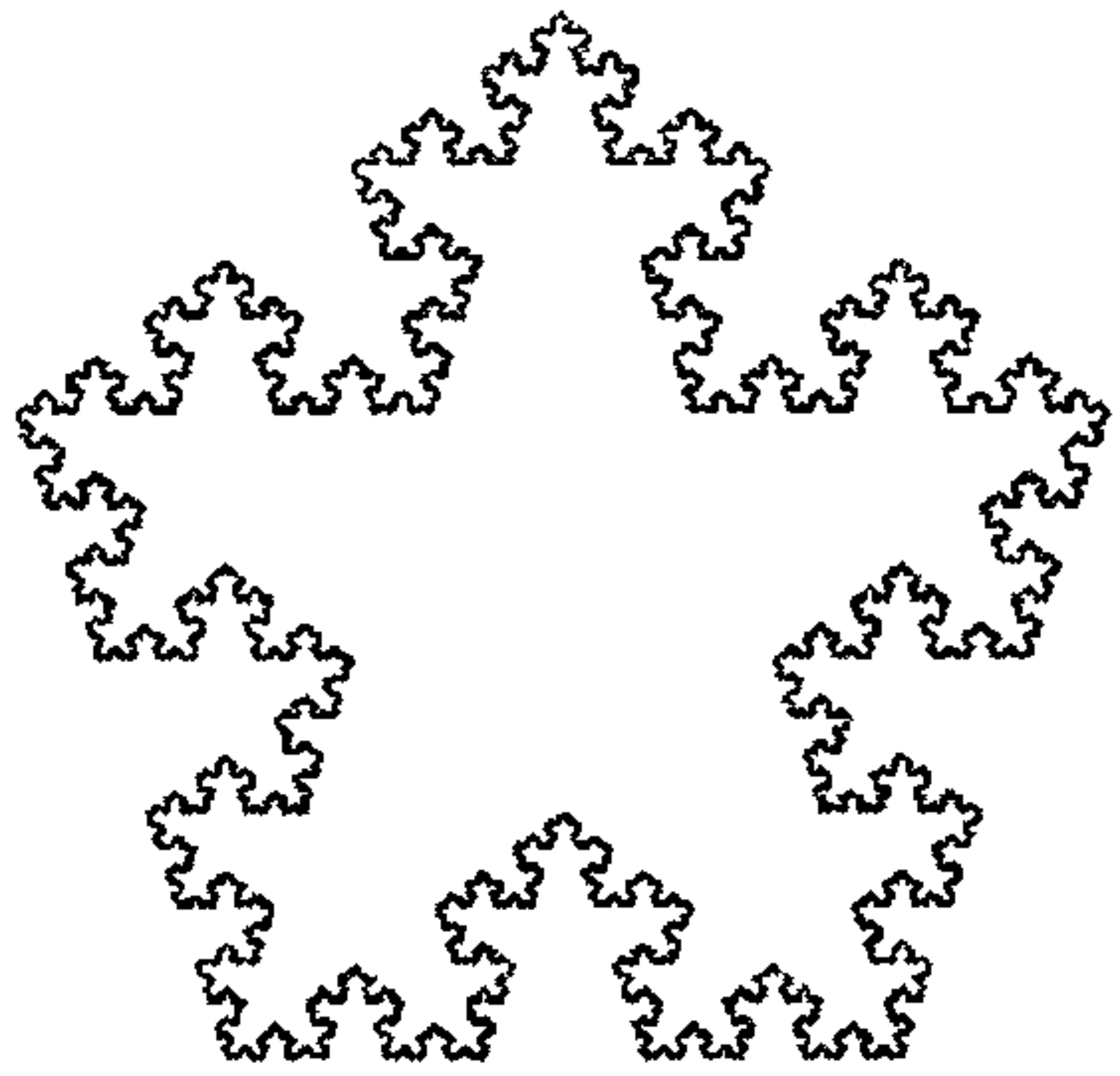
$$m = \frac{R}{2}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right) \qquad \text{(I)}$$

Luego $\square ACDB$ (teorema de Ptolomeo)

$$m\ell_6 = (\ell_{10})(\ell_3) + (\ell_{15})(2R) \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II) y operando

$$\ell_{15} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} - \sqrt{3}\right)$$



El pentágono fractal. *En una construcción análoga al copo de nieve de Koch solo que en vez del triángulo equilátero se toma como base un pentágono regular y se prolongan sus lados formando la estrella pentagonal en la cual cada lado es dividido en tres partes y en donde la parte central es reemplazada por pares angulares de 36°.*

LECTURA

PANAL DE ABEJAS Y SU FORMA EXAGONAL

Lo que obtienen es la optimización de espacios

Dicha optimización fue constatada por Papus de Alejandría, matemático griego que vivió el año 284 al 305. Su afirmación se basaba en la forma **exagonal** que imprimen las abejas a sus celdillas para guardar la miel.

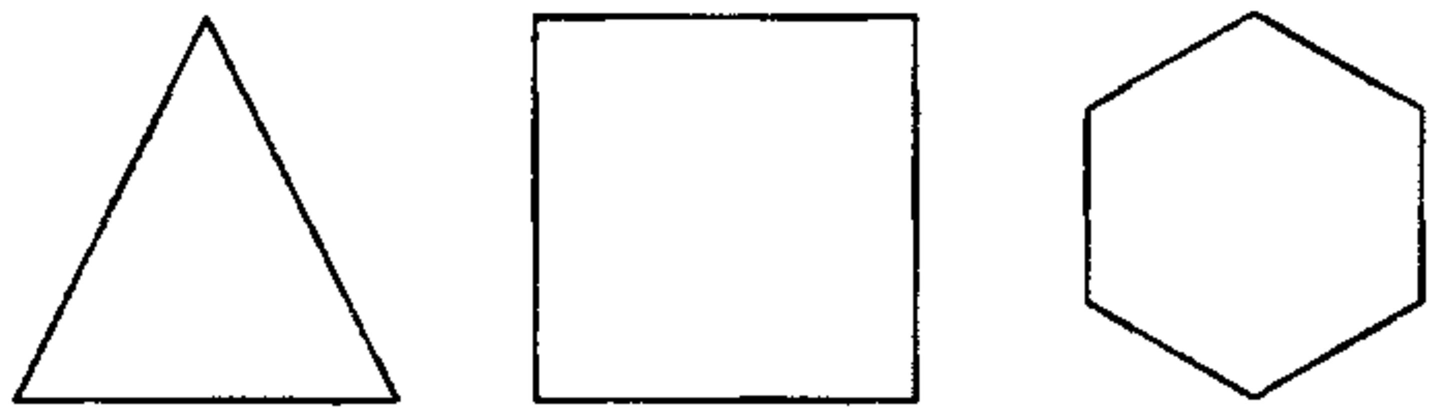
Al almacenar la miel, las abejas deben de resolver un serio problema: necesitan guardarla en celdillas **individuales,** de tal manera que formen un mosaico sin huecos ni salientes entre las celdillas, con el objeto **de aprovechar** el espacio al máximo.

Sorprendentemente, de entre todas las posibles figuras **geométricas** escogieron el exágono. ¿Por qué, si es más difícil de construir?

La respuesta es un problema **isoperimétrico** (del griego "mismo perímetro"). Papus de Alejandría había demostrado que, entre todos los polígonos regulares con el mismo perímetro, encierran más área aquellos que tengan mayor número de **lados**. De hecho, la figura que encierra mayor área para un perímetro determinado es el **círculo**, con un número infinito de lados.

No obstante, un círculo deja espacios cuando se rodea de otros círculos. Así, de todas las figuras geométricas que cumplen la condición "mayor número de lados y **adyacencia** sin huecos", matemáticamente es el exágono más óptimo.

Las abejas, en virtud de una cierta intuición geométrica, saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y que el triángulo, y que podrá contener más miel con el mismo gasto de material (cera).



$\ell = 4$ u	$\ell = 3$ u	$\ell = 2$ u
$2p = 12$ u	$2p = 12$ u	$2p = 12$ u
Área = 6,9 u^2	Área = 9 u^2	Área = 10,4 u^2

Este problema de las abejas había admirado ya a los clásicos y fue estudiado por importantes matemáticos, entre otros, Colin McLaurin (1698-1746) y Gabriel Cramer (1704-1752).

Un panal de miel compuesto de alveolos hexagonales. Esta disposición permite obtener un volumen de habitabilidad máximo.

FUENTE: http://www.pitoresco.com.br/espelho/destaques/linha_forma_cor/expo.htm

B I O G R A F Í A

BLAS PASCAL (19 de junio 1623 - París 1662)

Blas Pascal

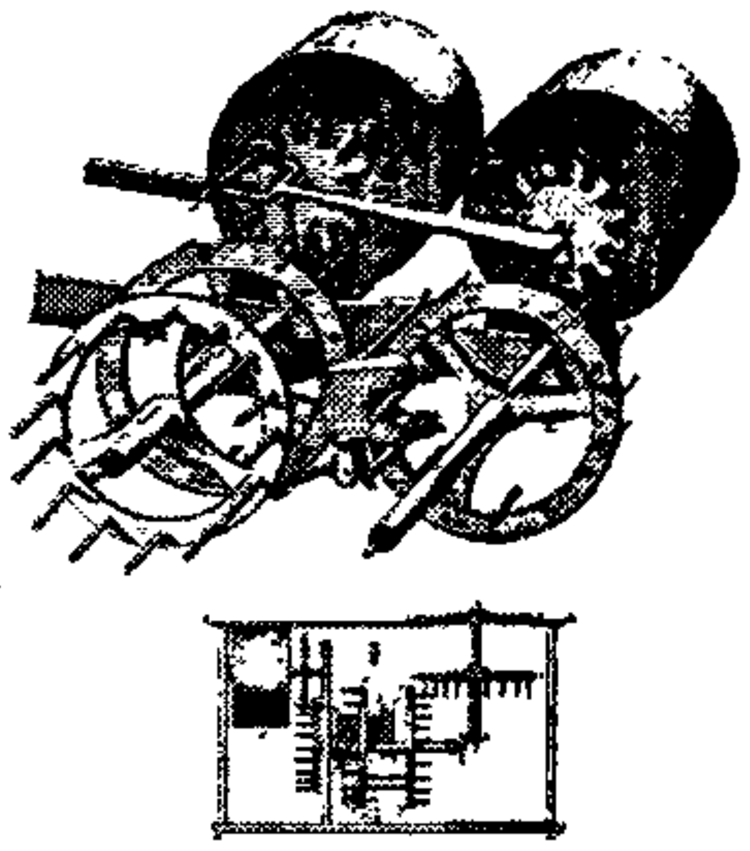
Matemático nacido en Clermont-Ferrand (Auvernia), cuyas cualidades destacaron por un rigor científico y una imaginación de poeta.

El padre del pequeño Blas Pascal no quería que su hijo estudiará matemáticas. Prefería que dedicase sus esfuerzos a las lenguas antiguas, más aquel chico era un prodigio con los números. Según el relato (seguramente exagerado) de su hermana, Blas descubrió en su adolescencia por sí solo numerosos teoremas de Euclides. En vista de semejante prodigio, su padre no tuvo más remedio que ceder y dejarlo estudiar matemáticas.

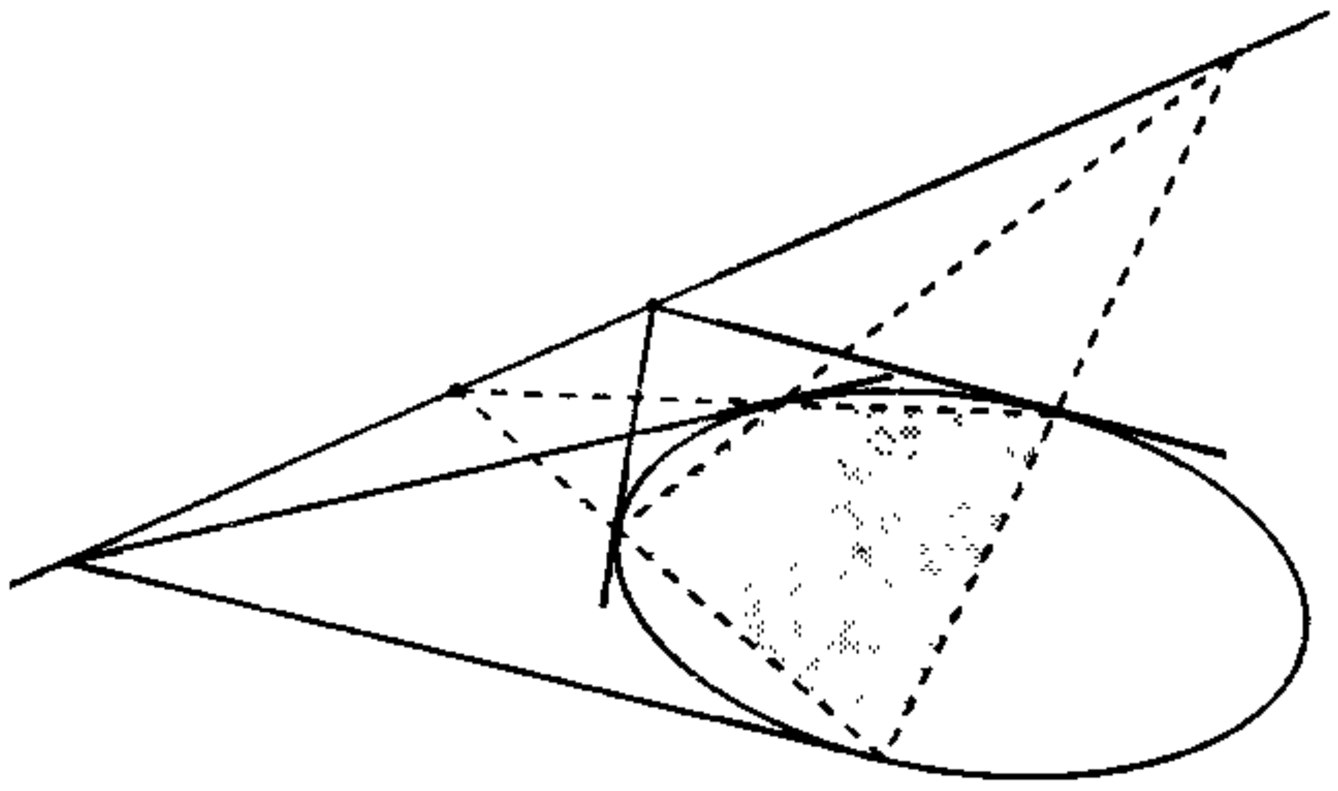
A los catorce años fue admitido en una prestigiosa academia. A los dieciséis, escribe un *Ensayo sobre las secciones cónicas* (*Essay pour les coniques*), cuya teoría fundamentó en el llamado hexagrama místico: "Todo exágono inscrito en una sección cónica goza de la propiedad de que los tres puntos de encuentro de los lados opuestos están siempre en línea recta". A los 18 años, para ayudar a su padre en sus cuentas, inventa una máquina de calcular, la "Pascalina", que más adelante perfeccionó. Todo ello, como es natural, le granjea una reputación de niño prodigio que hace fruncir el ceño a Descartes (su contemporáneo, así como Fermat).

Formuló el principio que hoy lleva su nombre en los siguientes términos: "Si en un recipiente lleno de agua, cerrado, exceptuando dos aberturas, una cétuplo de la otra, se acopla uno de ellos un pistón bien ajustado, ocurrirá que un hombre empujando el pistón pequeño igualará a la fuerza de cien hombres que empujen el pistón cien veces mayor e incluso podrá sobrepujarlos..."

Su obra sobre probabilidades se refiere al problema de los jugadores que también había preocupado a Fermat, estableciendo un remoto precedente a la actual "teoría de los juegos" de Von Newman. Estudió cierto triángulo aritmético en el que las sucesivas diagonales contienen los coeficientes; estos aparecerán en el desarrollo del binomio que Newton había de generalizar. No obstante, el triángulo se designa, a veces, con el nombre de Pascal, este a su vez puede remontarse a los pitagóricos.



La pascalina, inventada en 1692 es la primera máquina sumatoria mecánica.

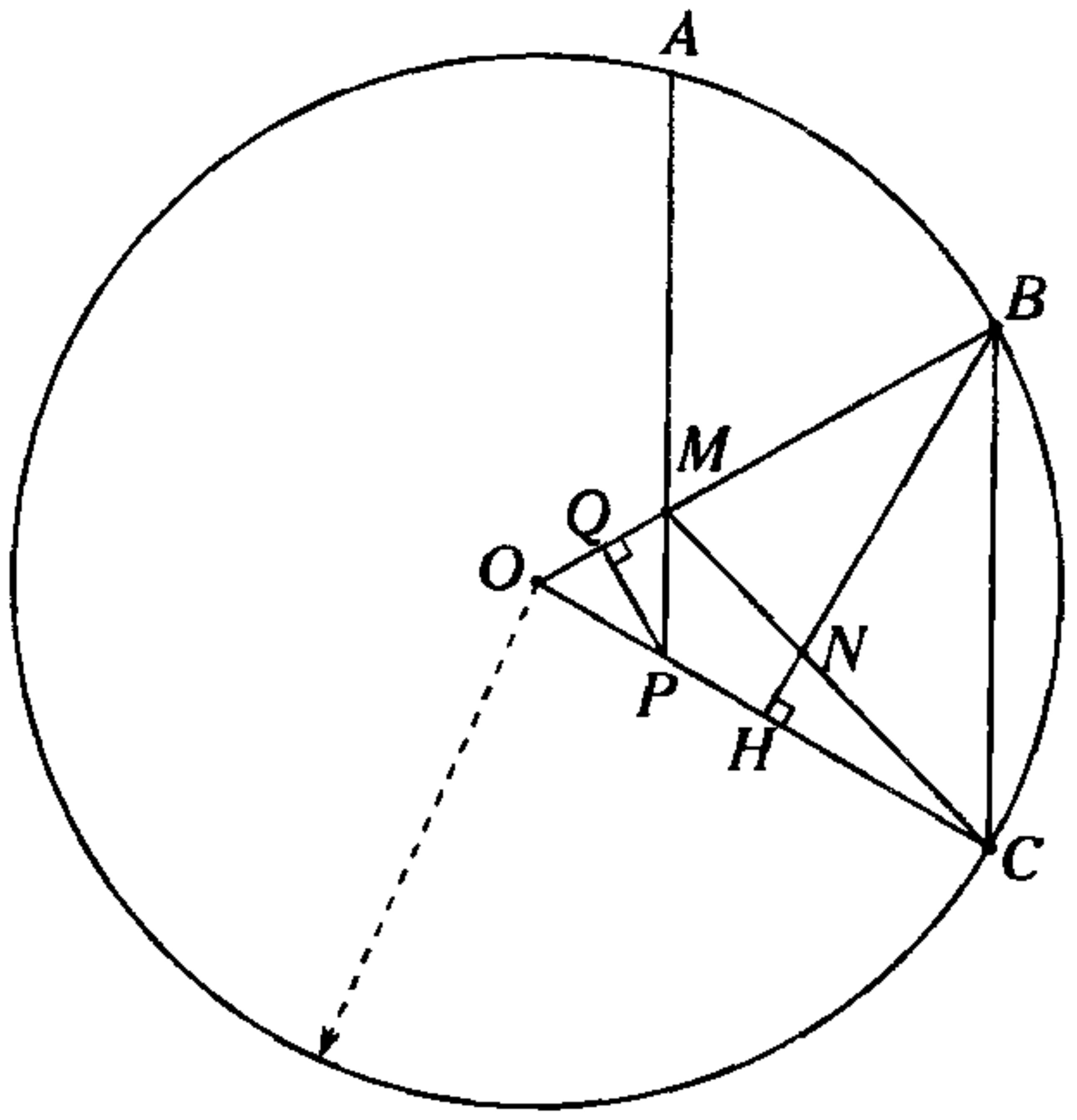


La recta de Pascal (1639). *Si los 6 vértices de un exágono están situados en una cónica y los 3 pares de lados opuestos se cortan, entonces los puntos de intersección son colineales.*

FUENTE: GARCÍA FONT, Juan, *Historia de la ciencia*. Ediciones Danve. 1964. pp. 302-303

Problema 1

En la figura, $\overline{BC}$ es el lado de un exágono regular inscrito. Si $BH = 3(PQ)$ y $\overline{AM} \parallel \overline{BC}$, halle MN/NC.



A) 1/2 B) 1/3 C) 2/3
D) 3/2 E) 3/5

Resolución

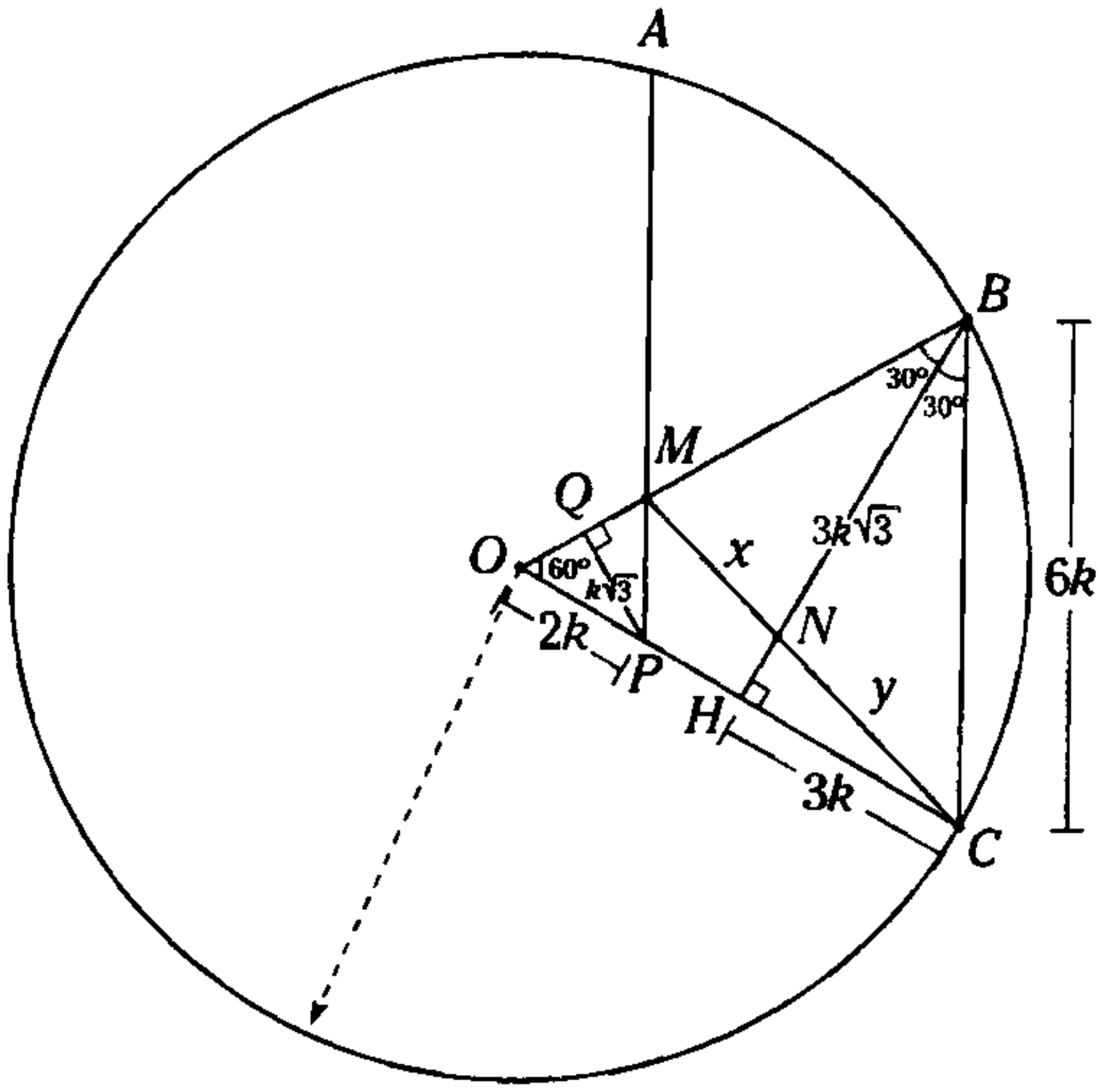


Figura 17.32

Piden $\dfrac{MN}{NC} = \dfrac{x}{y}$

Del dato

$BC = 6\ell_6$

$\rightarrow\ m\widehat{BC} = 60°$ y

$BH = 3(PQ) = 3\sqrt{3}k$

En el $\triangle OBC$

$BC = OC = OB = 6k$

En el $\triangle OMP$

$BC = OC = OB = 2k$

Se nota de la figura

$MB = BO - OM$

$MB = 6k - 2k$

$MB = 4k$

$\triangle MBC$: teorema bisectriz interior

$$\frac{x}{y} = \frac{MB}{CB} = \frac{4k}{6k}$$

$$\therefore\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

CLAVE C

Problema 2

Se tiene un cuadrado $ABCD$ inscrito en una circunferencia, en los arcos AB y BC se ubican los puntos P y Q, respectivamente, tal que $m\widehat{QC} = 2(m\widehat{AP})$. Si la medida del ángulo entre $\overline{BC}$ y $\overline{PQ}$ es 55° y la distancia del centro del cuadrado a $\overline{PQ}$ es $\sqrt{3}$, señale el apotema del cuadrado.

A) $\sqrt{3}$ B) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{2}$

Resolución

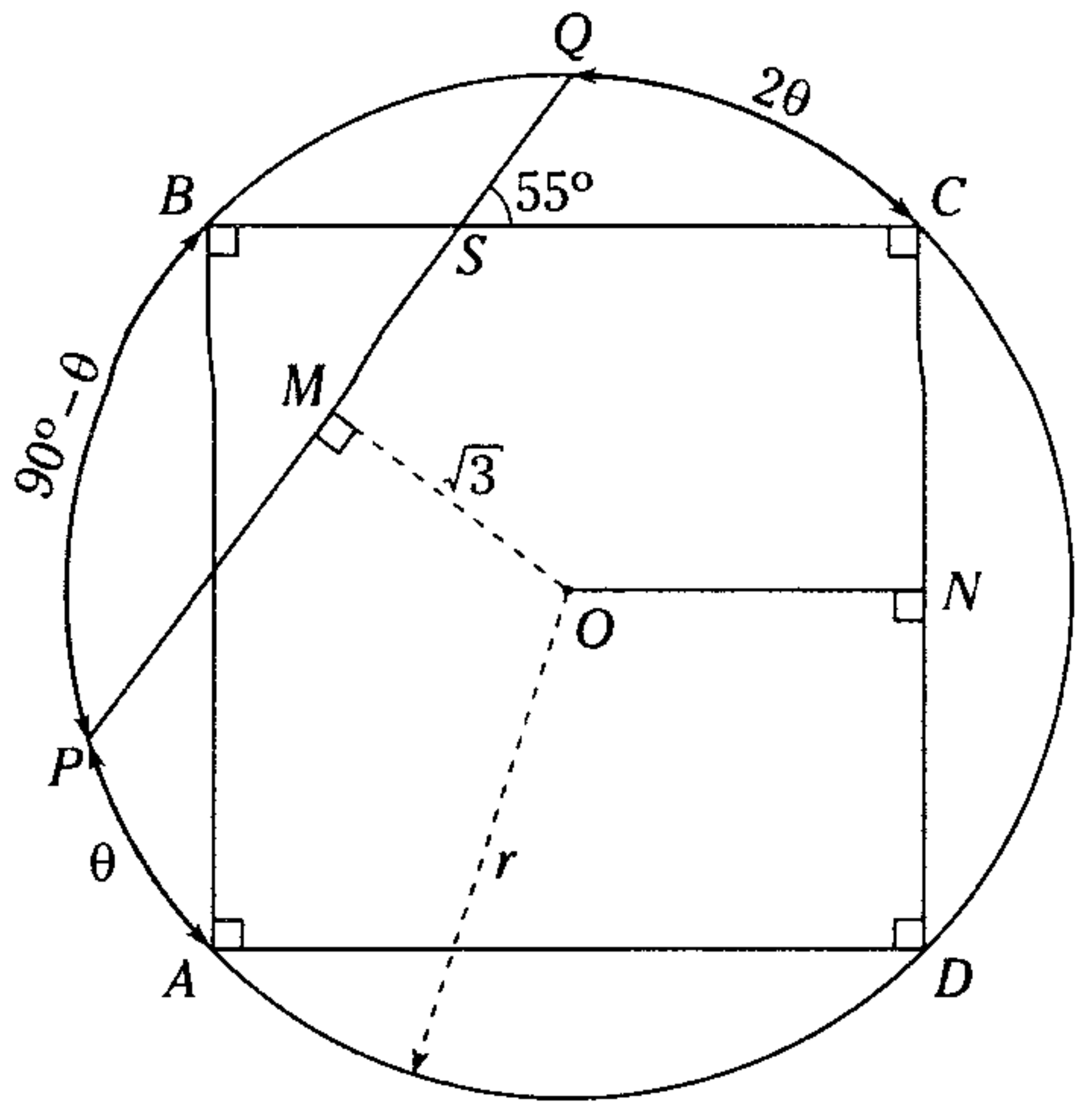


Figura 17.33

Piden $a_{p(4)} = ON$

Se sabe

$$a_{p(4)} = \frac{r\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(I)}$$

Del dato

$m\widehat{QC} = 2(m\widehat{AP}) = 2\theta$

$\rightarrow \ (m\widehat{AP}) = \theta$

En S (ángulo interior en la circunferencia)

$$55° = \frac{2\theta + 90° - \theta}{2}$$

$\theta = 20°$

De la figura, $m\widehat{PBQ} = 120° \ \rightarrow \ PQ = \ell_3$ y

$$OM = a_{p(3)} = \frac{r}{2}$$

$$\sqrt{3} = \frac{r}{2} \ \rightarrow \ r = 2\sqrt{3}$$

En (I)

$$a_{p(4)} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore \ a_{p(4)} = \sqrt{6}$$

CLAVE D

Problema 3

En el arco BC de la circunferencia circunscrita a un octógono regular $ABCDEFGH$, se ubica un punto P, tal que $PC = 1$ y $PE = 4\sqrt{2}$. Calcule la longitud del radio de la circunferencia.

A) $2\sqrt{2}$ B) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

Resolución

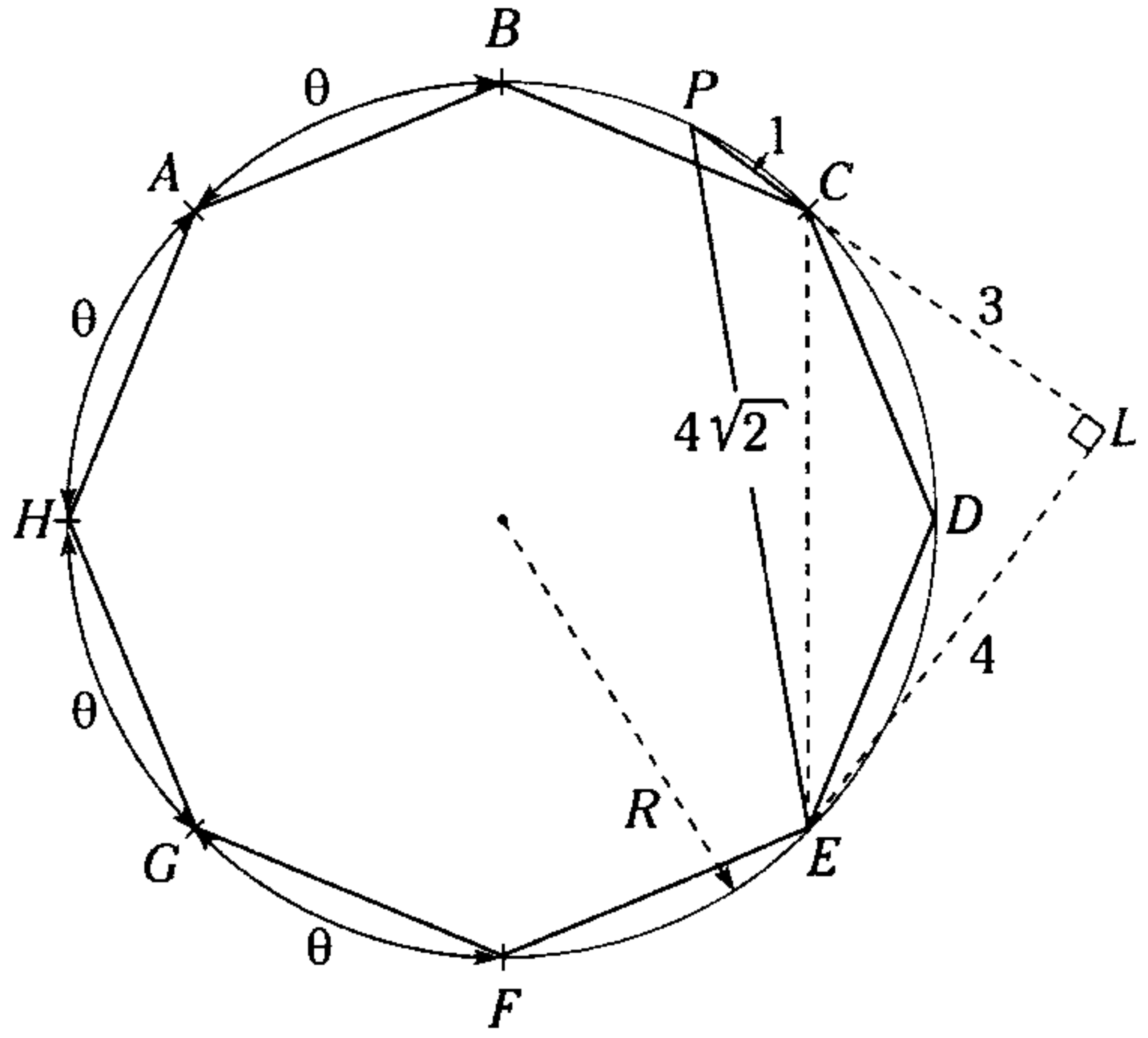


Figura 17.34

Piden R.

Se sabe $\theta_8 = \frac{360°}{8} = 45°$

Se traza $\overleftrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{EL}$

⊿PLE notable de 45°, 45°

$PL = PE = 4 \ \rightarrow \ CL = 3$

⊿CLE: notable de 37°, 53°; $CE = 5$ (I)

Se nota $m\widehat{CDE} = 90°$

$\rightarrow \ CE = \ell_4 \ \rightarrow \ CE = R\sqrt{2}$ (II

De (I) y (II)

$$R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

CLAVE C

Problema 4

Se tiene un polígono regular de n lados, cuyo lado mide $2-\sqrt{3}$ y su apotema es 1/2. Halle el apotema del polígono regular de $(n-6)$ lados, cuyo lado mide 6.

A) $2\sqrt{3}$ B) 3 C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

Resolución

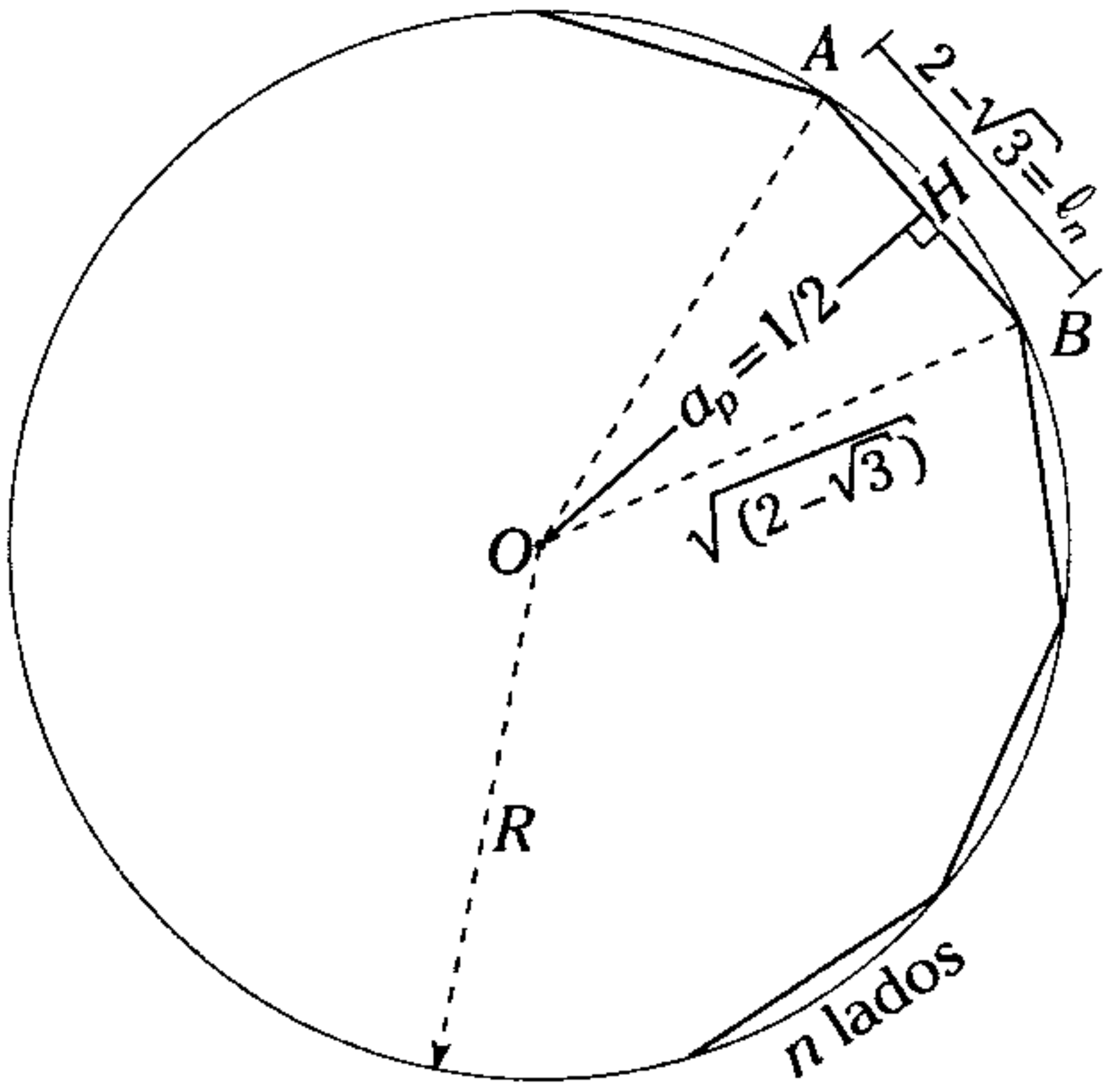


Figura 17.35

Piden $a_{p(n-6)}$

$\triangle OHB$: teorema de Pitágoras

$$R^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow R=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Como podemos notar en el $\triangle AOB$

$$2-\sqrt{3}=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$

Es decir, la relación entre AB y R es de ℓ_{12} $(n=12)$

El otro polígono regular es de $(n-6)$ lados.

Por teoría

$$a_{p(n-6)}=\frac{R_1\sqrt{3}}{2}$$

$$a_{p(n-6)}=\frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ a_{p(n-6)}=3\sqrt{3}$$

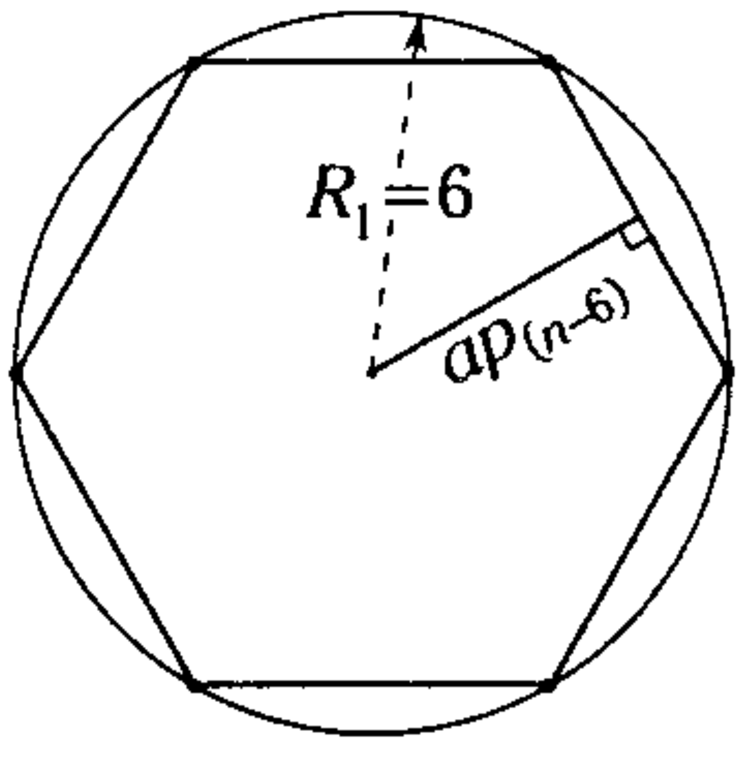


Figura 17.36

CLAVE C

Problema 5

En una circunferencia se encuentra inscrito un triángulo equilátero ABC; luego, se traza la cuerda NP que interseca a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en los puntos M y Q, tal que $\overline{BC}\perp\overline{NP}$ y $MN=2(PQ)=2$. Señale el circunradio del triángulo equilátero.

A) $\sqrt{3}-1$ B) $2\sqrt{3}-1$ C) $\sqrt{3}+1$
D) $\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt{3}+2$

Resolución

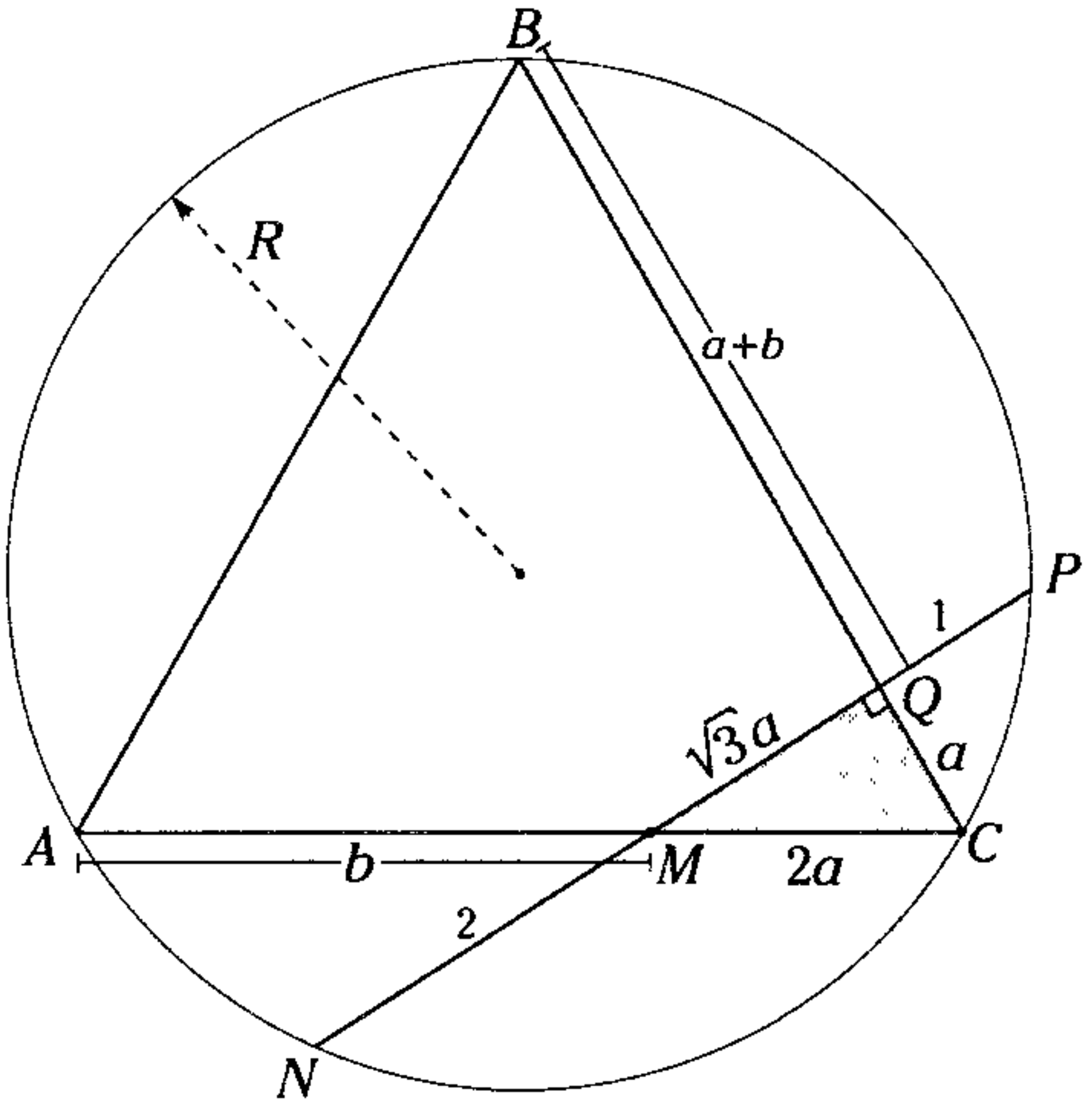


Figura 17.37

Piden R.

Por polígonos regulares

$$\ell_3=BC=R\sqrt{3} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle MQC$: Notable 30°, 60°, $MC=2(QA)=2a$

Si $AM=b \rightarrow AC=BC=2a+b$

Por teorema de cuerdas

$$(2+a\sqrt{3})\,1=a(a+b)$$

$$(2+a\sqrt{3})=a^2+ab \qquad \text{(II)}$$

Por teorema de cuerdas

$$(2a)b=2(a\sqrt{3}+1)$$

$$ab=a\sqrt{3}+1 \qquad \text{(III)}$$

(III) en (II)

$$2+a\sqrt{3}=a^2+(a\sqrt{3}+1)$$

$$a=1 \ \text{ y } \ b=\sqrt{3}+1$$

En (I)

$$2+\sqrt{3}+1=R\sqrt{3}$$
$$R=\sqrt{3}+1$$

CLAVE C

Problema 6

En un triángulo ABC ($AB=BC$), donde la $m\sphericalangle ABC=30°$, se inscribe el cuadrado $PQRS$, tal que $\overline{PQ}$ pertenece a $\overline{AB}$ (Q: próximo a B). Si $\overline{QC}$ y $\overline{PC}$ intersecan a $\overline{RS}$ en T y L, respectivamente; además $TL=\sqrt{2+\sqrt{3}}$, señale AC.

A) 4 B) 7 C) 8
D) 9 E) 12

Resolución

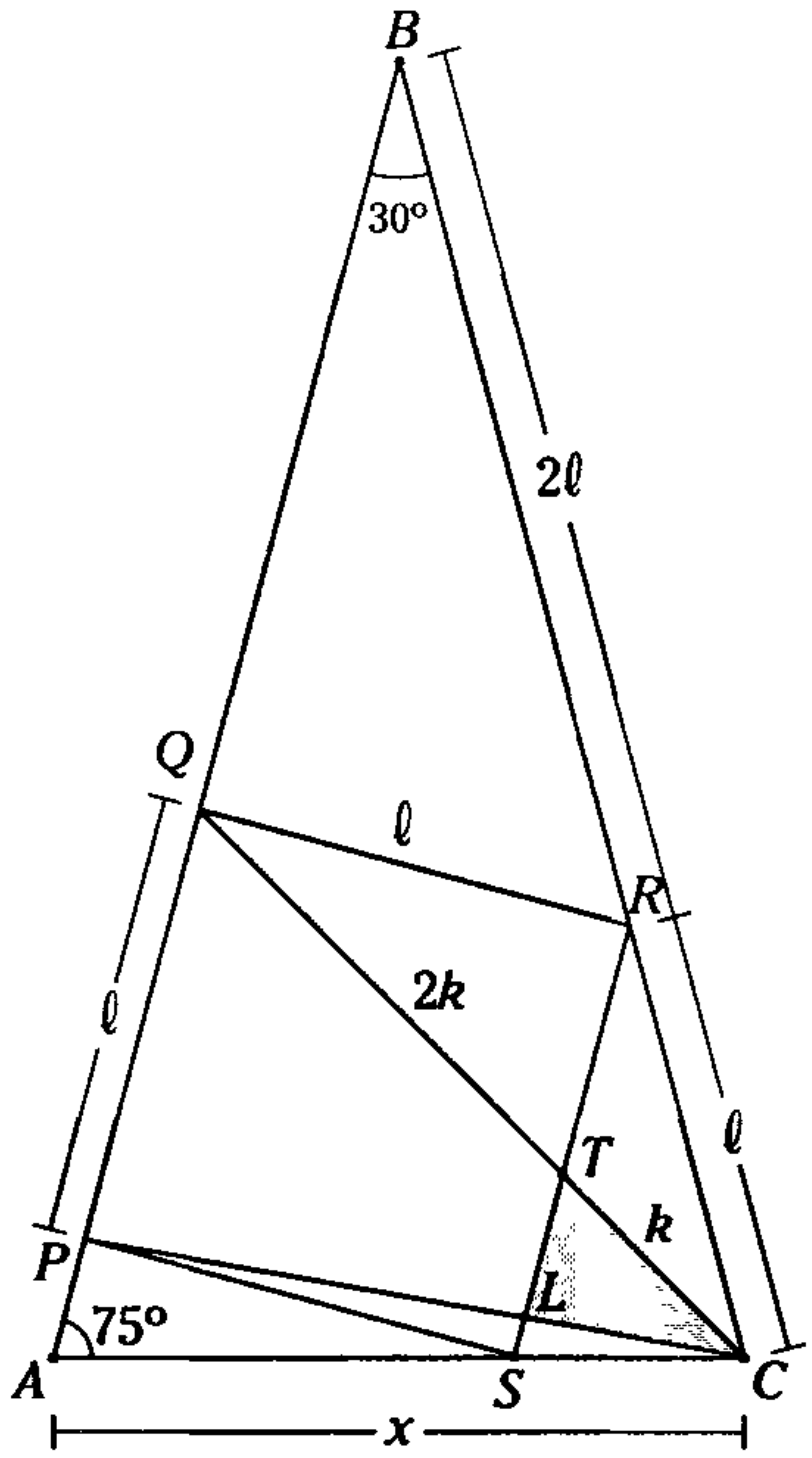


Figura 17.38

Piden $AC=x$

Dato: $TL=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\triangle BQR$: Not. 30°, 60°

$\rightarrow BR=2(QR)=2\ell \rightarrow BC=3\ell$

Como $\overline{BQ}\,//\,\overline{RT}$: Por teorema de Tales: $\dfrac{QT}{TC}=\dfrac{2\ell}{\ell}$

$\rightarrow QT=2k$ y $TC=k$

$\triangle TLC \sim \triangle QPC$

$$\frac{TL}{\ell}=\frac{k}{3k}$$

$$\rightarrow \ell=3\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

ABC: elemental de ℓ_{12}

$$x=\ell_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$R=BC=3\ell=9\sqrt{2+\sqrt{3}}$$
$$\therefore\ x=9$$

CLAVE D

Problema 7

Se tiene el octágono regular $ABCDEFGH$ y el triángulo equilátero BCN interior al octágono, Luego, se traza $DS\perp CN$ ($S\in\overline{CN}$). Determine CS, si el circunradio del octágono es $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

A) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{2(2-\sqrt{2})}$ C) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

D) $\sqrt{2(2-\sqrt{3})}$ E) $\sqrt{2(4-\sqrt{2})}$

Resolución

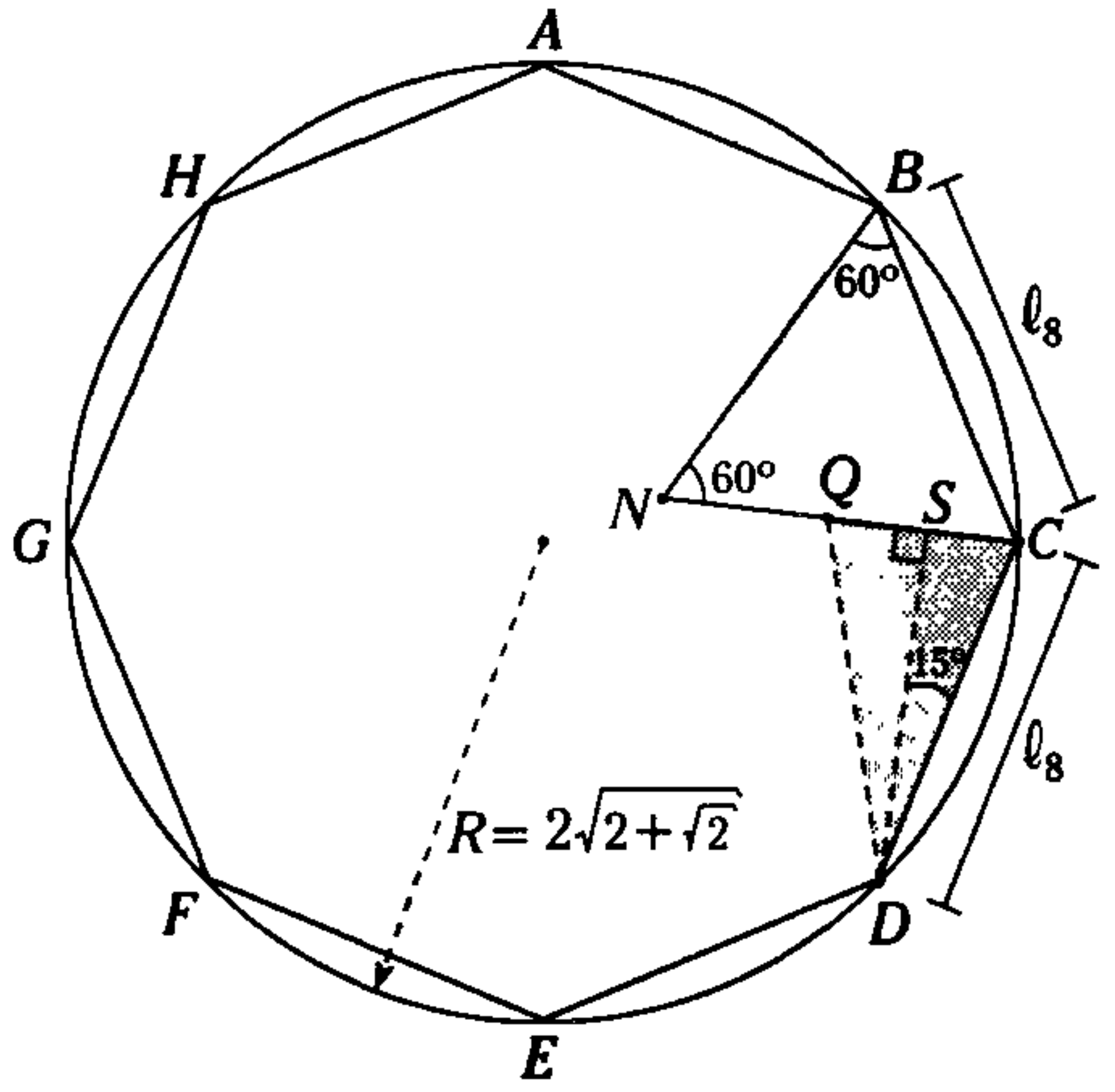


Figura 17.39

Piden $CS=x$

Se sabe que la medida del ángulo interior del octógono es 135°.

$$\rightarrow \ m\sphericalangle SCD=135^\circ-60^\circ$$

$$m\sphericalangle SCD=75^\circ$$

Se traza $\overline{DQ}$, tal que $CD=DQ$ y $\triangle CDQ$: es elemental de ℓ_{12}

$$CQ=\ell_{12}=CD\sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad \text{(I)}$$

Pero

$$CD=\ell_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$CD=2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

Reemplazando en (I)

$$CQ=2\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Del $\triangle$ elemental de ℓ_{12}, sabemos que

$$x=\frac{CQ}{2}$$

$$x=\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\therefore \ x=\sqrt{2(2-\sqrt{3})}$$

CLAVE D

Problema 8

En un pentágono regular $ABCDE$, la mediatriz de $\overline{AB}$ interseca a $\overline{EB}$ en el punto K. Señale $\sqrt{\dfrac{BK}{AD}}$.

A) $\sqrt{5}-1$ B) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ C) $\sqrt{5}+1$

D) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ E) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

Resolución

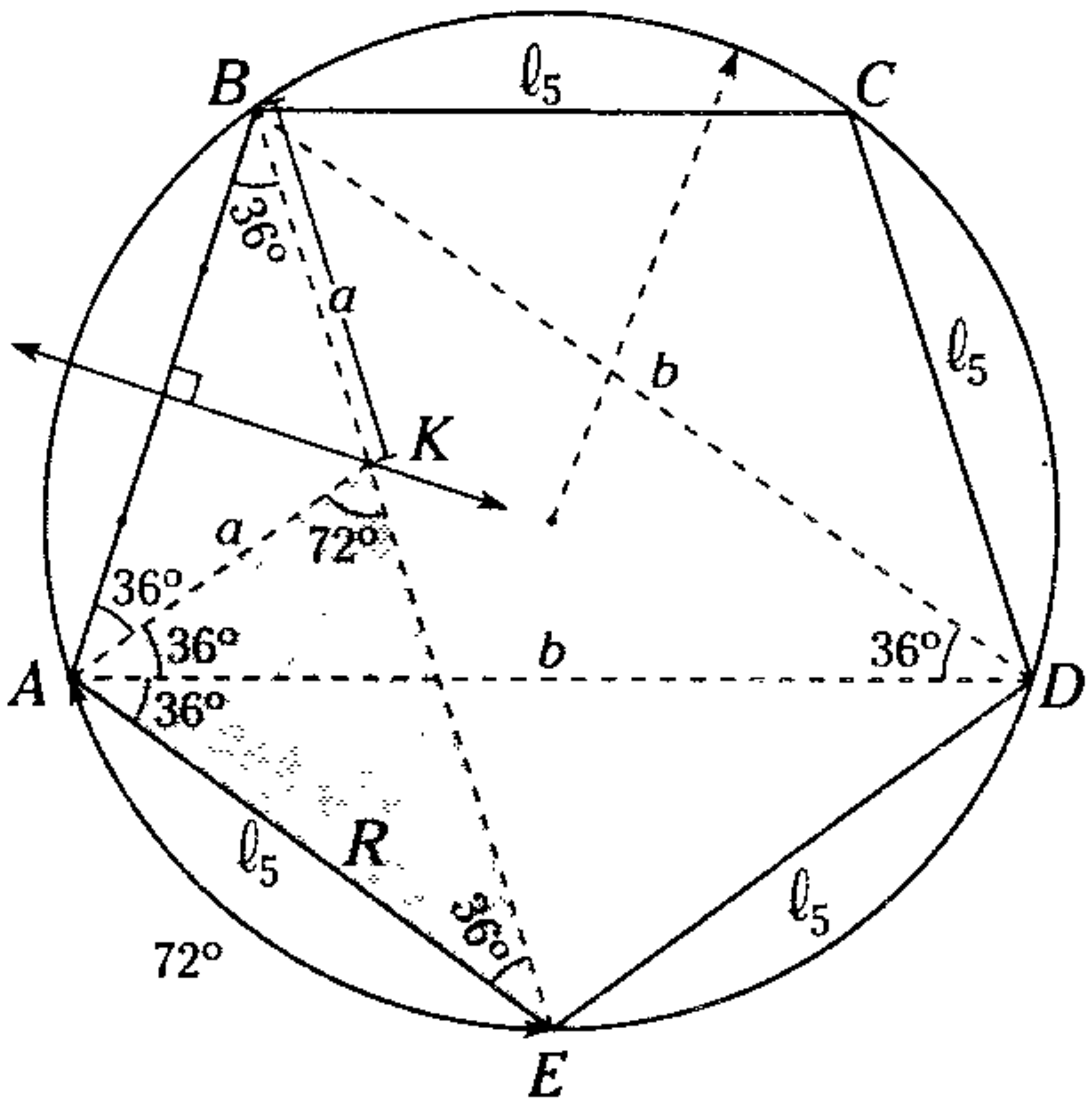


Figura 17.40

Piden $\sqrt{\dfrac{BK}{AD}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Se sabe $m\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{BC}=m\overset{\frown}{CD}=m\overset{\frown}{DE}=m\overset{\frown}{EA}=72^\circ$, también $BD=AD=b$

$\triangle AEK$: $\triangle$ elemental de ℓ_{10} (decágono regular)

$$a=\ell_5\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \qquad \text{(I)}$$

$\triangle BDE$: $\triangle$ elemental de ℓ_{10} (decágono regular)

$$\ell_5=b\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \qquad \text{(II)}$$

Multiplicando (I) y (II)

$$a(\ell_5)=\ell_5\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\times b\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$\frac{a}{b}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

$$\therefore \ \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

CLAVE D

Problema 9

Se tiene un octógono regular *ABCDEFGH*, tal que $\overline{BE} \cap \overline{CF} = \{P\}$. Si la longitud de la proyección de $\overline{PQ}$ sobre $\overline{FC}$ es $2-\sqrt{2}$, indique el circunradio de dicho polígono.

A) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ C) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

D) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Resolución

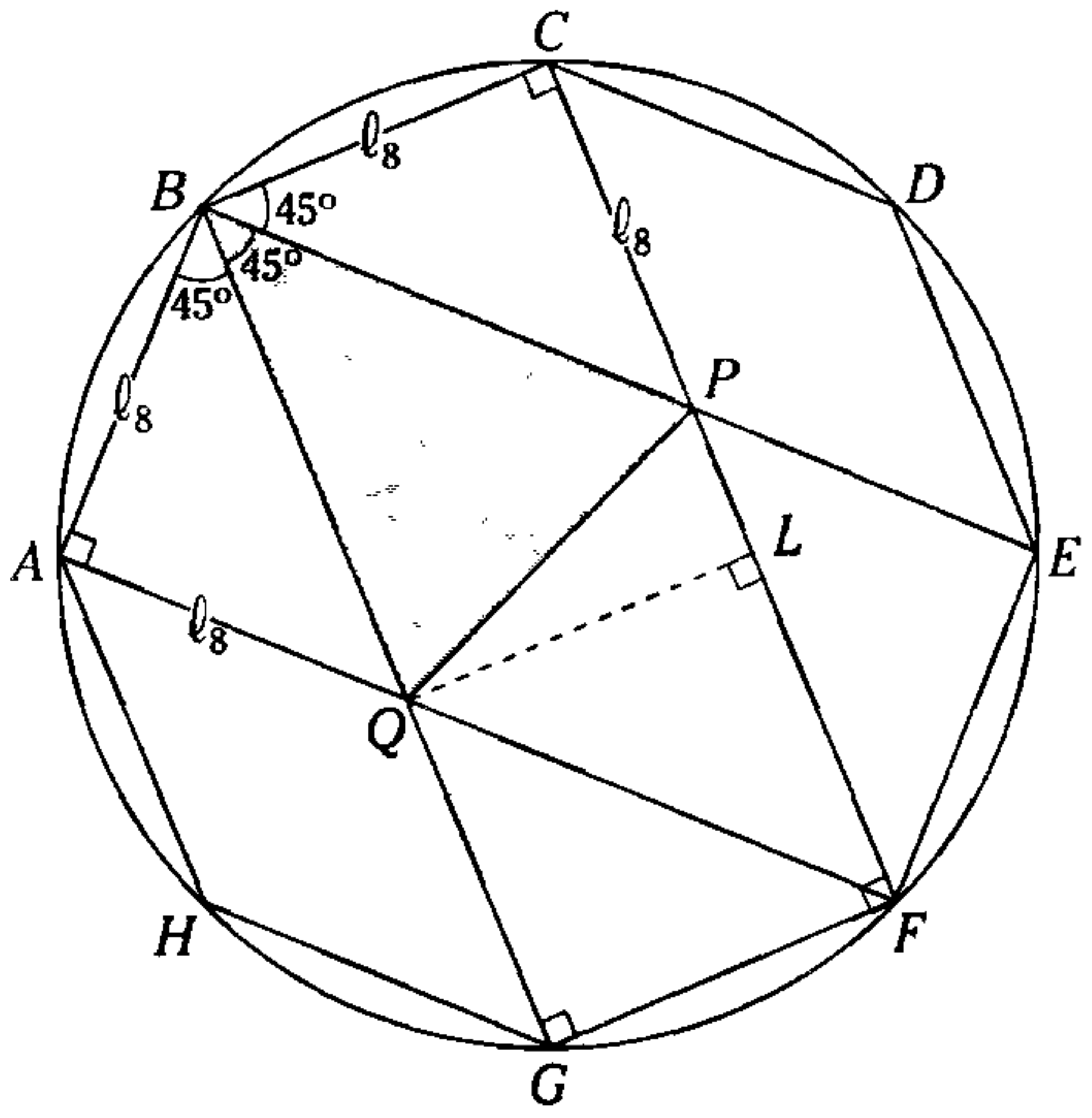


Figura 17.41

Piden R (circunradio del octógono regular).

Se sabe

$$m\widehat{AB} = m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = m\widehat{DE} = m\widehat{EF} = m\widehat{FG} = m\widehat{GH} = m\widehat{HA} = 45°$$

$$\rightarrow\ BC = \ell_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \text{(I)}$$

⊿ *BCP* y ⊿ *BAQ*: son notables de 45°

$$\rightarrow\ BP = BQ = \ell_8\sqrt{2}$$

De la figura, $PL = CL - CP$

$$2-\sqrt{2} = \ell_8\sqrt{2} - \ell_8$$

$$\ell_8 = \sqrt{2}$$

En (I)

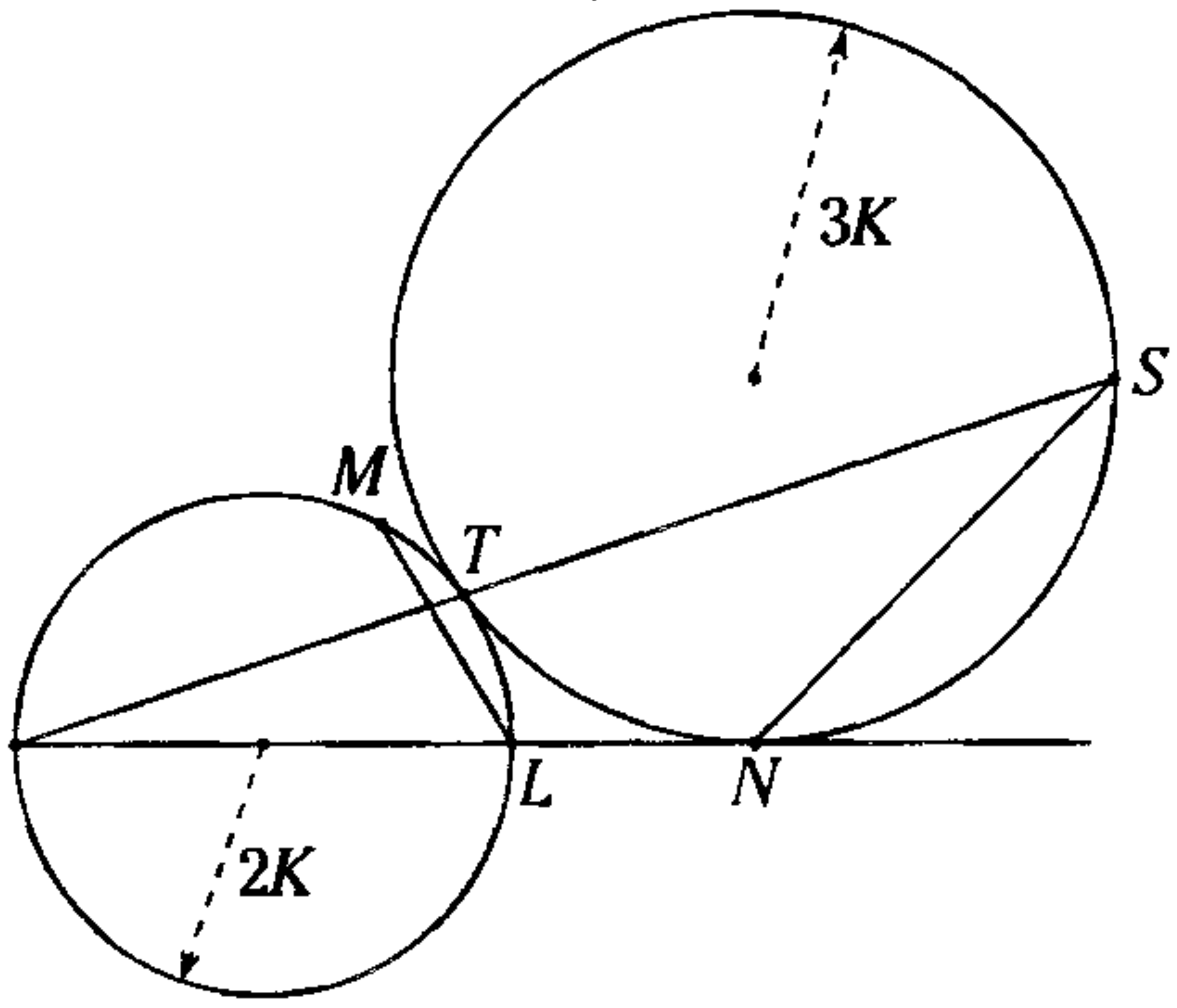
$$\sqrt{2} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ R = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

CLAVE E

Problema 10

De la figura, T y N son puntos de tangencia. Si $m\widehat{MT} = 23°$, señale $\frac{ML}{NS}$



A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

Resolución

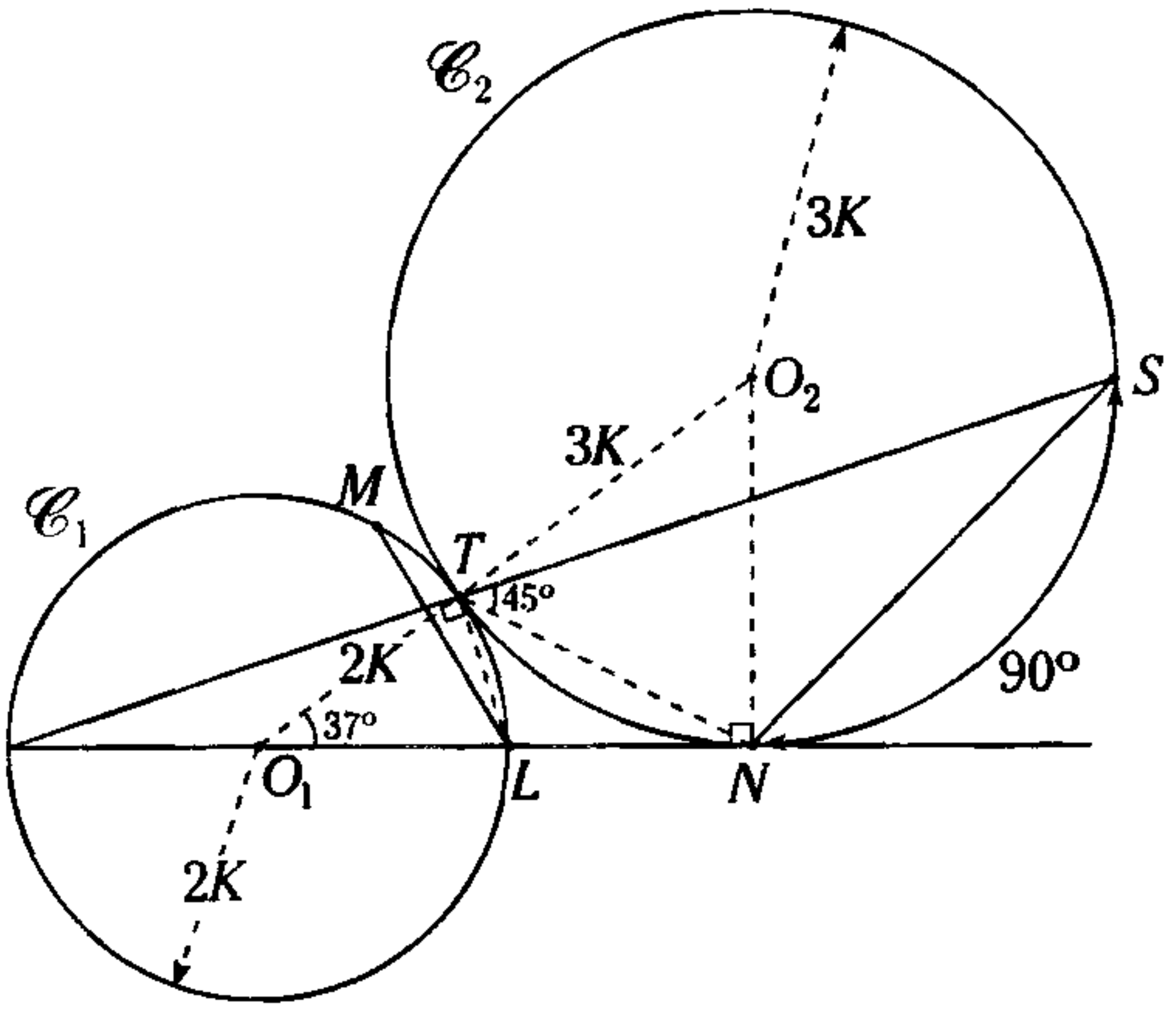


Figura 17.42

Piden $\dfrac{ML}{NS}$

Se trazan $\overline{O_1O_2}$, $\overline{O_2N}$

⊾O_2NO_1: Not. 37°, 53°

Como $m\overset{\frown}{MT} = 23°$ (dato) y $m\overset{\frown}{TL} = 37°$

Por lo cual en $\mathscr{C}_1$: $ML = \ell_6 = 2K$ (I)

Por propiedad

$m\sphericalangle STN = m\sphericalangle LTN = 45°$

$\rightarrow\ m\overset{\frown}{NS} = 90°$

En $\mathscr{C}_2$: $NS = \ell_4 = 3K\sqrt{2}$ (II)

Luego, dividiendo (I) con (II)

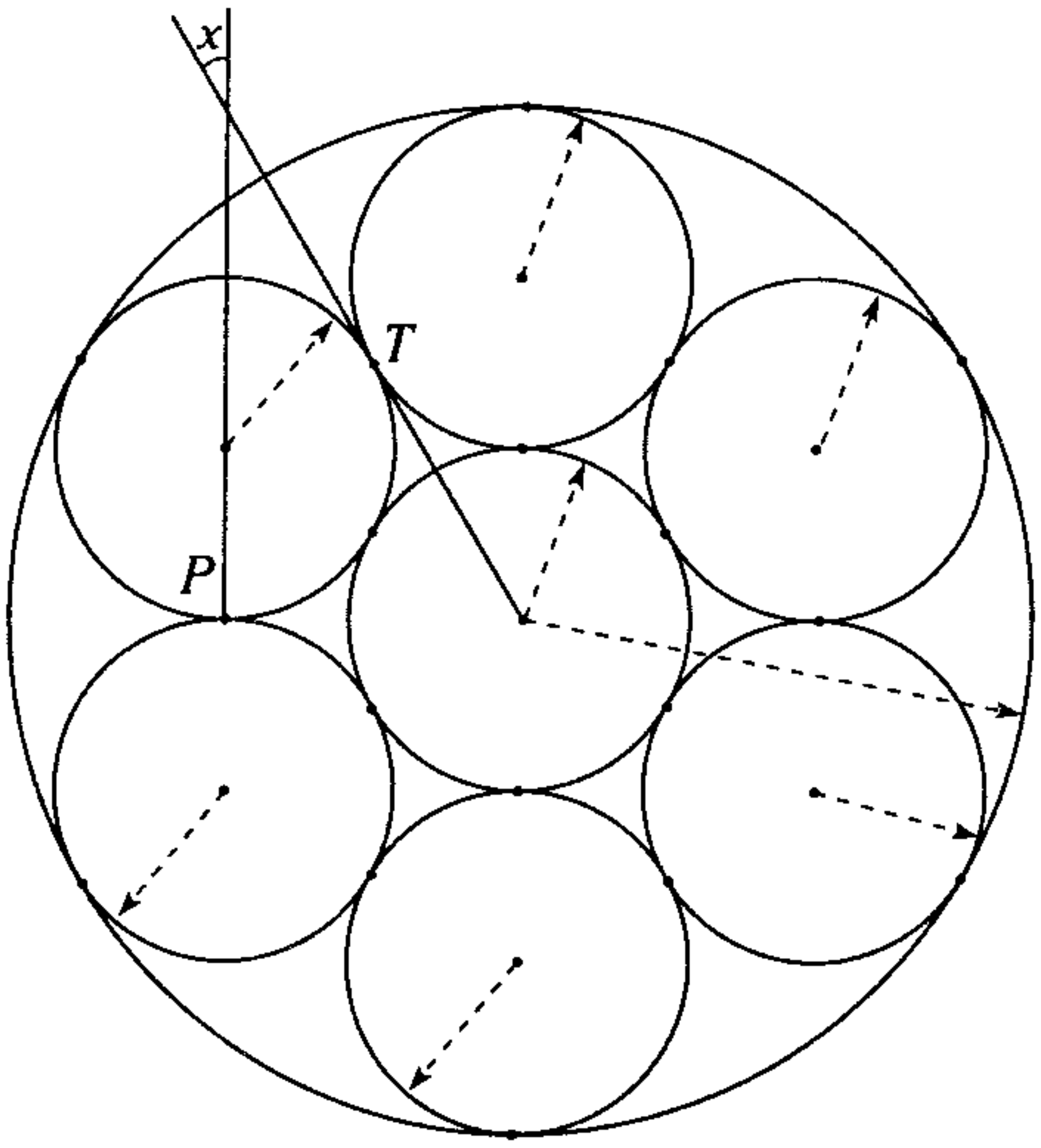
$$\frac{ML}{NS} = \frac{2K}{3\sqrt{2}K}$$

$$\therefore\ \frac{ML}{NS} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

CLAVE D

Problema 11

Calcule x, si P y T son puntos de tangencia.



A) 15° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 36°

Resolución

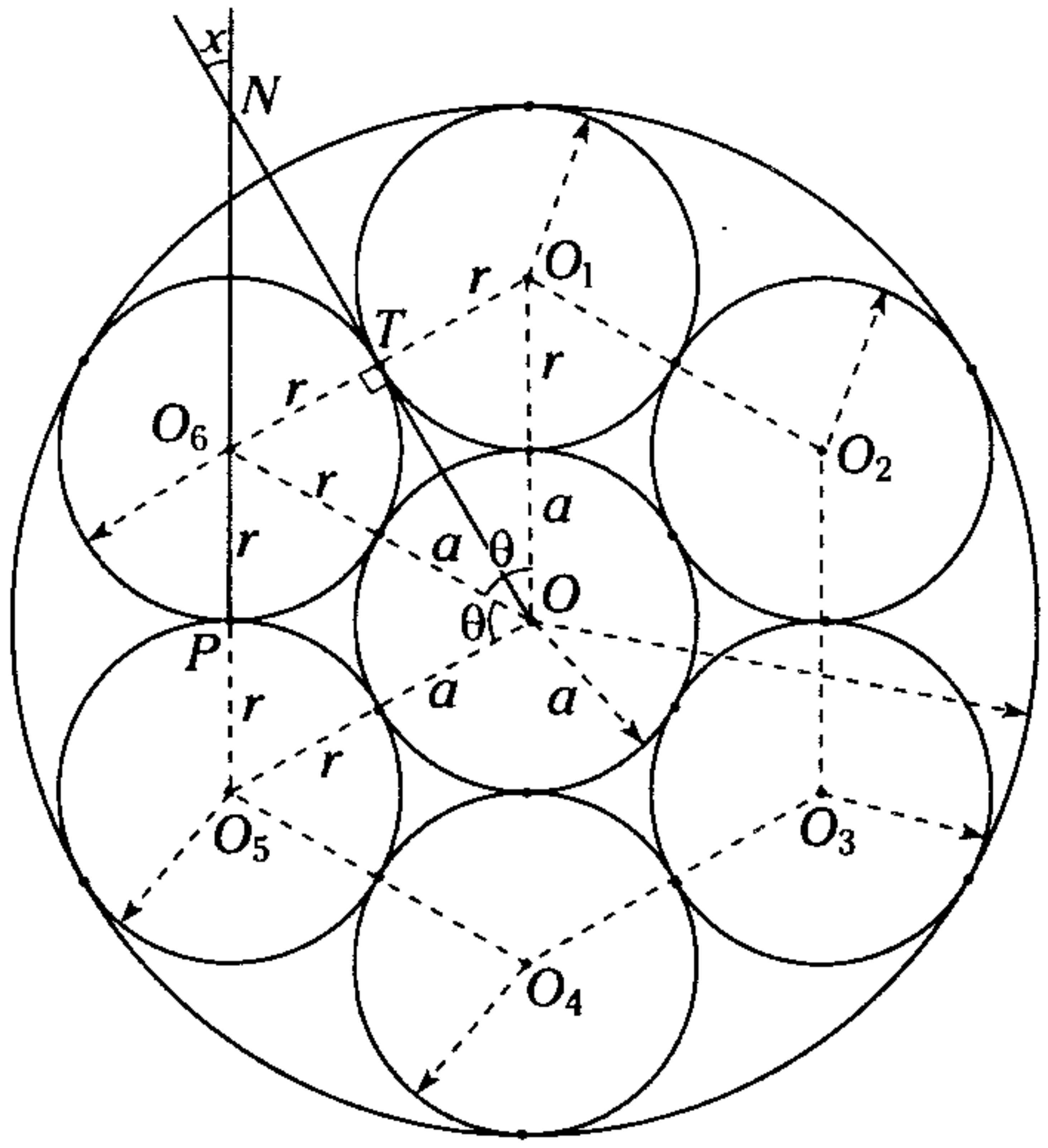


Figura 17.43

Piden x. Al unir los centros O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 y O_6, de las circunferencias que son tangentes dos a dos, se tendrá un exágono regular, entonces

$m\sphericalangle O_6OO_5 = \theta = 60°$

$\triangle OO_5O_6$: es equilátero

$\rightarrow\ 2r = r + a\ \rightarrow\ r = a$

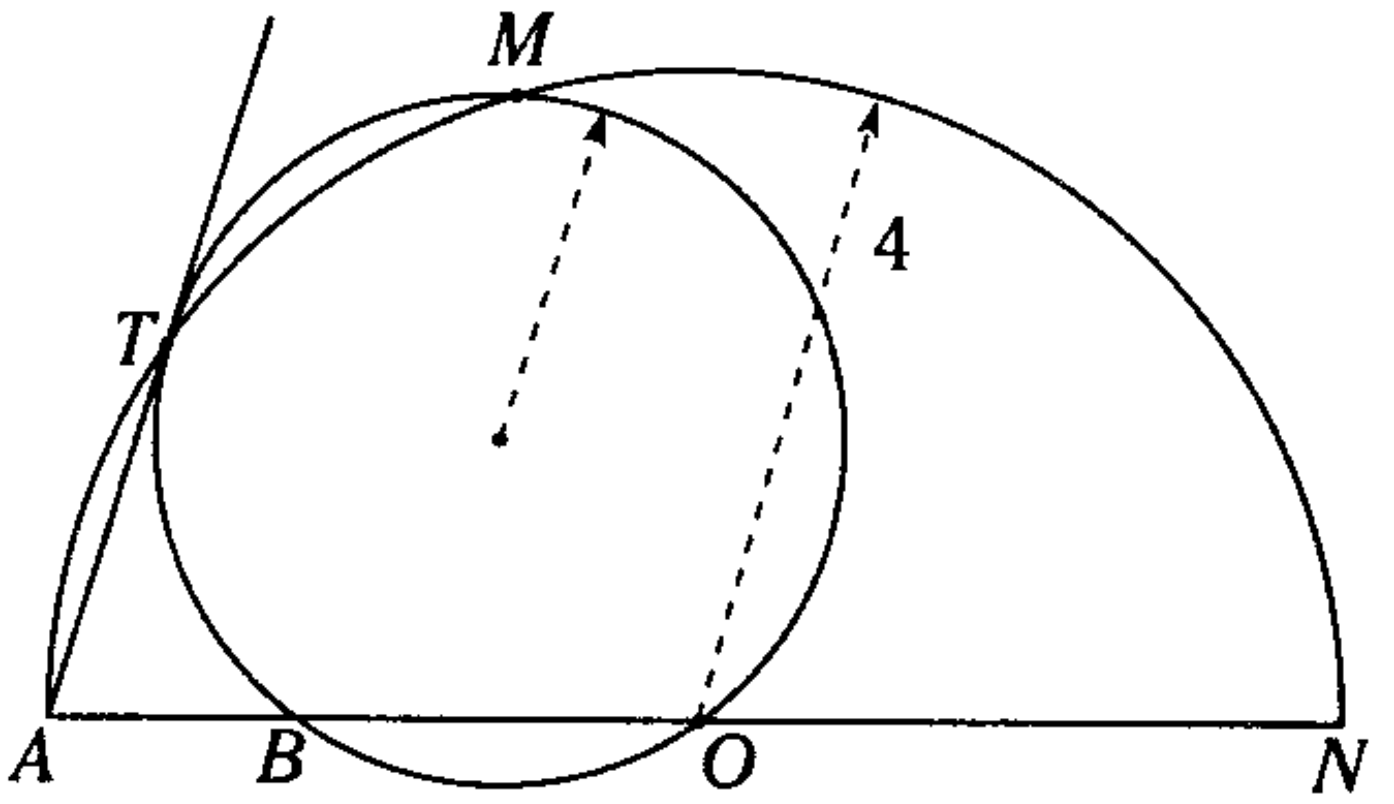
$\triangle O_6TO$: Not. de 30°, 60° $\rightarrow$ $m\sphericalangle TOO_5 = 90°$

$\triangle NOO_5$: $x = 30°$

CLAVE B

Problema 12

Según la figura, T es punto de tangencia. Si $AT = BO$, señale MN.



A) $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ B) $2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{5-\sqrt{5}}$

Resolución

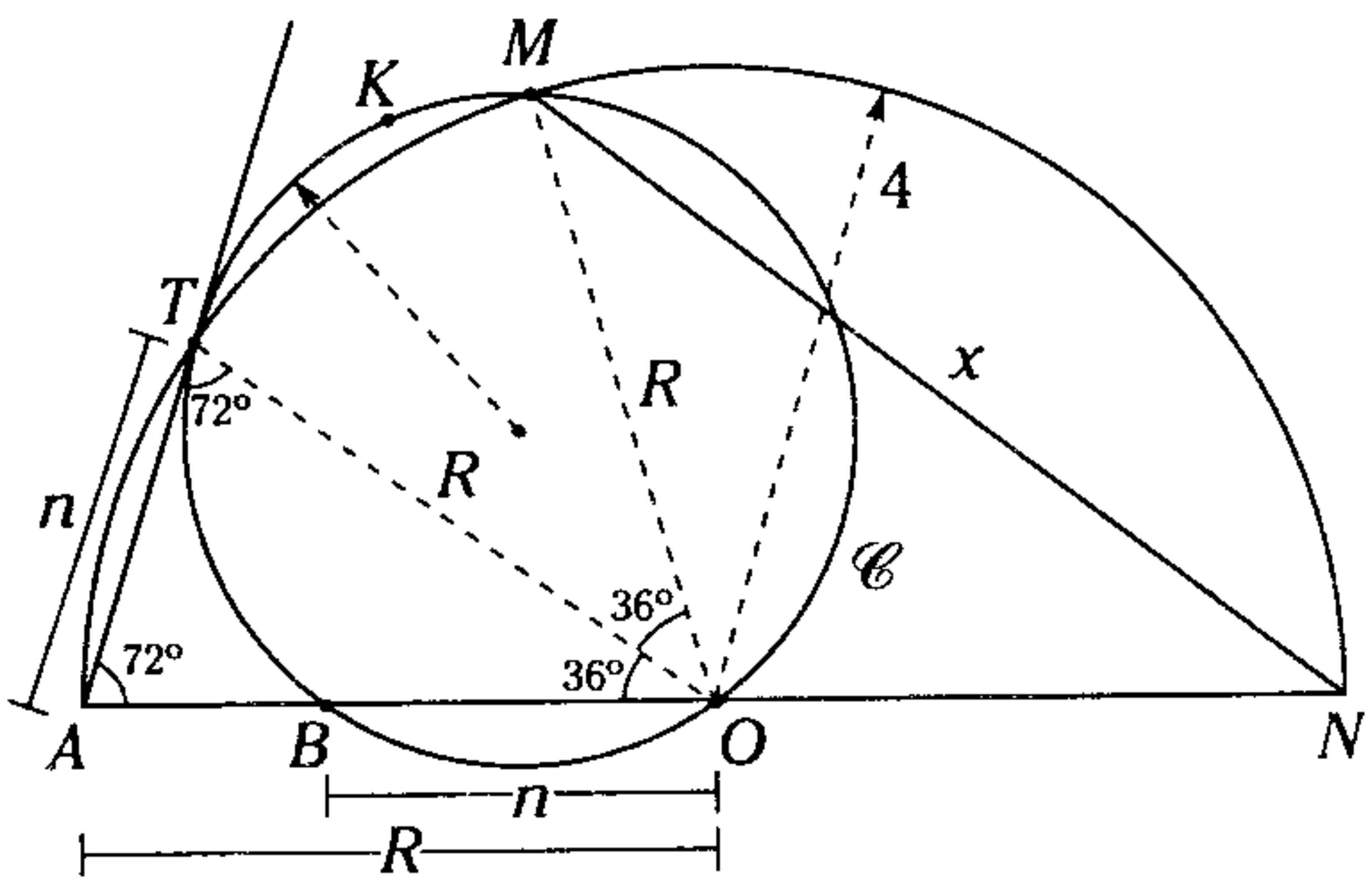


Figura 17.44

Pide $MN = x$.

Del dato: $AT = BO = n$

En la circunferencia: teorema de la tangente

$$n^2 = R(R-n)$$

De la relación anterior, podemos notar que AT es la sección áurea de R, es decir

$$n = \ell_{10}$$

Como $TO = MO$

$$\rightarrow \ m\widehat{TO} = m\widehat{MO} = 144°$$

y $\quad m\widehat{TKM} = 72°$

Por ángulo inscrito en $\mathscr{C}$

$$m\sphericalangle TOM = 36°$$

De lo cual $m\sphericalangle MON = 108°$

$$\rightarrow \ MN = \ell_5 = x$$

Se sabe que

$$\ell_5 = x = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

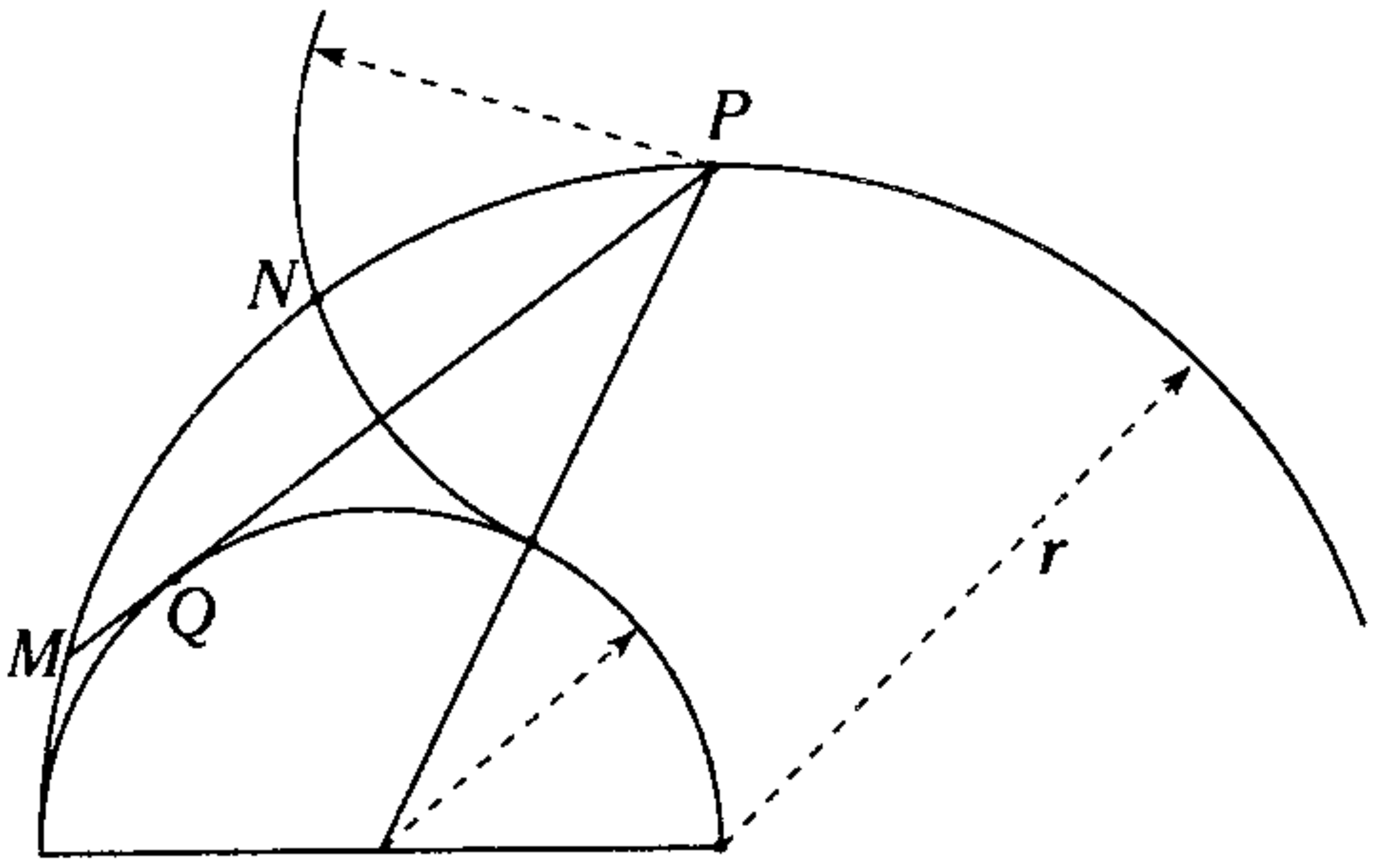
$$x = \frac{4}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$x = 2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

CLAVE B

Problema 13

En la figura, Q es punto de tangencia y $PQ = r$. Calcule $m\widehat{MN}$.



A) 30° B) 36° C) 37°
D) 38° E) 45°

Resolución

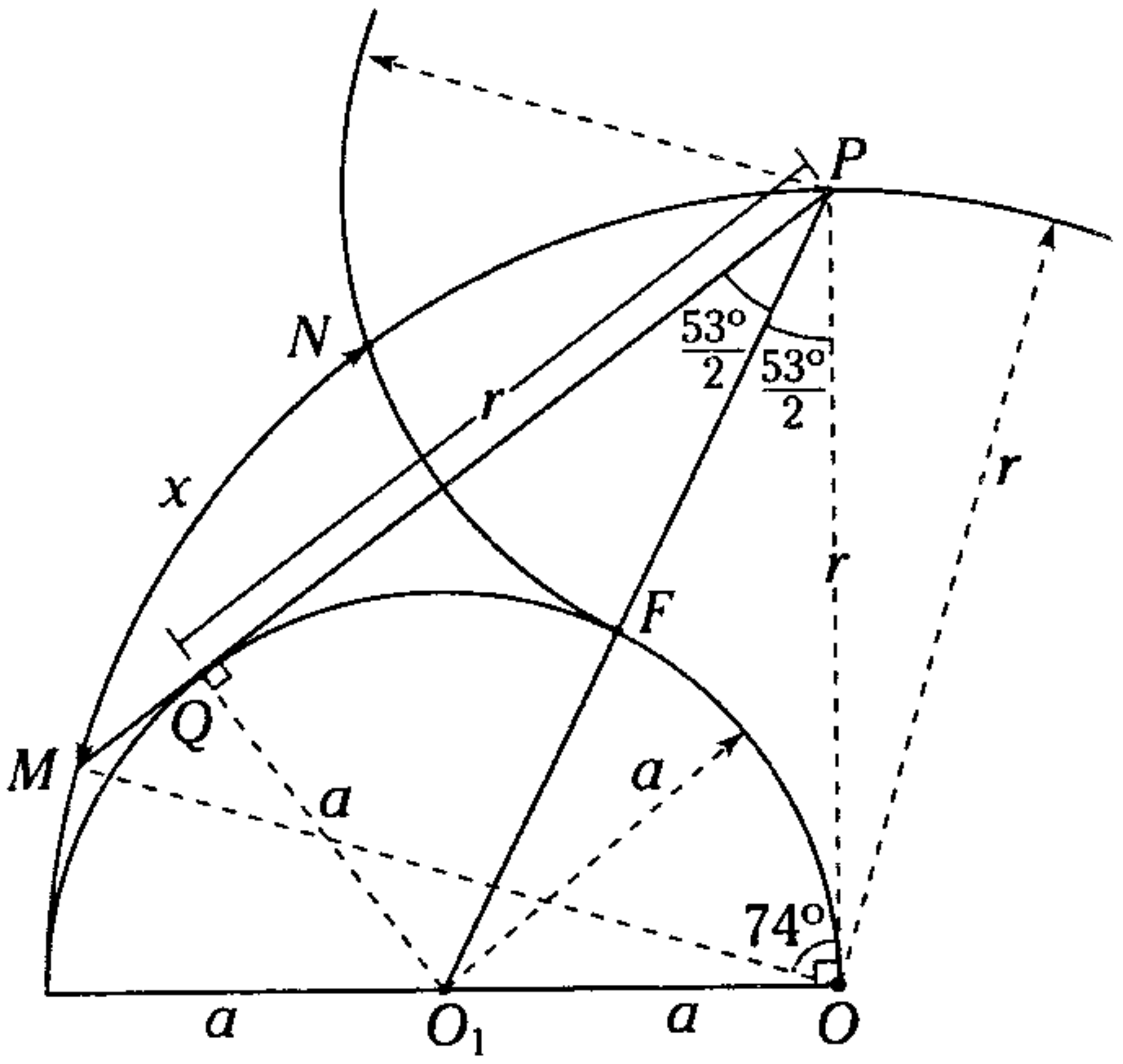


Figura 17.45

Piden $m\widehat{MN} = x$

$PQO_1 \cong POO_1$ (LLL)

$$\rightarrow \ m\sphericalangle POO_1 = 90°$$

De la figura

$$r = 2a$$

y $\quad PF = PO_1 - O_1F = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2}$

$$PF = r\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$$

También se sabe

$$NP = PF = r\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$\rightarrow$ $NP = \ell_{10}$ de lo cual $m\widehat{NP} = 36°$

$\triangle POO_1$ y $\triangle PQO_1$: son notables de $\frac{53°}{2}$, $\frac{127°}{2}$

Al trazar $\overline{MO}$: $m\measuredangle MOP = 74° = m\widehat{MP}$

De la figura

$$x + m\widehat{NP} = m\widehat{MP}$$

$$x + 36° = 74°$$

$$\therefore\ x = 38°$$

CLAVE D

Piden $LC = x$

Propiedad: $m\measuredangle AOC = 120°$

Propiedad: $m\measuredangle AHC = 120°$

Se nota $AHOC$ es un $\triangle$ inscriptible

$\rightarrow$ $m\measuredangle ACH = m\measuredangle AOH = 15°$

Se sabe que al prolongar $\overline{HL}$ hasta N: $HL = LN$

$\triangle HCN$: triángulo elemental de ℓ_{12}

$$x = a_{p(12)} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$x = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ x = 2$$

CLAVE C

Problema 14

En el triángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O, $m\measuredangle HOC = 135°$, $HC = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ y $m\measuredangle ABC = 60°$. Determine la longitud de la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$.

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

Resolución

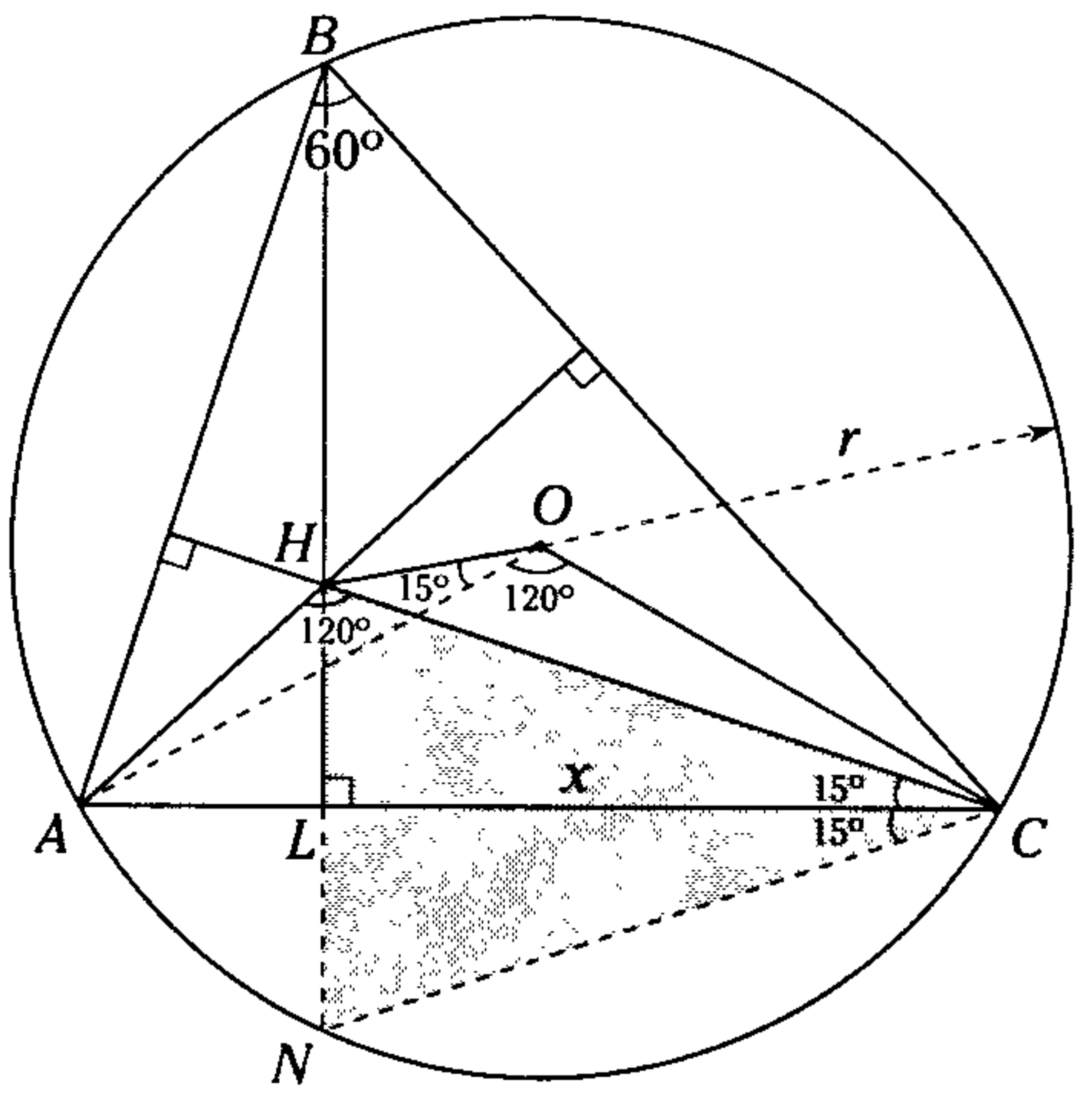


Figura 17.46

Problema 15

En un octógono regular $ABCDEFGH$, cuyo lado mide $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ cm, $\overline{BE} \cap \overline{CF} = \{P\}$. Calcule HP.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

Resolución

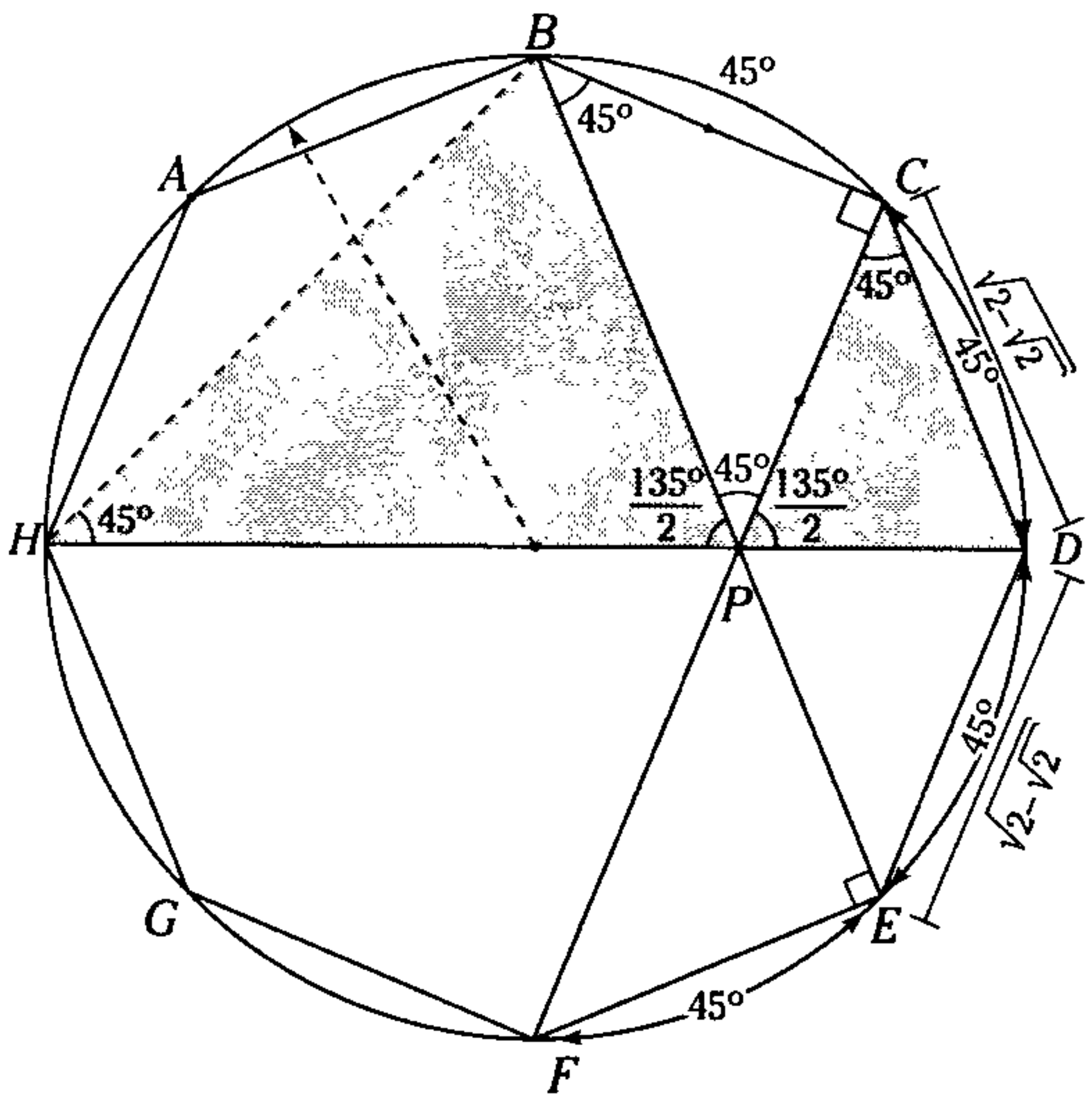


Figura 17.47

Piden HP.

$ABCDEFGH$ es un octógono regular

$m\sphericalangle CBE=45^\circ$, $m\sphericalangle BCF=90^\circ$, $m\sphericalangle FCD=45^\circ$

$\triangle BCP$: Not. 45°, $BC=CP$

$\triangle PCD$: isósceles, $CP=CD$

En P: $m\sphericalangle BPH+45^\circ+\frac{135^\circ}{2}=180^\circ$

$\rightarrow\ m\sphericalangle BPH=\frac{135^\circ}{2}$

De la figura se muestra que $HB=HP$

$\triangle BHP$ elemental de ℓ_8

$\rightarrow\ BP=(HP)\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (I)

$\triangle BCP$: $BP=(CD)\sqrt{2}$ (II)

(I) = (II)

$(CD)\sqrt{2}=(HP)\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$HP=\frac{CD\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$

CLAVE B

Piden la $m\sphericalangle BMC=x$

Del dato $m\sphericalangle MCA=\frac{10}{9}(m\sphericalangle MCB)$

Sea $m\sphericalangle MCB=9\theta\ \rightarrow\ m\sphericalangle MCA=10\theta$

En C: $10\theta+9\theta=38^\circ$

$\theta=2^\circ$

Se prolonga $\overline{CM}$ hasta L: $m\widehat{LB}=36^\circ$

$\rightarrow\ LB=\ell_{10}=R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Como $R=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\ell$

$\rightarrow\ LB=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\ell\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$LB=\ell$

Se nota $\triangle LBM$: es isósceles

$\rightarrow\ m\sphericalangle BLM=m\sphericalangle BML=52^\circ$

$\therefore\ x=128^\circ$

CLAVE D

Problema 16

En un triángulo rectángulo ABC; recto en B, se cumple que $m\sphericalangle BAC=52^\circ$. Si en su interior se ubica al punto M, tal que $\frac{m\sphericalangle MCA}{10}=\frac{m\sphericalangle MCB}{9}$ y $AC=(\sqrt{5}+1)BM$, determine $m\sphericalangle BMC$.

A) 126° B) 108° C) 118°
D) 128° E) 138°

Resolución

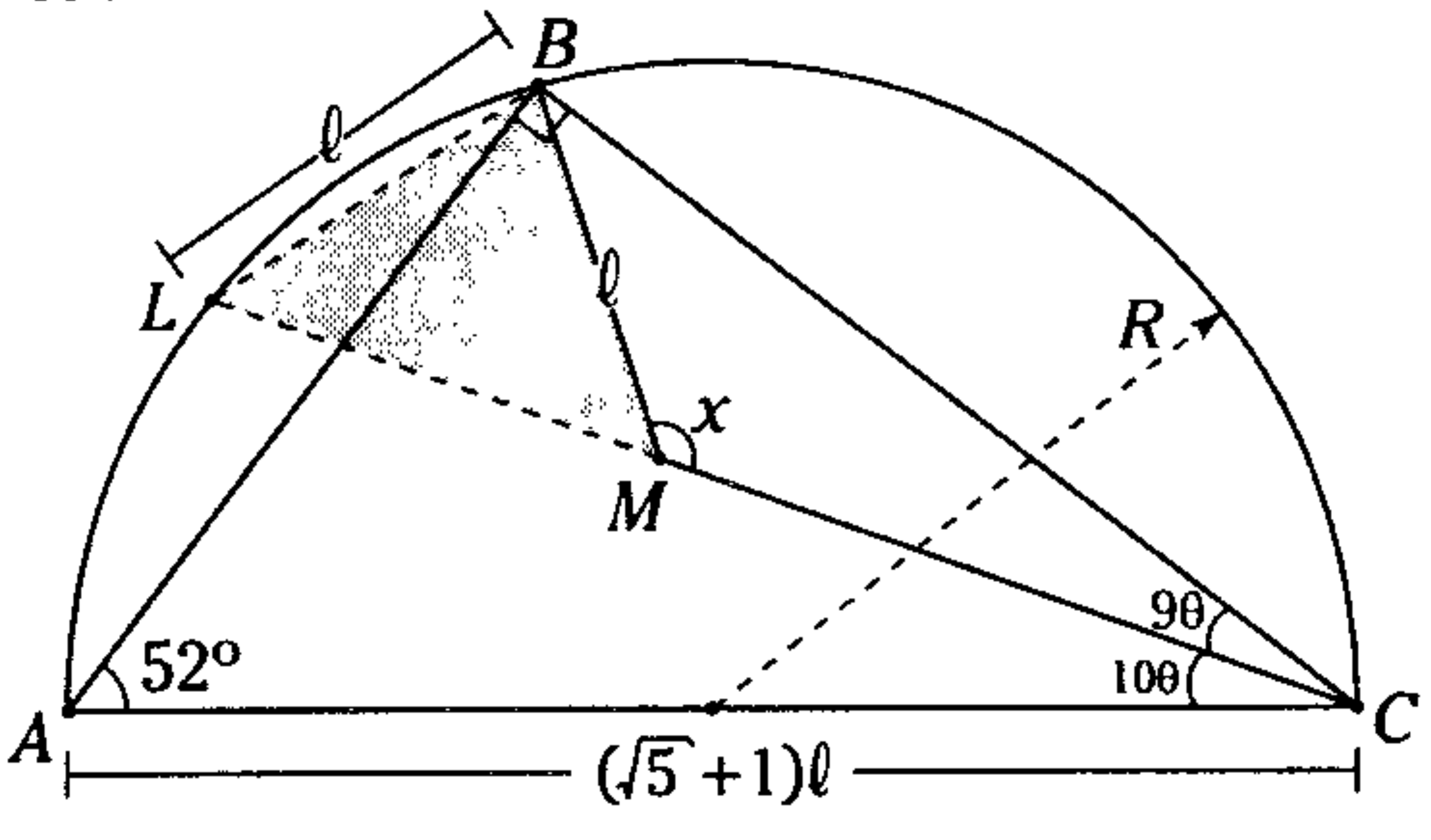
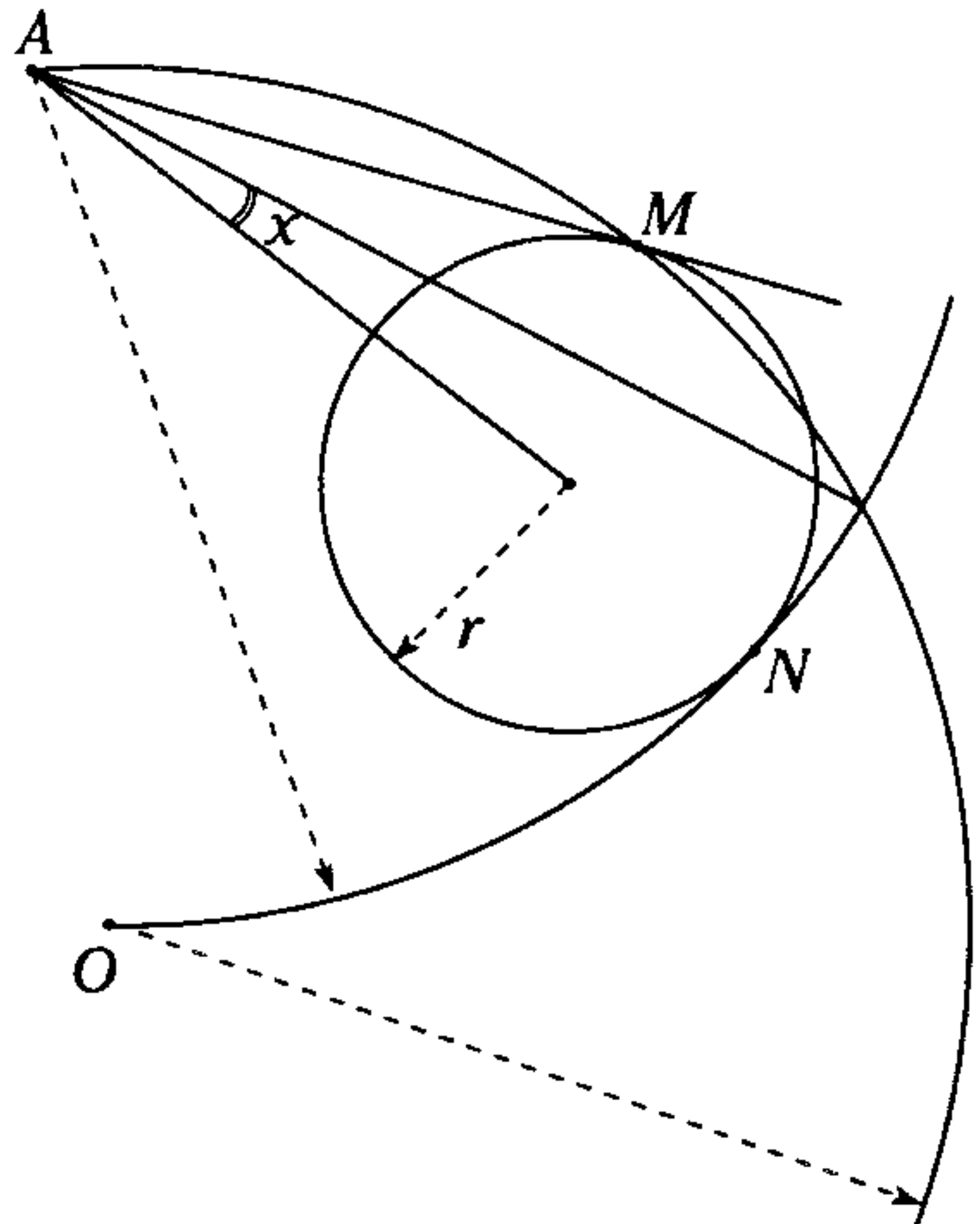


Figura 17.48

Problema 17

Según la figura, M y N son puntos de tangencia. Si $AM=2r$, indique x.



A) 12°30' B) 14°30' C) 16°30'
D) 23°30' E) 27°30'

Resolución

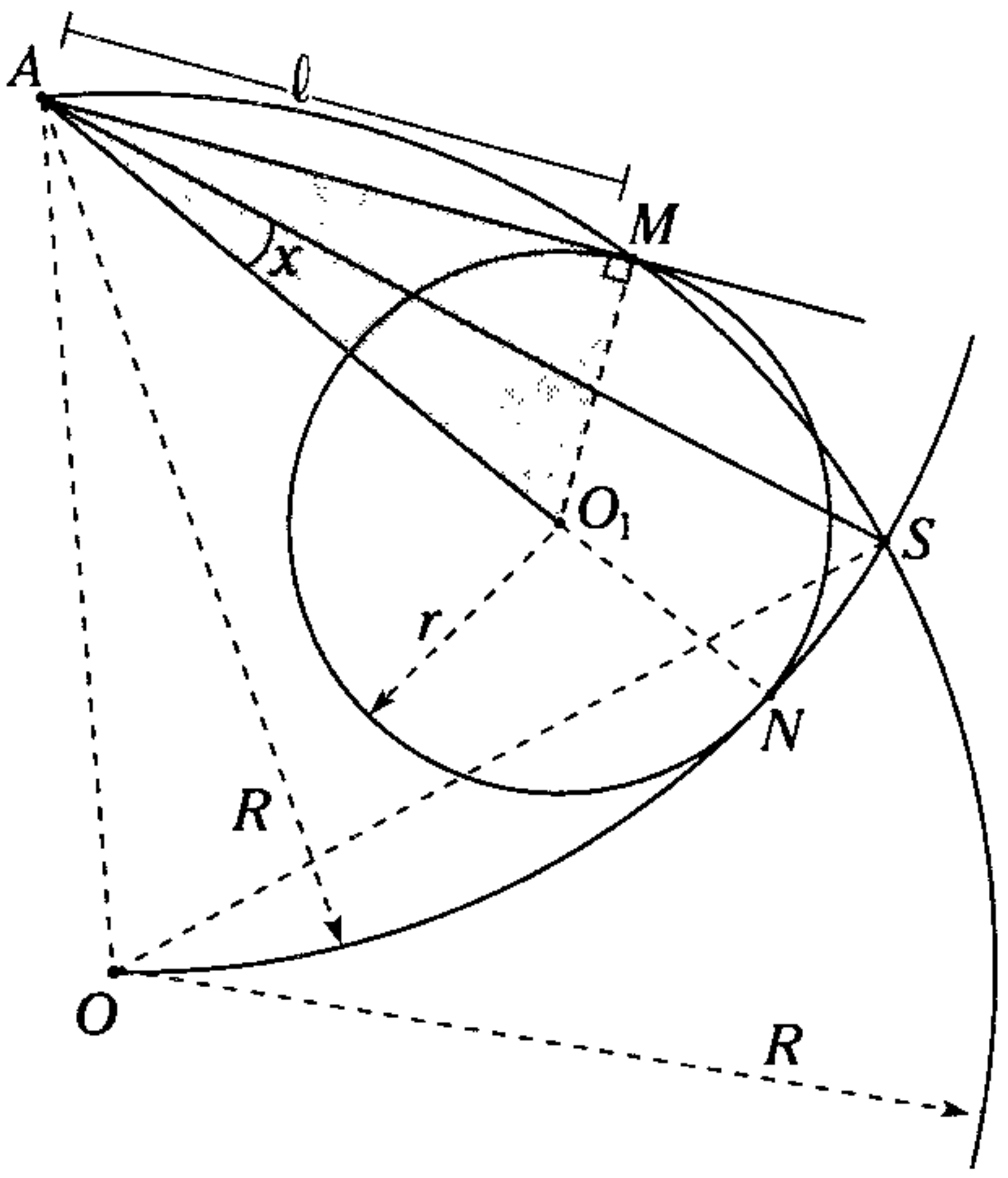


Figura 17.49

Piden x.

Dato: $AM = 2r = \ell$

Al trazar AO y OS, se forma el triángulo equilátero

$ASO \rightarrow m\overset{\frown}{AS} = 60°$

$\triangle AMO_1$: notable de 53°/2 y 127°/2

En la circunferencia, por el teorema de la tangente, AM es sección áurea de $R \rightarrow m\overset{\frown}{AM} = 36°$

Como $m\overset{\frown}{AS} = 60° \rightarrow m\overset{\frown}{MS} = 24°$ y

$m\sphericalangle MAS = 12°$

En A

$$x + 12° = \frac{53°}{2}$$

$$x = \frac{29°}{2}$$

$$\therefore\ x = 14°30'$$

CLAVE B

Problema 18

En un triángulo equilátero ABC, cuyo circunradio mide R, calcule la potencia de B, respecto a la circunferencia que contiene al punto C y a los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overset{\frown}{BC}$.

A) $\frac{R^2}{3}$ B) $\frac{R^2}{2}$ C) $\frac{R^2}{6}$

D) $\frac{9R^2}{4}$ E) $\frac{5R^2}{4}$

Resolución

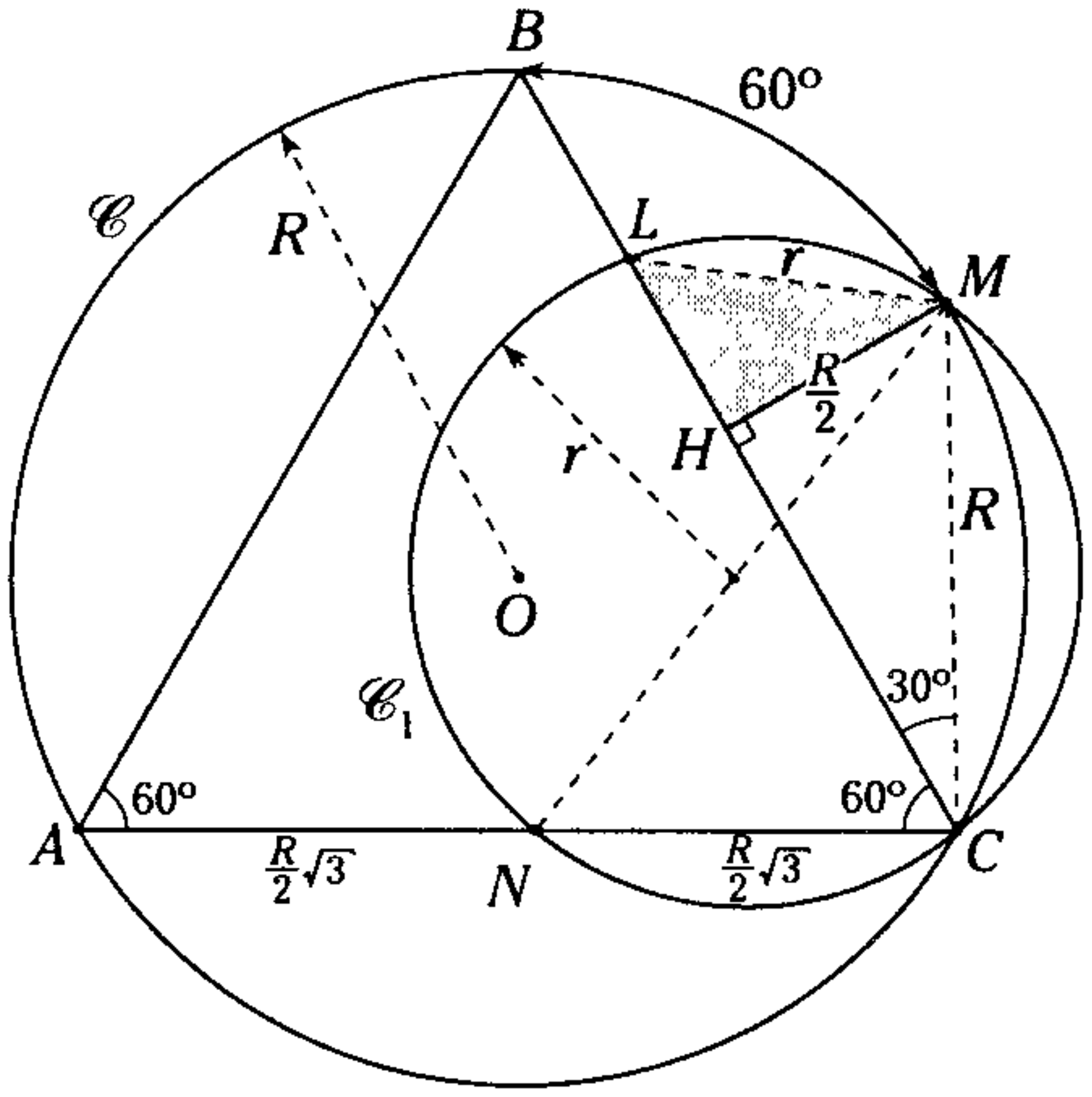


Figura 17.50

Piden $\underset{\mathscr{C}_1}{\text{Pot}.B}$

$\mathscr{C}$: $AB = BC = AC = \ell_3 = R\sqrt{3}$

Como $m\overset{\frown}{BM} = m\overset{\frown}{MC} = 60° \rightarrow MC = \ell_6 = R$

$\mathscr{C}_1$: Como $m\overset{\frown}{ML} = 60° \rightarrow LM = \ell_6 = r$

Pero $\triangle MCN$: teorema de Pitágoras

$$R^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (2r)^2 \rightarrow r = \frac{\sqrt{7}R}{4}$$

En $\triangle MHL$: teorema de Pitágoras

$$LH^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}R\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$LH = \frac{\sqrt{3}}{4}R$$

$$\rightarrow \underset{\mathscr{C}_1}{\text{Pot}.B} = (BL)(BC)$$

$$\underset{\mathscr{C}_1}{\text{Pot}.B} = \left(R\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}R\right)(R\sqrt{3})$$

$$\underset{\mathscr{C}_1}{\text{Pot}.B} = \frac{9}{4}R^2$$

CLAVE D

Problema 19

En un triángulo ABC, la $m\sphericalangle ABC = 108°$ y su incentro es I. Halle la longitud del circunradio del triángulo AIC, si el circunradio del triángulo ABC es R.

A) $\frac{R}{4}(\sqrt{5}-1)$ B) $\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$ C) $R(\sqrt{5}+1)$

D) $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ E) $\frac{R}{2}(\sqrt{5}+2)$

Resolución

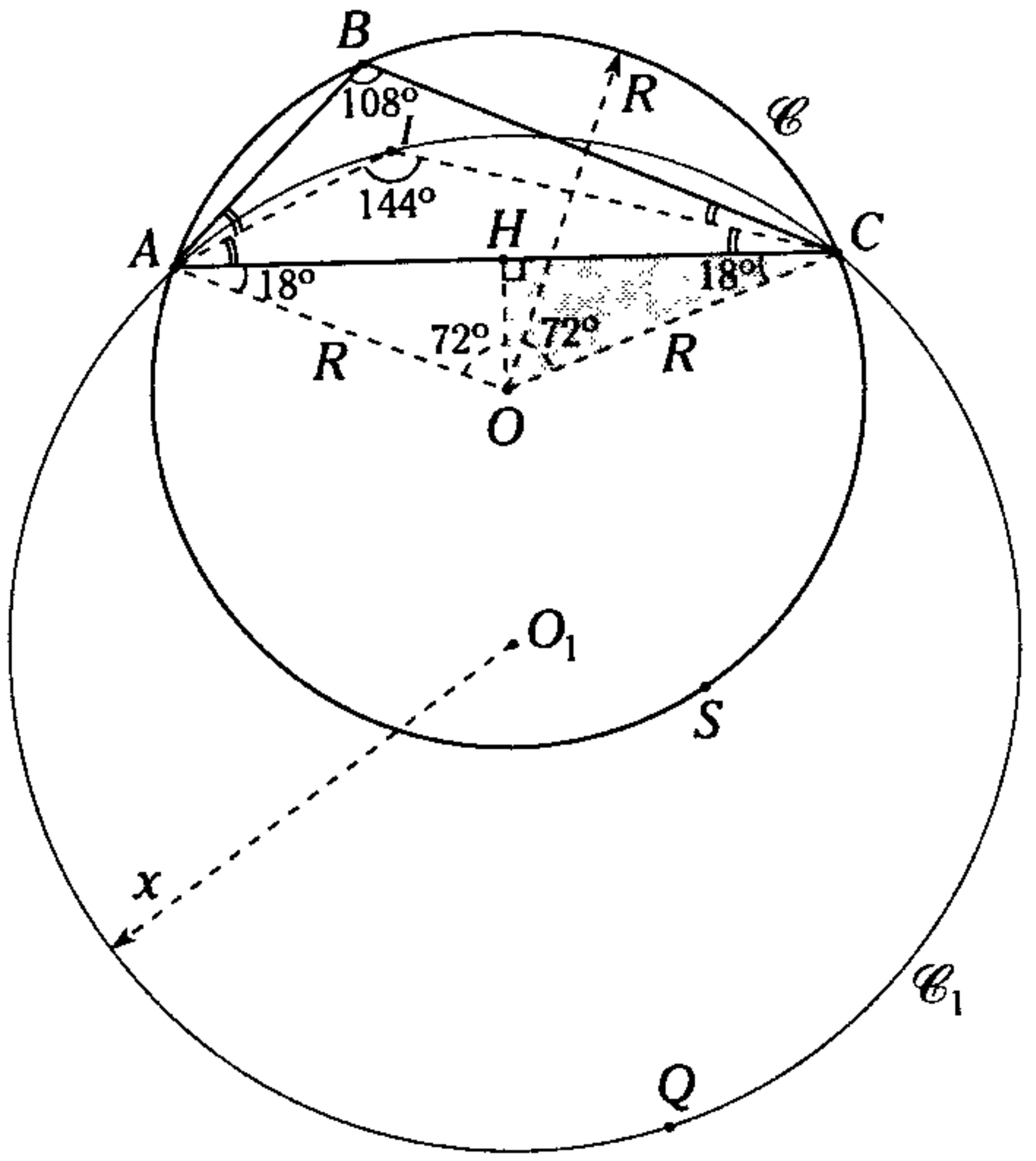


Figura 17.51

Piden x (longitud del circunradio del $\triangle AIC$).

$\triangle ABC$: propiedad

$$m\sphericalangle AIC = 90° + \frac{108°}{2}$$

$$m\sphericalangle AIC = 144°$$

En $\mathscr{C}_1$: $m\widehat{AQC} = 288°$ $\rightarrow$ $m\widehat{AIC} = 72°$

$$\rightarrow\ AC = \ell_5 = \frac{x}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \text{(I)}$$

En $\mathscr{C}$: $m\widehat{ASC} = 216°$ $\rightarrow$ $m\widehat{ABC} = 144°$

$$m\sphericalangle AOH = m\sphericalangle HOC = 72°$$

$\triangle OHC$: Se forma el $\triangle$ elemental del ℓ_{10}

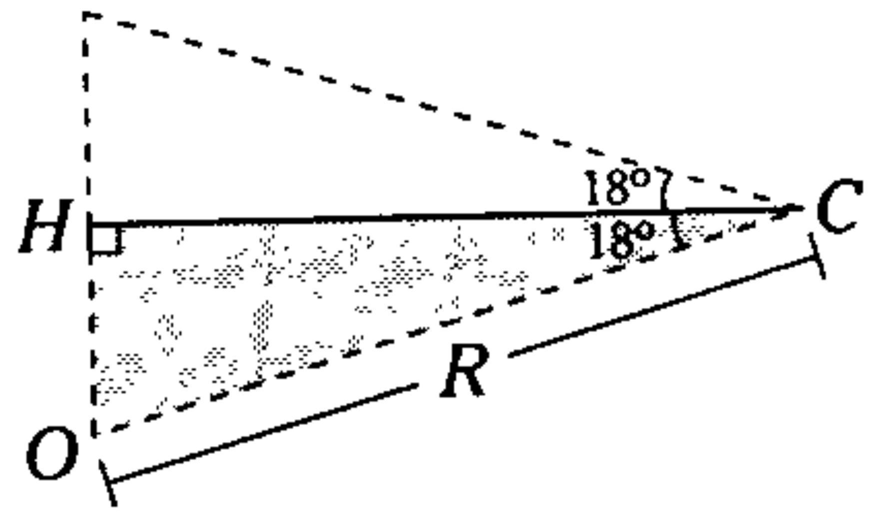


Figura 17.52

$$CH = ap_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

De la figura, $AC = 2(CH)$

$$AC = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$AC = \frac{x}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

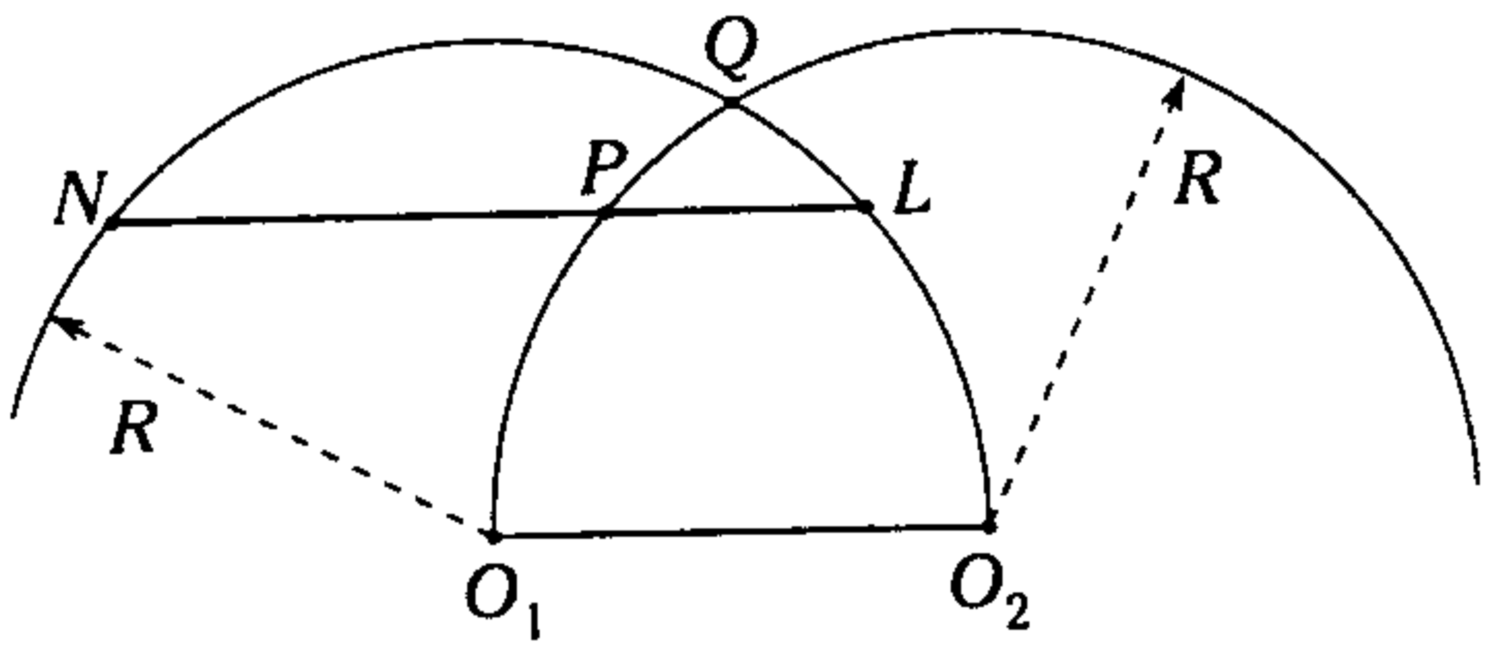
Operando

$$x = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$$

CLAVE B

Problema 20

En la figura, $\overline{LP} \,//\, \overline{O_1O_2}$ y $\overline{LP}$ es sección áurea de R. Determine $m\widehat{NQ}$.



A) 72° B) 84° C) 78°
D) 86° E) 92°

Resolución

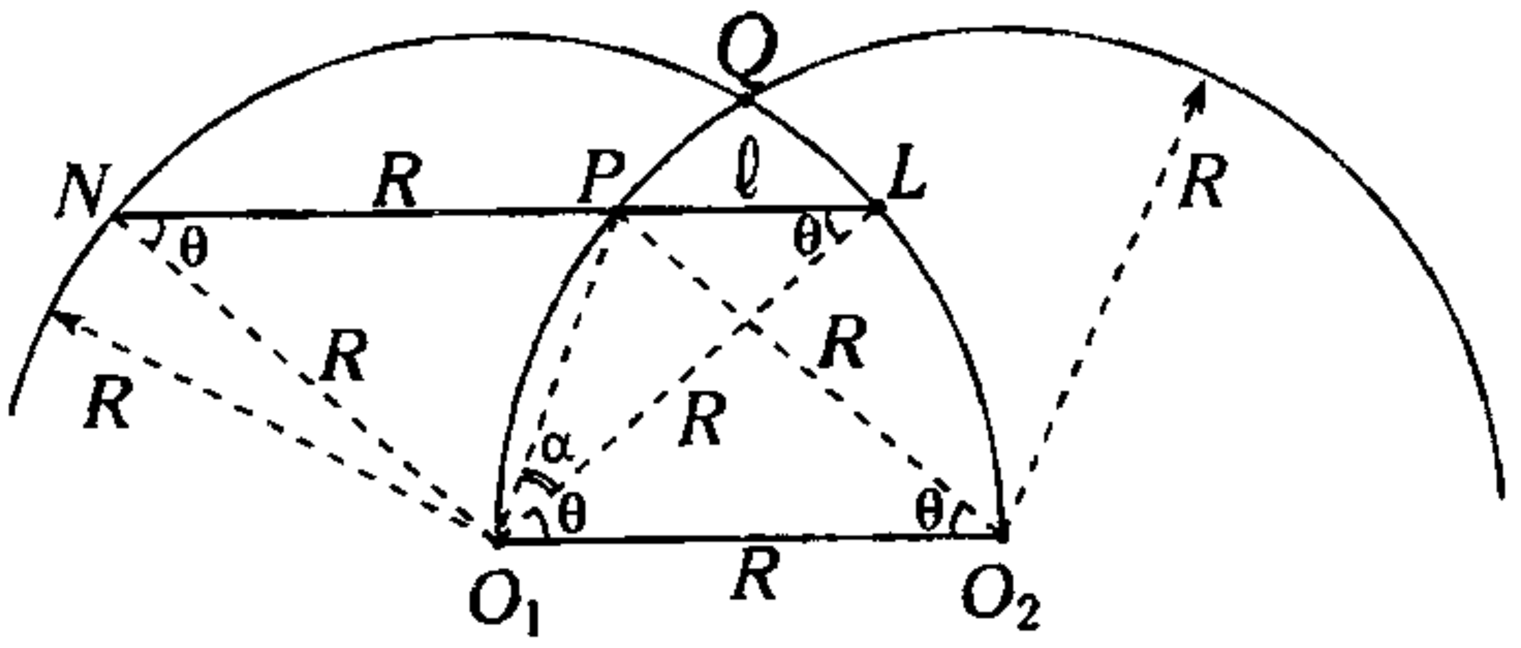


Figura 17.53

Piden $m\widehat{NQ}=x$. Sea $LP=\ell$.

Dato: $\ell^2=R(R-\ell)$ ($\overline{LP}$: sección áurea de R)

$\triangle O_1QO_2$: $\triangle$ equilátero

$\rightarrow\ m\widehat{QO_2}=60°$

Como $\overline{PL}\,//\,\overline{O_1O_2}$ $\rightarrow$ O_1PLO_2 es trapecio isósceles

$\rightarrow\ m\sphericalangle LO_1O_2=m\sphericalangle PO_2O_1=\theta$

$\triangle NO_1L$ es isósceles: $m\sphericalangle LNO_1=m\sphericalangle NLO_1=\theta$

En el rombo NPO_2O_1: $NP=O_1O_2=R$

Del dato $R^2=(R+\ell)\ell$ y del $\triangle NO_1L$

Se deduce que $\theta=\alpha$

$\triangle PO_1O_2$: $2\theta+2\theta+\theta=180°$ $\rightarrow$ $\theta=36°$

$m\widehat{LO_2}=36°$ $\rightarrow$ $m\widehat{QL}=24°$

De la figura, $m\widehat{NL}=108°$, de lo cual

$x=m\widehat{NL}-m\widehat{QL}=108°-24°$

$\therefore\ x=84°$

CLAVE B

Problema 21

En un pentágono regular $ABCDE$, se traza la diagonal $\overline{BE}$; además, F es el punto medio de $\overline{CD}$ y M el punto de intersección de BE y AF. Si $\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AF}=1$, entonces la longitud del lado del pentágono regular es

A) $\sqrt{10-2\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ C) $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

D) $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ E) $2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Resolución

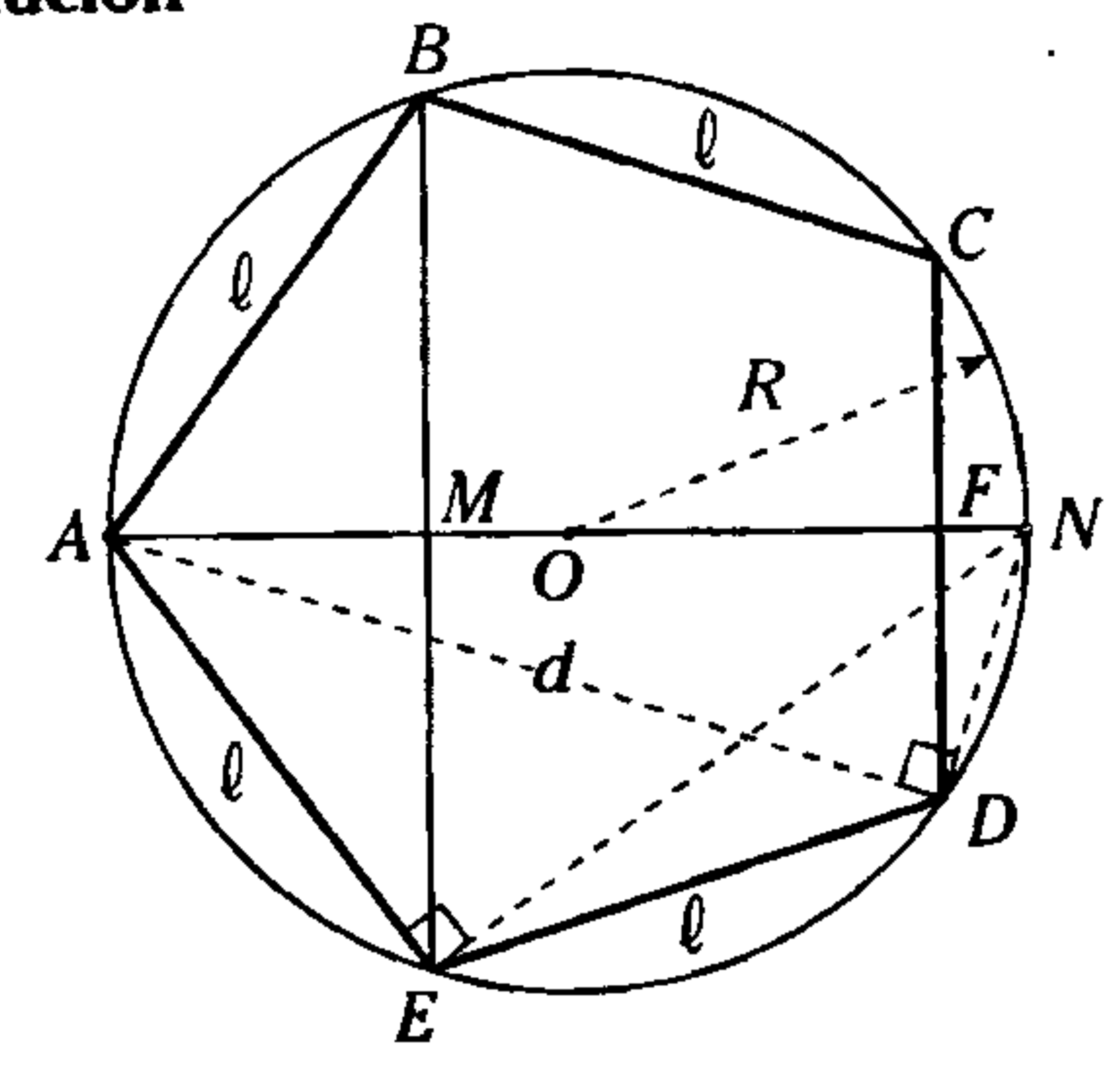


Figura 17.54

$ABCDE$: pentágono regular

Piden ℓ.

Sea $AD=d$ $\rightarrow$ ⊿AEN: $\ell^2=2R.AM$

⊿ADN: $d^2=2R.AF$

Luego $\underbrace{\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AF}}_{1}=2R\left(\dfrac{1}{d^2}+\dfrac{1}{\ell^2}\right)$

$$\rightarrow\ \frac{1}{d^2}+\frac{1}{\ell^2}=\frac{1}{2R}\qquad\text{(I)}$$

pero $\ell=d\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Luego reemplazando en (I)

$$\frac{1}{d^2}+\frac{4}{d^2(\sqrt{5}-1)^2}=\frac{1}{2R}$$

$$\rightarrow\ \frac{10-2\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-1)^2}=\frac{d^2}{2R}\qquad\text{(II)}$$

Como $d=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\ell$ y reemplazando en (II)

pero $\ell=\ell_5=\dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

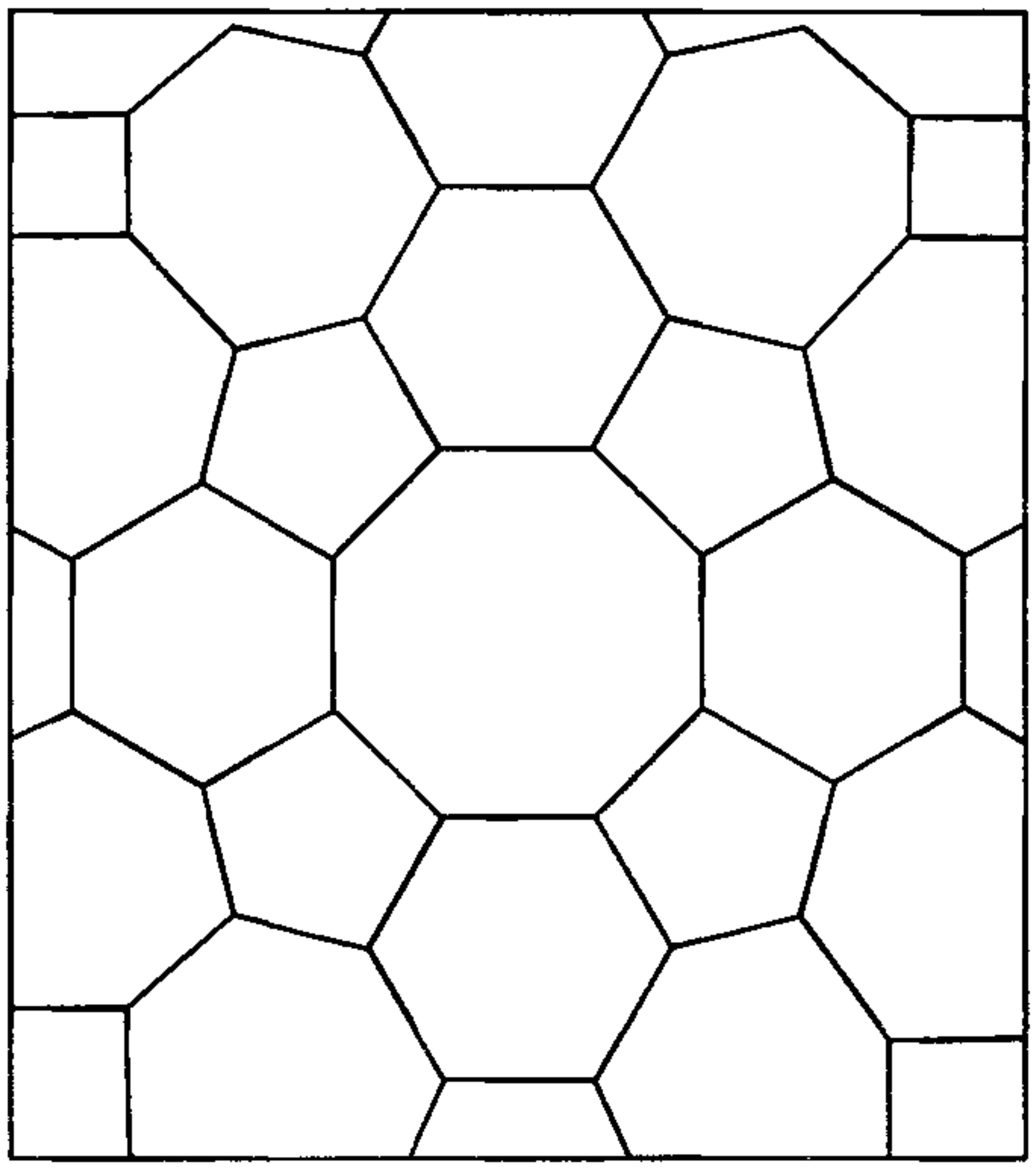
$$\rightarrow\ \frac{\ell}{R}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\qquad\text{(III)}$$

y reemplazando en (III)

$\therefore\ \ell=\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

CLAVE D

1. **Mosaicos imposibles**



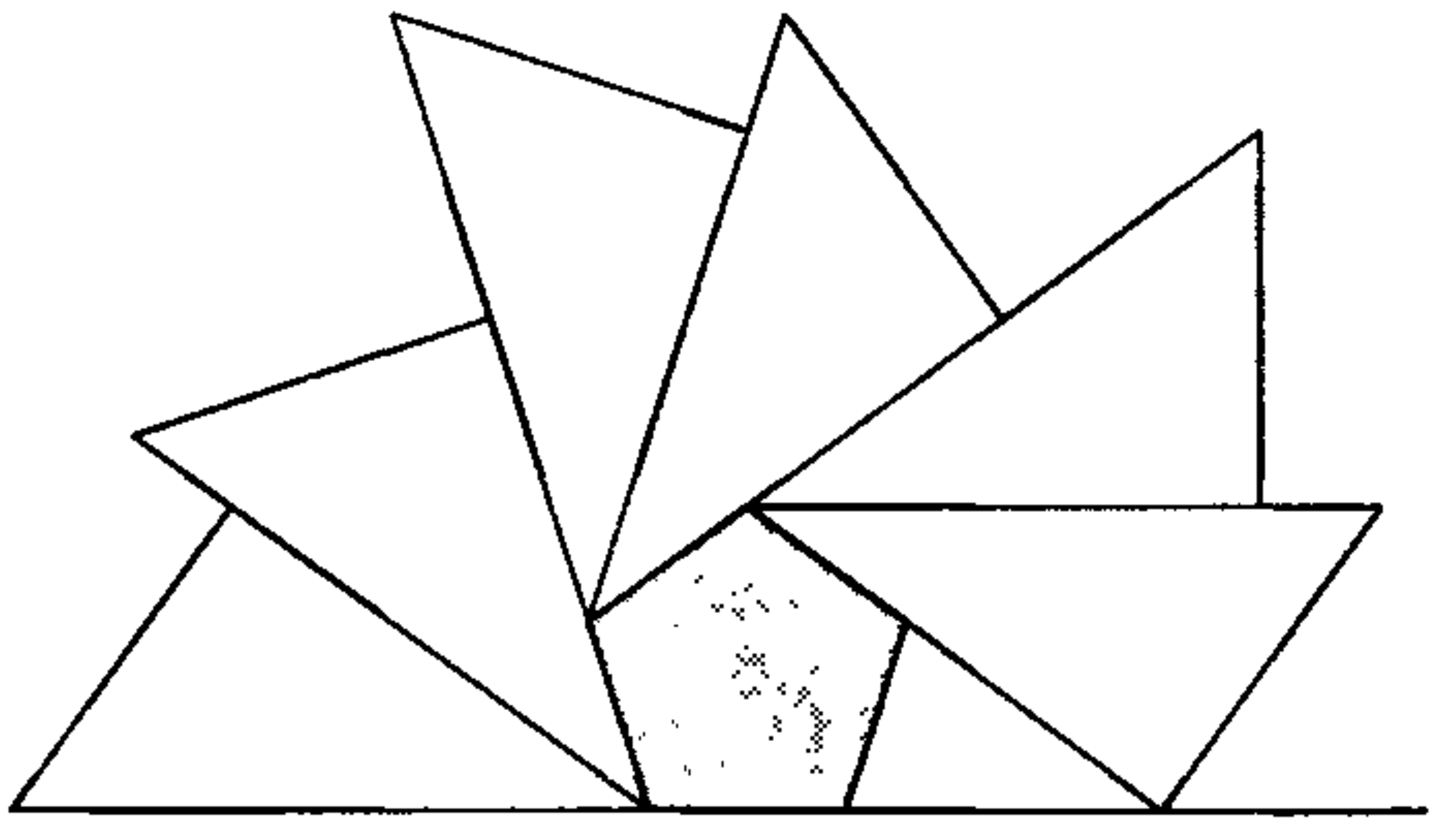
¿Nuevos mosaicos con polígonos regulares? XXTONOY estaba jugando con mosaicos de 5, 6 y 8 lados. Todos parecían ser polígonos regulares, con lados de igual longitud y medidas angulares iguales.

- ¡Oye, es magnífico! –exclamó– ¡Todos encajan para cubrir el plano!
- Déjame echar una ojeada –dijo XXNINI– algo está mal, XXTONOY. Si deseas cubrir todo el plano con una mezcla de polígonos regulares de lados iguales, puedes hacerlo usando polígonos de tres, cuatro, seis, ocho y doce lados; pero no otros. Dado que estos mosaicos incluyen polígonos de cinco y siete lados, debes haber cometido un error.
- Bien, mira tú mismo.

¿Puede ayudar a XXTONOY y XXNINI a encontrar el error?

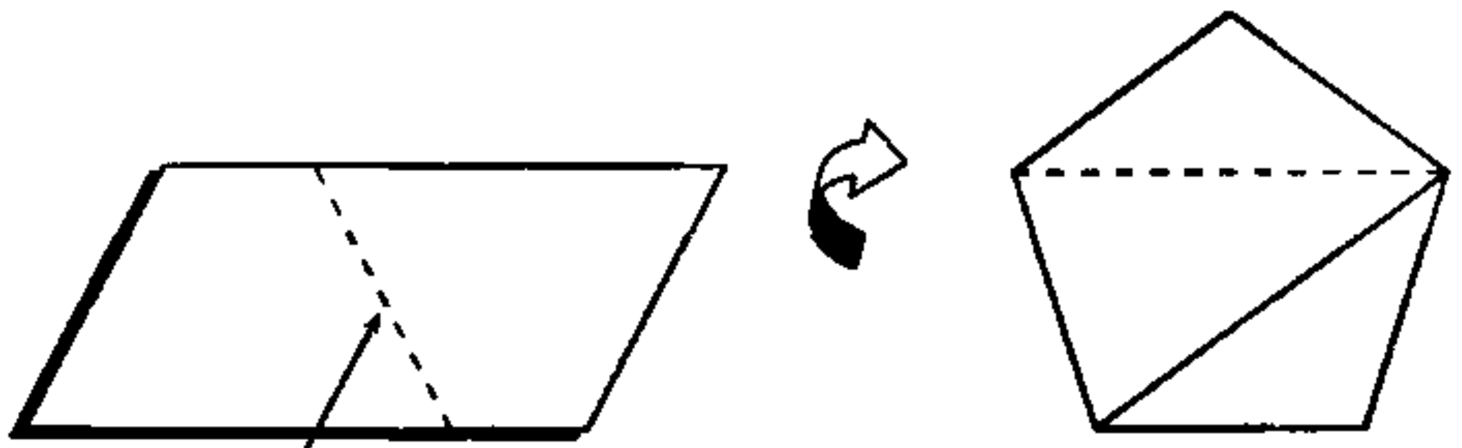
2. **El pentágono y su abanico**

La siguiente figura muestra un pentágono regular, cuya longitud de lados es ℓ, con seis triángulos rectángulos congruentes rodeándolo en forma de abanico. Encuentre la longitud de la hipotenusa de los triángulos.



3. **Doblando la servilleta**

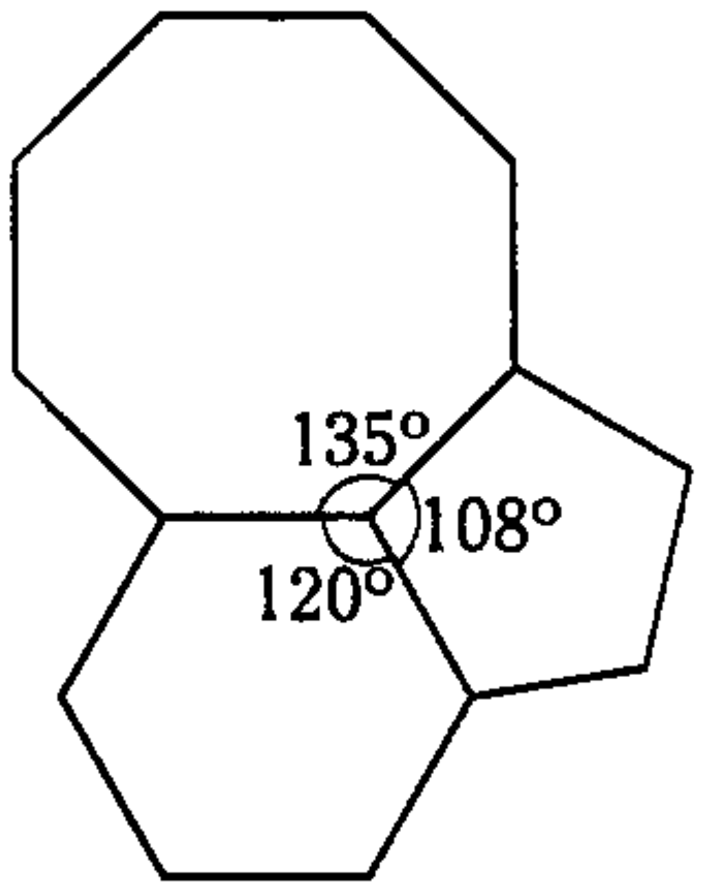
XXTONOY y XXNINI van a un restaurante; luego de recibir sus cubiertos, notaron que las servilletas presentaban una forma paralelográmica y que estaban dobladas, de tal manera que dos de sus vértices opuestos coincidían formando una figura pentagonal.



¡Mira XXNINI! –dijo XXTONOY– si la línea de doblez tuviera la misma longitud del menor lado de la servilleta, el pentágono sería regular. ¿Podría indicar cuáles son las medidas angulares de la servilleta, antes de ser doblada, y cuál debe ser la razón entre sus lados para que al doblarla se forme un pentágono regular?

Resolución 1

Si los polígonos fueran regulares, sería imposible cubrir el plano. O bien los mosaicos no son exactamente polígonos regulares, o bien no concuerdan con exactitud. Por ejemplo, si observamos los mosaicos notaremos que un vértice está rodeado por un pentágono, un exágono y un octágono. Si estos son regulares, sus medidas angulares serían 108°; 120° y 135°, lo cual suma 363°.



Sin embargo, si los mosaicos concuerdan con exactitud, la suma debería ser 360°.

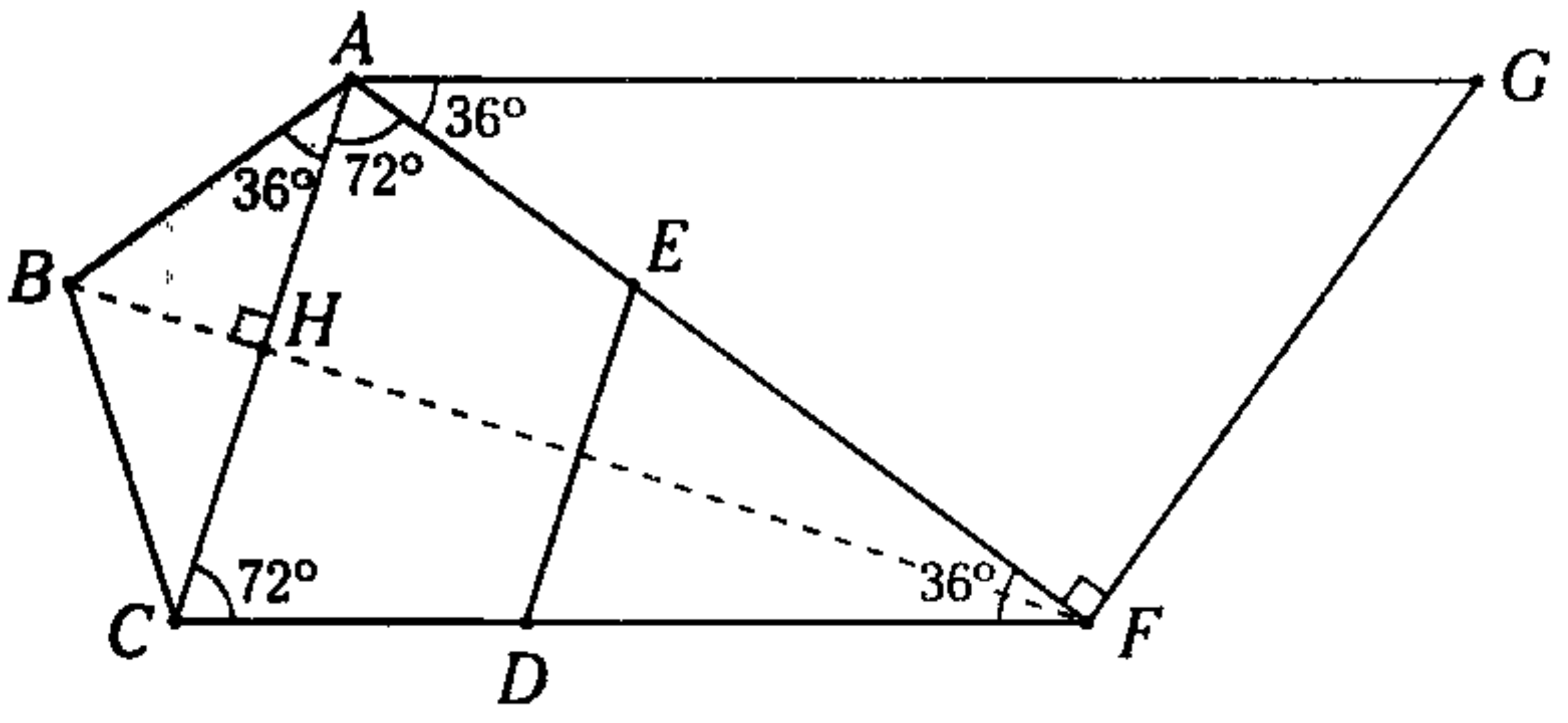
La ilustración imita un antiguo diseño islámico.

De lo anterior se puede concluir lo siguiente:

- Si los mosaicos son equiángulos, entonces son regulares. Esto es imposible.
- Si dos mosaicos son regulares, el tercero solo es equilátero, mas no regular. Solo así se puede cubrir el plano.

Resolución 2

Considerando la siguiente figura:



Los triángulos *ABH* y *AGF* son semejantes; por otro lado, el triángulo *AFC* es triángulo elemental de un decágono regular. Así

$$\frac{AF}{AC}=\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

entonces

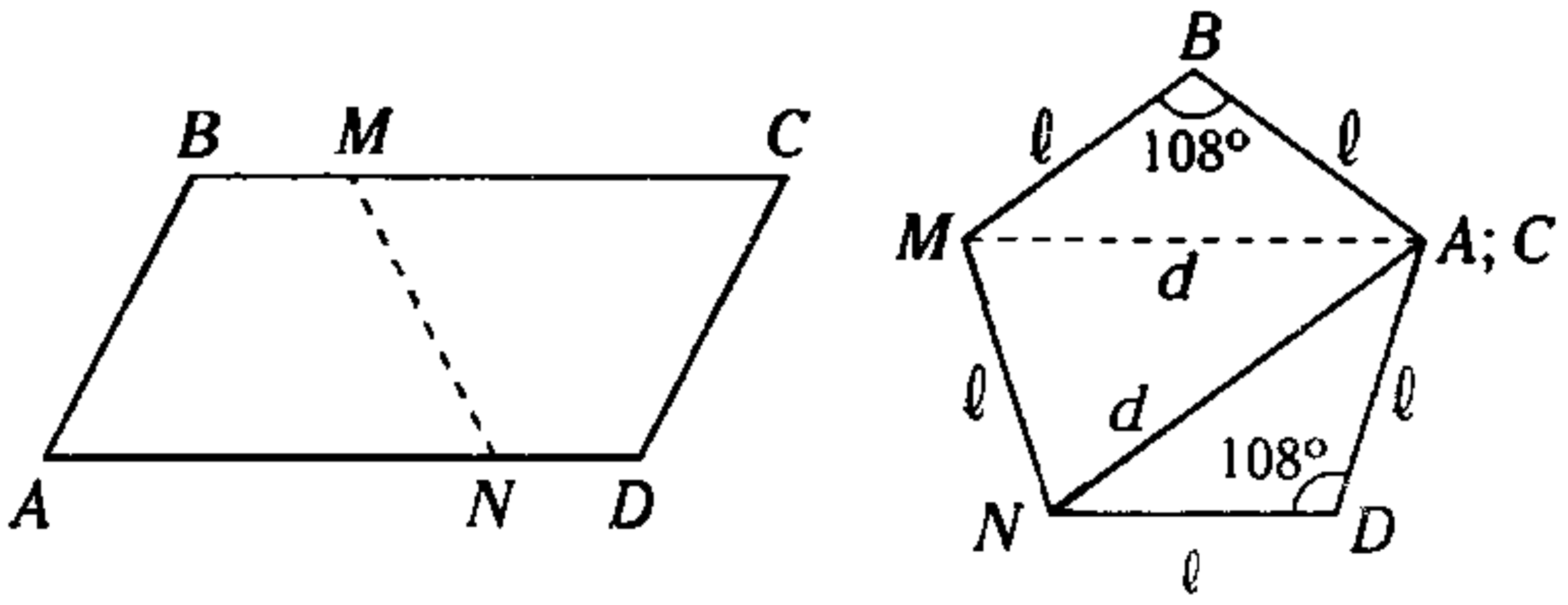
$$\frac{AG}{AB}=\frac{AF}{AH}$$

$$\rightarrow \quad AG=\frac{AF\,.\,AB}{AH}=\frac{AF\,.\,AB}{\frac{1}{2}AC}=2AB\,.\,\frac{AF}{AC}$$

$$\therefore \quad AG=2\ell\,.\,\phi=\ell(\sqrt{5}+1)$$

Resolución 3

Sea la servilleta como se muestra en la figura (▱*ABCD*).



Al hacer coincidir *A* con *C*, la línea de doblez es $\overline{MN}$, cuya longitud es ℓ, igual a la longitud del menor lado *AB*. Como el pentágono *NMBCD* es regular, entonces m∢*MBC* = 108° y m∢*BAD* = 72°.

También $\overline{NA}$ es diagonal del pentágono y $d=\ell\phi$, siendo ϕ el número áureo.

Así, $AD = AN + ND = d + \ell = \ell(\phi + 1)$.

Sabemos que $\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Por lo tanto, al ser $AD=\ell\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)$, las medidas angulares de la servilleta son 72° y 108° y la razón entre los lados debe ser

$$\frac{AD}{AB}=\frac{\ell\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)}{\ell}=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

Problemas Propuestos

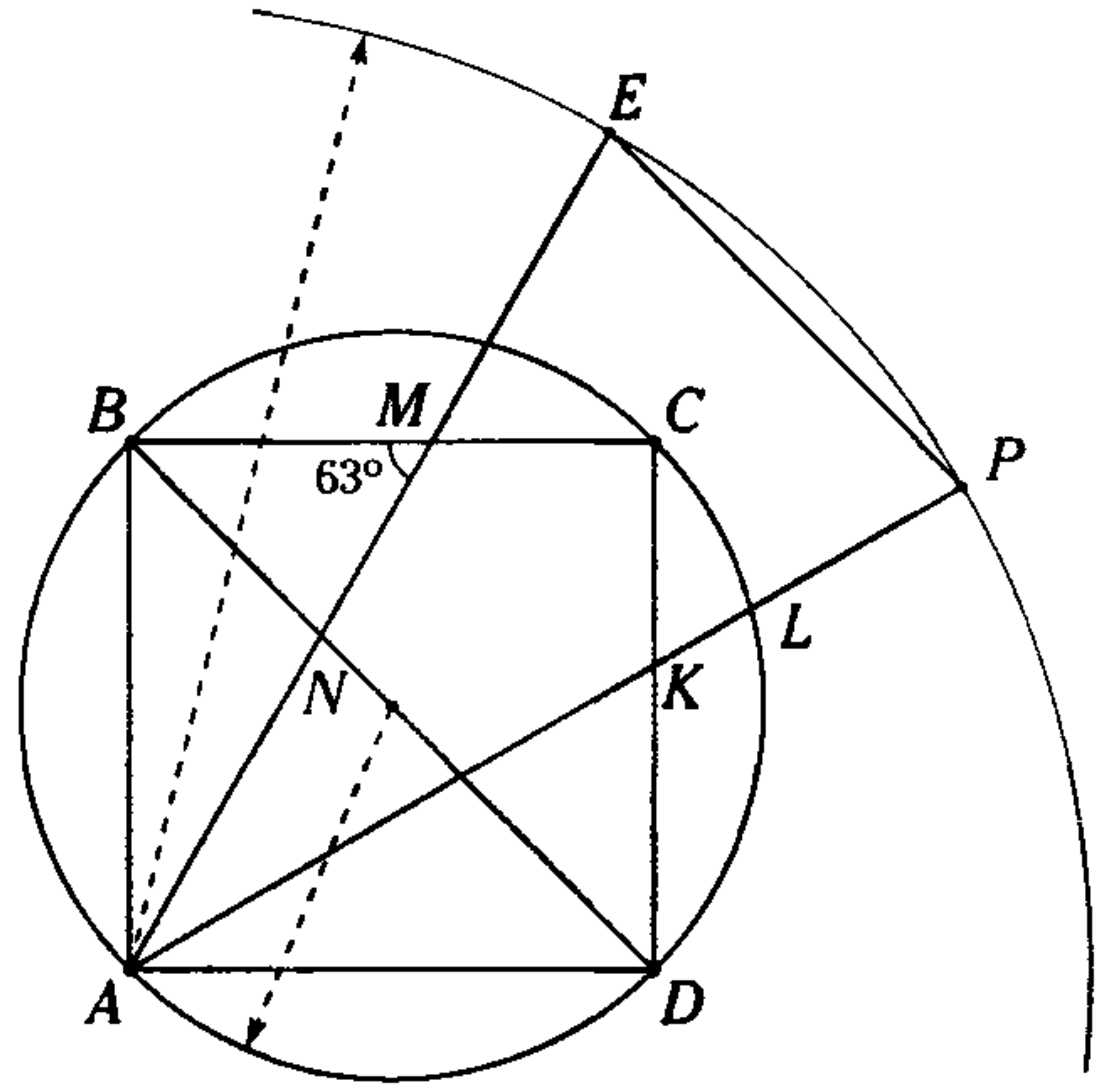
1. En un cuadrado $ABCD$, inscrito en una circunferencia, se traza $\overline{PQ}$, paralelo a $\overline{BC}$ (P y Q en la circunferencia), que interseca a $\overline{BD}$ en F. Si $PF = a$ y $FQ = b$, halle el circunradio del cuadrado.

A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ C) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{6}}$
D) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ E) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{4}$

2. En un polígono regular de n lados, cuyo apotema y lado miden ℓ y 2ℓ, respectivamente, se traza otro polígono regular de $n+2$ lados, cuyo lado mide 6. Calcule la mayor distancia de un vértice a la recta que contiene a dos vértices que determina un arco de medida 120°.

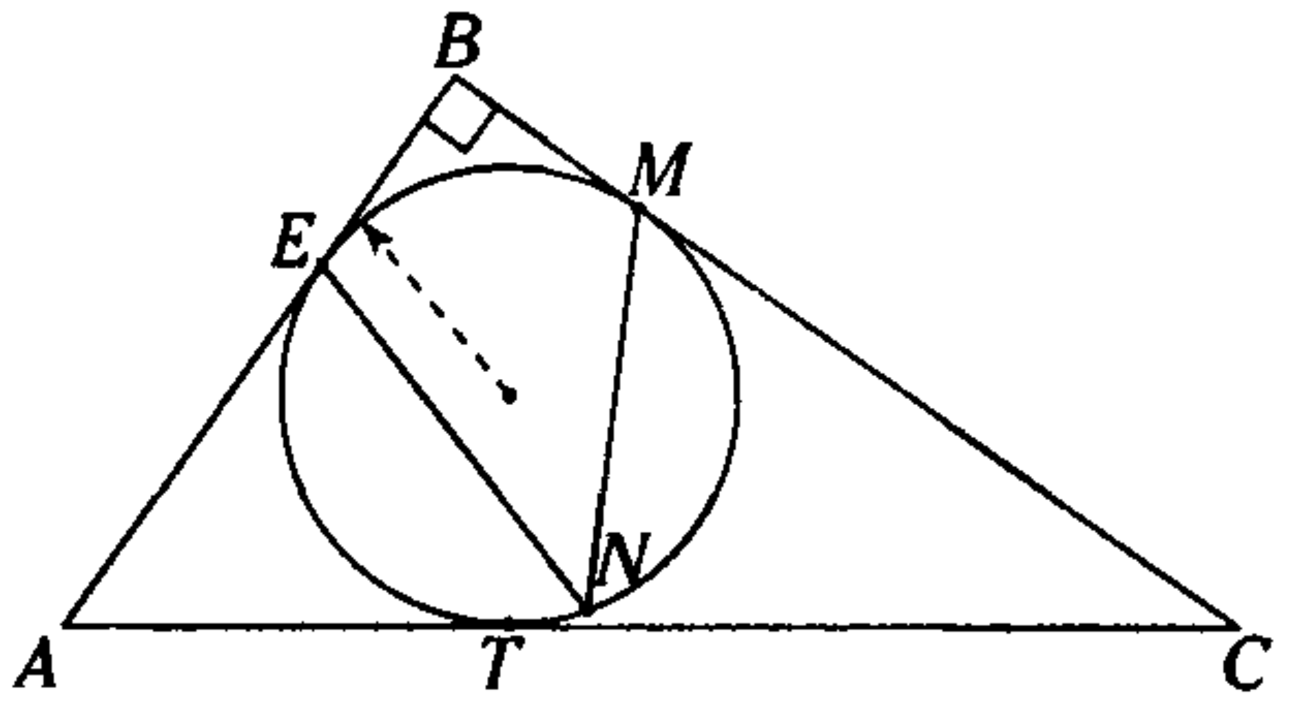
A) 6 B) 8 C) 7
D) 5 E) 9

3. De la figura, $CM = CK$ y $ABCD$ es un cuadrado. Si $\overline{PK}$ es la sección áurea de $\overline{PA}$ y $PK = 1$, señale PE.



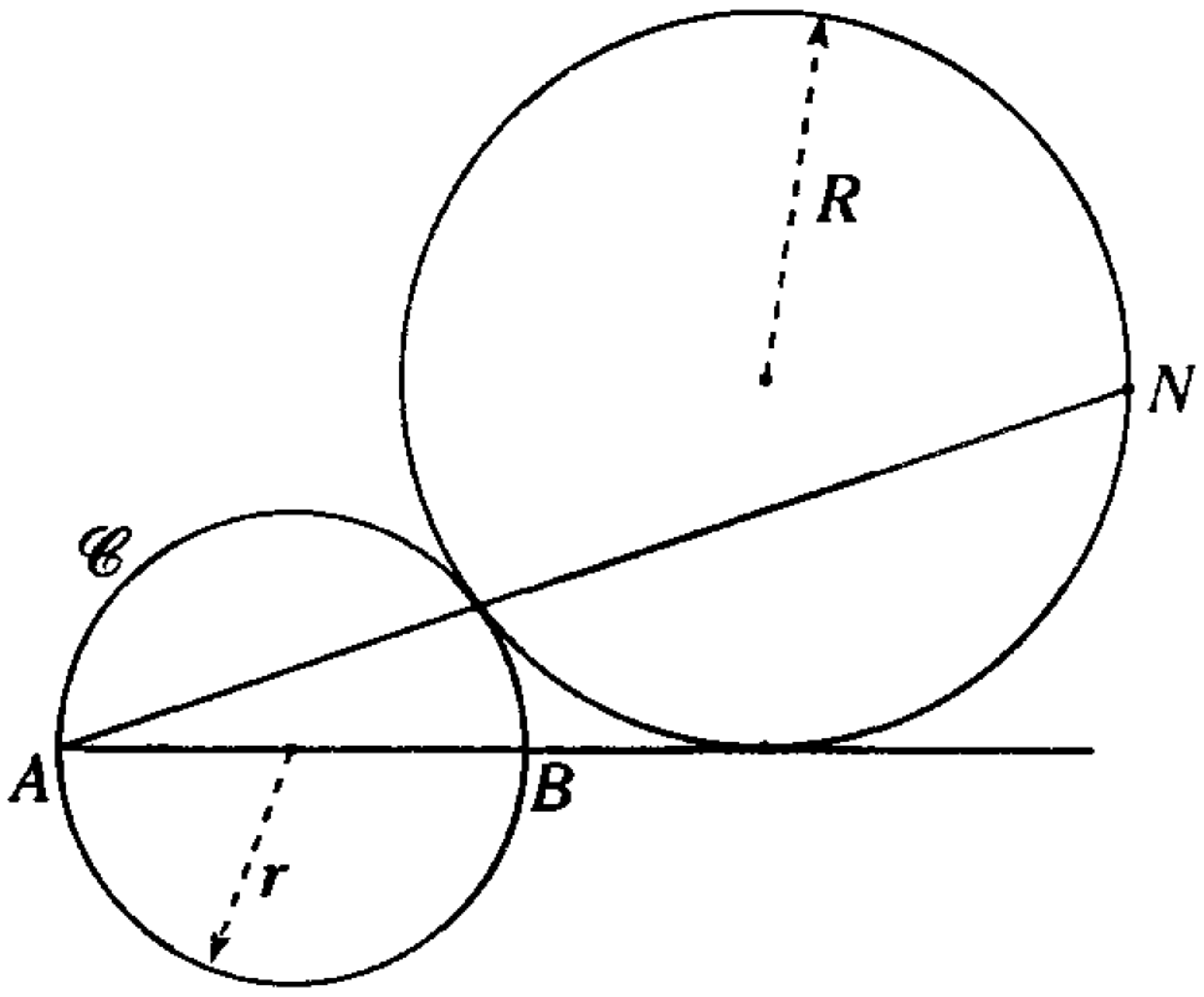
A) 2 B) 1,5 C) 1
D) 5 E) 9

4. De la figura, $AB = 5$, $AC = 13$ y $m\sphericalangle NMC = 75°$. Indique EN.



A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$ E) 3

5. Según la figura, $R = 3\sqrt{10}$ y $r = 2\sqrt{10}$. Calcule la potencia de N, respecto de la circunferencia $\mathscr{C}$.



A) 480 B) 540 C) 580
D) 520 E) 460

6. Si la diferencia de las longitudes de los hexágonos regulares circunscrito e inscrito en una misma circunferencia es $(2-\sqrt{3})$ calcule el apotema del polígono regular de mayor longitud.

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

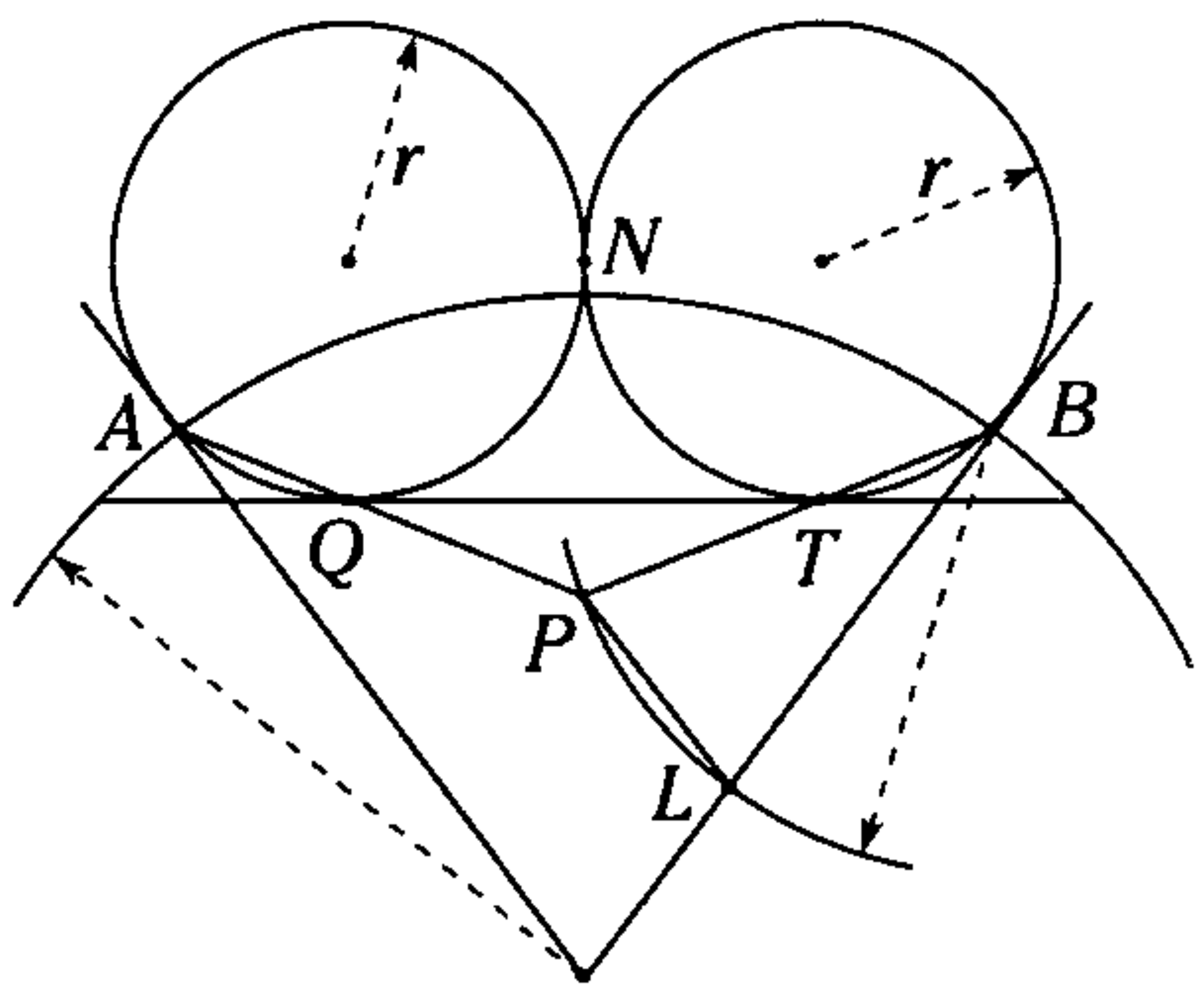
7. En una circunferencia, de radio $\sqrt{2}$, se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que $AC=\sqrt{6}$, $BD=2$ y $m\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{BC}$. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 90° D) 120°

8. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se tiene una circunferencia inscrita de centro O, donde M es el punto de tangencia con $\overline{BC}$; $AB=5$ y $AC=13$. Luego, se ubica L en $\overline{MC}$, tal que la potencia de L con respecto de la circunferencia inscrita es $4(7+4\sqrt{3})$. Señale $m\sphericalangle MLO$.

A) 15° B) 27° C) 30°
D) 18° E) 36°

9. Según la figura, $m\overset{\frown}{AB}=60°$ y $r=6$. Indique PL (A, B, T y Q son puntos de tangencia).



A) $2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

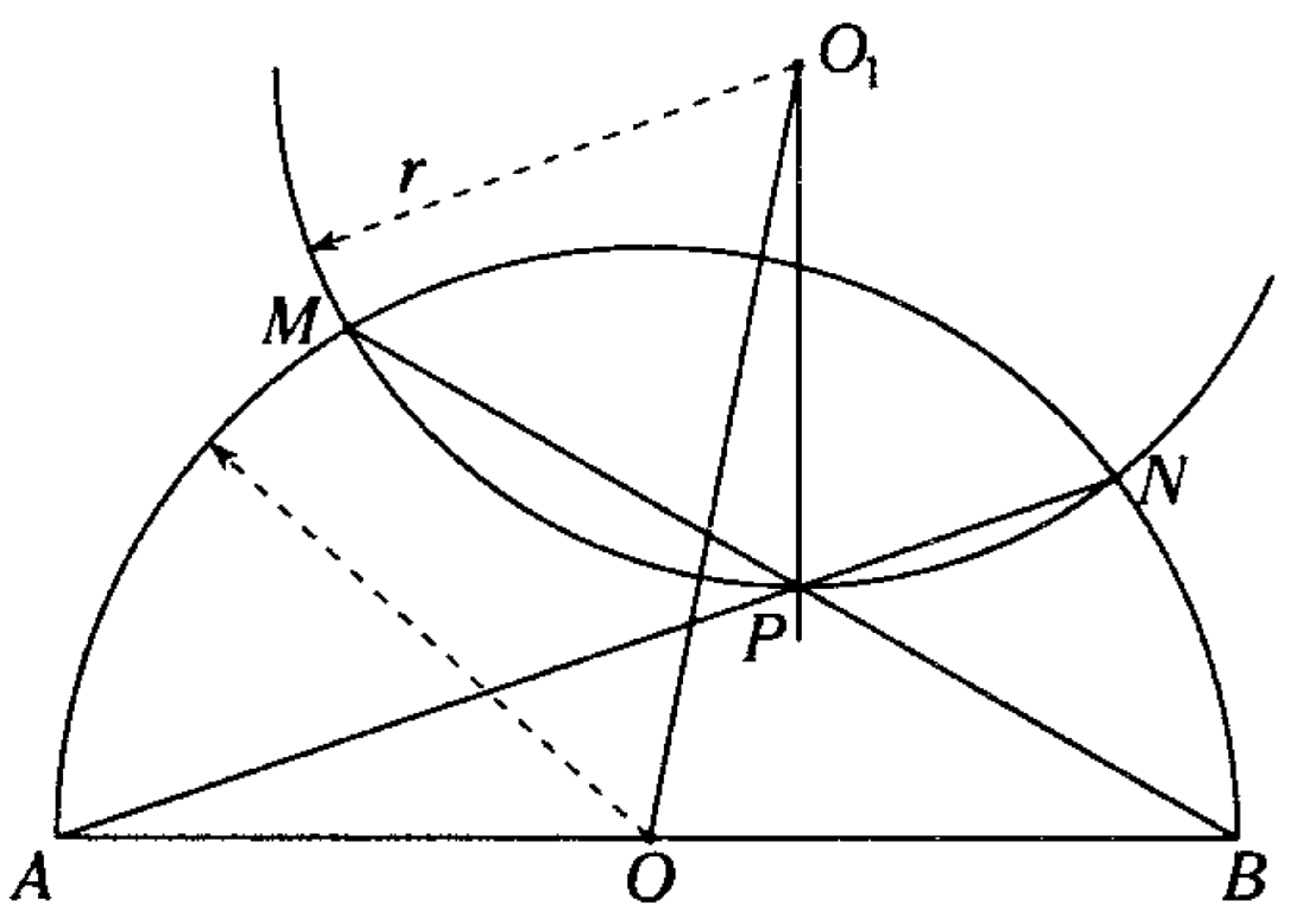
B) $2\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

C) $2\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

D) $2\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

E) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

10. De la figura, $AB=2(r)=8$ y $m\sphericalangle OO_1P=9°$. Halle AN.



A) $2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

B) $2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

C) $4\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

D) $4\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

E) $2(\sqrt{5}+1)$

11. En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD, tal que $AD=BC=a$, $m\sphericalangle BCA=54°$ y $m\sphericalangle ABD=63°$. Determine AC.

A) $a\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

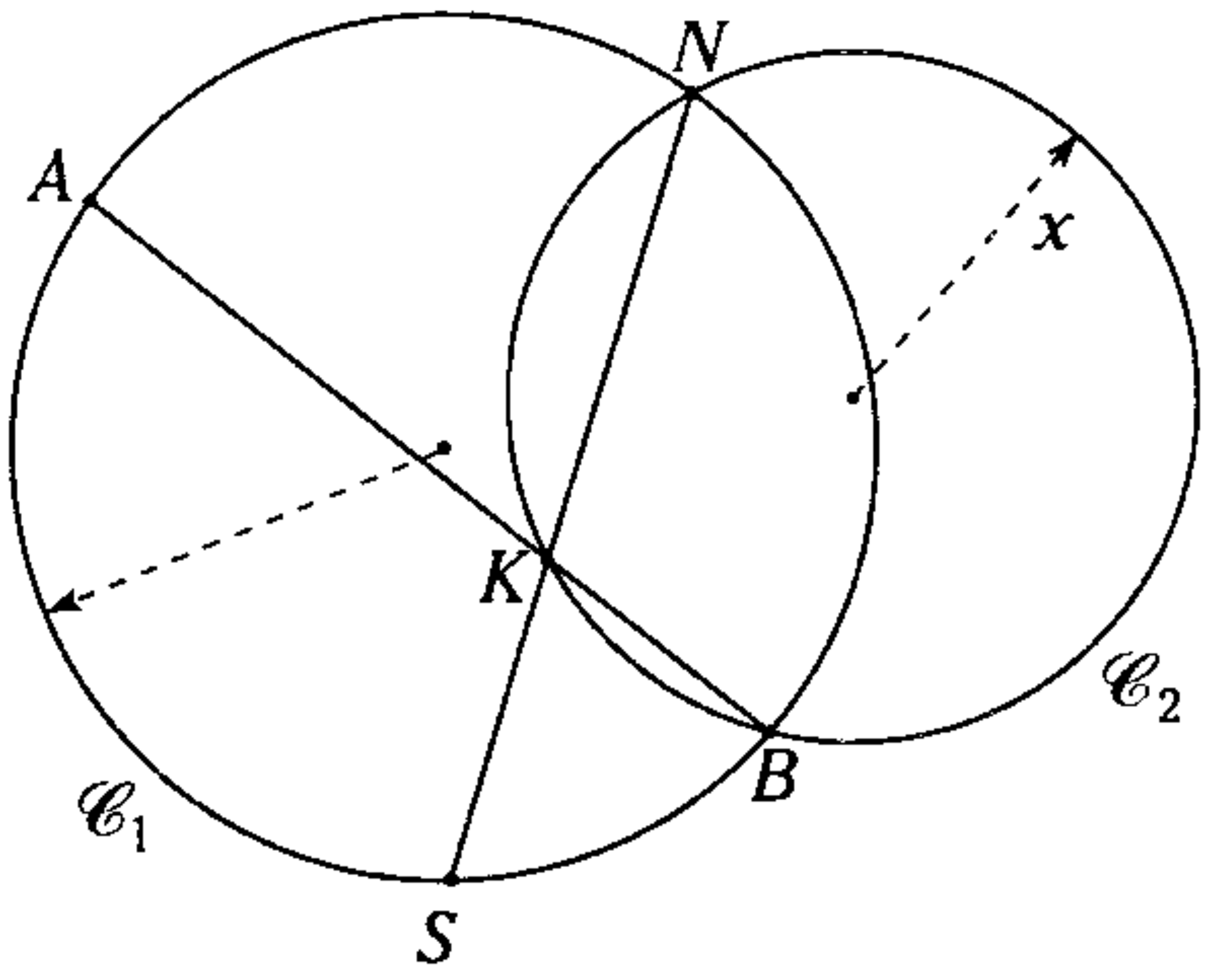
B) $\frac{a}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

C) $\frac{a}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

D) $a\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

E) $2a\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

12. De la figura, $3\left(\underset{\mathscr{C}_1}{\text{Pot}.K}\right)=-\left(\underset{\mathscr{C}_2}{\text{Pot}.A}\right)$, $m\widehat{KN}=120°$ y $KS=\sqrt{3}$. Calcule x.



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

13. En un exágono regular $ABCDEF$, se ubica en la región, exterior y relativa a $\overline{EF}$, el punto P, tal que $m\measuredangle APD=90°$, $PD=a$ y $AP=b$. Calcule BP.

A) $\dfrac{\sqrt{3}a+b}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}b+\sqrt{2}a}{3}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}b+a}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}a+b}{3}$ E) $\dfrac{a+b}{2}$

14. Se tienen un octágono regular $ABCDEFGH$ y el triángulo equilátero BDK, tal que K se encuentra en la región interior. Señale $\dfrac{HK}{FG}$.

A) $\sqrt{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

B) $\sqrt{4-\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

C) $\sqrt{4-\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

D) $\sqrt{4+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

E) $\sqrt{4+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

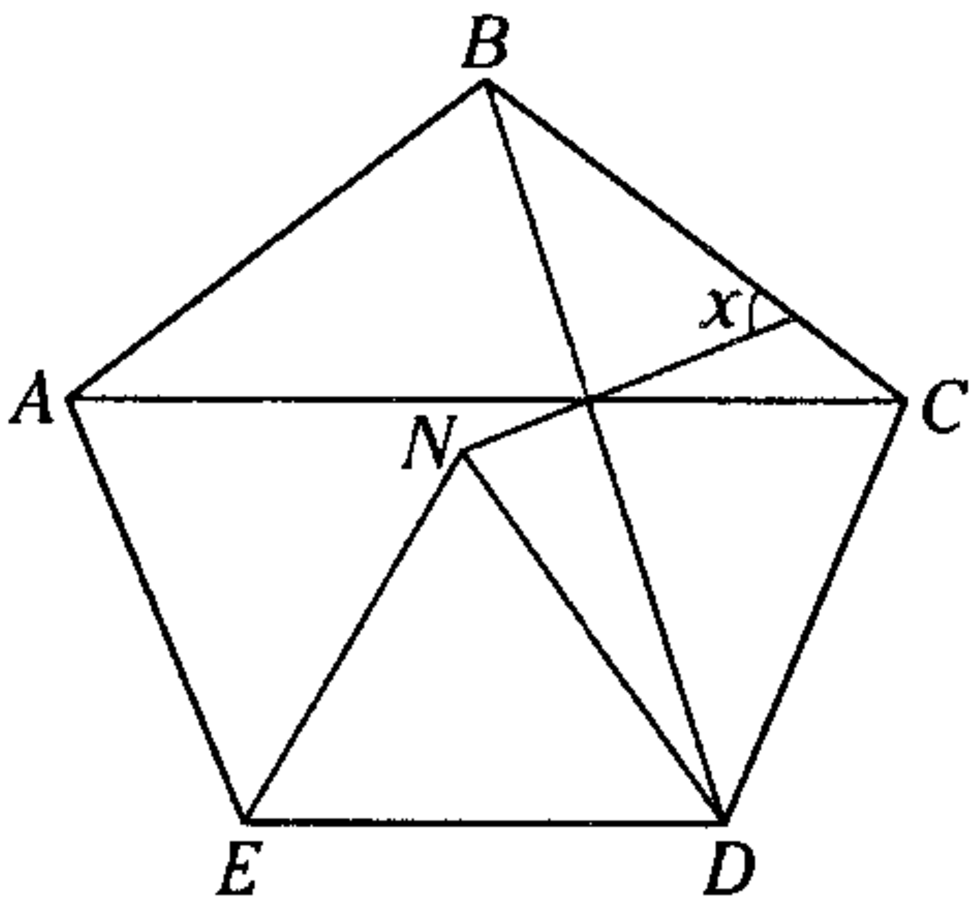
15. El circunradio y el apotema de un polígono regular miden R y a. Calcule la longitud del apotema de otro polígono regular del doble número de lados que el primero, si a su vez los perímetros de las regiones que limitan son iguales.

A) $R+a$ B) $\dfrac{R+a}{3}$ C) $\dfrac{R+a}{2}$

D) $R+2a$ E) $\dfrac{2R+a}{2}$

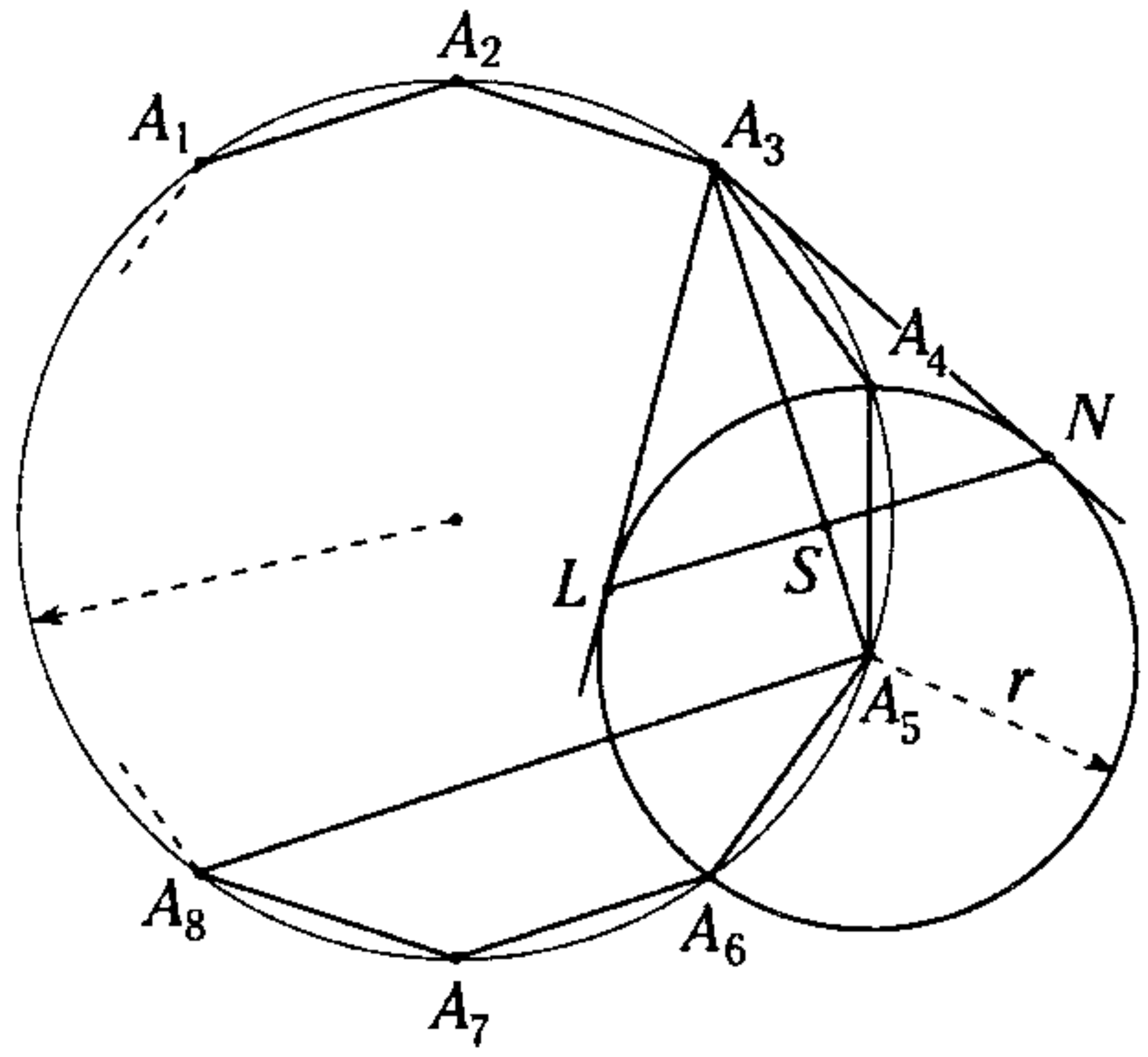
16. El circunradio del pentágono regular $ABCDE$ mide R. Si $EN=ND=R\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$, halle x.

A) 45°
B) 53°
C) 60°
D) 75°
E) 72°



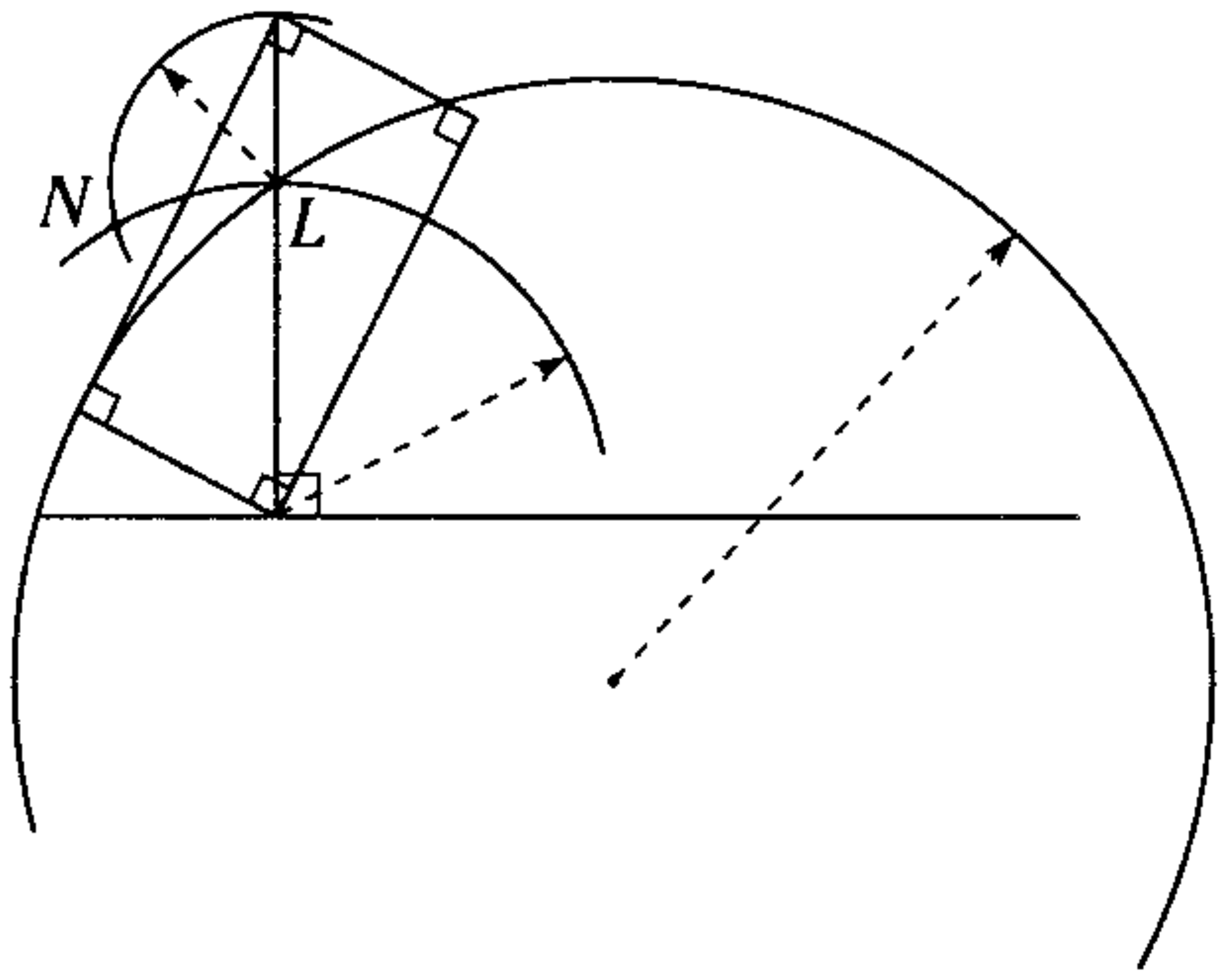
17. De la figura, $A_1A_2A_3A_4A_5\ldots A_n$ son los vértices de un polígono regular de n lados y $\dfrac{A_3S}{SA_5}=a$

Determine $\dfrac{A_5A_8}{r}$ (L y N son puntos de tangencia).



A) $a/2$ B) $2a$ C) $2a/3$
D) a E) $a/4$

18. De la figura, indique m$\overset{\frown}{NL}$.

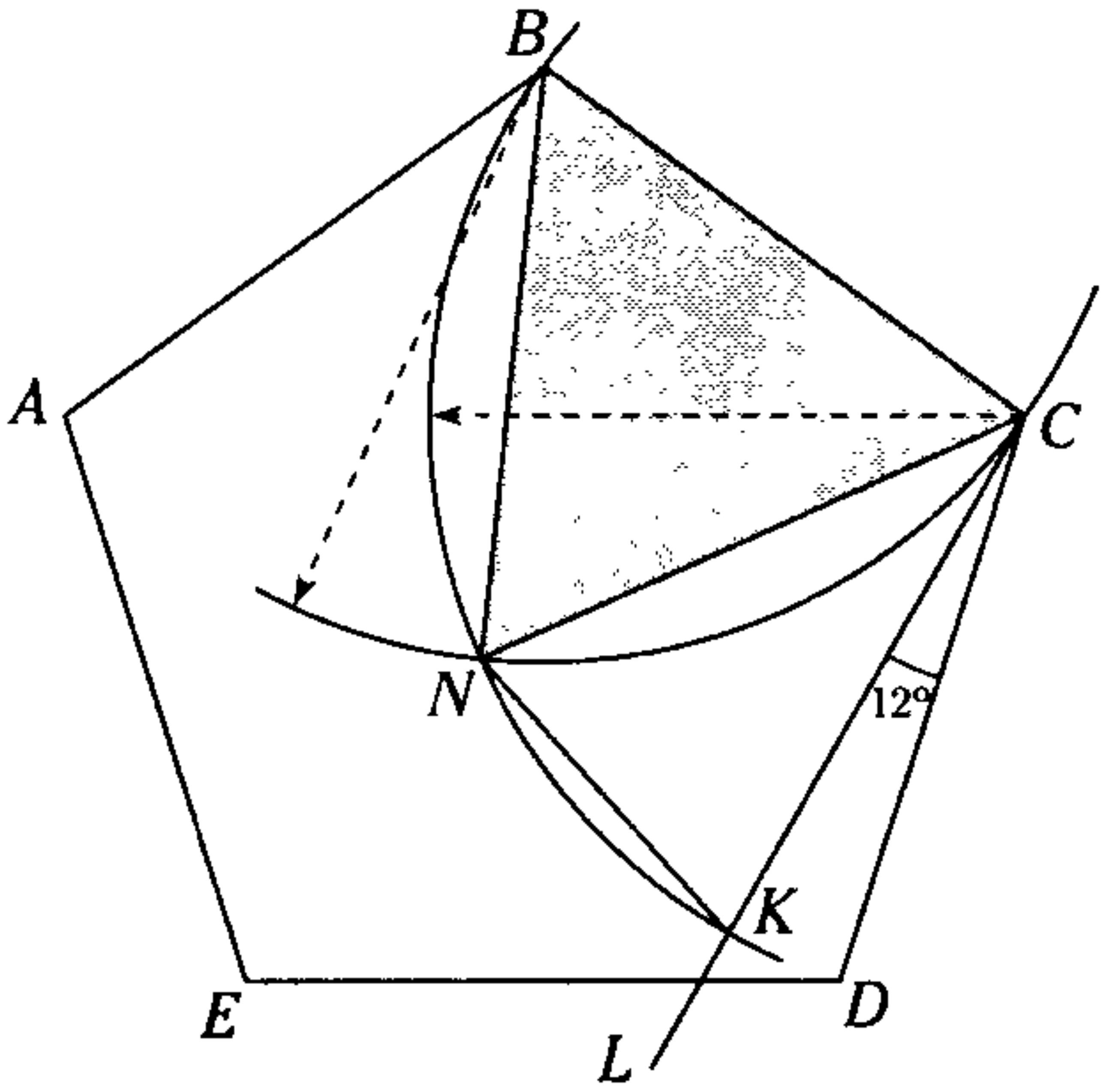


A) 30° B) 36° C) 44°
D) 54° E) 58°

19. En un exágono regular *ABCDEF*, de centro *O*, se traza interiormente un cuadrado *CDMN*, de centro O_1. Si $AB = 2\sqrt{2}$, calcule la longitud de la proyección de $\overline{OO_1}$, sobre $\overline{AO}$.

A) $3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ B) $\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ C) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$
D) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ E) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$

20. De la figura, *ABCDE* es un pentágono regular, cuyo circunradio mide $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Halle *NK*.



A) $10-\sqrt{5}$ B) $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ C) $2-\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) $5-\sqrt{5}$

21. En una circunferencia, se inscribe un triángulo equilátero *ABC*. La distancia entre el punto medio del lado *AC* y el punto medio del arco *BC* es $8\sqrt{7}$ u. Indique la longitud del lado del triángulo.

A) $16\sqrt{3}$ u B) $12\sqrt{3}$ u C) $20\sqrt{3}$ u
D) $18\sqrt{3}$ u E) $14\sqrt{3}$ u

22. Se tiene un cuadrado *ABCD* de lado $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, con centro en *D* y con radio igual al lado del cuadrado. Se traza un arco que interseca a $\overline{BD}$ en el punto *F*. Si la prolongación de $\overline{AF}$ interseca a $\overline{BC}$ en el punto *M*, calcule *MN*. Considere que $\overline{MN}$ es perpendicular a $\overline{FC}$ (*N* en $\overline{FC}$).

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $\sqrt{2}-1$
D) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

23. Sean *ABCDE* y *AEFGH* dos pentágonos regulares. Si por *C*, *D*, *F* y *G* se puede trazar una circunferencia de radio *R* $\left(R=\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$, señale *BH*.

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) 5
D) $\sqrt{5}+1$ E) $\sqrt{5}-1$

24. En una semicircunferencia, de diámetro *AB* y centro *O*, se ubica el punto *E*. Exteriormente, se construye el cuadrado *BEDC*, tal que $\overline{DO}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Si $\overline{DO}$ interseca a la semicircunferencia en *F*, determine *CF*.

$BF = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

A) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{2\sqrt{2}}$ C) 4
D) 2 E) $\sqrt{2\sqrt{3}}$

1	D	9	A	17	D
2	E	10	B	18	B
3	C	11	C	19	D
4	C	12	C	20	E
5	B	13	C	21	A
6	E	14	D	22	C
7	B	15	C	23	B
8	A	16	E	24	D

Claves

Capítulo XVIII

Áreas de regiones poligonales

La permanente innovación del lenguaje plástico y la constante revolución de las formas han permitido que regiones planas de diferentes colores y formas representen una visión del mundo, desde la perspectiva del artista.

Áreas de regiones poligonales

OBJETIVOS

- Conocer qué es una región plana, así como la medida de dicha región.
- Diferenciar el significado de una región plana y el área de dicha región.
- Entender los postulados y teoremas fundamentales que permiten calcular el área de las regiones triangulares, cuadrangulares y circulares.
- Establecer los teoremas adicionales que permitan calcular el área de una región triangular, cuadrangular y circular, relacionando elementos asociados a dicha región.
- Reconocer los teoremas que permiten calcular el área de una región cuadrangular específica, de acuerdo a las características de sus lados (paralelográmica, trapecial, rombal, etc.)
- Definir el círculo y establecer su área, así como los teoremas que permiten calcular el área de sus partes notables.

INTRODUCCIÓN

La necesidad de aprovechar adecuadamente la naturaleza llevó al hombre a medir los terrenos de cultivo y viviendas. Para ello, se ha visto obligado a crear ciertos conceptos y postulados que le permitan medir una región poligonal (triangular, cuadrangular, etc.) circular o compuesta.

Es en el trajinar de nuestra vida, en donde nos hemos visto con la necesidad de calcular el área de la superficie de una pared para poder pintarla, así también, la necesidad de saber cuánto de madera se necesita para construir una puerta, una ventana, o simplemente saber la extensión del piso de nuestras habitaciones, etc. Por consiguiente, se hace evidente que debemos conocer cómo se calcula el área de una región plana.

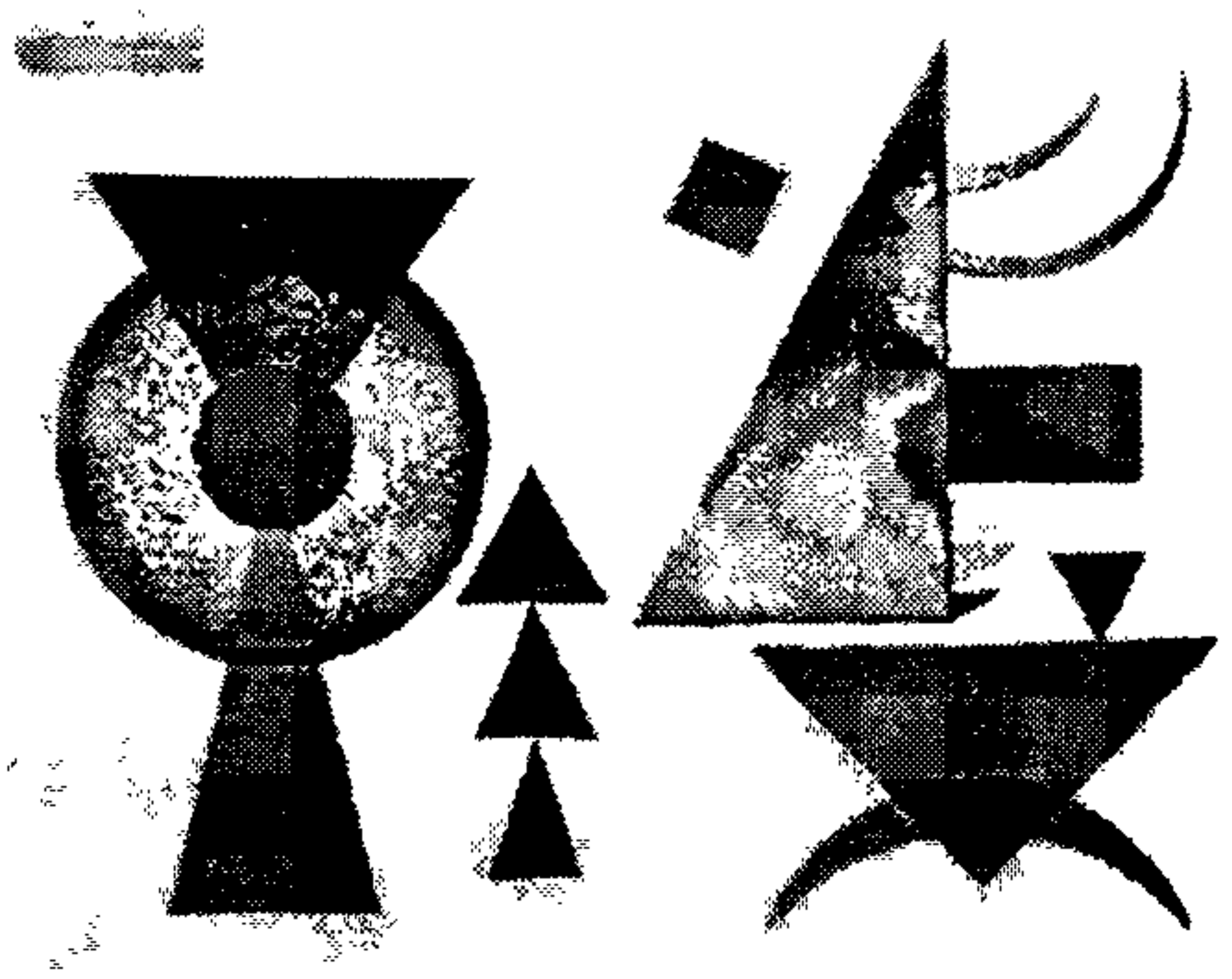
REGIÓN PLANA CERRADA

Es una porción de plano, limitado por una línea cerrada.

La línea cerrada es el contorno o borde de una región.

Dependiendo de las características de esta línea, a las regiones podemos clasificarlas en regiones, triangulares, cuadrangulares, poligonales, circulares, curvilíneas o mixtilíneas.

Por cuestiones prácticas, a una región plana cerrada la llamaremos región plana o simplemente región.



La pintura muestra regiones triangulares cuadrangulares y circulares. Las cuales dispuestas en diferentes posiciones, representa el mundo segun Wassily Kandinsky (1866-1944) en su obra molesse dure (1927).

ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

El área de una región plana es la medida de la extensión de dicha región. Para efectuar esa medida es necesario tener una unidad de comparación; esta unidad es la región unitaria la cual, es una región cuadrada cuya longitud de su lado es 1 u.

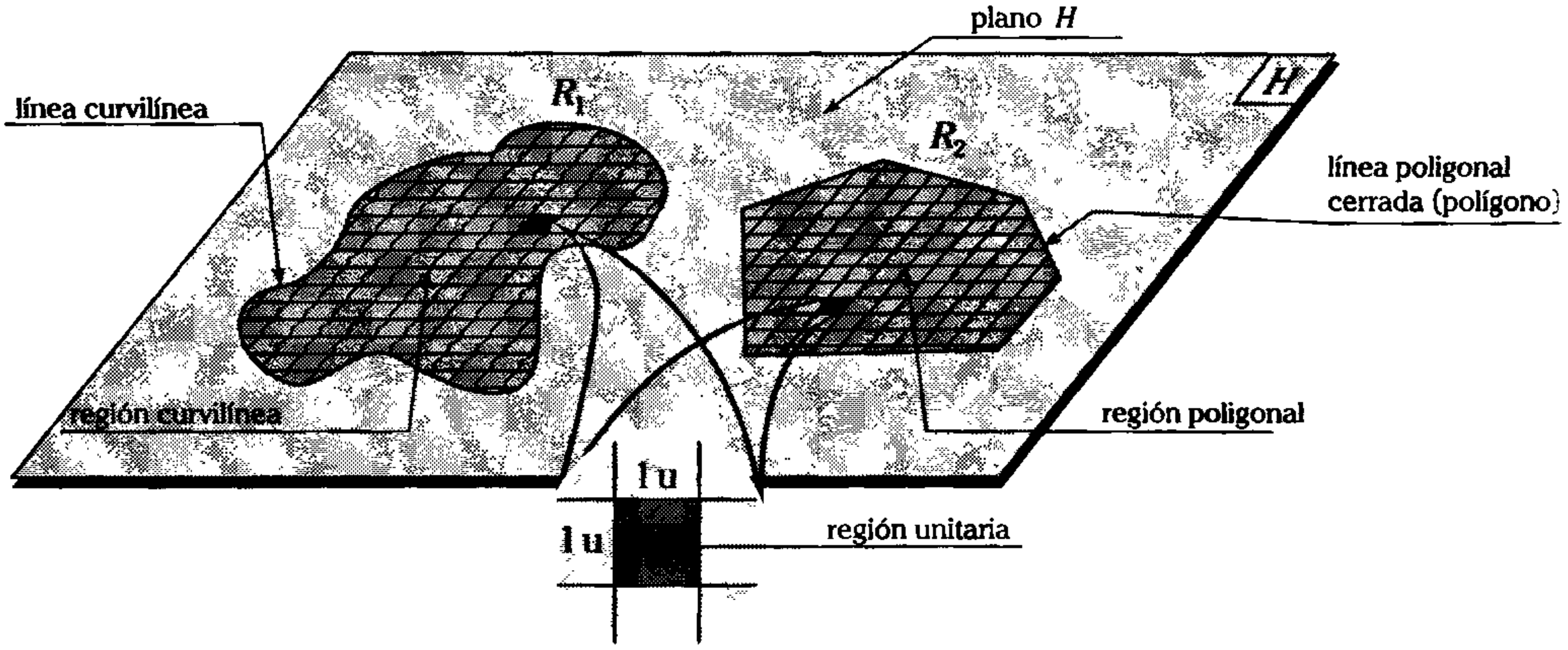


Figura 18.1

De esta manera, el área es el número que indica cuántas veces contiene una región a la región unitaria.

Notación

Área de la región R: $\mathbb{A}_R$.

Postulado 1

Dos regiones congruentes, tienen áreas iguales.

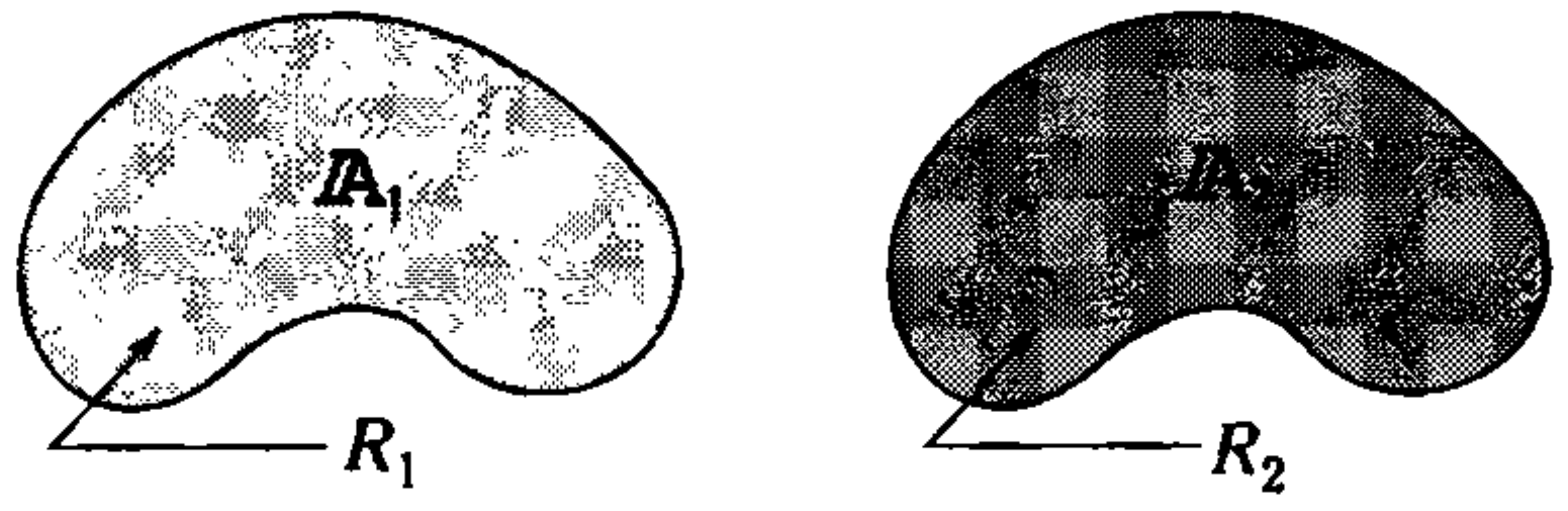


Figura 18.2

$\mathbb{A}_1$: área de la región R_1;

$\mathbb{A}_2$: área de la región R_2.

Si en la figura 18.2; las regiones R_1 y R_2 son congruentes ($R_1 \cong R_2$). Entonces

$$\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2$$

Postulado 2

El área de una región plana es igual a la suma de las áreas de todas sus regiones parciales.

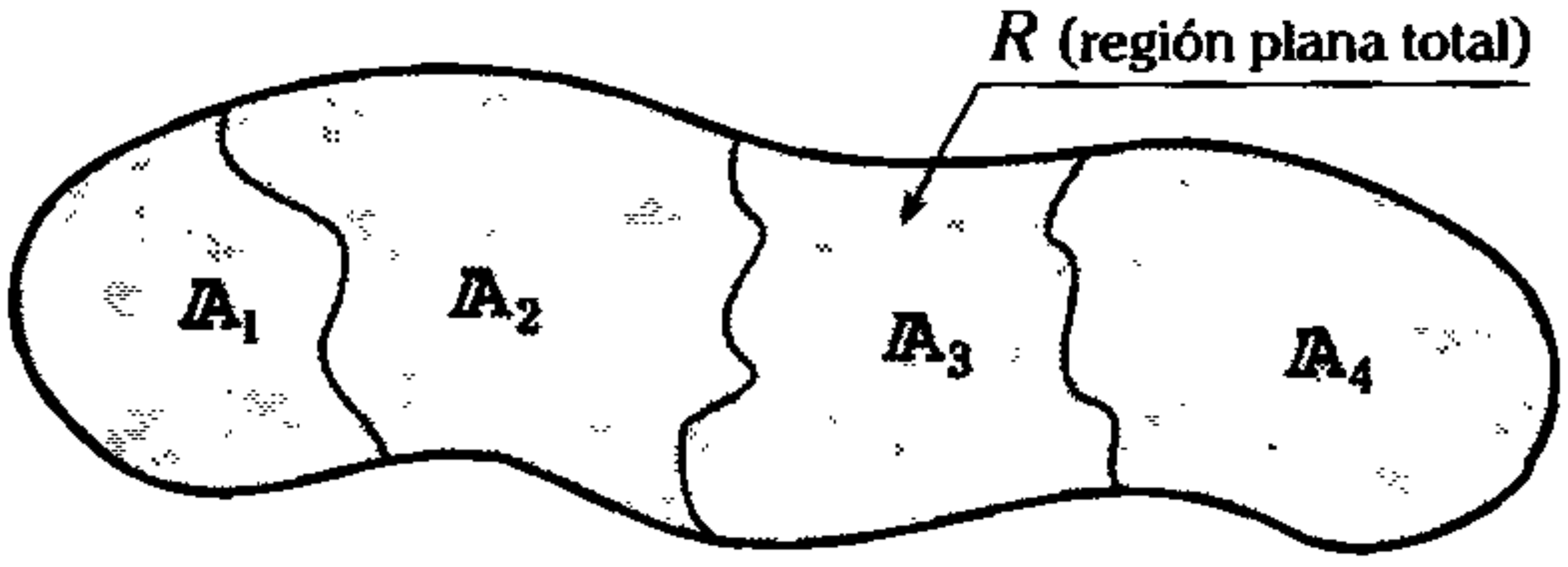


Figura 18.3

Sean, $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$ y $\mathbb{A}_4$, áreas de las regiones parciales y $\mathbb{A}$, área de la región plana total.

Entonces $$\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4 = \mathbb{A}$$

Postulado 3

El área de una región cuadrada es igual al cuadrado de la longitud de su lado.

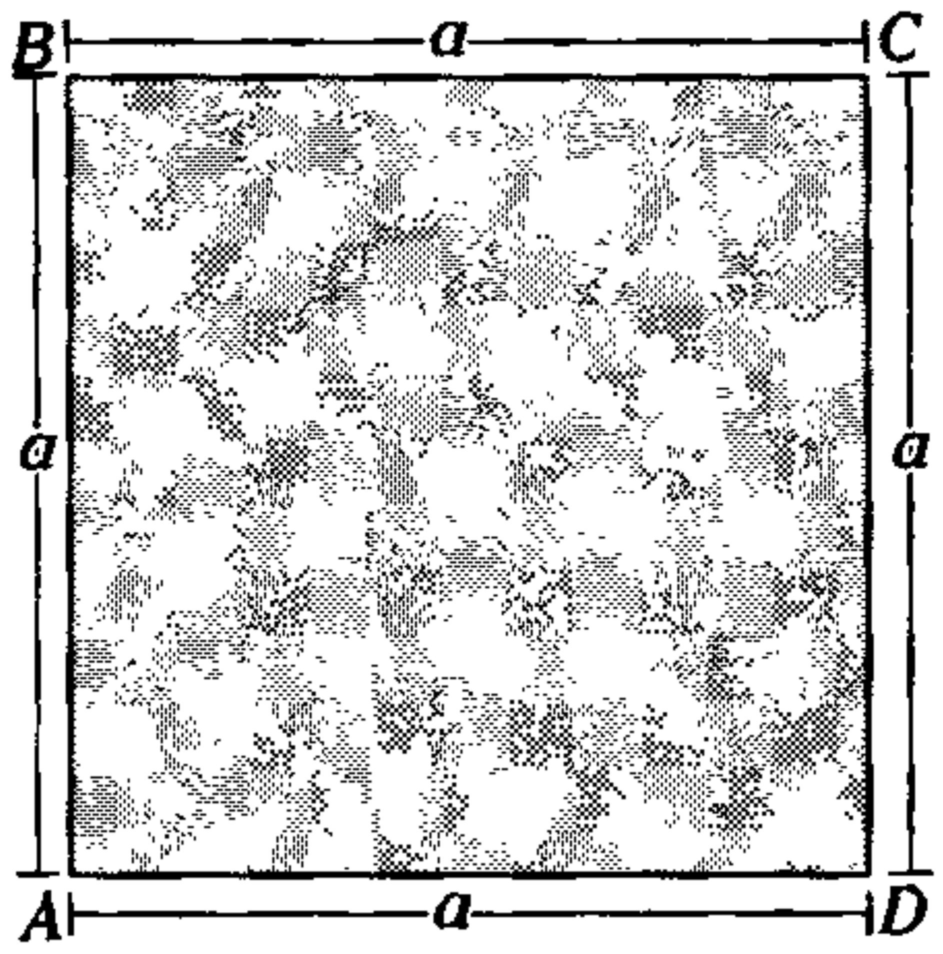


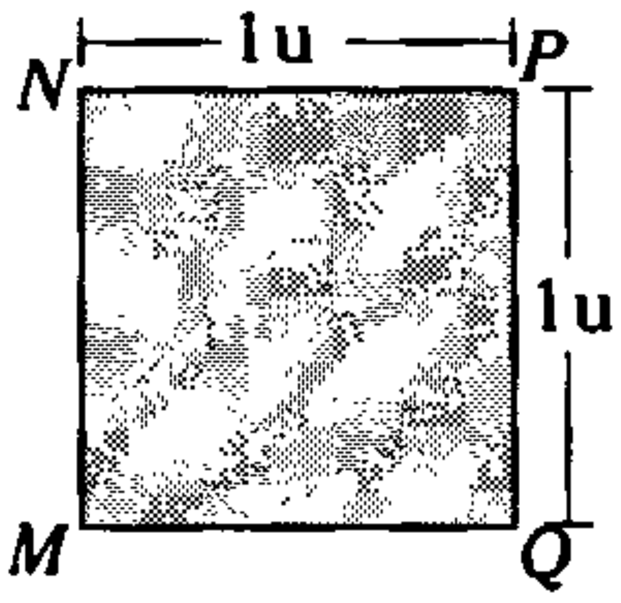
Figura 18.4

■$ABCD$: Región cuadrada

Entonces $$\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = (a)^2$$

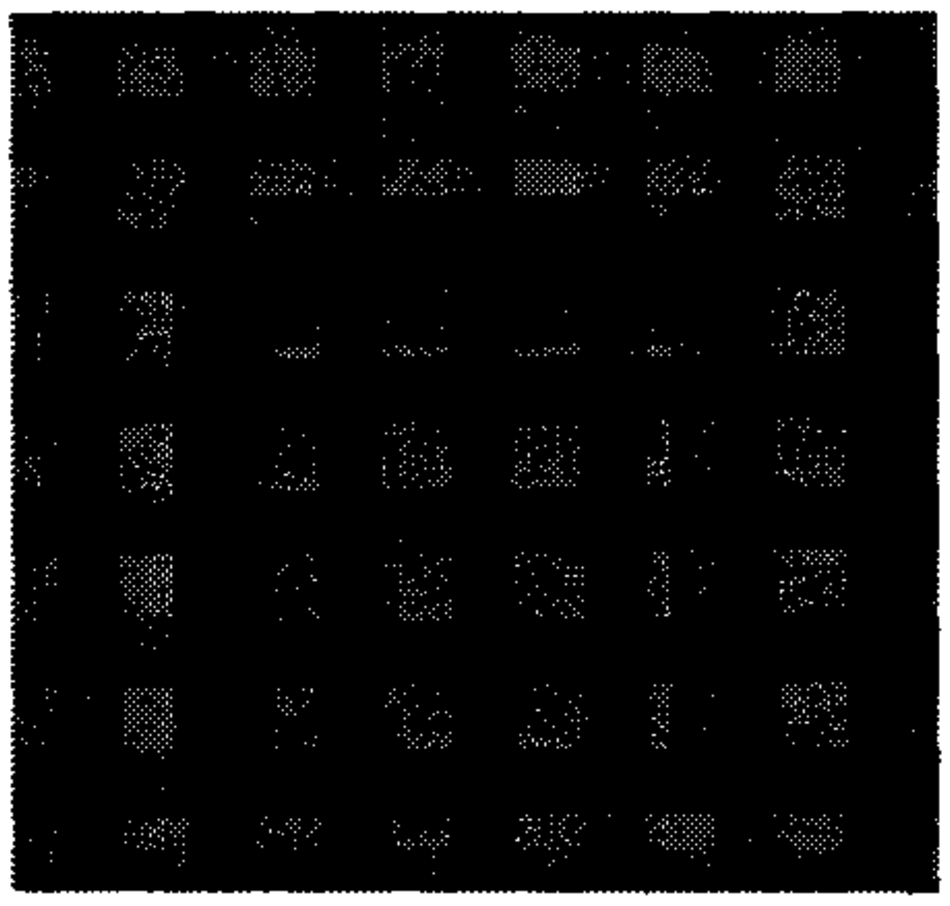
Nota

El área de una región unitaria es una unidad cuadrada.



$\mathbb{A}_{\blacksquare MNPQ} = 1\ u^2$

Figura 18.5



Homenaje al cuadrado, pintura de Josef Albers (1888 - 1976), que consta de cuadrados homotéticos de diferentes colores.

REGIONES EQUIVALENTES

Son regiones que tienen igual área.
$\mathbb{A}_1$: área de la región f_1; $\mathbb{A}_2$: área de la región f_2.

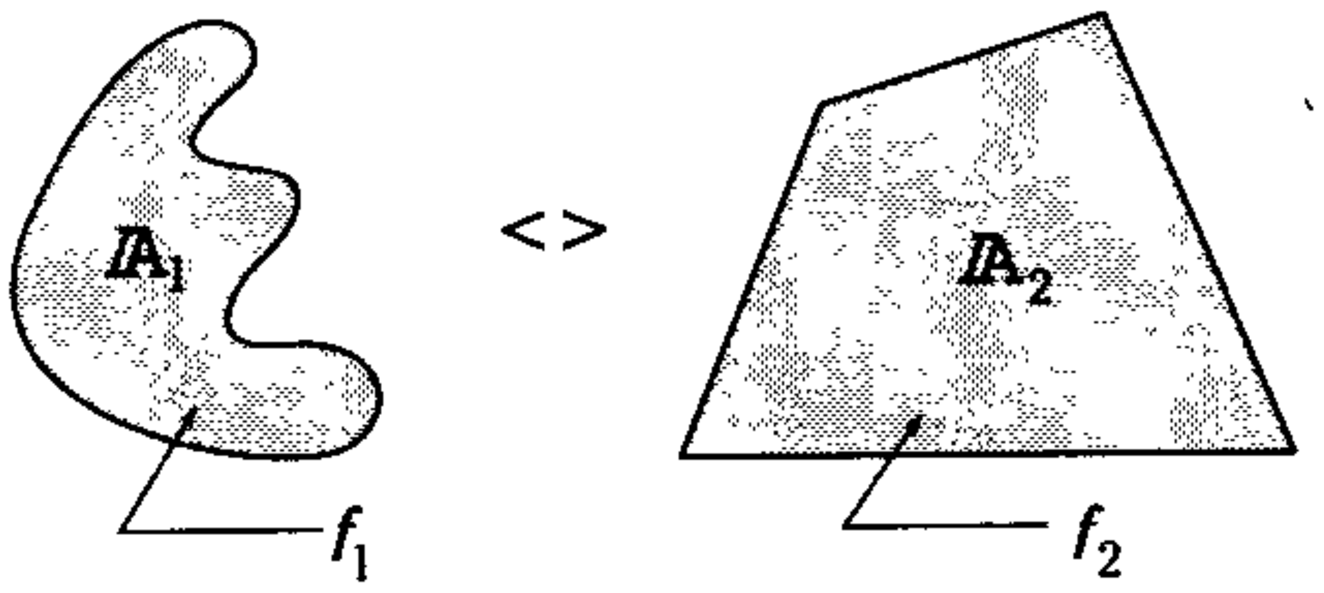
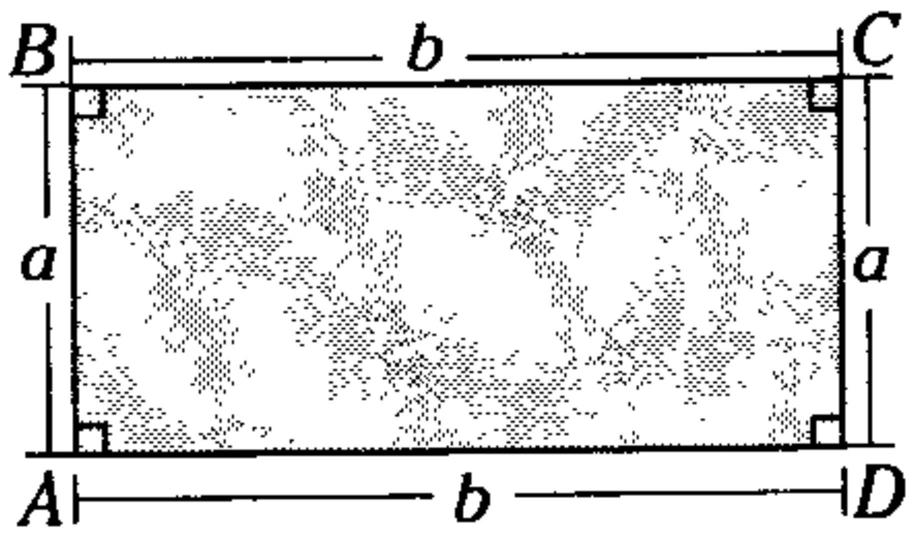


Figura 18.6

En la figura 18.6, si $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2$
entonces la regiones f_1 y f_2 son equivalentes

$$f_1 <> f_2$$

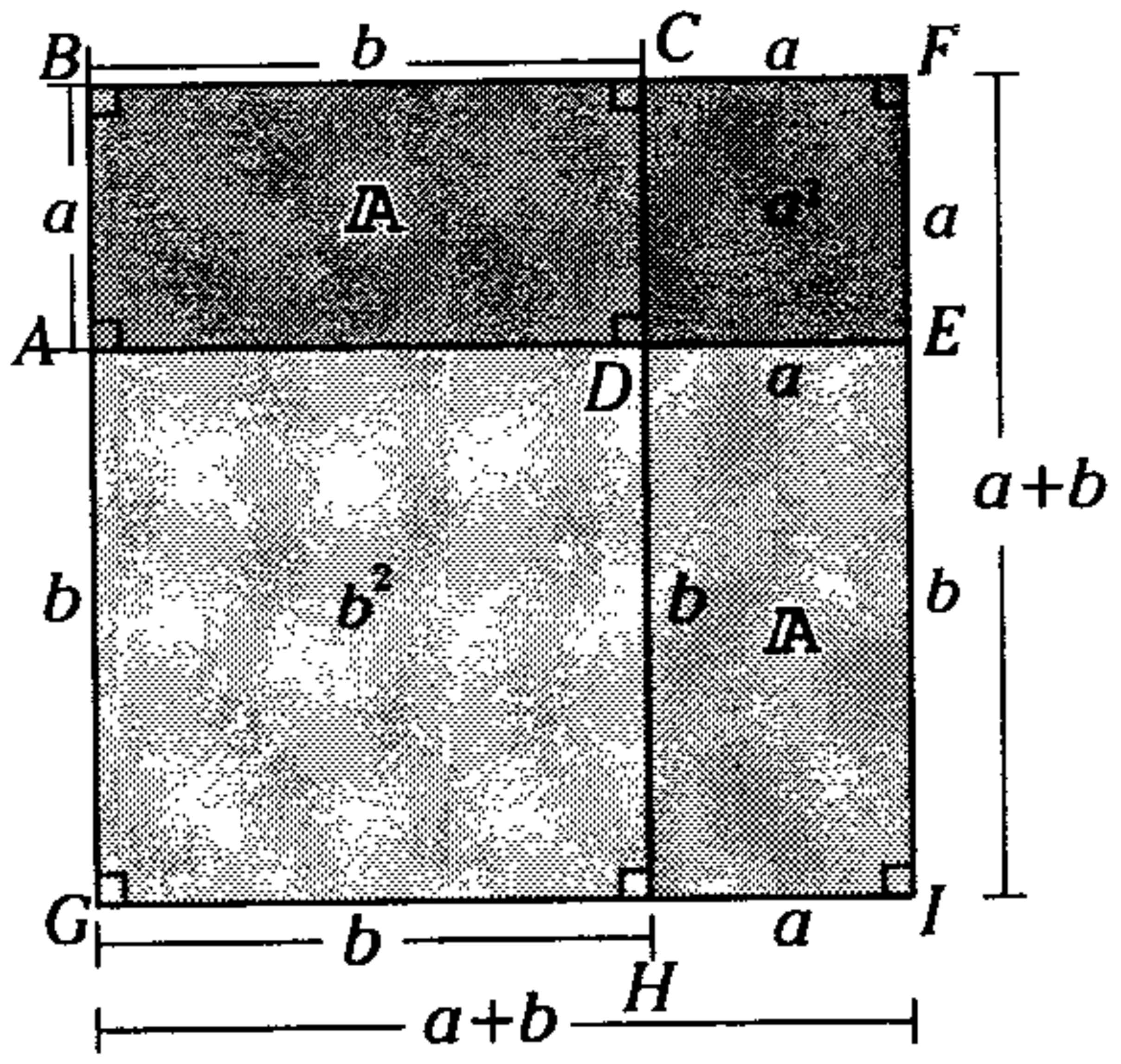
Teorema
El área de toda región rectangular es igual al producto de las longitudes de dos lados contiguos.



$$\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = (a)(b)$$

(a)

Demostración
Tomando dos lados consecutivos del rectángulo construimos cuadrados, relativos a dichos lados

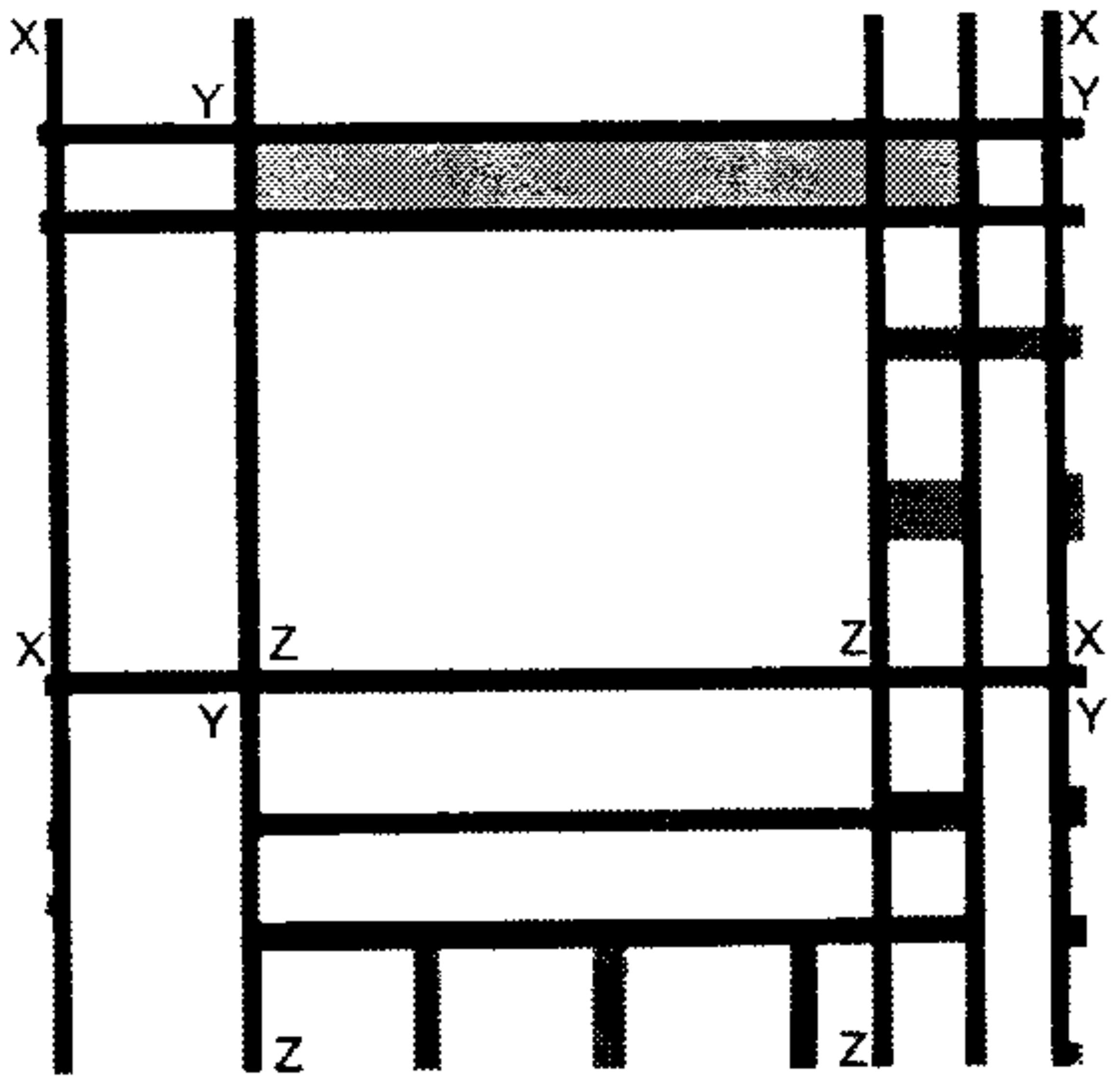


(b)

Figura 18.7

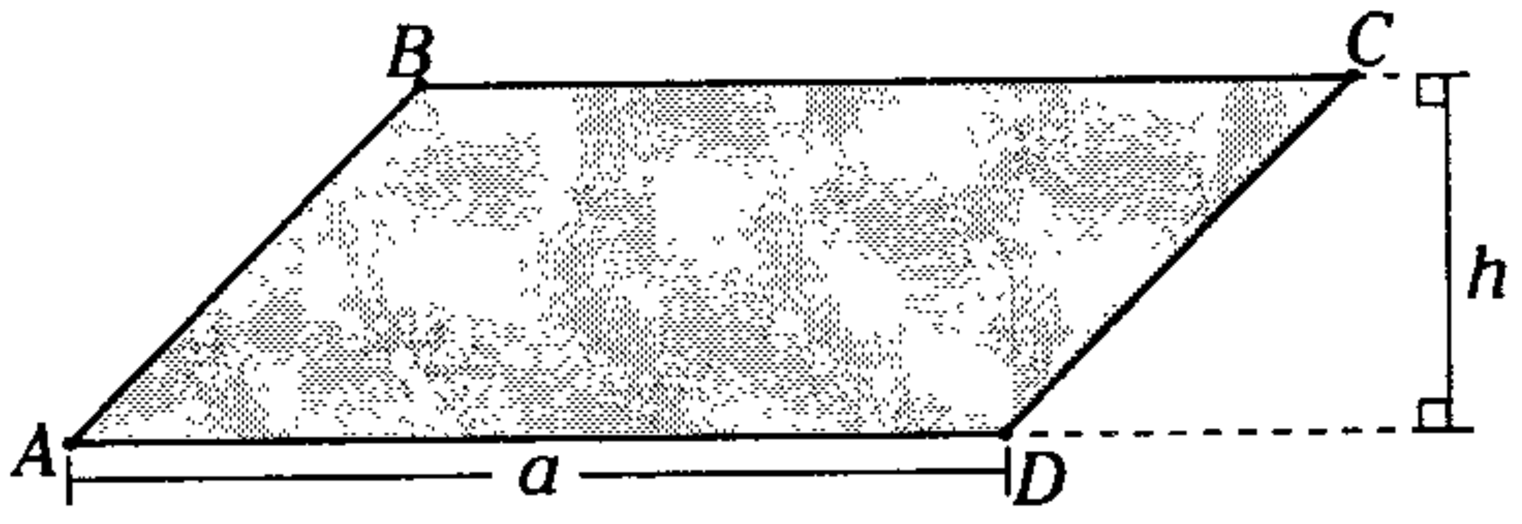
Sean $DCFE$ y $ADHG$, cuadrados, entonces al prolongar $\overline{GH}$ y $\overline{FE}$ hasta que se intersequen en I, se forma el cuadrado $GBFI$.
Sea $\mathbb{A}$: el área de la región rectangular $ABCD$.
De la figura 18.7(b) se nota que
$\blacksquare HDEI \cong \blacksquare ABCD \;\rightarrow\; \mathbb{A}_{\blacksquare HDEI} = \mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \mathbb{A}$
Luego
$\mathbb{A}_{\blacksquare GBFI} = \mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} + \mathbb{A}_{\blacksquare DCFE} + \mathbb{A}_{\blacksquare HDEI} + \mathbb{A}_{\blacksquare ADHG}$
Reemplazando

$$(a+b)^2 = \mathbb{A} + a^2 + \mathbb{A} + b^2$$
$$a^2 + b^2 + 2ab = 2\mathbb{A} + a^2 + b^2$$
$$\rightarrow \; \mathbb{A} = (a)(b)$$
$$\therefore \; \mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = (a)(b)$$



El rectángulo de oro presente en el cuadrado del pintor holandés Piet Mondrian (1872-1944) en su obra Composición II (1937).

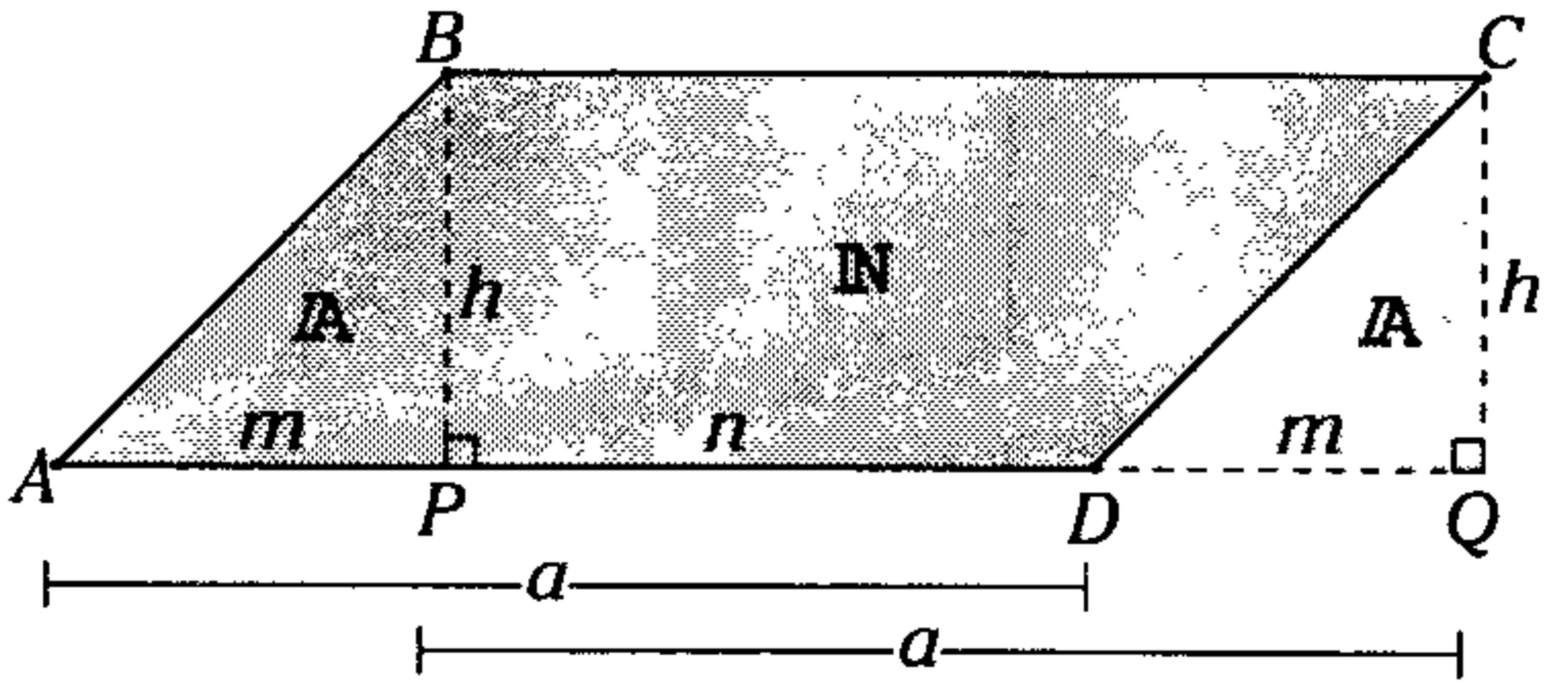
Teorema
El área de toda región paralelográmica es igual al producto de la longitud de uno de sus lados y la altura relativa a dicho lado.



(a)

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = (a)(h)$$

Demostración



(b)

Figura 18.8

Se trazan $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ perpendiculares a $\overleftrightarrow{AD}$ como $AB = CD$ y $BP = CQ$,

Así $⊿ABP \cong ⊿DCQ$ (L.L.L.)

$\rightarrow\ AP = DQ = m$

$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABP} = \mathbb{A}_{\blacktriangle DCQ} = \mathbb{A}$

Se observa

$PQ = m + n = a\ \rightarrow\ AD = PQ = a$

Sea $\mathbb{A}_{▰ ABCD} = \mathbb{A} + \mathbb{N}$ (I)

También $\mathbb{A}_{\blacksquare PBCQ} = \mathbb{A} + \mathbb{N}$ (II)

Como $PBCQ$ es un rectángulo.

Se cumple $\mathbb{A}_{\blacksquare PBCQ} = (a)(h)$ (III)

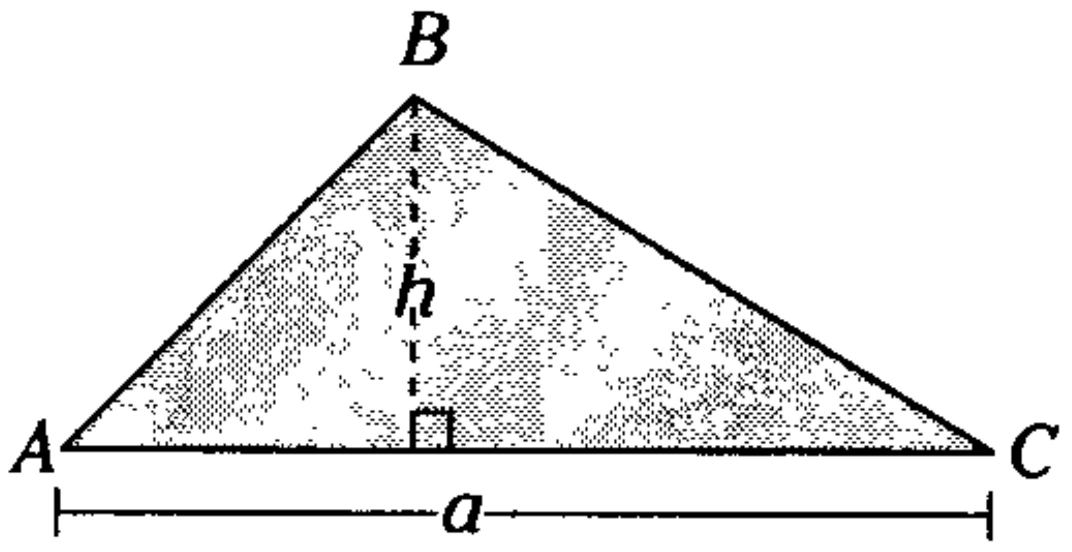
De (I), (II) y (III)

$\therefore\ \mathbb{A}_{▰ PBCQ} = (a)(h)$

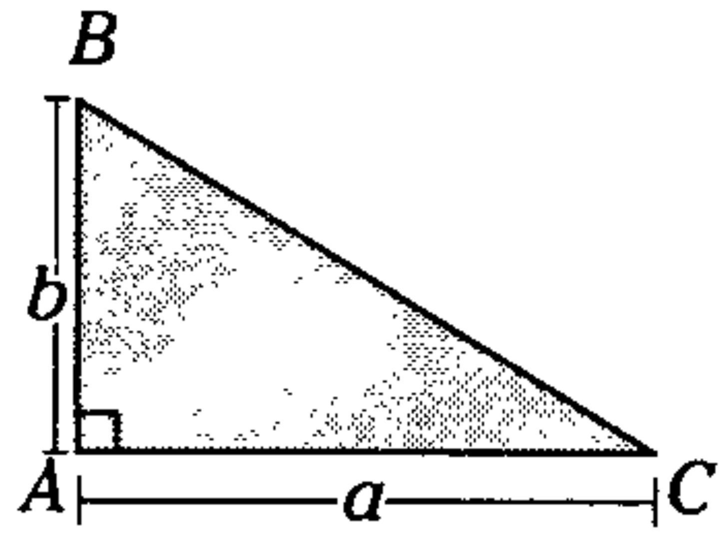
ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

Teorema

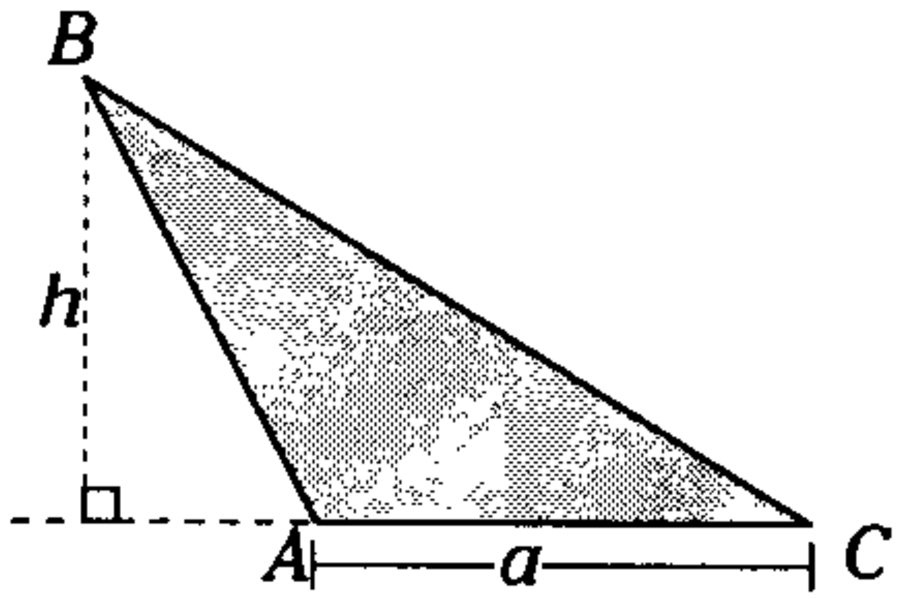
El área de toda región triangular es igual al semiproducto de la longitud de un lado y la altura relativa a dicho lado.



$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{(a).(h)}{2}$$



$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{(a).(b)}{2}$$



$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{(a).(h)}{2}$$

Demostración

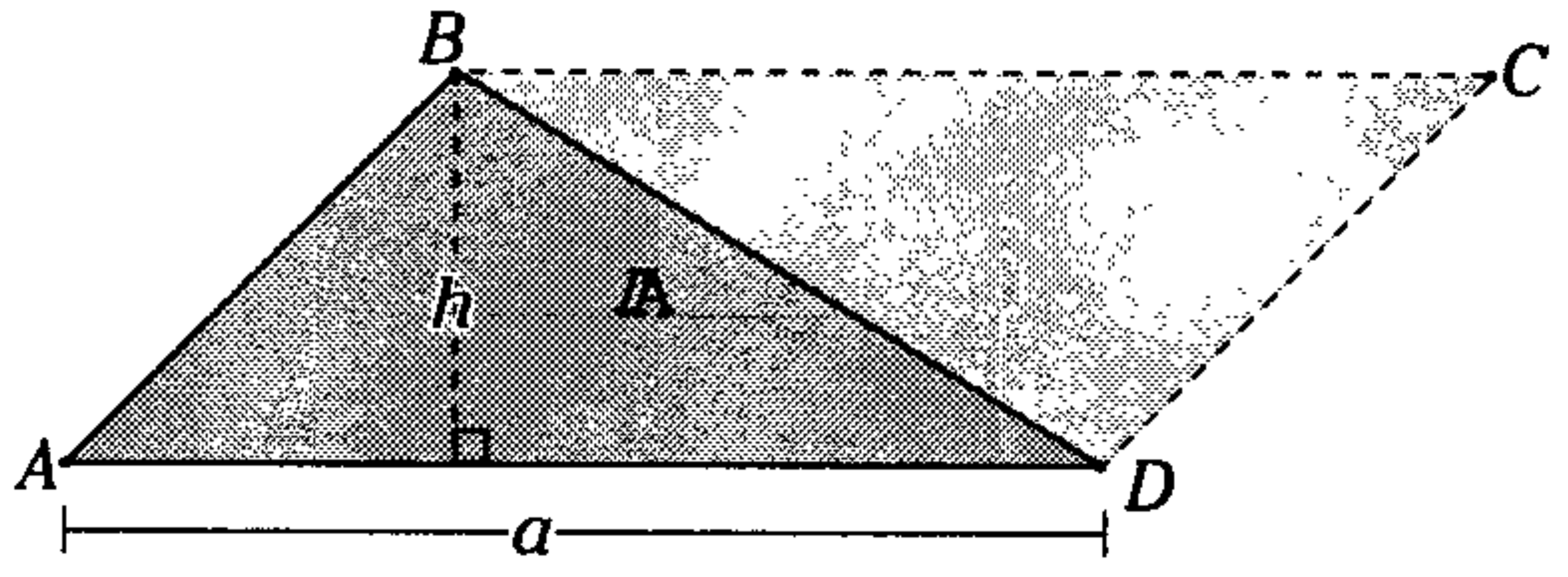


Figura 18.9

Sea la región triangular ABD

Si $AD = a$; $BH = h$

Sea $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\blacktriangle ABD}$; por B se traza $\overline{BC} // \overline{AD}$, tal que $ABCD$ es un paralelogramo.

Se observa que $\triangle ABD \cong \triangle CDB$(L.A.L.)

$\rightarrow\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABD} = \mathbb{A}_{\blacktriangle CDB} = \mathbb{A}$

Analizando el paralelogramo $ABCD$

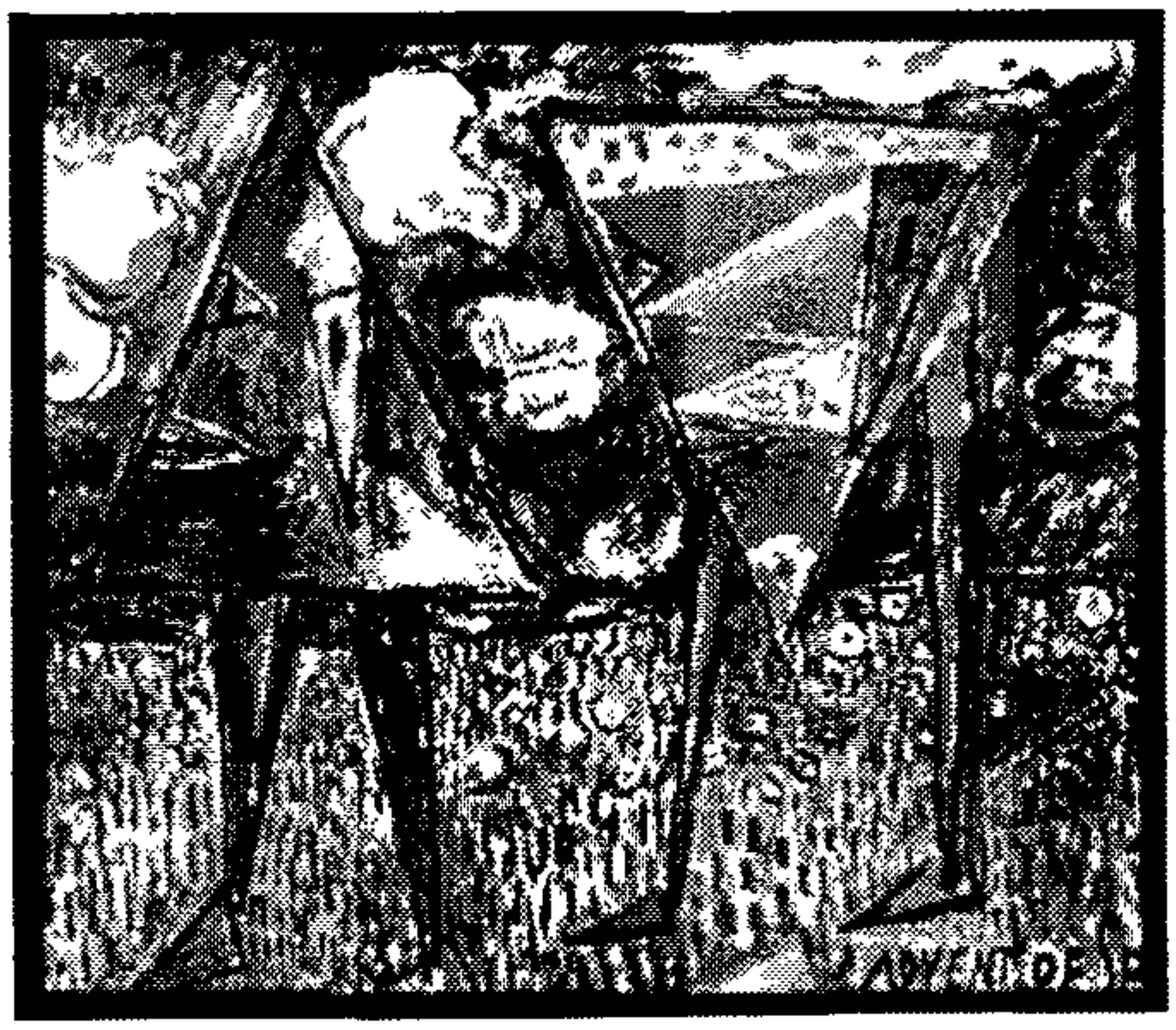
$\mathbb{A}_{▰ ABCD} = \mathbb{A}_{\blacktriangle ABD} + \mathbb{A}_{\blacktriangle BCD}$

$\rightarrow\ \mathbb{A}_{▰ ABCD} = 2\mathbb{A}$

Por el teorema del área de una región paralelográmica.

$2\mathbb{A} = (a).(h)$

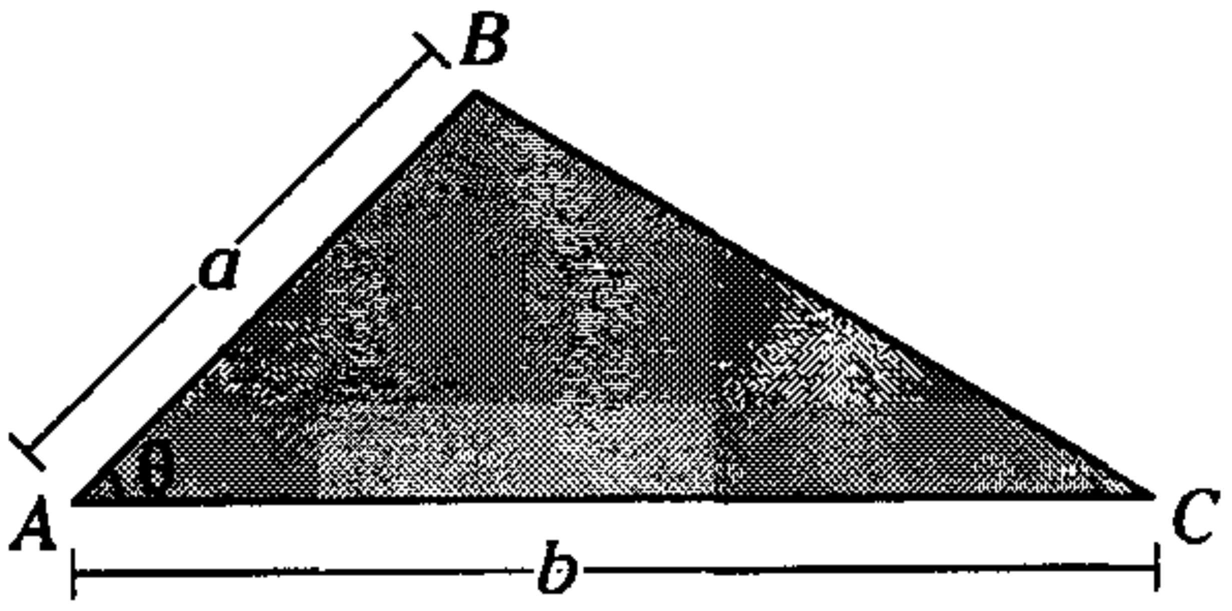
$$\therefore\ \mathbb{A} = \frac{(a).(h)}{2}$$



En el cuadro, el pintor representa a las personas como regiones triangulares y desde su óptica la disposición invertida implica mujer y varón.

Teorema

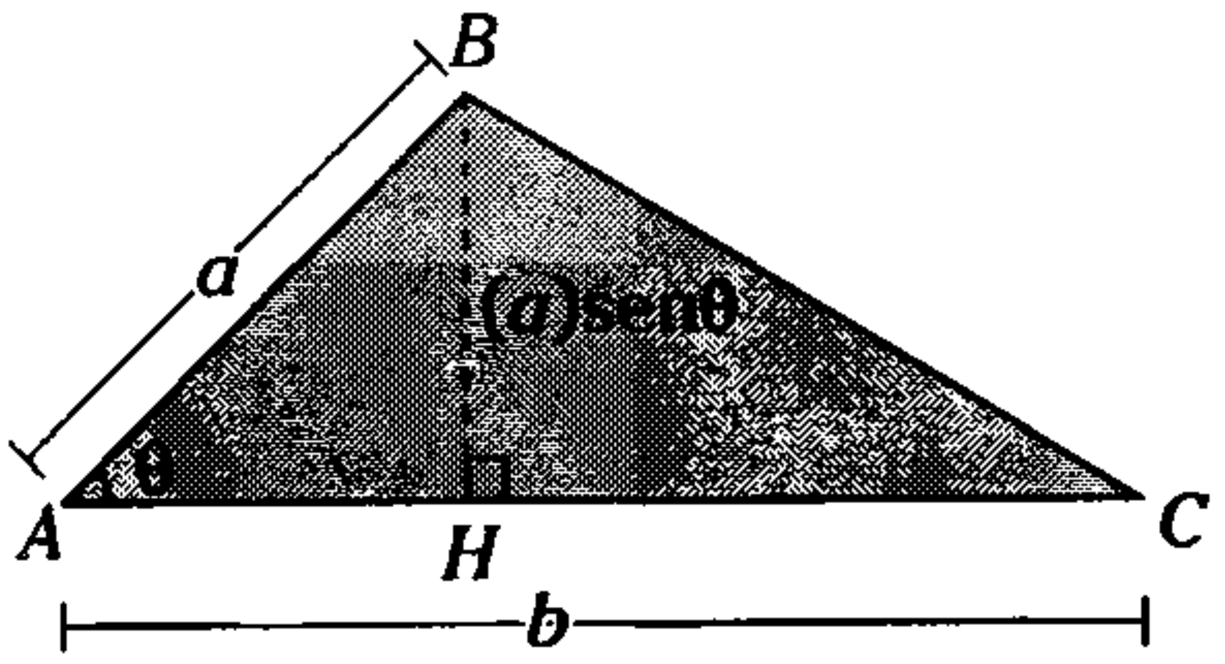
El área de una región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de dos de sus lados multiplicado por el seno de la medida del ángulo que estos determinan.



(a)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{a \cdot b}{2}\ \text{sen}\theta$$

Demostración



(b)

Figura 18.10

Se traza la altura BH, en el ⊾ABH: $BH = (a)\text{sen}\theta$

Del teorema anterior

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{(b)\,(a)(\text{sen}\theta)}{2}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{a \cdot b}{2}\ \text{sen}\theta$$

Observación

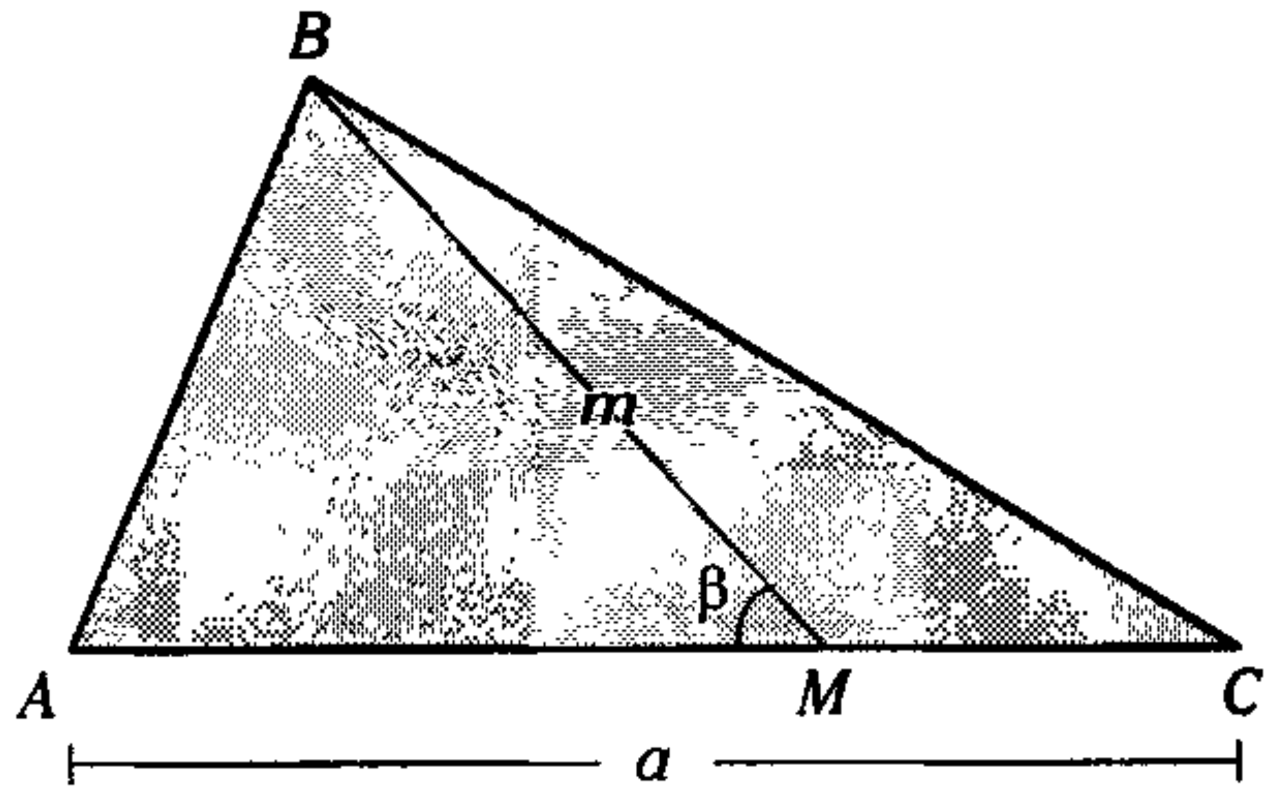


Figura 18.11

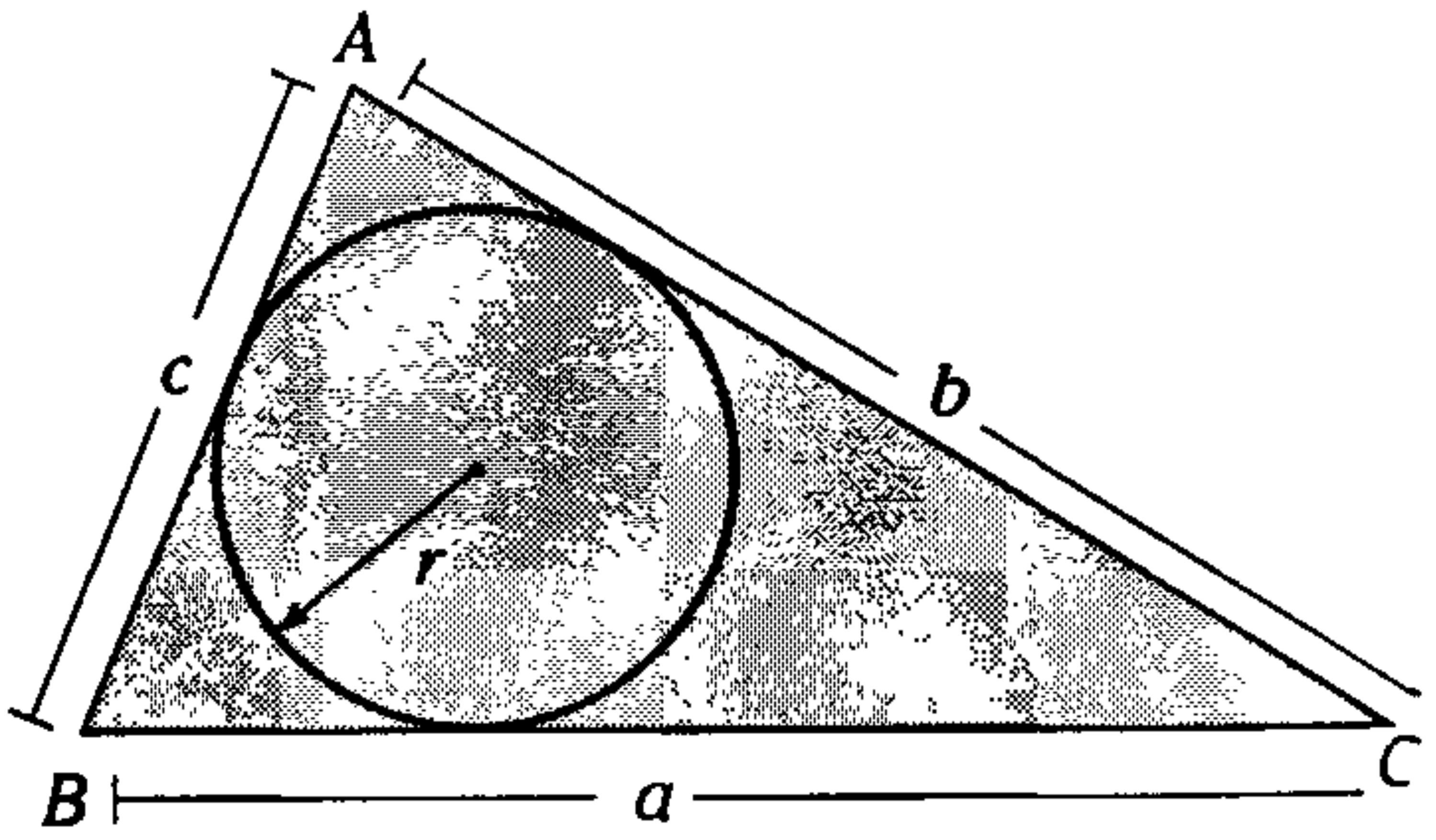
$\overline{BM}$ es una ceviana interior ($BM=m$) y β la medida del ángulo determinado por $\overline{BM}$ y $\overline{AC}$.

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{(a)(m)\,.\,\text{sen}\beta}{2}$$

OTRAS FORMAS PARA CALCULAR EL ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

Teorema

El área de una región triangular es igual al producto de la longitud del semiperímetro de la región y su inradio.



(a)

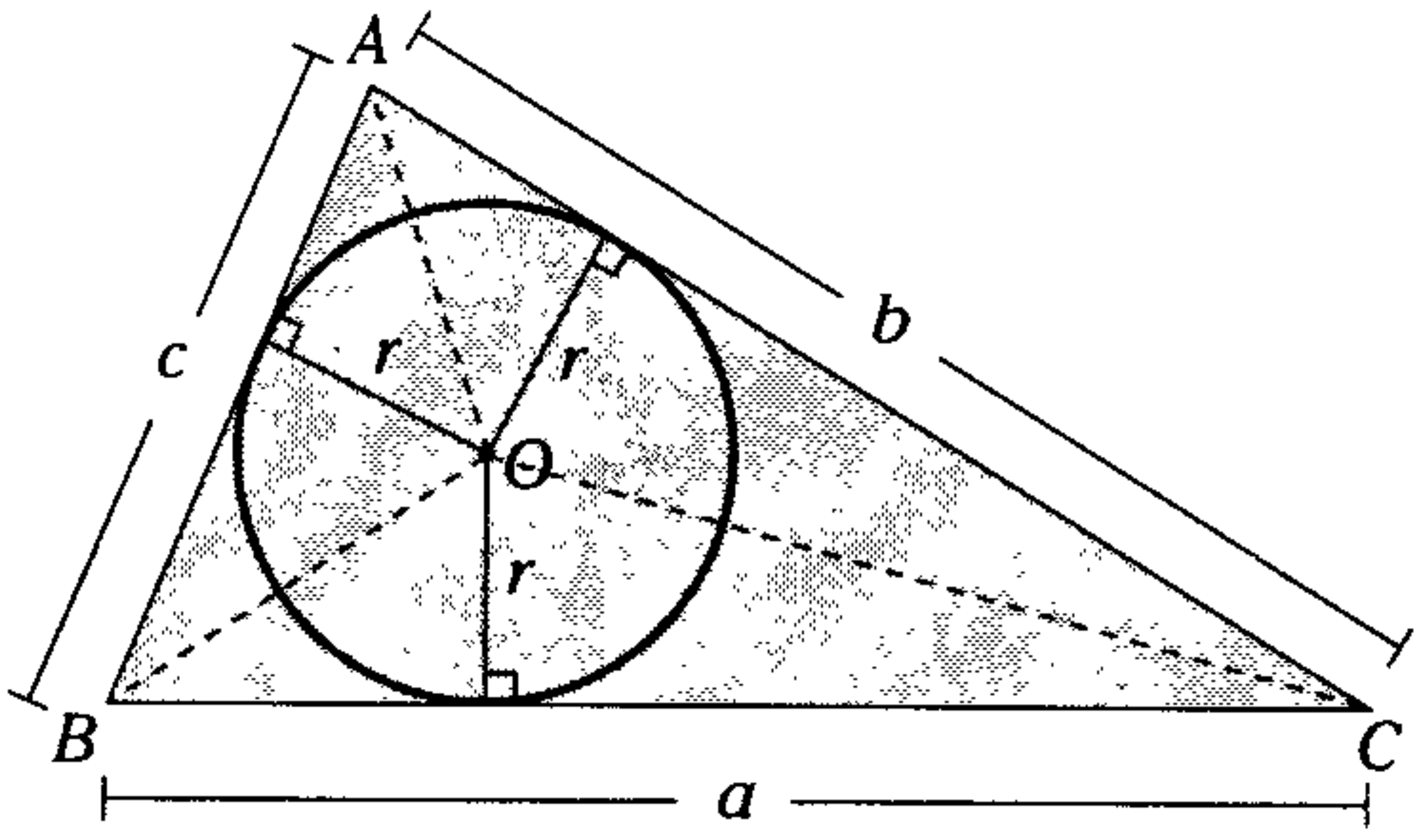
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = p\,.\,r$$

Donde

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$: longitud del semiperímetro de la región triangular ABC.

r : inradio del $\triangle ABC$.

Demostración



(b)

Figura 18.12

Sea $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \mathbb{A}$

se traza $\overline{AO}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ para obtener regiones triangulares parciales.

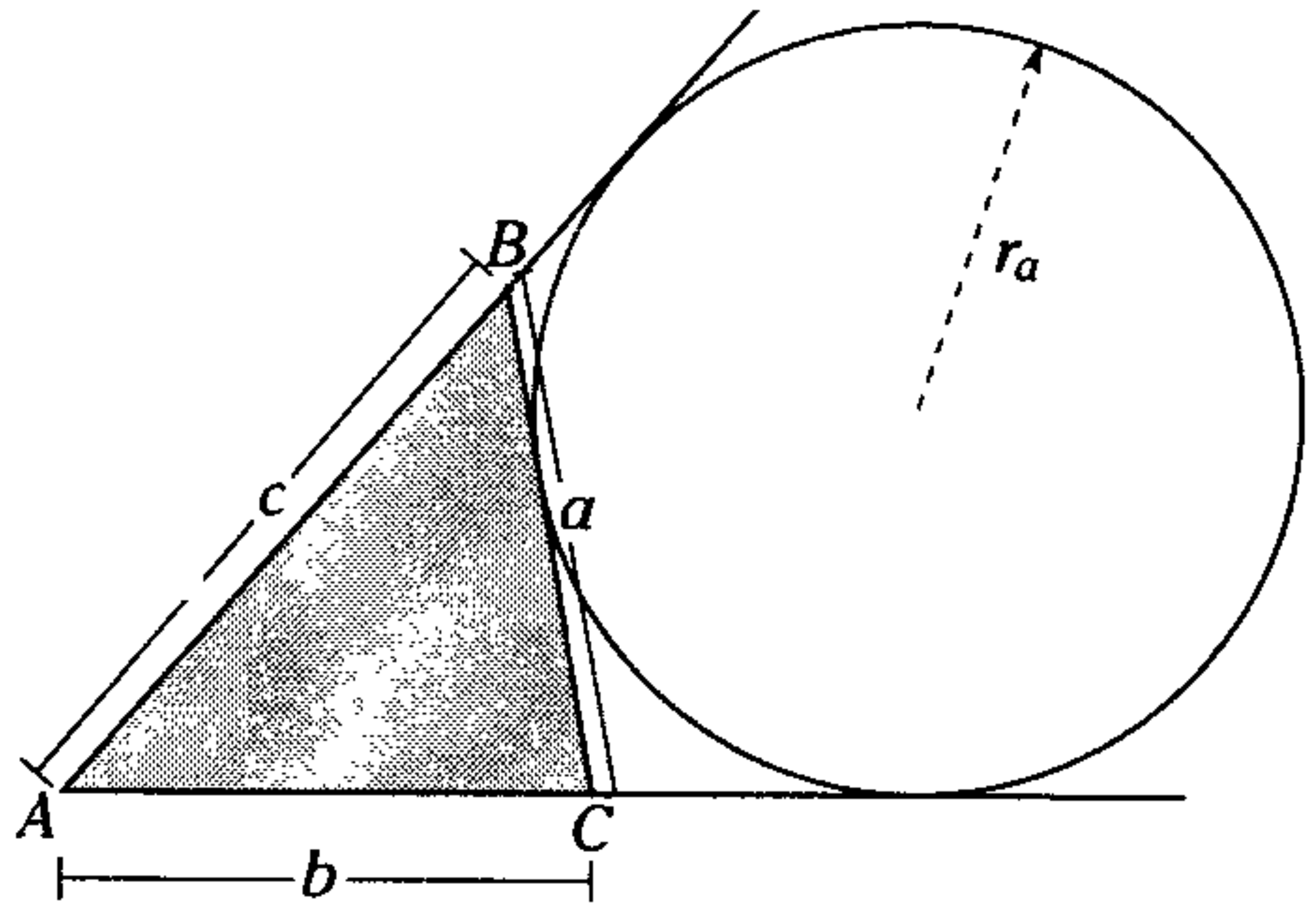
Luego $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\blacktriangle AOB} + \mathbb{A}_{\blacktriangle BOC} + \mathbb{A}_{\blacktriangle AOC}$

$$\mathbb{A} = \frac{c\,.\,r}{2} + \frac{a\,.\,r}{2} + \frac{b\,.\,r}{2} \rightarrow \mathbb{A} = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$\therefore \; \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = p\,.\,r$$

Teorema

El área de una región triangular es igual al producto de la sustracción de la longitud del semiperímetro de dicha región con la longitud de un lado, y el exradio relativo a dicho lado.



(a)

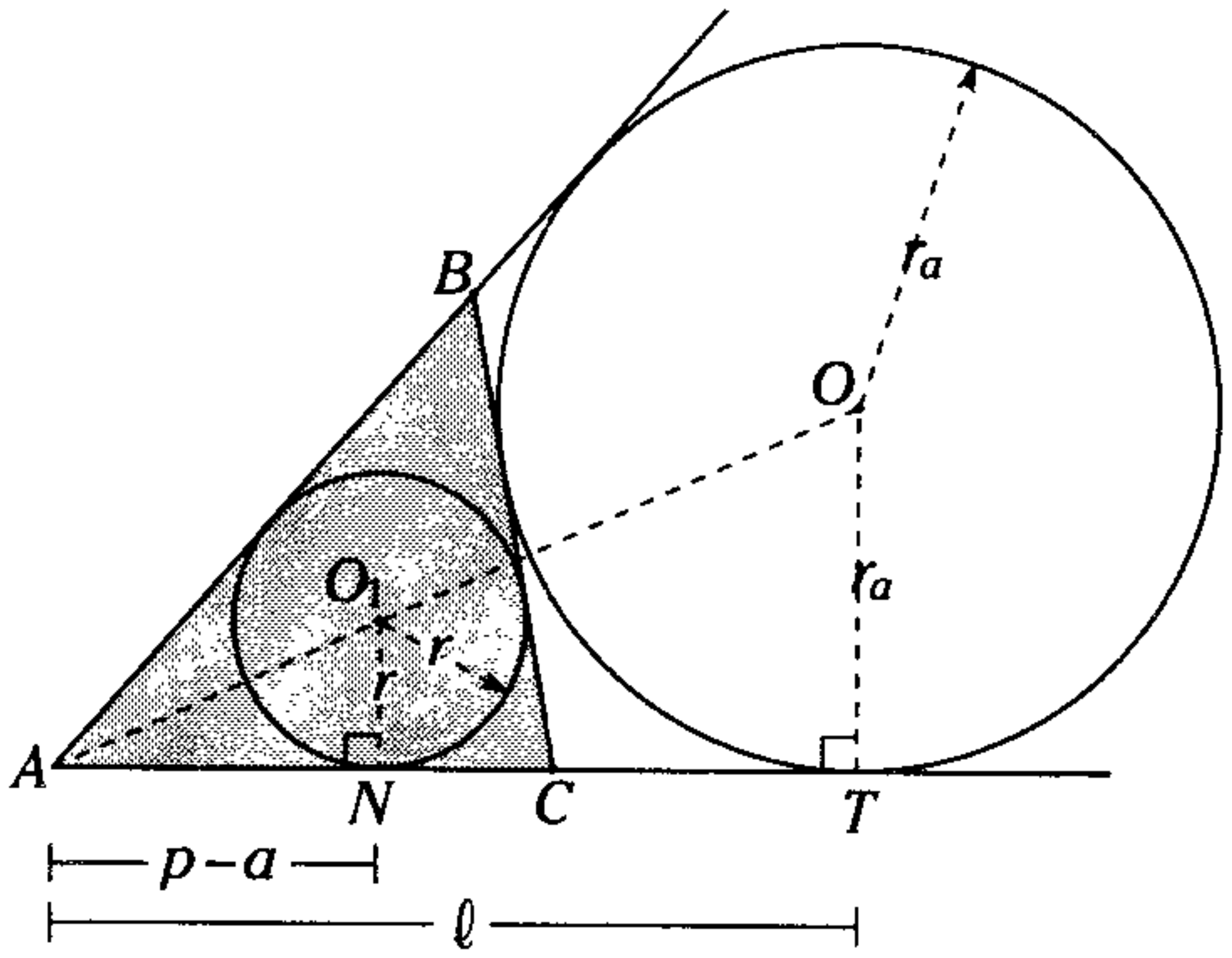
$$\boxed{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = (p-a)\,.\,r_a}$$

Donde

p : semiperímetro, de la región triangular ABC.

r_a : exradio relativo a $\overline{BC}$.

Demostración



(b)

Figura 18.13

Se traza la circunferencia inscrita al triángulo ABC

Se sabe

$AT = \ell = p$ (longitud del semiperímetro de la región ABC)

Se observa

$\triangle AO_1N \sim \triangle AOT$ (A.A.A)

Entonces

$$\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$$

$$\rightarrow \; p\,.\,r = (p-a)\,.\,(r_a) \qquad \text{(I)}$$

Del teorema anterior

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = p\,.\,r \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\therefore \; \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = (p-a)\,.\,r_a$$

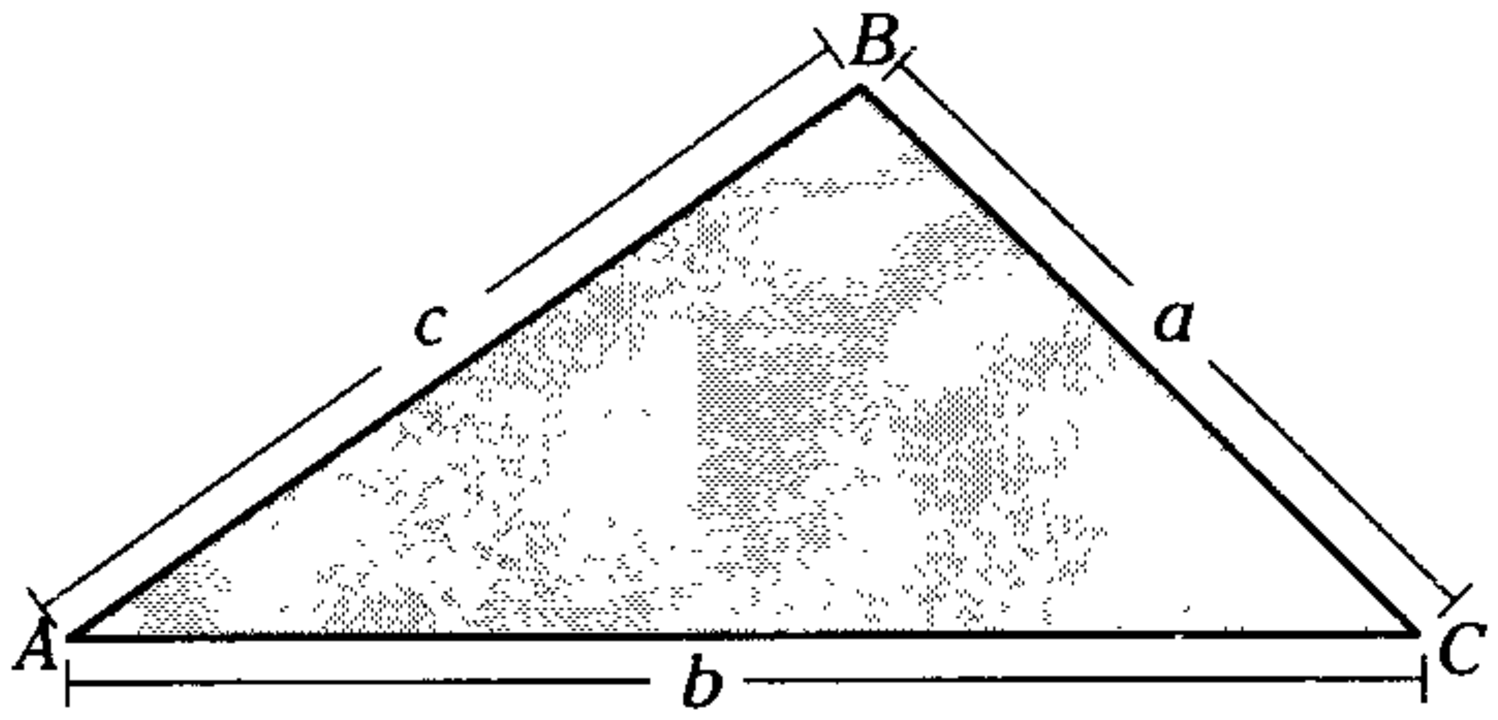
Análogamente se cumple que

$$\boxed{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = (p-b)\,.\,r_b}$$

$$\boxed{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = (p-c)\,.\,r_c}$$

TEOREMA (Fórmula de Herón)

El área de una región triangular es igual a la raíz cuadrada de los productos, de la longitud del semiperímetro, con las sustracciones de este con las longitudes de cada uno de sus lados.



(a)

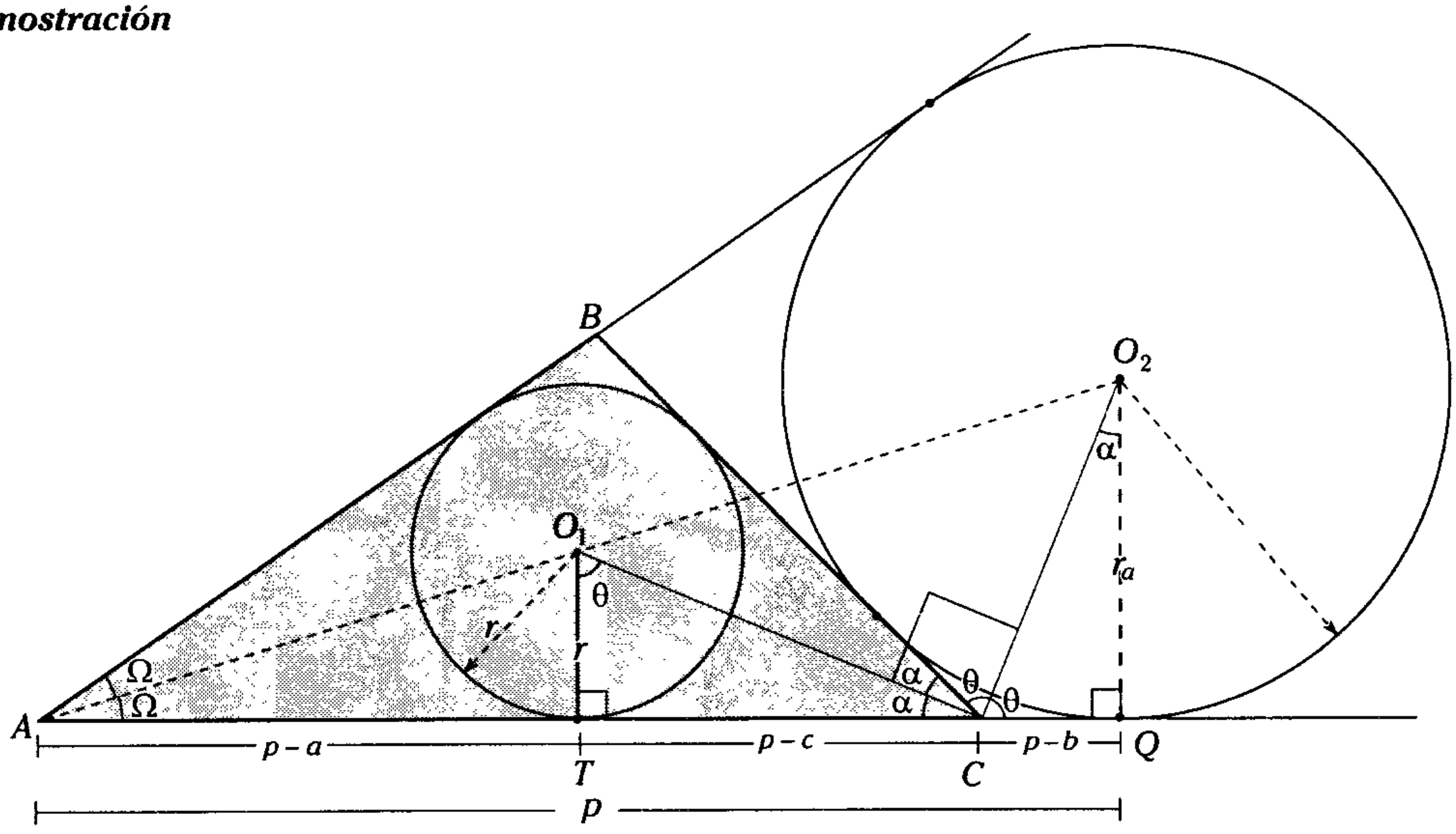
Sea

p : longitud del semiperímetro de la región triangular ABC

$\rightarrow \quad p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Demostración



(b)

Figura 18.14

De la figura 18.14(b), sabemos que $AQ = p$, siendo p la longitud del semiperímetro de la región ABC.

Al trazar la circunferencia inscrita del triángulo ABC de radio r.

Se sabe $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = p\,.\,r$ (I)

También $AT = p-a$, $TC = p-c$ y $CQ = p-b$.

Se observa ⊾$ATO_1 \sim \triangle AQO_2$ (A.A.A.)

$$\frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p} \rightarrow p.r = (p-a).r_a \qquad \text{(II)}$$

Se presenta $\triangle O_1TC \sim \triangle O_2QC$ (A.A.A)

$$\frac{r}{p-b}=\frac{p-c}{r_a} \rightarrow r.r_a=(p-b).(p-c)$$

Despejando r_a

$$r_a=\frac{(p-b)(p-c)}{r} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (III) en la ecuación (II)

$$p.r=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r}$$

Despejando r y multiplicando por p

$$p^2.r^2=(p-a)(p-b)(p-c).p \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A}^2_{\blacktriangle ABC}=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Otra manera de demostrar el teorema anterior

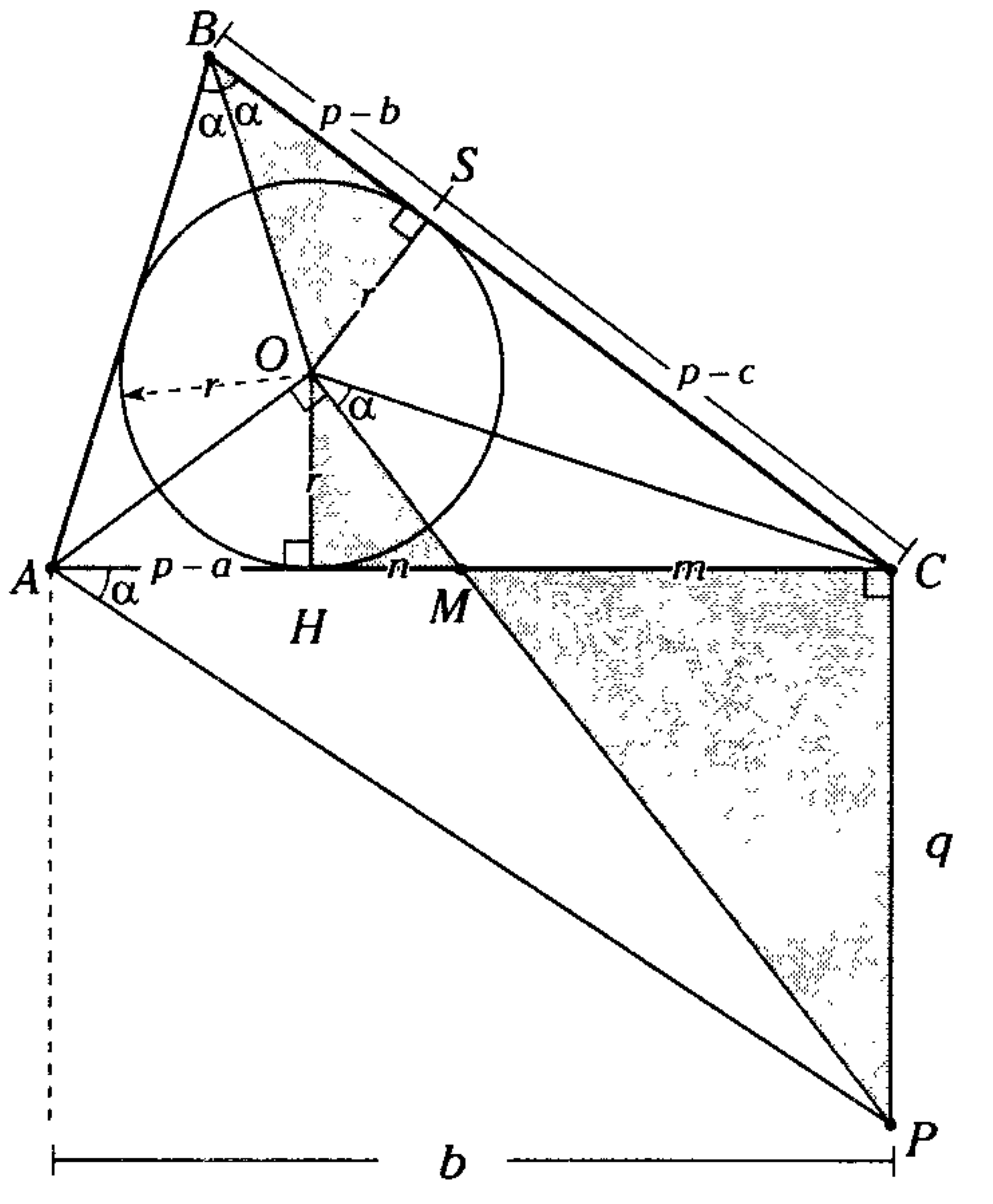


Figura 18.15

Por C trazamos $\overline{CP}\perp\overline{AC}$, tal que m∢$AOP$= 90°

En el $\triangle ABC$

$$m\sphericalangle AOC=90°+\frac{m\sphericalangle ABC}{2}=90°+\alpha$$

$$\therefore\ m\sphericalangle POC=\alpha$$

Como $AOCP$ es un cuadrilátero inscriptible

$$m\sphericalangle CAP=m\sphericalangle COP=\alpha$$

◺OBS ~ ◺PAC (A.A.A.)

$$\frac{r}{q}=\frac{p-b}{b} \qquad \text{(I)}$$

◺HOM ~ ◺CPM (A.A.A.)

$$\frac{r}{q}=\frac{n}{m} \qquad \text{(II)}$$

En el ◺AOM: relaciones métricas

$$r^2=(p-a).n \qquad \text{(III)}$$

En la circunferencia $CH = CS$

$$\rightarrow m+n=p-c \qquad \text{(IV)}$$

De (I) y (II)

$$\frac{r}{q}=\frac{p-b}{b}=\frac{n}{m}$$

Al aplicar el teorema de proporciones, se tiene

$$\frac{p-b}{p}=\frac{n}{m+n} \qquad \text{(V)}$$

Reemplazando (IV) en (V)

$$\therefore\ \frac{(p-b)}{p}=\frac{n}{(p-c)}$$

Luego

$$\frac{p}{p}\cdot\frac{(p-b)}{p}=\frac{n}{(p-c)}\cdot\frac{(p-a)}{(p-a)}$$

$$\rightarrow p.(p-a)(p-b)(p-c)=p^2.(n.(p-a))$$

De la expresión (III)

$$p.(p-a)(p-b)(p-c)=p^2.r^2$$

Como $p.r=\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}$

$$\rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=\sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)}$$

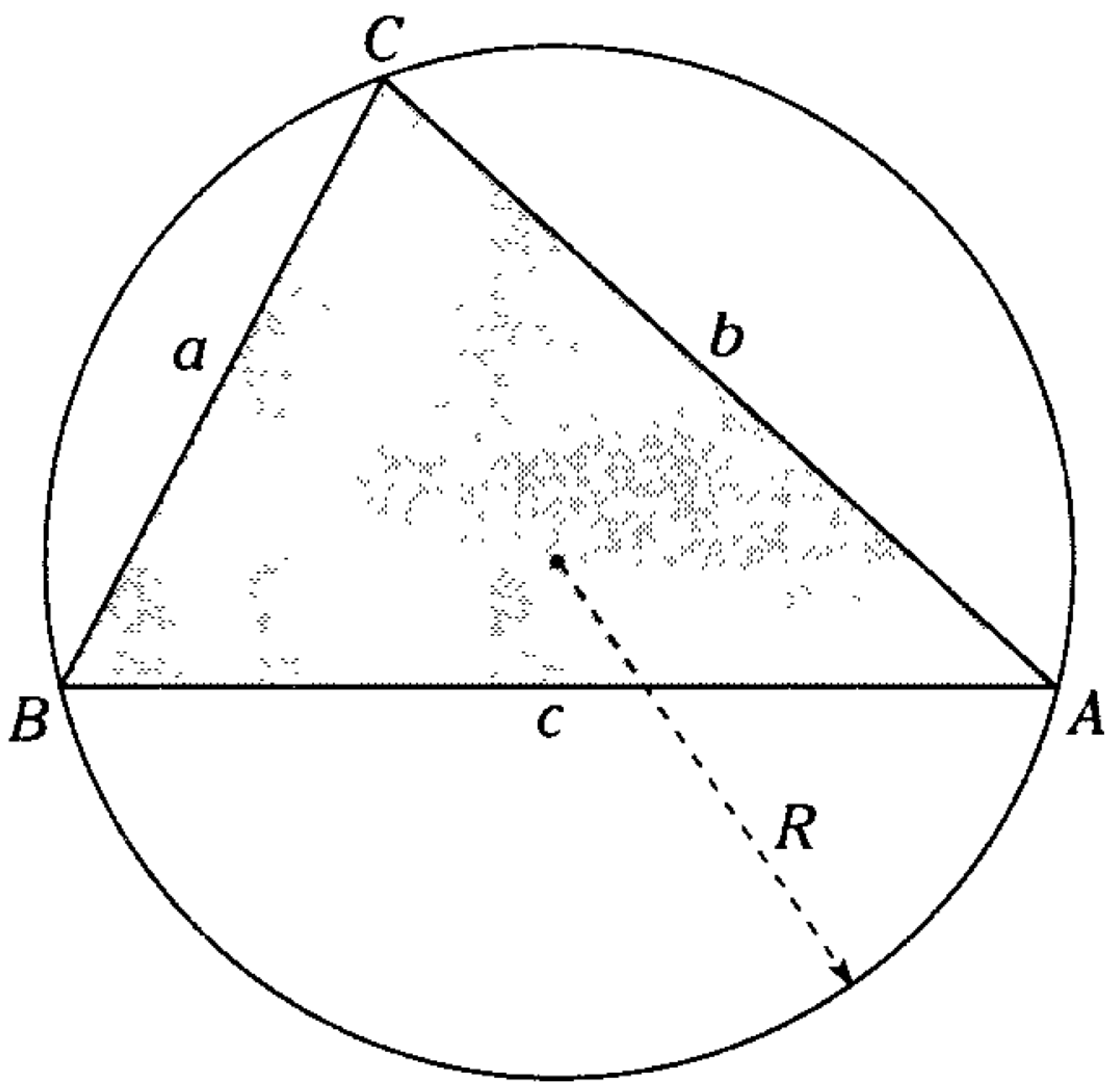
Nota

Triángulo heroniano: se dice que un triángulo es heroniano si las longitudes de sus tres lados y su área son números enteros.

Así, tenemos los siguientes triángulos heronianos, cuyas longitudes de sus lados son: (3; 4 y 5), (13; 14 y 15), (4; 13 y 15), ... pues sus áreas son: 6; 84; 24; ...

Teorema

El área de una región triangular es igual al producto de las longitudes de los tres lados entre cuatro veces su circunradio.



(a)

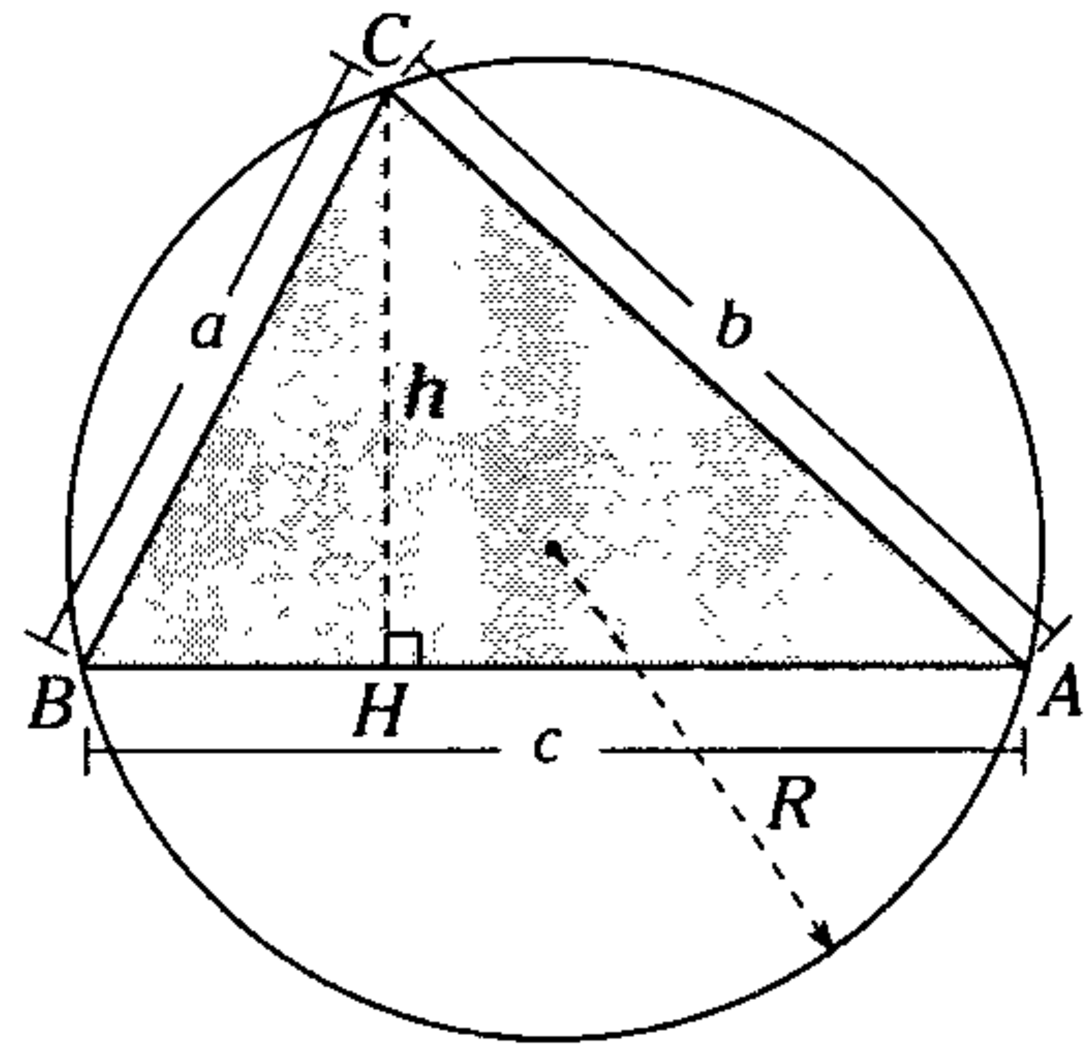
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=\frac{a.b.c}{4R}$$

Donde

a, b, c : son las longitudes de los lados del $\triangle ABC$.

R : circunradio del $\triangle ABC$

Demostración



(b)

Figura 18.16

Se traza la altura BH

$$\rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=\frac{c.h}{2} \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle ABC$, del teorema del producto de dos lados

$$a.b=2R.h$$

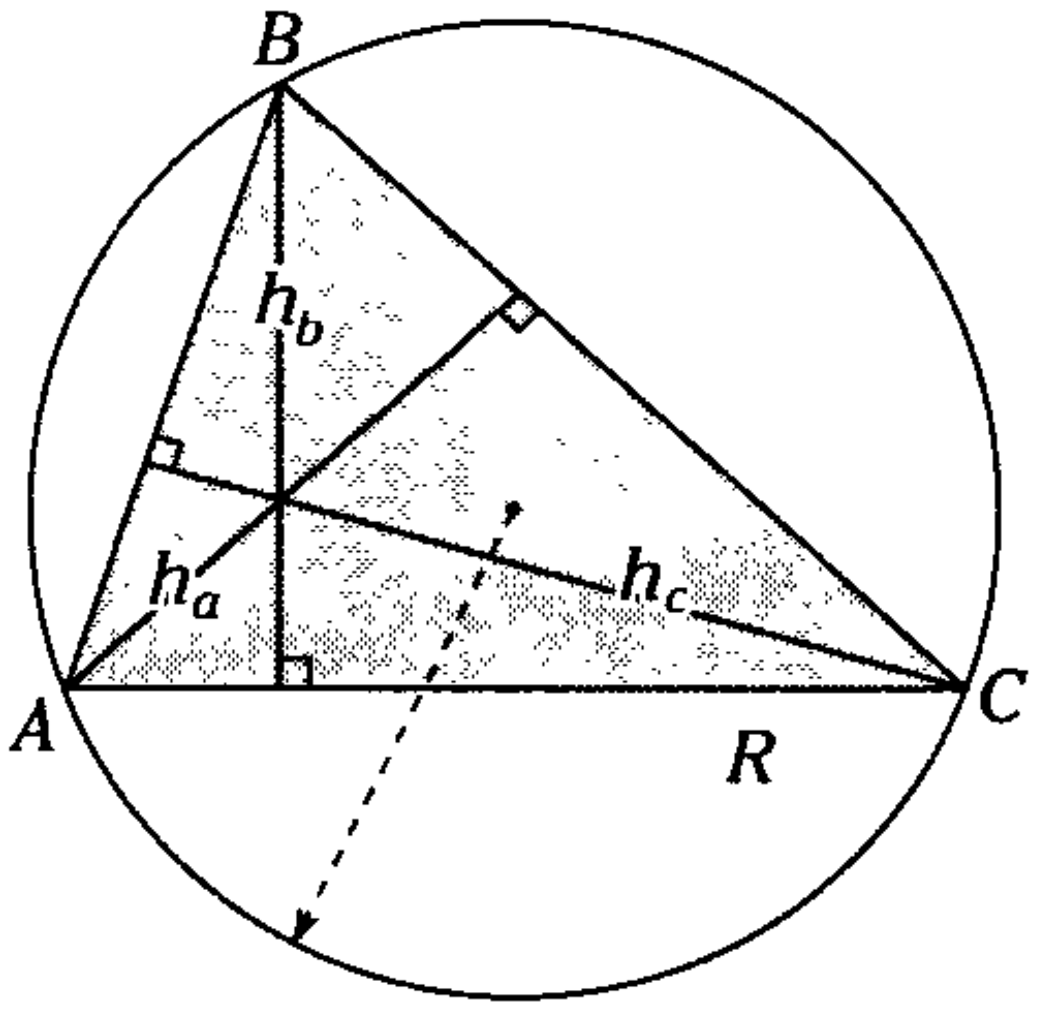
$$\rightarrow h=\frac{a.b}{2R} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

$$\therefore \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=\frac{a.b.c}{4R}$$

Teorema

El área de una región triangular es igual a la raíz cuadrada del semiproducto del circunradio con las longitudes de las alturas relativas a cada lado de dicho triángulo.



(a)

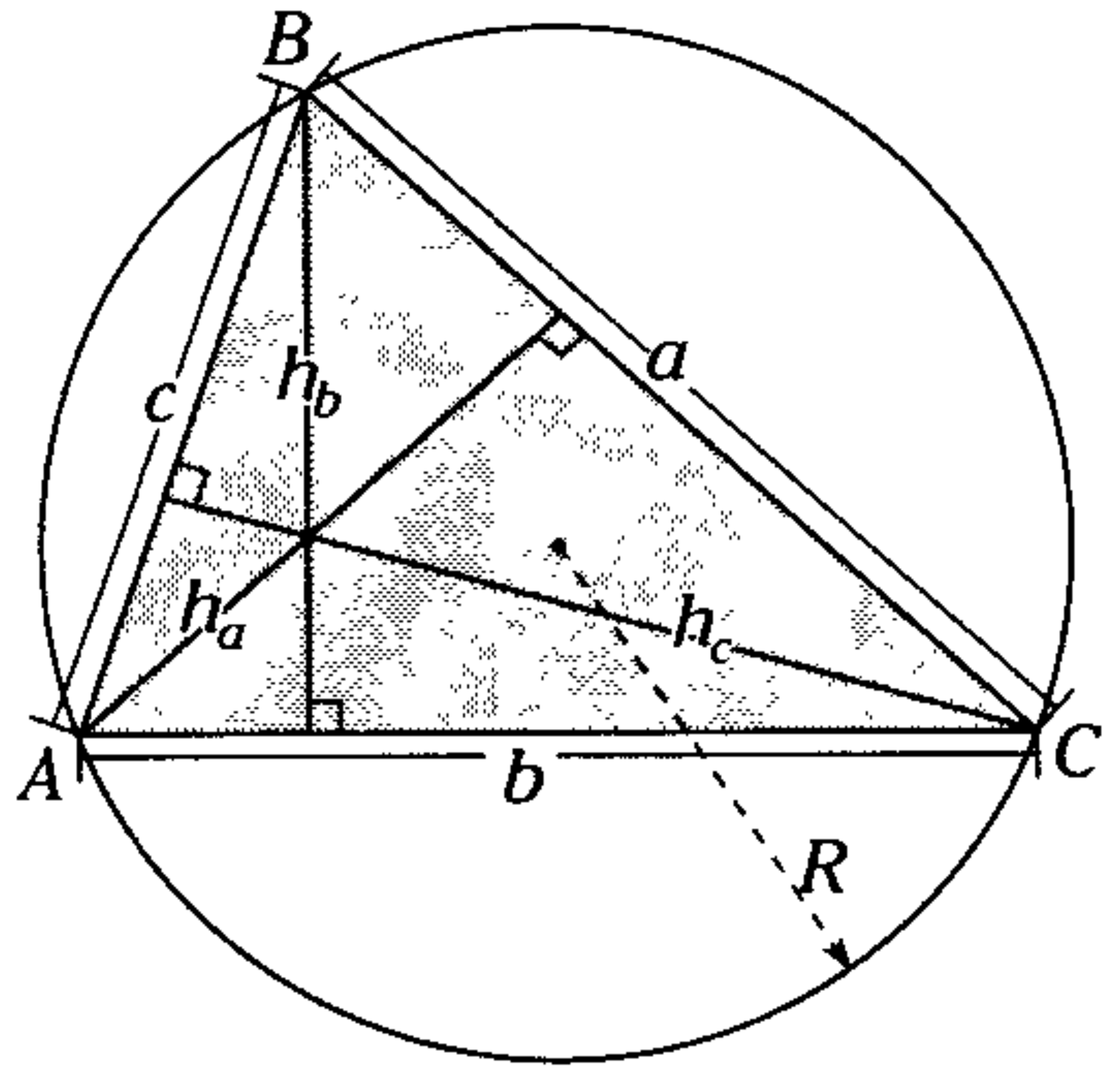
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=\sqrt{\frac{R}{2}.h_a.h_b.h_c}$$

Donde

h_a, h_b y h_c : son las longitudes de las alturas relativas a cada lado del $\triangle ABC$.

R : circunradio del $\triangle ABC$.

Demostración



(b)

Figura 18.17

Sea $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \mathbb{A}$
se sabe

$$\mathbb{A} = \frac{a.h_a}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A} = \frac{b.h_b}{2} \qquad \text{(II)}$$

$$\mathbb{A} = \frac{c.h_c}{2} \qquad \text{(III)}$$

Las relaciones (I), (II) y (III) se multiplican, para obtener

$$\mathbb{A}^3 = \frac{a.b.c}{4} \cdot \frac{h_a.h_b.h_c}{2}$$

Luego

$$\mathbb{A}^3 = \frac{a.b.c}{4R} . \frac{R.h_a.h_b.h_c}{2}$$

Se sabe

$$\mathbb{A} = \frac{a.b.c}{4R} \rightarrow \mathbb{A}^3 = \mathbb{A} \cdot \frac{R.h_a.h_b.h_c}{2}$$

$$\mathbb{A}^2 = \frac{R.h_a.h_b.h_c}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbb{A} = \sqrt{\frac{1}{2} R.h_a.h_b.h_c}$$

Teorema

El área de una región triangular es igual a la raíz cuadrada del producto de los exradios relativos a los tres lados del triángulo con su inradio.

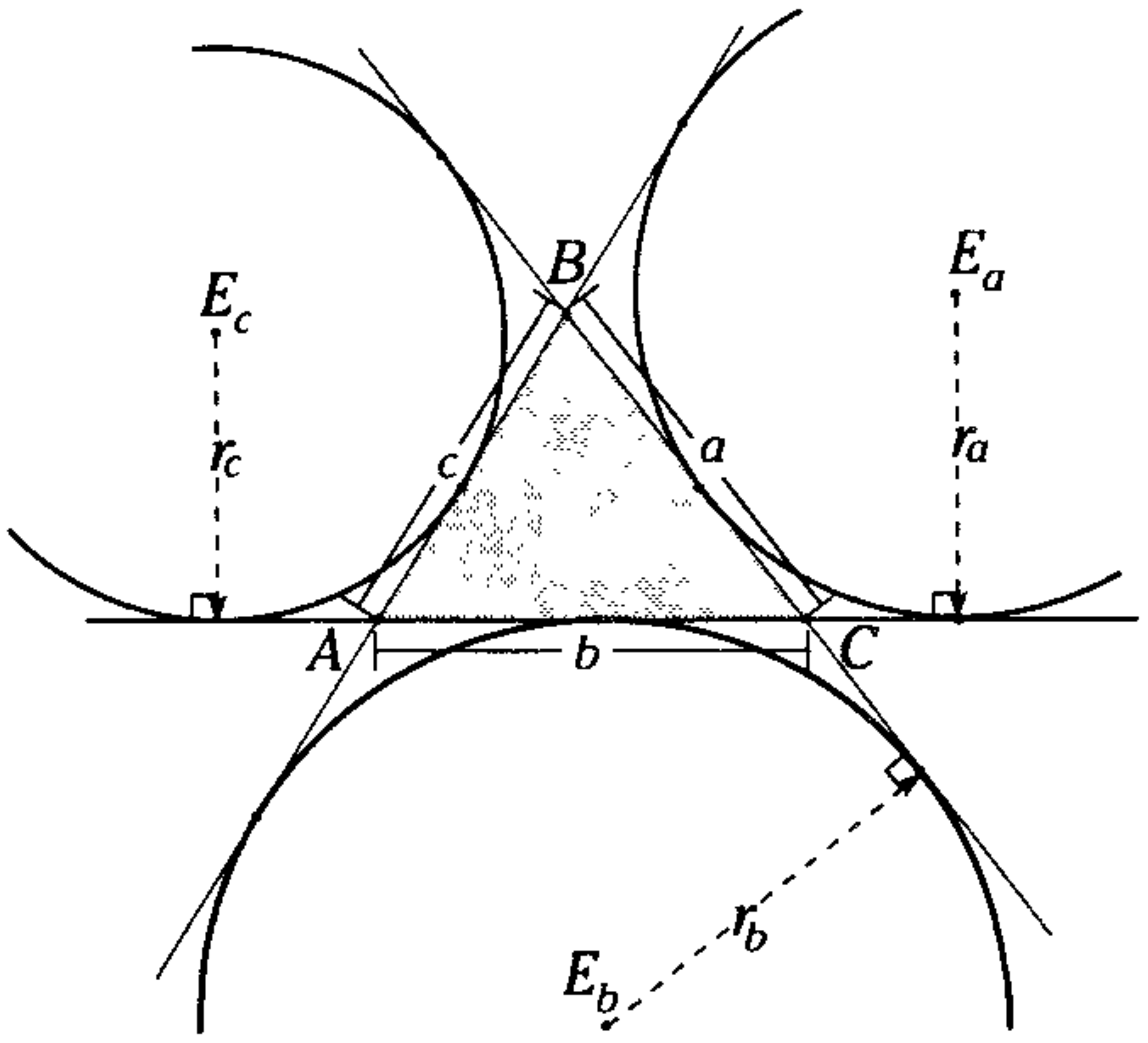


Figura 18.17

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \sqrt{r_a . r_b . r_c . r}$$

Donde
r_a, r_b y r_c : son exradios del $\triangle ABC$
r : inradio del $\triangle ABC$

Demostración

Sea $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \mathbb{A}$
De los teoremas anteriores

$$\mathbb{A} = (p-a)\, r_a \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A} = (p-b)\, r_b \qquad \text{(II)}$$

$$\mathbb{A} = (p-c)\, r_c \qquad \text{(III)}$$

Las relaciones (I), (II) y (III) se multiplican, así

$$\mathbb{A}^3 = (p-a)\,(p-b)\,(p-c)\, r_a . r_b . r_c$$

Multiplicando por $\left(\frac{p}{p}\right)$ y acomodando

$$\mathbb{A}^3 = \underbrace{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\ \frac{r_a . r_b . r_c}{p}$$

$$\mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^2 \cdot \frac{r_a . r_b . r_c}{p}$$

Simplificando $\mathbb{A} = \dfrac{r_a . r_b . r_c}{p}$ (IV)

Se sabe que $\mathbb{A} = p . r \rightarrow \dfrac{1}{p} = \dfrac{r}{\mathbb{A}}$ (V)

Reemplazando en (IV) y despejando

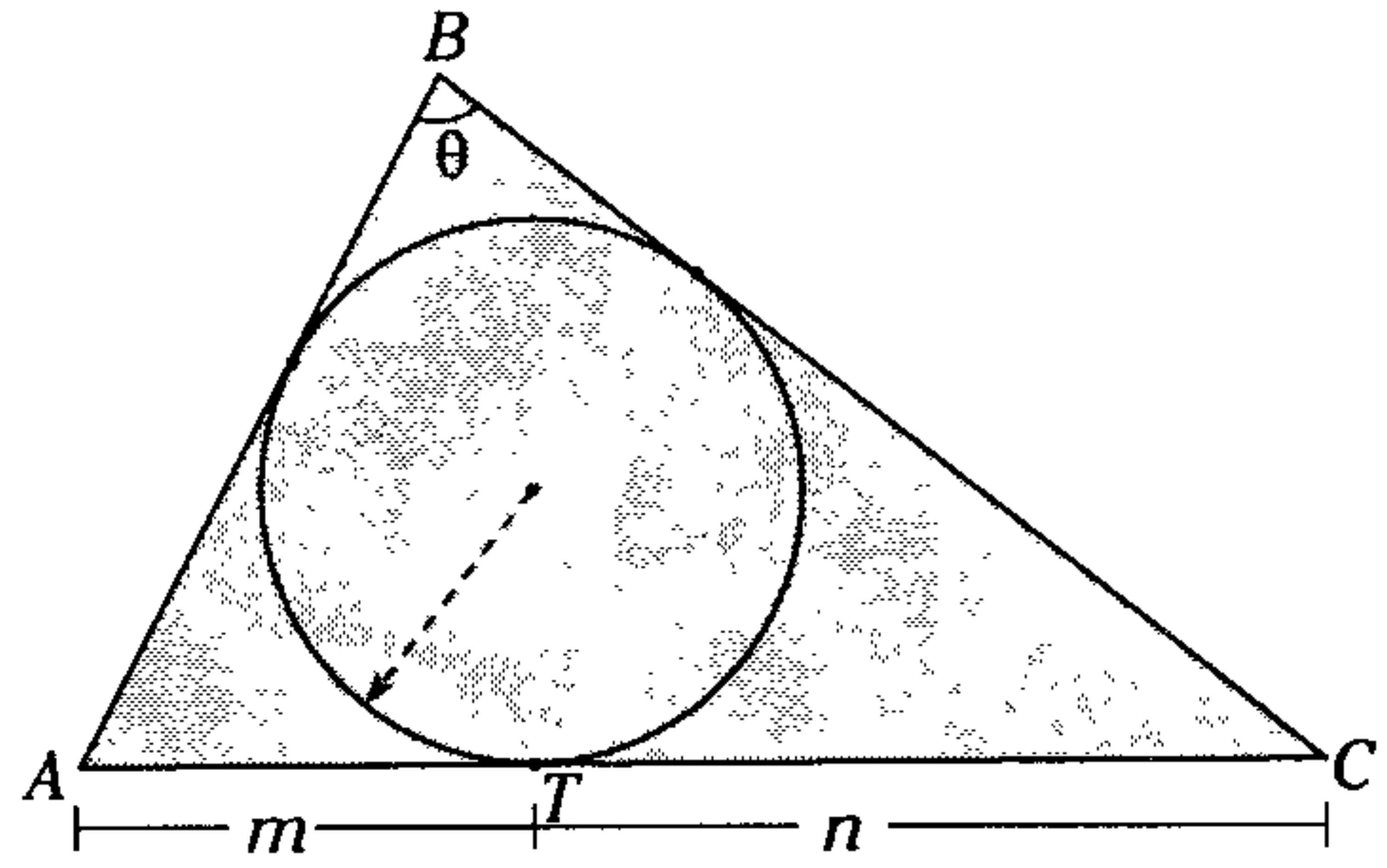
$$\mathbb{A}^2 = r_a . r_b . r_c . r$$

$$\therefore \quad \mathbb{A} = \sqrt{r_a . r_b . r_c . r}$$

TEOREMAS ADICIONALES

Teorema

El área de una región triangular circunscrita a una circunferencia es igual al producto de la cotangente de la mitad de la medida de un ángulo interior del triángulo y las longitudes de los segmentos parciales determinados por dicha circunferencia en su lado relativo.



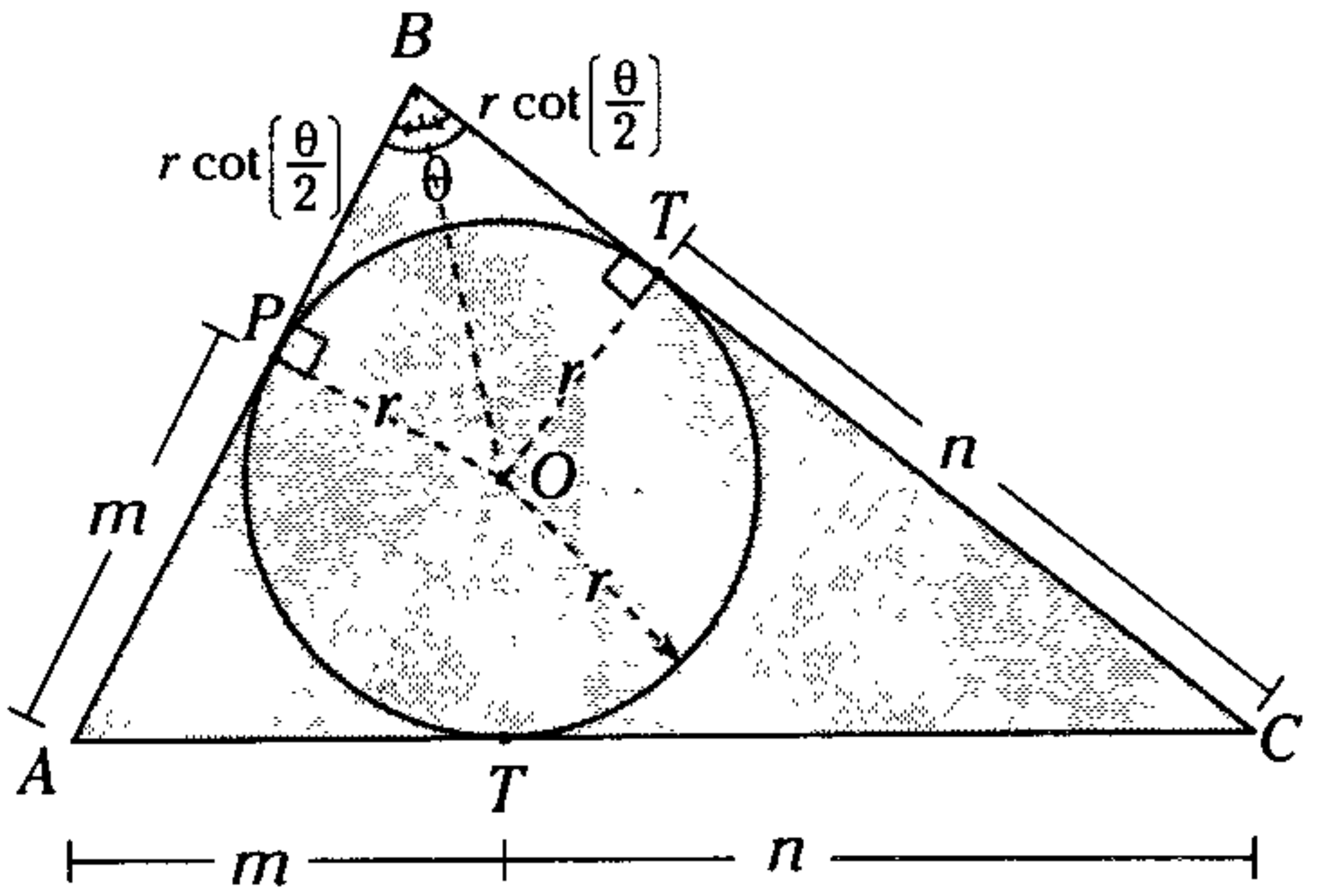
(*a*)

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC}=m.n.\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Donde

θ : m∢*ABC*

Demostración



(*b*)

Figura 18.19

Sabemos

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=p\,.\,r \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=\sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AB)} \qquad \text{(II)}$$

Según la figura 18.19(b)

$$p=m+n+r\,.\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Del teorema de la circunferencia inscrita

$$r\,.\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)=p-AC$$

$$m=p-BC$$

$$n=p-AB$$

Reemplazando en (II) y ordenando convenientemente tenemos

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=\sqrt{p\left(r.\cot\frac{\theta}{2}\right)(m)(n)}$$

Elevando al cuadrado

$$\mathbb{A}^2_{\blacktriangle ABC}=p\,.\,r\,.\,m.\,n.\,\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{(III)}$$

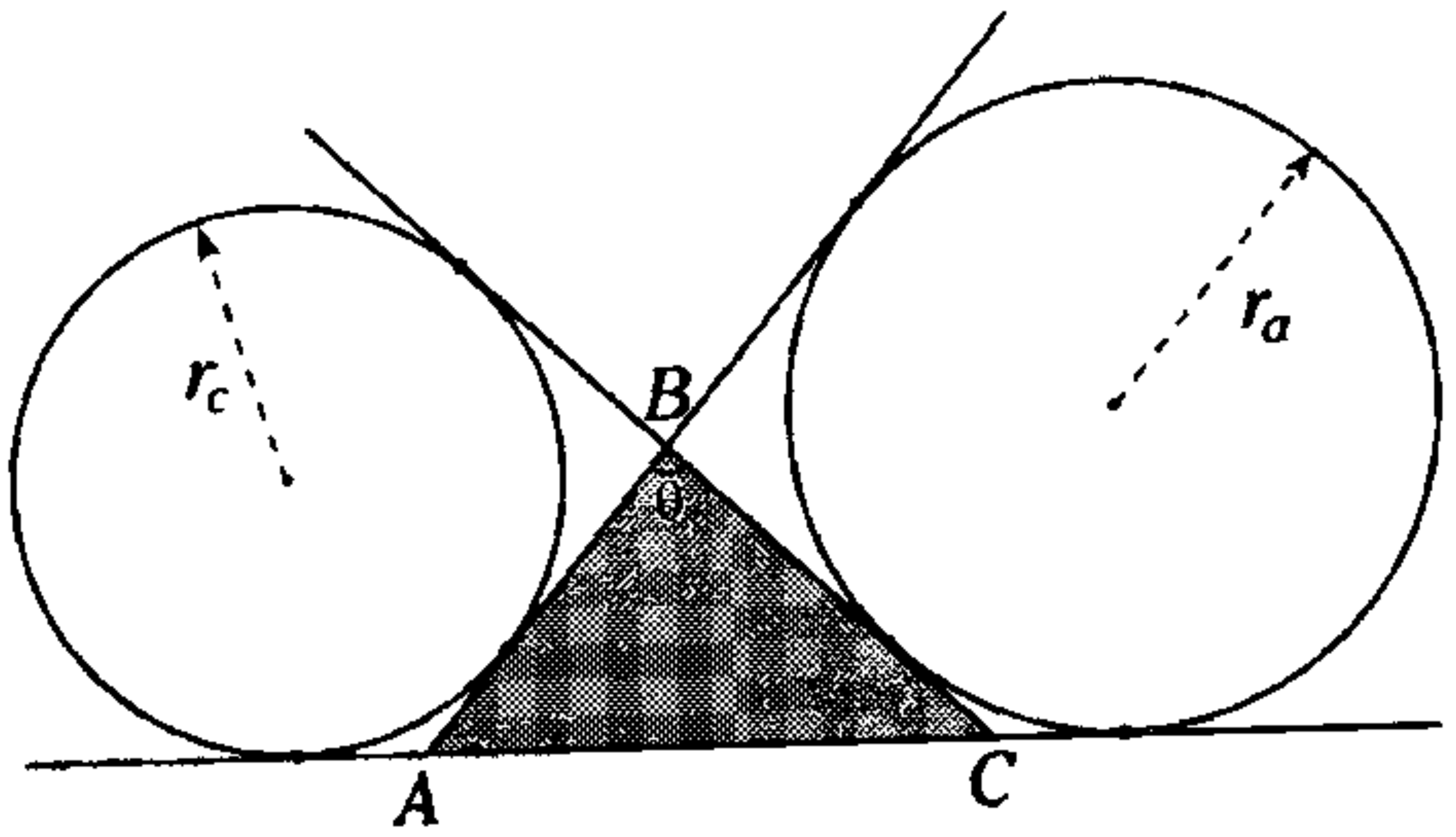
Reemplazando (I) en (III)

$$\mathbb{A}^2_{\blacktriangle ABC}=\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}\,.\,m\,.\,n\,.\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Simplificando

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=m\,.\,n\,.\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Teorema
El área de una región triangular es igual al producto de dos de sus exradios y la tangente de la mitad de la medida del ángulo determinado, por los lados relativos a dichos exradios.

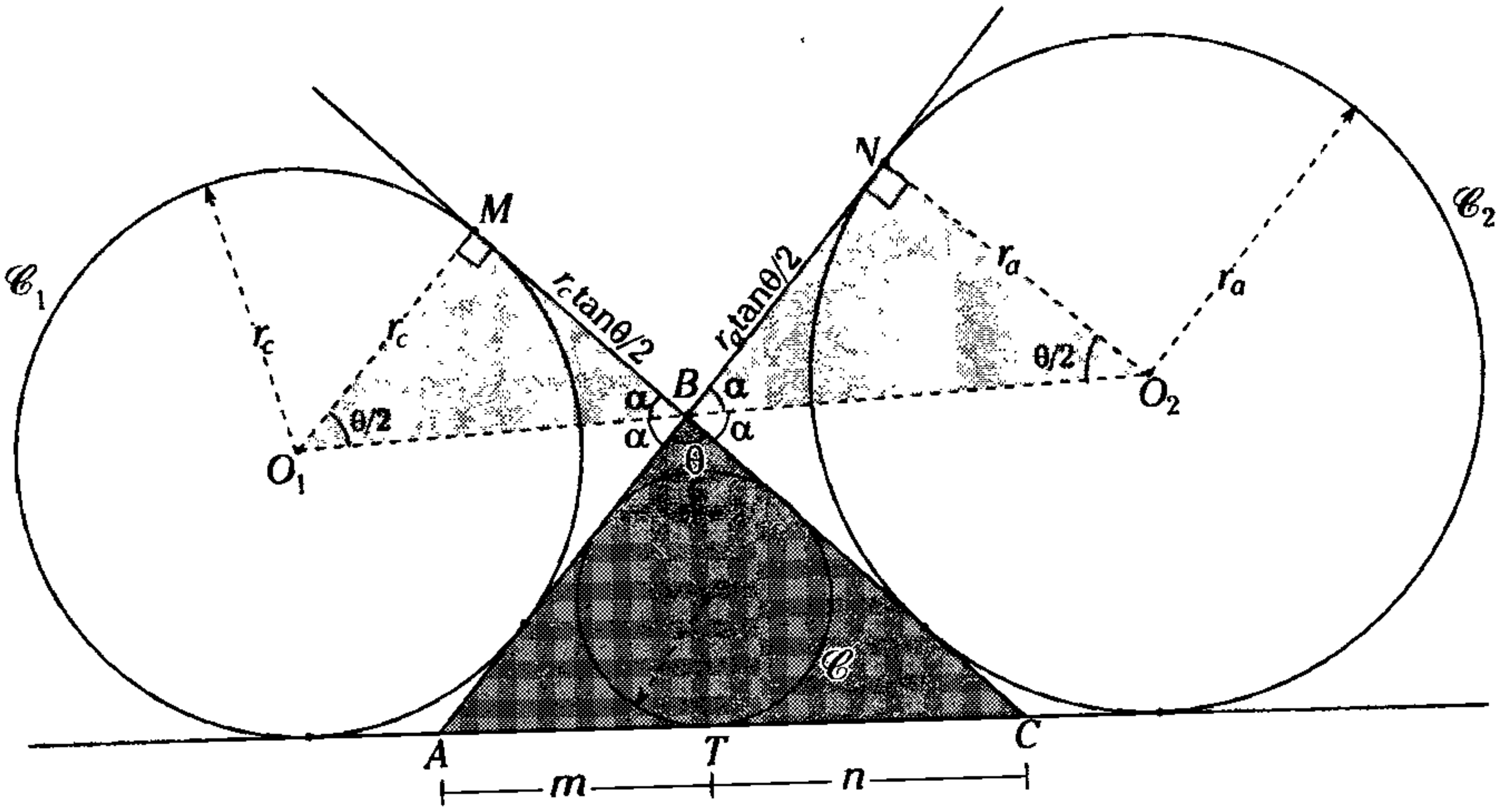


(a)

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = r_a \cdot r_c \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Donde
θ : medida del ángulo interior de B

Demostración



(b)

Figura 18.20

Sabemos

$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = m \cdot n \cdot \cot(\theta/2)$ (I)

Del teorema de dos circunferencias exteriores

En $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}$:

$MB = TC = n$

En $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}$:

$NB = TA = m$

Luego, en el ⊾O_1MB y ⊾O_2NB, respectivamente.

$n = r_c \,.\, \tan(\theta/2)$ (II)

$m = r_a \,.\, \tan(\theta/2)$ (III)

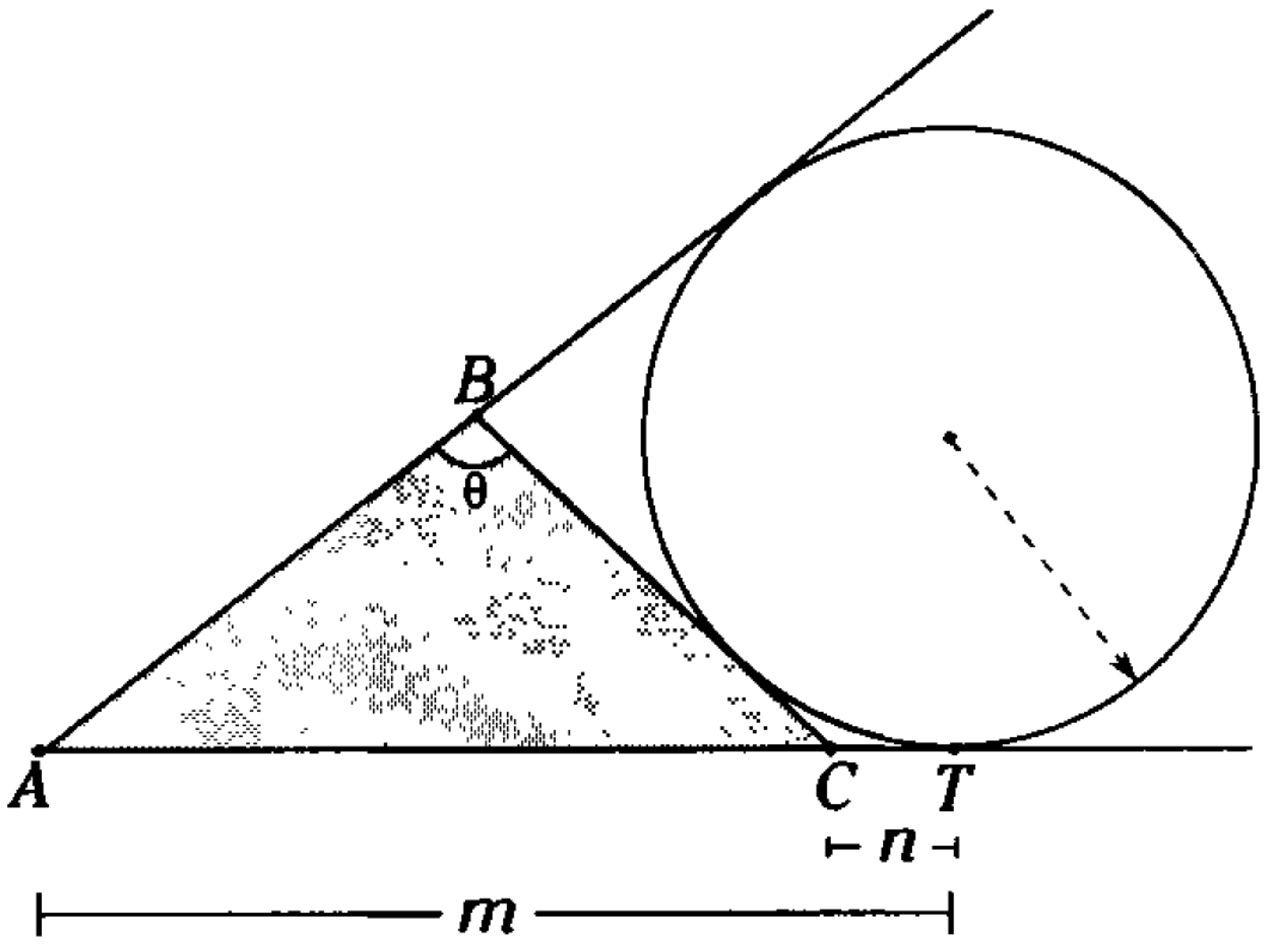
Reemplazando (II) y (III) en (I)

$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = (r_a .\, \tan\theta/2)\,(r_c \,.\, \tan\theta/2)(\cot\theta/2)$

$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = r_a \,.\, r_c \,.\, \tan(\theta/2)$

Teorema

El área de una región triangular exinscrito a una circunferencia es igual al producto de las longitudes de los segmentos parciales determinados por el punto de tangencia de dicha circunferencia, en uno de los lados adyacentes a él, y la tangente de la mitad de la medida del ángulo que se opone a dicho lado adyacente.



(*a*)

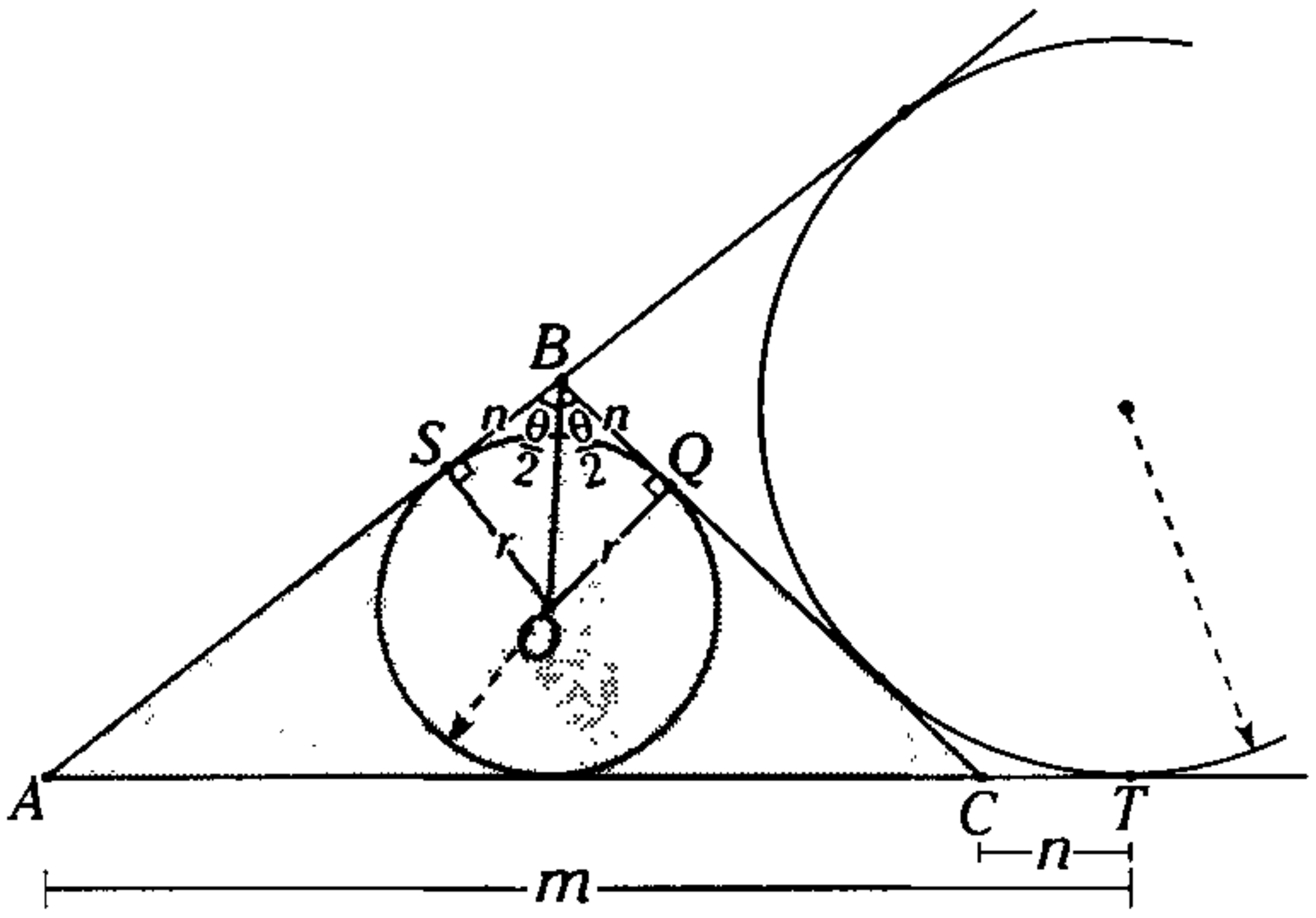
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = m.n.\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Donde

θ : medida de un ángulo interior del △ABC.

Demostración

Trazamos la circunferencia inscrita en el △ABC.



(*b*)

Figura 18.21

Sabemos que:

$m = p$: longitud del semiperímetro de la región triangular *ABC*

También

$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = m \,.\, r$ (I)

Del teorema de circunferencias exteriores

$BQ = CT = n$

Se observa en el ⊾BSO:

$r = n \,.\, \tan(\theta/2)$ (II)

Reemplazando (II) en (I)

$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = m \,.\, n \,.\, \tan(\theta/2)$

Nota

Si θ = 90°

$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = m \,.\, n$

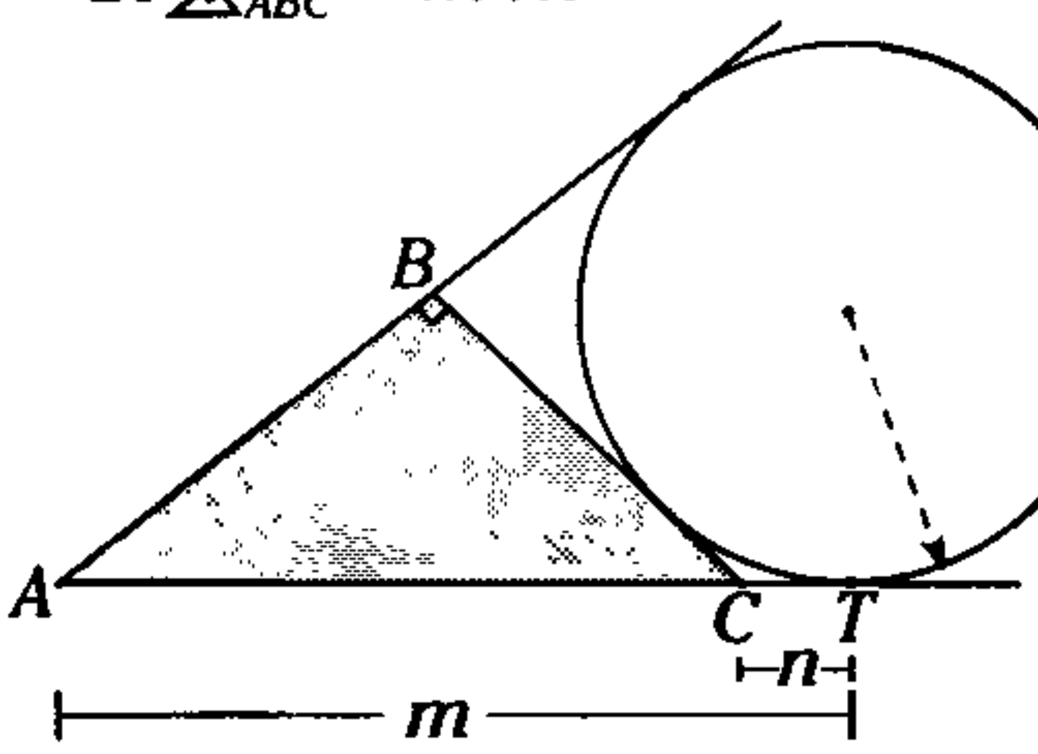
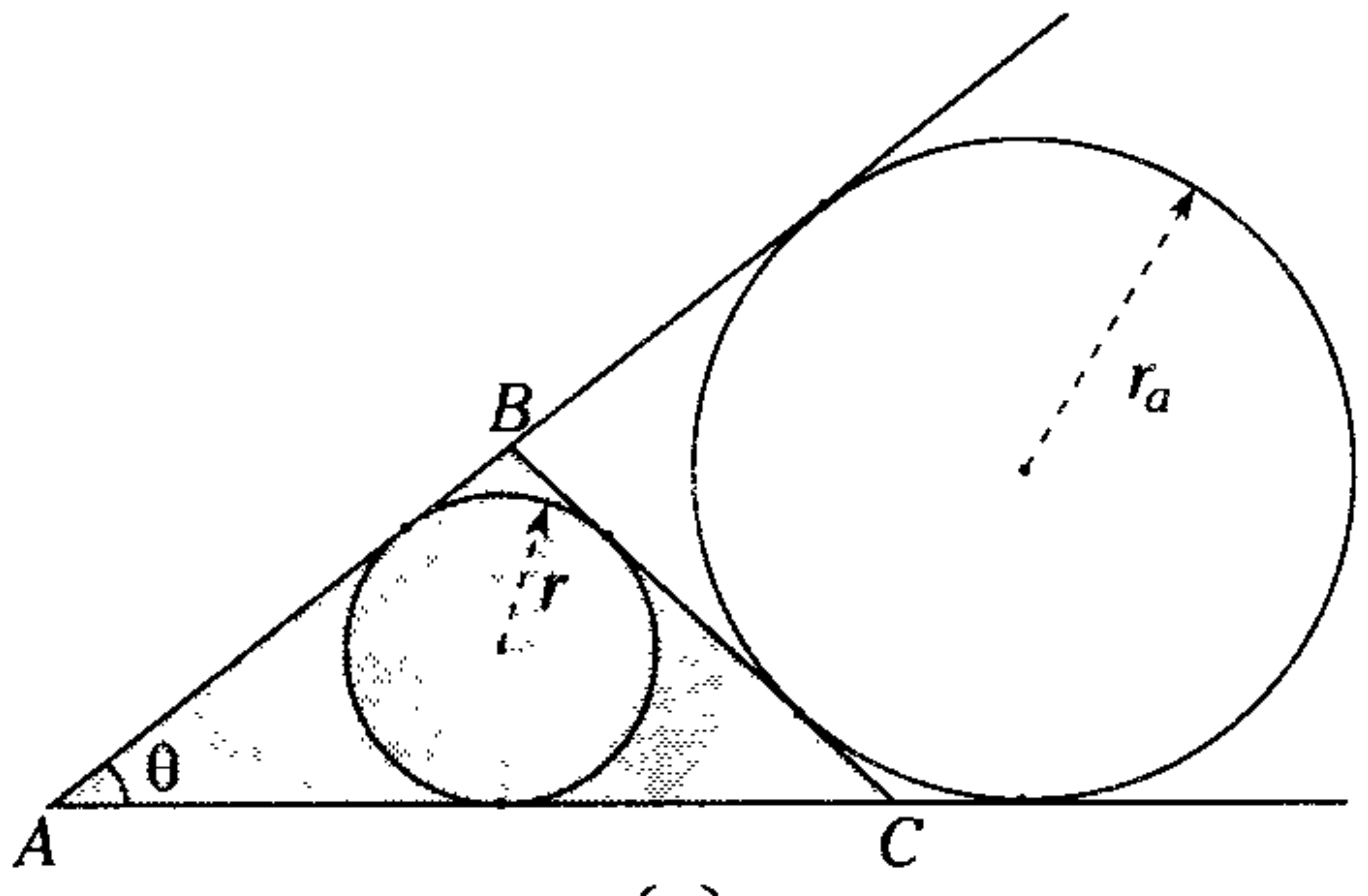


Figura 18.22

Teorema

El área de una región triangular es igual al producto del inradio, con uno de sus exradios y la cotangente de la mitad de la medida del ángulo, que se opone al lado relativo a la circunferencia exinscrita.



(a)

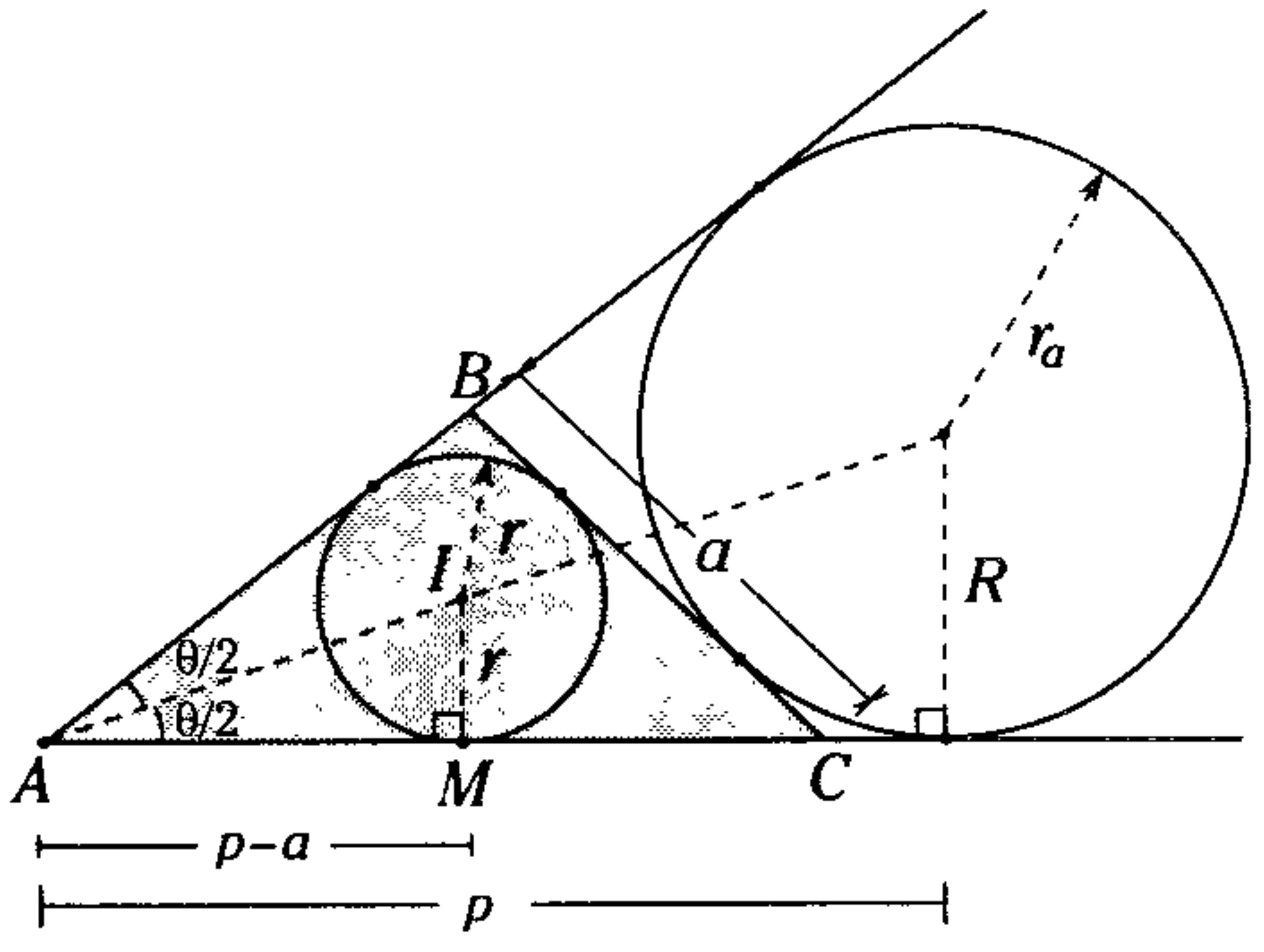
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = r_a \cdot r \cdot \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Donde

θ : medida del ángulo interior en A.

r y r_a : inradio y exradio del $\triangle ABC$.

Demostración



(b)

Figura 18.23

Sabemos

p : semiperímetro de la región triangular ABC

$AM = p - a$ (teorema)

También

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = (p-a) \cdot r_a \qquad \text{(I)}$$

$$\triangle AMI : \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{p-a}{r}$$

$$\rightarrow \quad p - a = r \cdot \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = r_a \cdot r \cdot \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Nota

Si m∢BAC = θ = 90°

$$\rightarrow \quad \mathbb{A}_{\triangle BAC} = r \cdot r_a$$

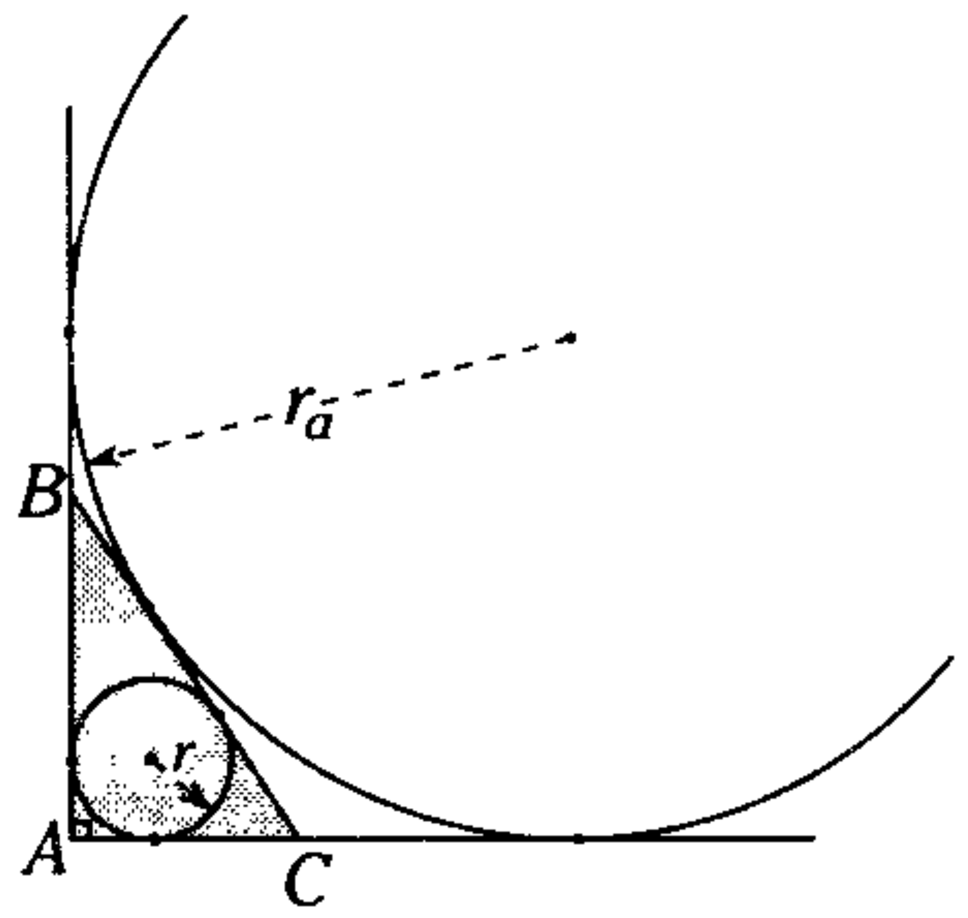


Figura 18.24

También se cumple

Si θ = 60°

$$\rightarrow \quad \mathbb{A}_{\triangle BAC} = r \cdot r_a\sqrt{3}$$

Si θ = 53°

$$\rightarrow \quad \mathbb{A}_{\triangle BAC} = 2r \cdot r_a$$

Si θ = 37°

$$\rightarrow \quad \mathbb{A}_{\triangle BAC} = 3r \cdot r_a$$

ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR RECTANGULAR

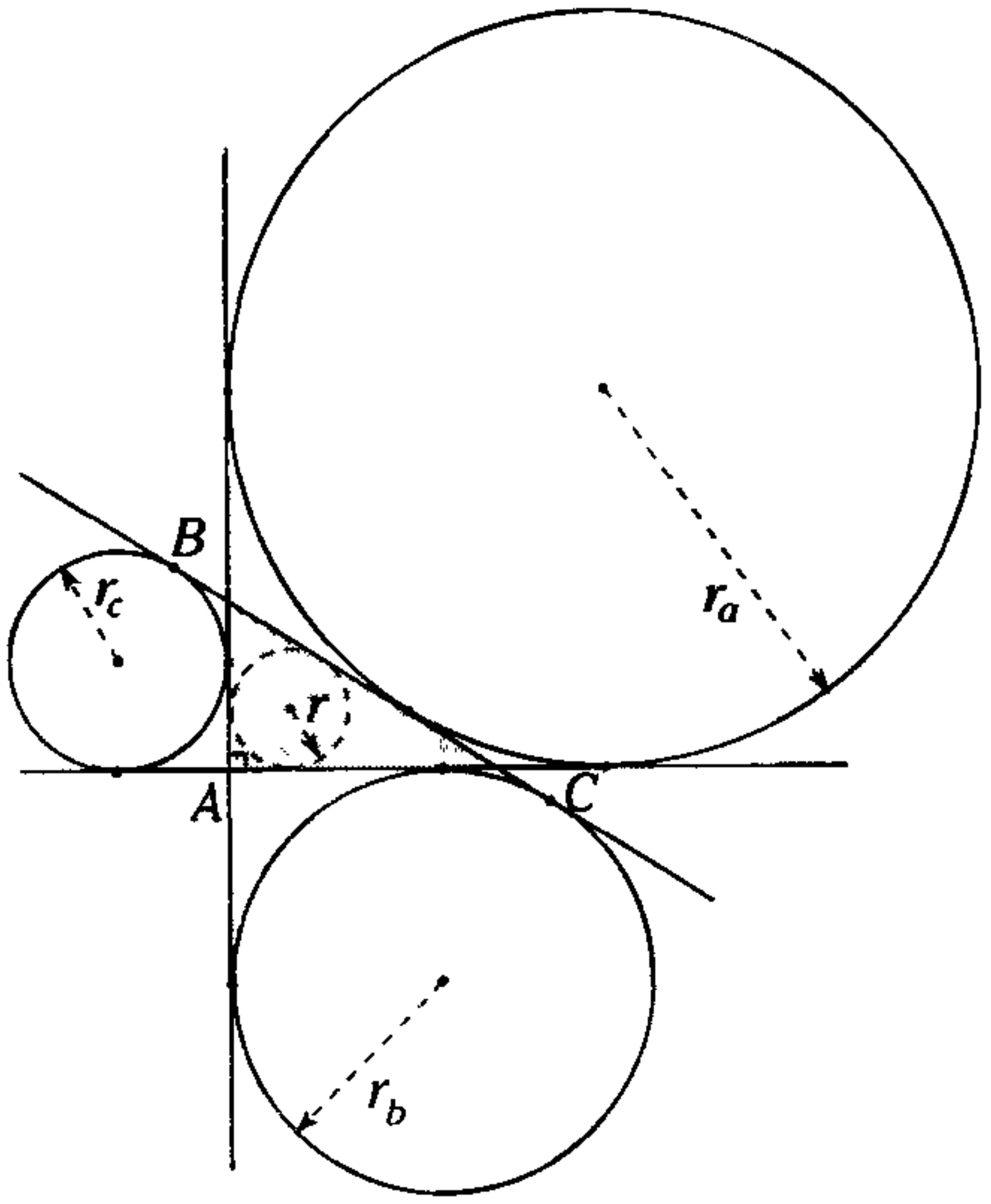


Figura 18.25

Teorema 1 $\boxed{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = r_a \cdot r}$

Teorema 2 $\boxed{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = r_b \cdot r_c}$

Donde

r : inradio del ⊾BAC

r_a, r_b, r_c: exradios relativos a los lados del ⊾BAC

Teorema de Burlet

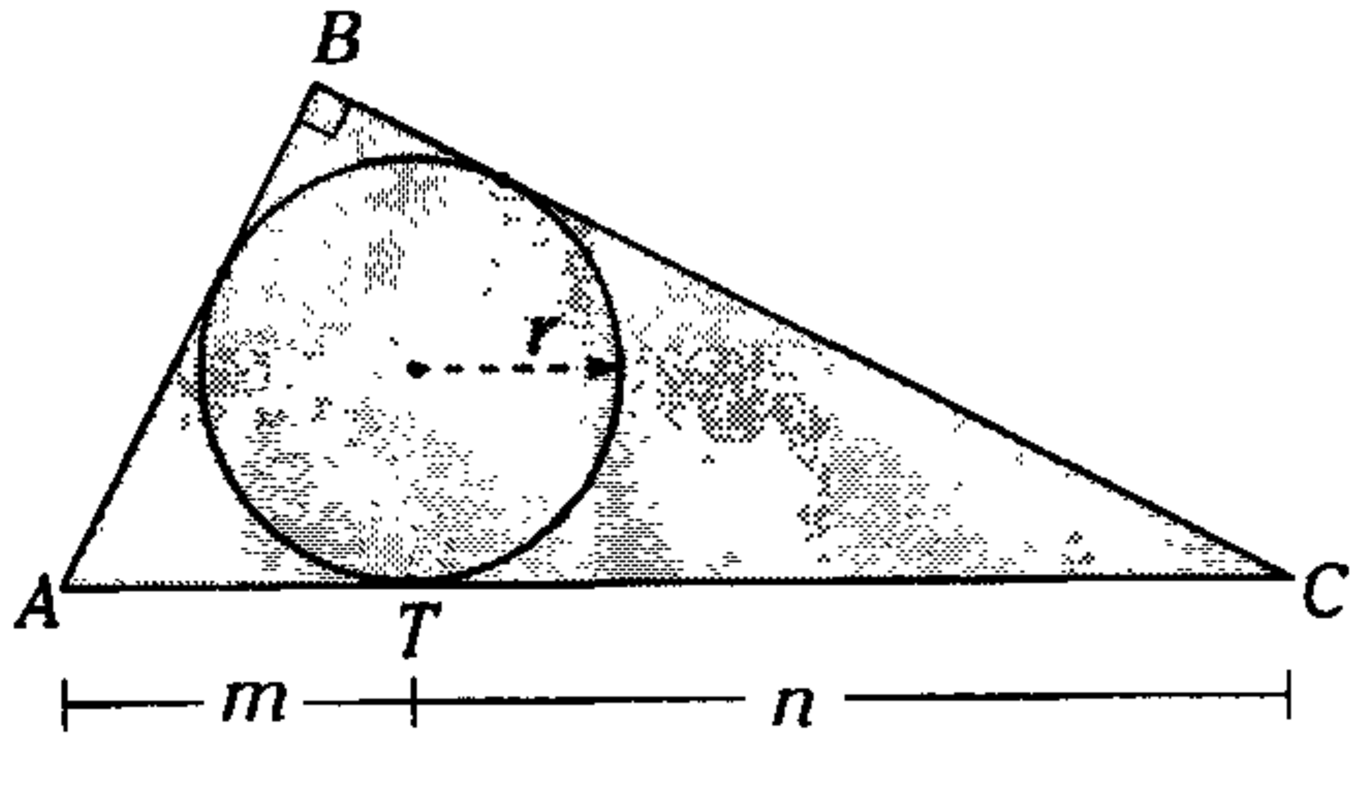


Figura 18.26

En toda región triangular rectangular, se cumple

$$\boxed{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = m \cdot n}$$

Demostración

Según un teorema visto anteriormente,

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = m \cdot n \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Como en este caso

$$\theta = 90°$$

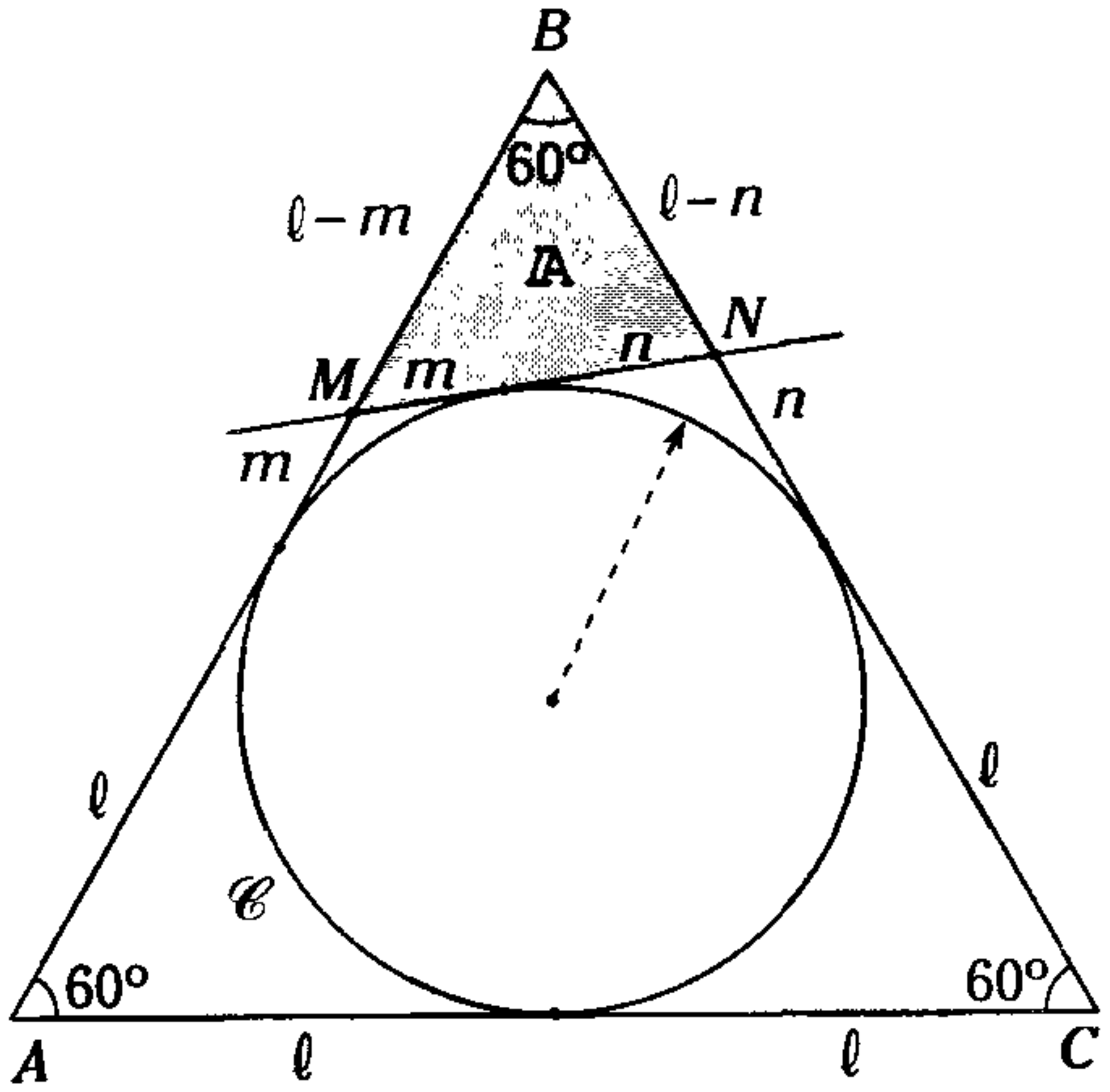
$$\therefore \quad \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = m \cdot n$$

Teorema

Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero ABC, al trazar una recta tangente a $\mathscr{C}$, que intersecta a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N, respectivamente. Se cumple, de esta manera, que

$$\frac{BM}{MA} + \frac{BN}{NC} = 1$$

Demostración



(b)

Figura 18.27

Sea $\mathbb{A}$ el área de la región triangular MBN

$$\rightarrow \quad \mathbb{A} = m.n\sqrt{3} = \frac{(\ell-m)(\ell-n)}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4m.n = \ell^2 - \ell(m+n) + m.n$$

$$\rightarrow \quad 3m.n = \ell^2 - \ell(m+n) \qquad \text{(I)}$$

Nos piden

$$\frac{BM}{MA} + \frac{BN}{NC} = \frac{\ell - m}{\ell + m} + \frac{\ell - n}{\ell + n}$$

Operando

$$\frac{\ell^2-\ell m+\ell n-mn+\ell^2-\ell n+\ell m-mn}{(\ell+m)(\ell+n)} = \frac{2(\ell^2-mn)}{(\ell+m)(\ell+n)} \qquad \text{(II)}$$

De (I)

$$\ell(m+n) + mn = \ell^2 - 2mn \qquad \text{(III)}$$

Como

$$(\ell+m)(\ell+n) = \ell^2 + \underbrace{\ell(m+n)+mn} \qquad \text{(IV)}$$

De (III) en (IV)

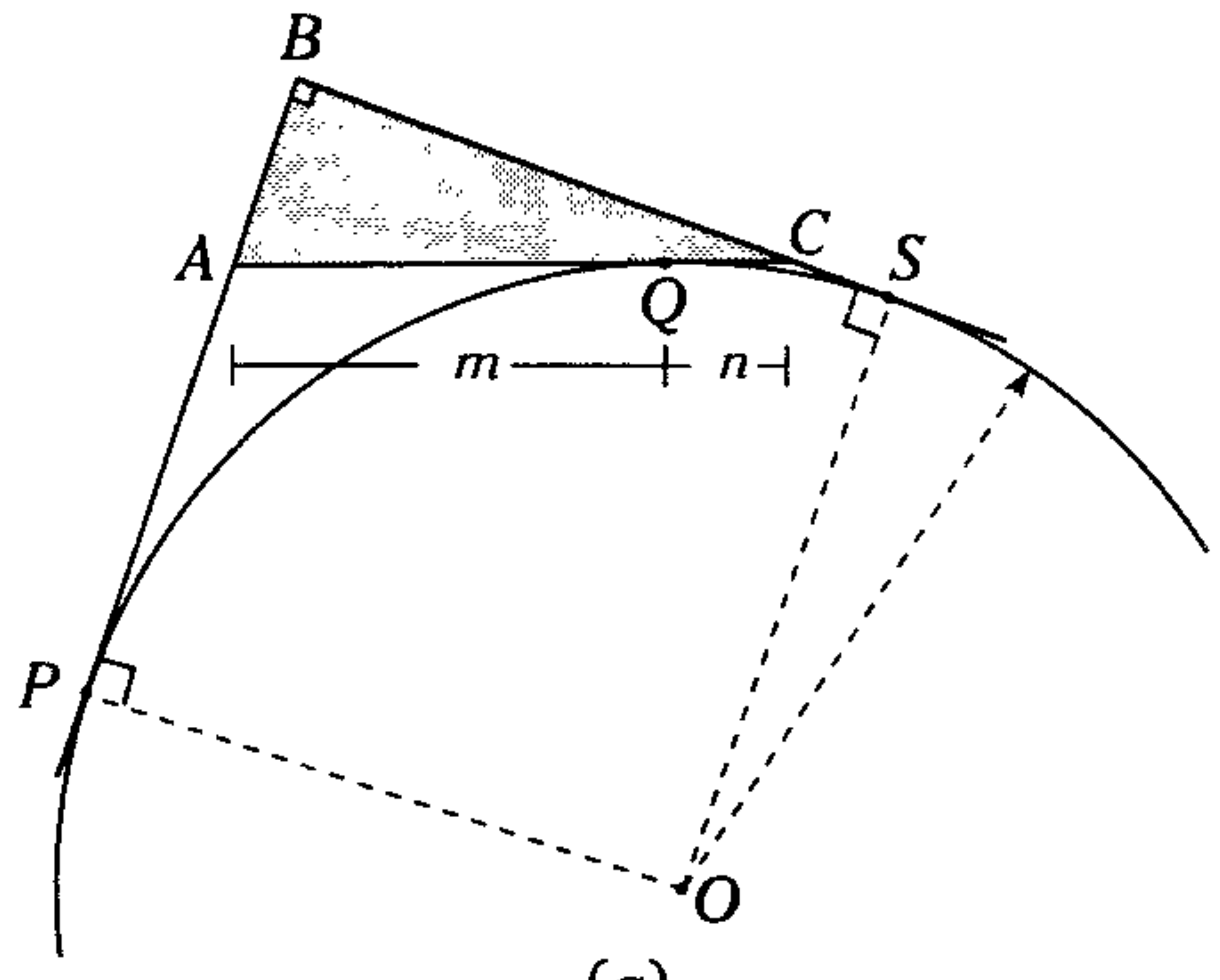
$$(\ell+m)(\ell+n) = \ell^2 + (\ell^2 - 2mn) = 2(\ell^2 - mn)$$

$$\rightarrow \quad \frac{2(\ell^2 - mn)}{(\ell+m)(\ell+n)} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{BM}{MA} + \frac{BN}{NC} = 1$$

Teorema

El área de una región triangular rectangular es igual al producto de las longitudes de los segmentos parciales determinados en la hipotenusa, y la circunferencia exinscrita a la hipotenusa.



(a)

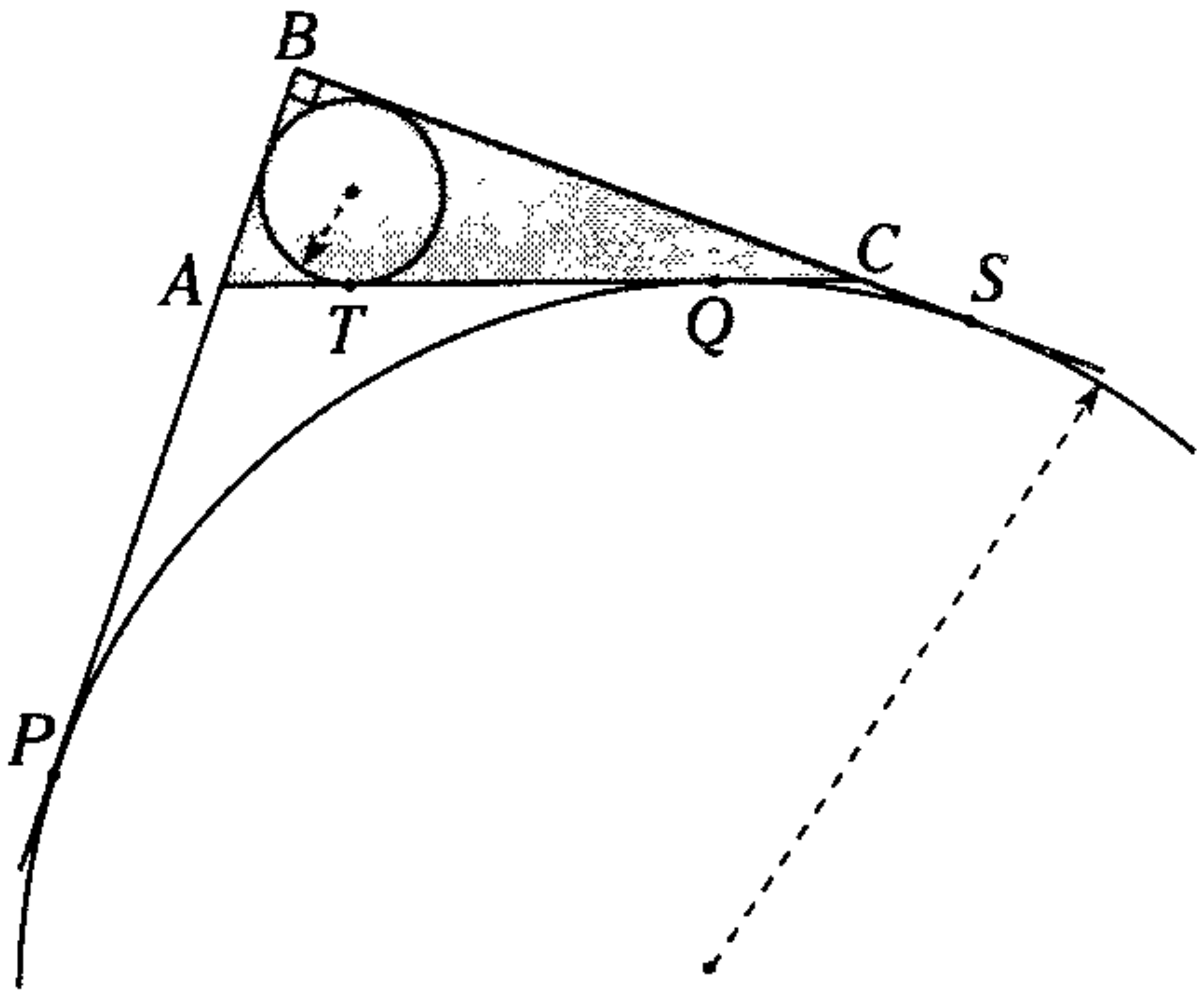
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = m.n$$

Donde

m∢ABC = 90°

P, S y Q son puntos de tangencia

Demostración



(b)

Figura 18.28

Trazamos la circunferencia inscrita en el △ABC.

Del teorema de dos circunferencias exteriores

$AT = CQ = n$ y

$TC = AQ = m$

Del teorema de Burlet

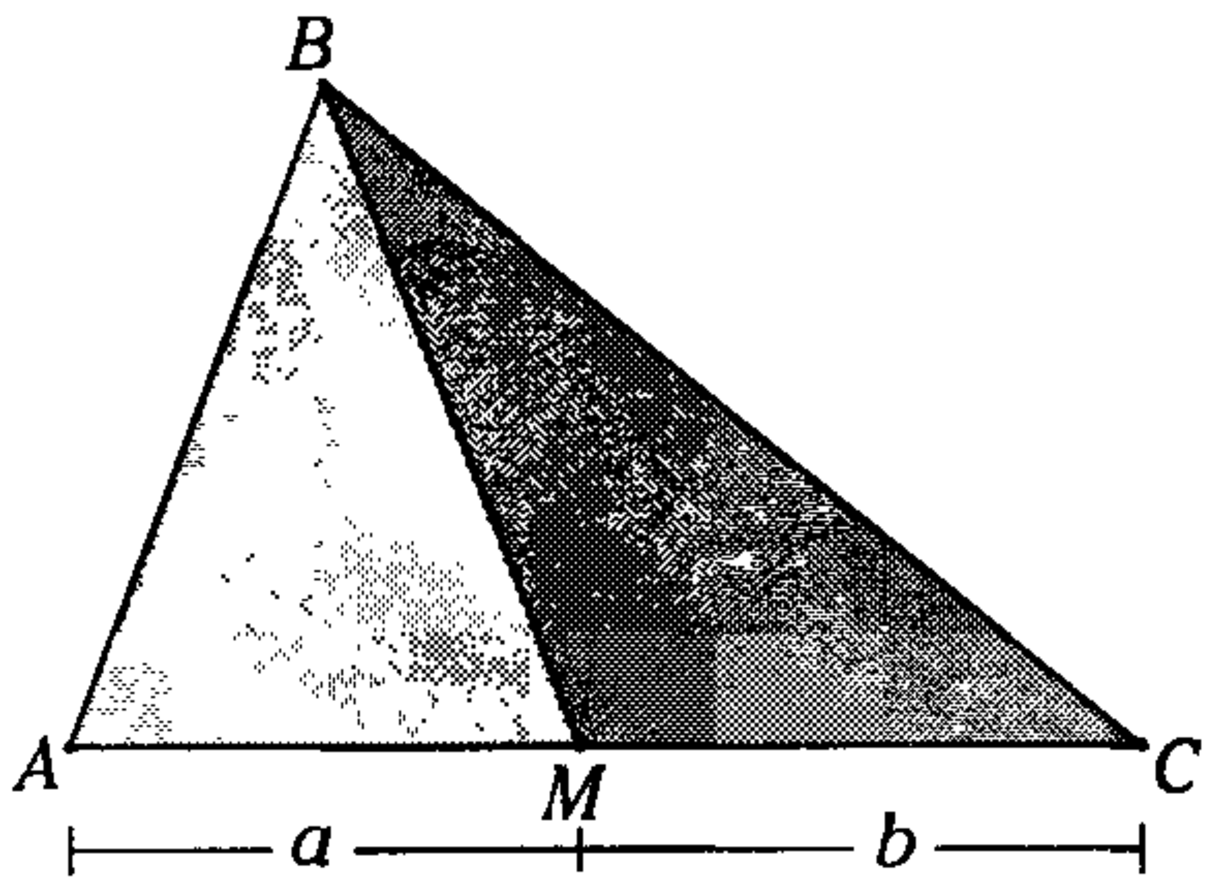
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = (AT).(TC) = n.m$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = m.n$$

RELACIONES DE ÁREAS

Teorema

La razón de áreas de las regiones parciales determinadas por una ceviana interior, en una región triangular, es igual a la razón de las longitudes de los segmentos parciales determinados por dicha ceviana en su lado relativo.



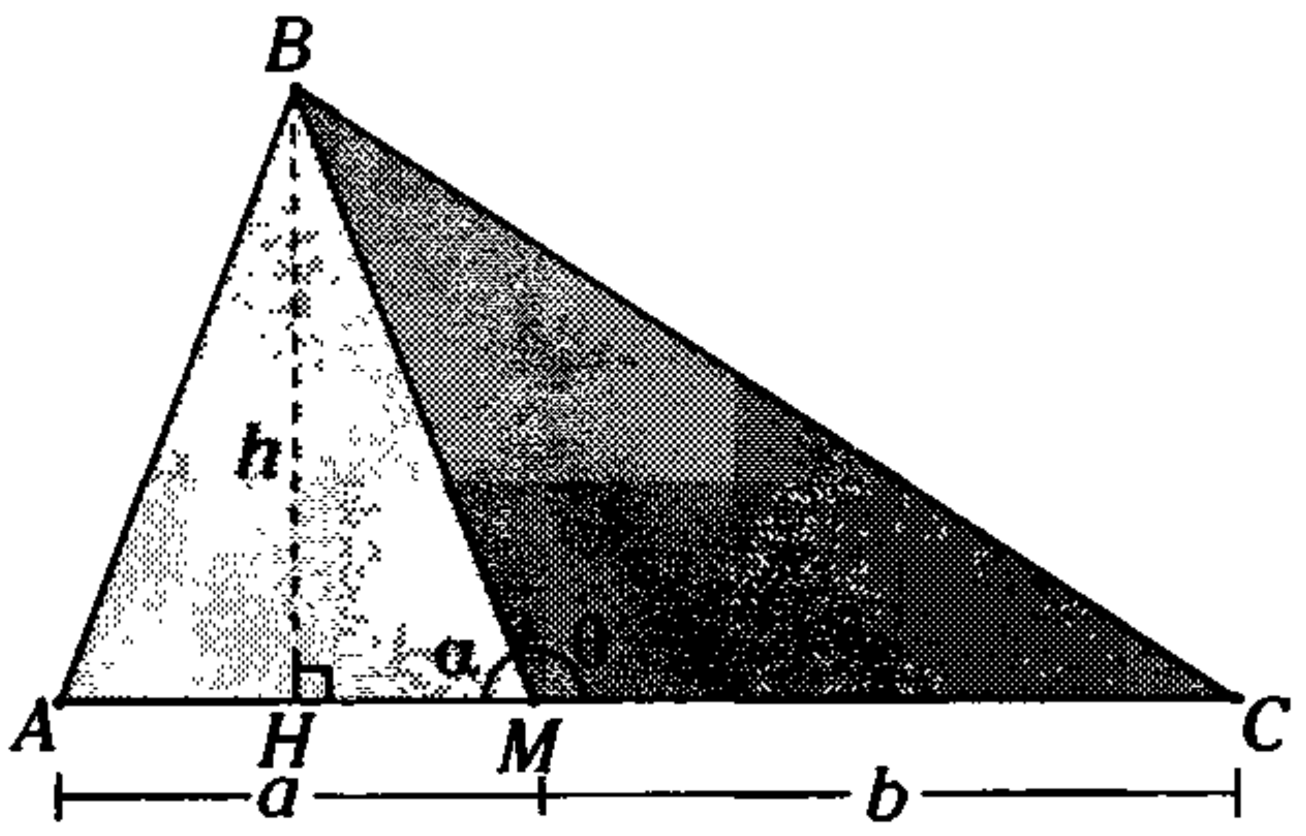
(a)

$\overline{BM}$: ceviana interior

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABM}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle MBC}}=\frac{a}{b}$$

Demostración

Trazamos la altura $\overline{BH}$ del triángulo ABC, que es altura de los triángulos ABM y MBC.



(b)

Figura 18.29

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABM}=\frac{a\,.\,h}{2}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle MBC}=\frac{b\,.\,h}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABM}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle MBC}}=\frac{a}{b}$$

Otra forma

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABM}=\frac{(BM).a}{2}.\text{sen}\alpha$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABM}=\frac{(BM).b}{2}.\text{sen}\theta$$

Como $\alpha+\theta=180° \rightarrow \text{sen}\alpha=\text{sen}\theta$

$$\therefore\ \frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABM}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle MBC}}=\frac{a}{b}$$

Observación

Si $\overline{BM}$ es mediana del triángulo ABC, entonces las regiones parciales ABM y MBC son equivalentes.

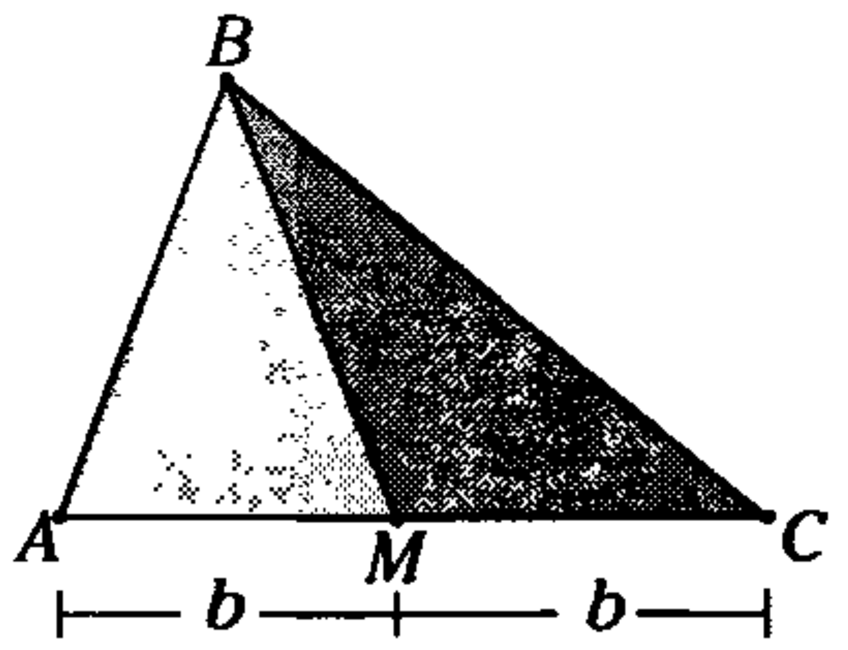


Figura 18.30

$\overline{BM}$: mediana

$\rightarrow AM = MC = b$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABM}=\mathbb{A}_{\blacktriangle MBC}$$

Nota

Si dos o más regiones triangulares comparten la misma base y las longitudes de sus alturas son iguales, entonces son equivalentes.

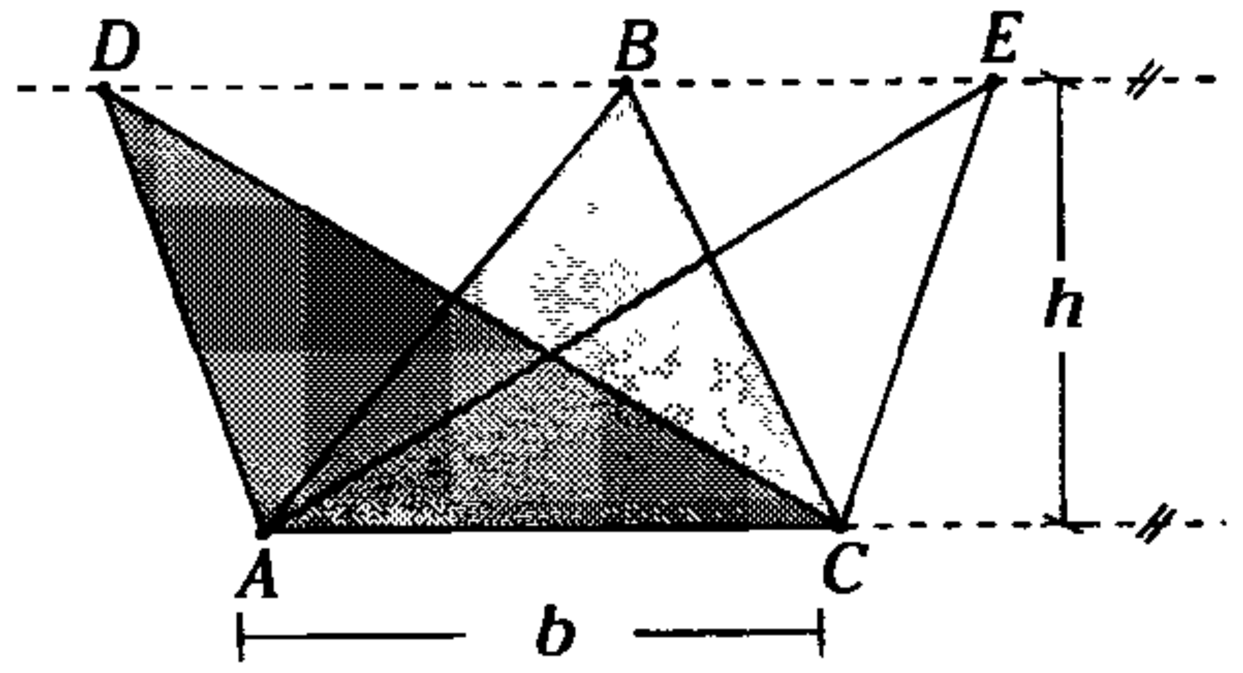


Figura 18.31

Si $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overleftrightarrow{AC}$

$$\rightarrow \ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{b\,.\,h}{2},$$

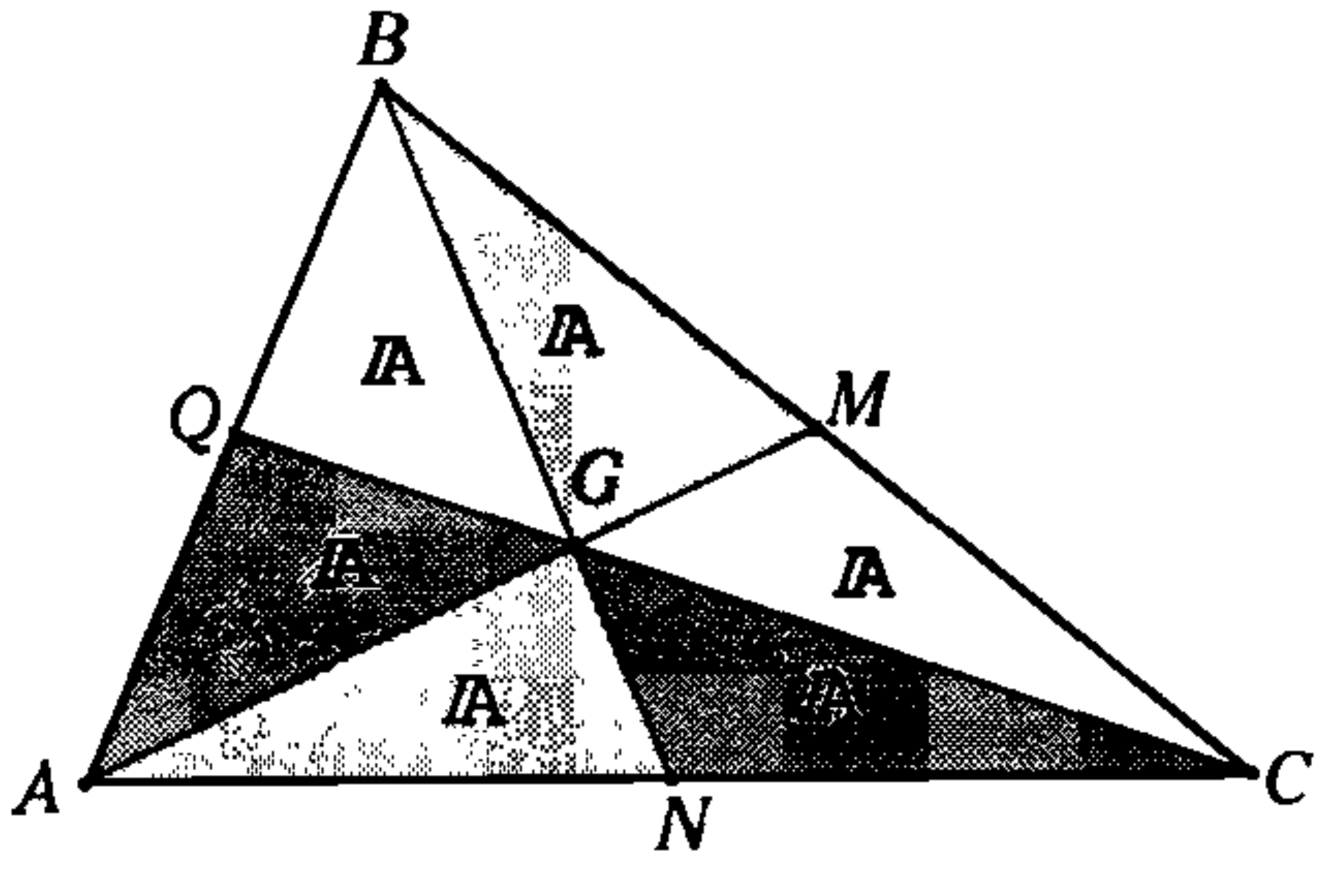
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ADC} = \frac{b\,.\,h}{2},$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle AEC} = \frac{b\,.\,h}{2}$$

$$\boxed{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \mathbb{A}_{\blacktriangle ADC} = \mathbb{A}_{\blacktriangle AEC}}$$

Teorema

En todo triángulo al trazar las tres medianas, la región triangular queda dividida en seis regiones triangulares equivalentes.



(*a*)

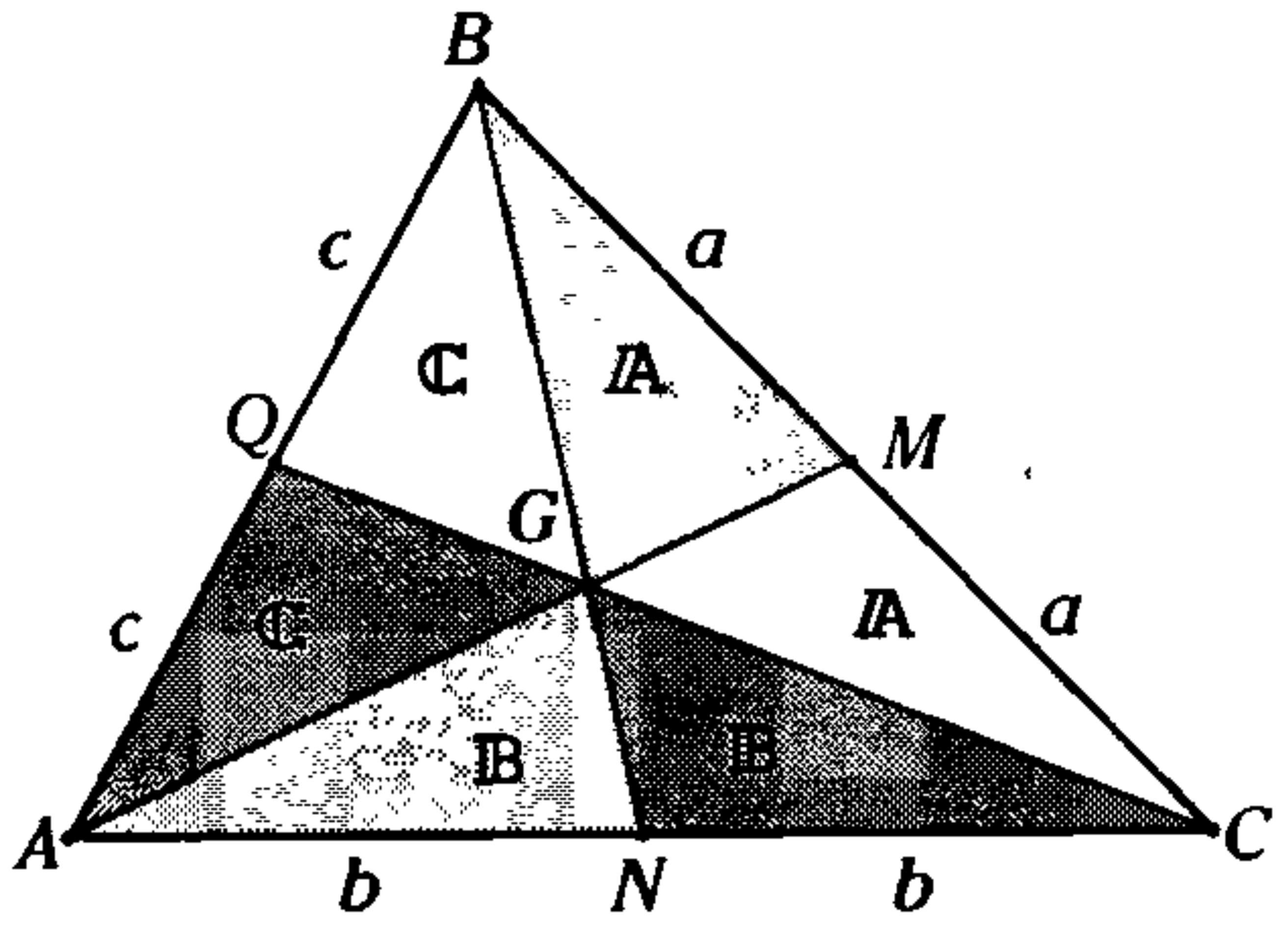
$\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son medianas del triángulo ABC.

$$\rightarrow \ \mathbb{A}_{\blacktriangle AGN} = \mathbb{A}_{\blacktriangle NGC} = \mathbb{A}_{\blacktriangle CGM} = \mathbb{A}_{\blacktriangle MGB} =$$

$$= \mathbb{A}_{\blacktriangle BGQ} = \mathbb{A}_{\blacktriangle QGA} = \mathbb{A}$$

Demostración

De la observación anterior, toda mediana determina dos regiones equivalentes.



(*b*)

Figura 18.32

Así, en los triángulos BGC, AGC y AGB:

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle BGM} = \mathbb{A}_{\blacktriangle MGC} = \mathbb{A}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle CGN} = \mathbb{A}_{\blacktriangle NGA} = \mathbb{B}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle AGQ} = \mathbb{A}_{\blacktriangle QGB} = \mathbb{C}$$

Luego, como el $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABM} = \mathbb{A}_{\blacktriangle ACM}$

$$\rightarrow \ 2\mathbb{C} + \mathbb{A} = 2\mathbb{B} + \mathbb{A}$$

$$\therefore \ \mathbb{B} = \mathbb{C} \qquad \text{(I)}$$

También $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABN} = \mathbb{A}_{\blacktriangle NBC}$

$$\rightarrow \ 2\mathbb{C} + \mathbb{B} = 2\mathbb{A} + \mathbb{B}$$

$$\therefore \ \mathbb{A} = \mathbb{C} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\mathbb{A} = \mathbb{B} = \mathbb{C}$$

Por lo tanto, las seis regiones triangulares son equivalentes.

Teorema

En todo triángulo, al unir los puntos medios de sus tres lados, se forman cuatro triángulos parciales de regiones equivalentes.

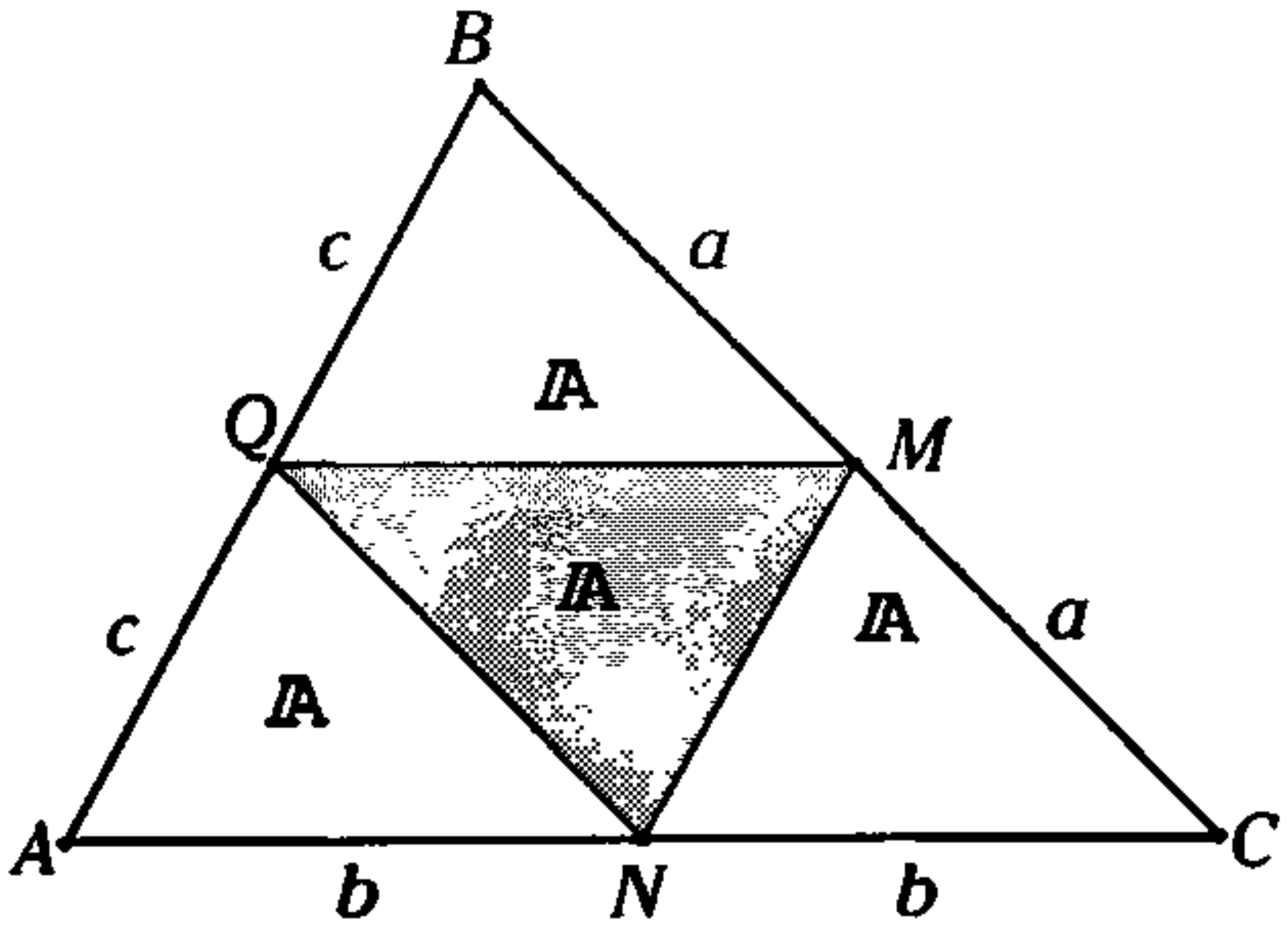


Figura 18.33

M, *N*, y *Q* son puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente

$$\rightarrow \boxed{A_{\triangle AQN} = A_{\triangle NMC} = A_{\triangle MBQ} = A_{\triangle MNQ} = A}$$

Demostración

Del teorema de los puntos medios, si las regiones triangulares *AQN*, *NMC*, *MBQ* y *MNQ* son congruentes; entonces, sus áreas son iguales.

Teorema

Si dos triángulos tienen respectivamente una de sus medidas angulares iguales, las áreas de sus regiones triangulares son proporcionales al producto de las longitudes de los lados que determinan los ángulos de igual medida.

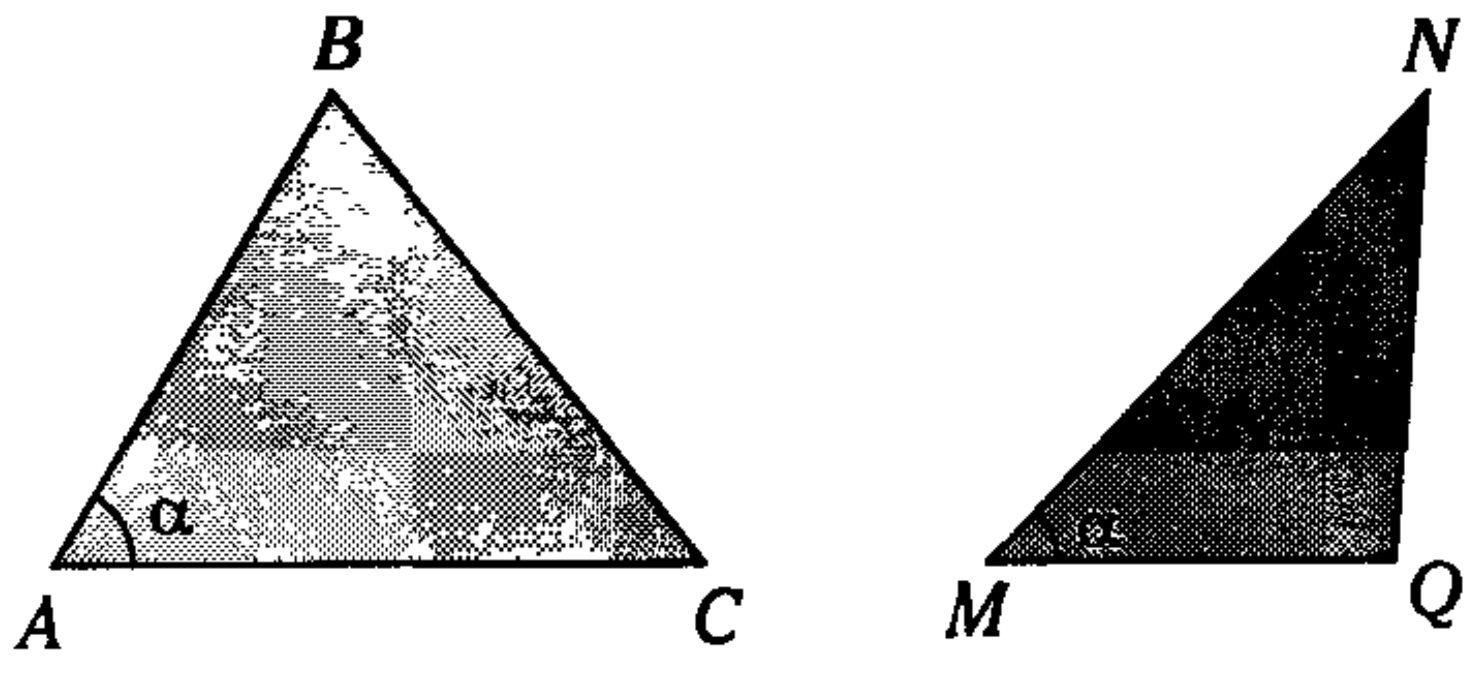


Figura 18.34

Si m∢BAC = m∢NMQ = α.

$$\rightarrow \boxed{\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle MNQ}} = \frac{(BA).(AC)}{(NM).(MQ)}}$$

Demostración

De la fórmula trigonométrica sabemos que

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(BA).(AC).\text{sen}\alpha$$

$$A_{\triangle MNQ} = \frac{1}{2}(NM).(MQ).\text{sen}\alpha$$

$$\therefore \frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle MNQ}} = \frac{(BA).(AC)}{(NM).(MQ)}$$

Teorema

Si uno de los ángulos interiores de un triángulo es suplementario con uno de los ángulos interiores de otro, las áreas de sus regiones triangulares son proporcionales al producto de las longitudes de los lados que determinan dichos ángulos.

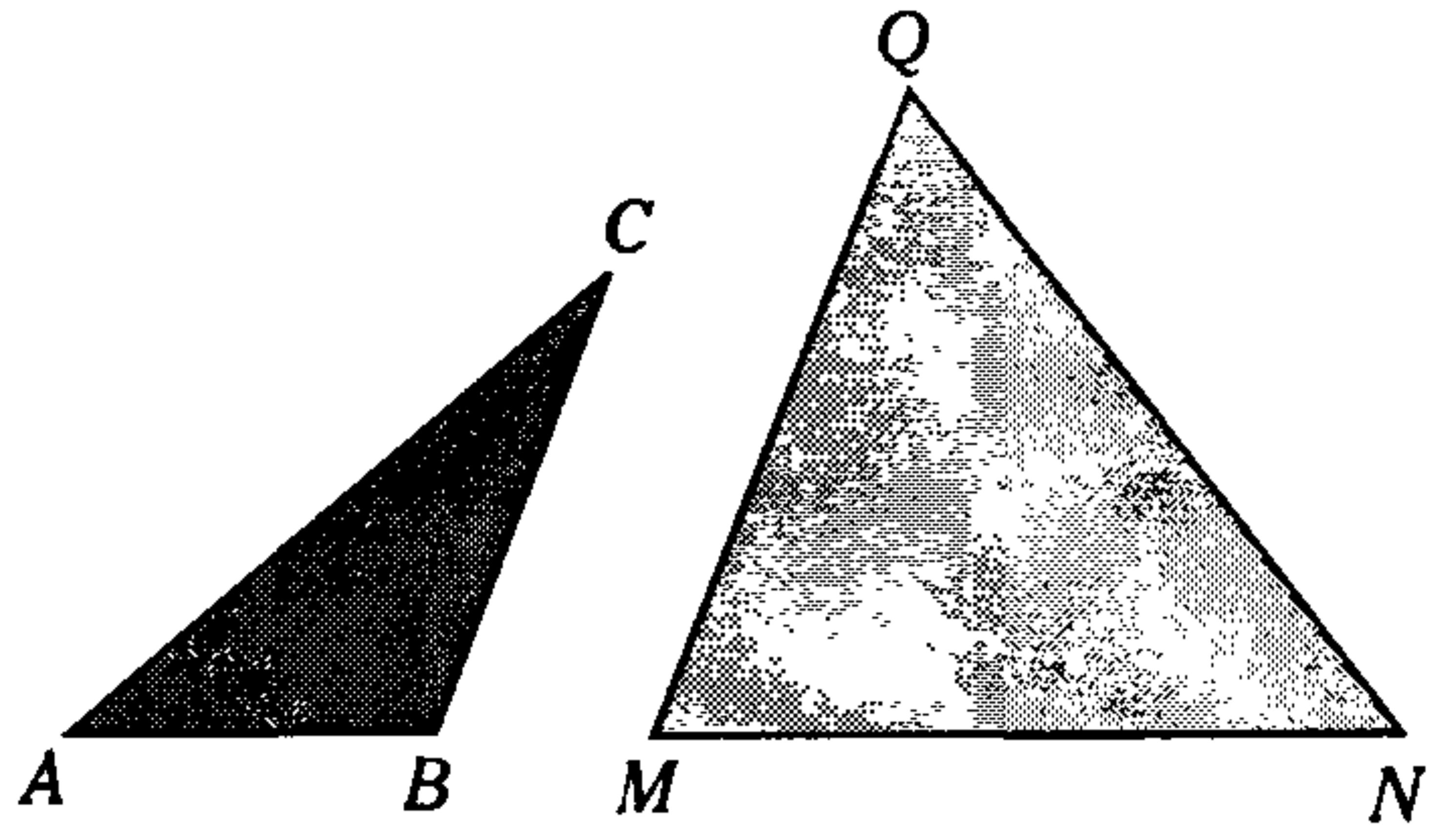


Figura 18.35

Si m∢ABC + m∢QMN = 180°,

$$\rightarrow \boxed{\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle MNQ}} = \frac{(AB).(BC)}{(QM).(MN)}}$$

Demostración

Sea m∢$ABC=\alpha$ y m∢$MQN=\theta$

Por trigonometría sabemos que si

$$\alpha+\theta=180^{o} \rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\theta$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=\frac{1}{2}(AB).(BC).\operatorname{sen}\alpha$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle QMN}=\frac{1}{2}(QM).(MN).\operatorname{sen}\theta$$

$$\therefore \frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle MNQ}}=\frac{(AB).(BC)}{(QM).(MN)}$$

Teorema

Si dos triángulos son semejantes, las áreas de sus regiones triangulares son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de sus elementos homológos.

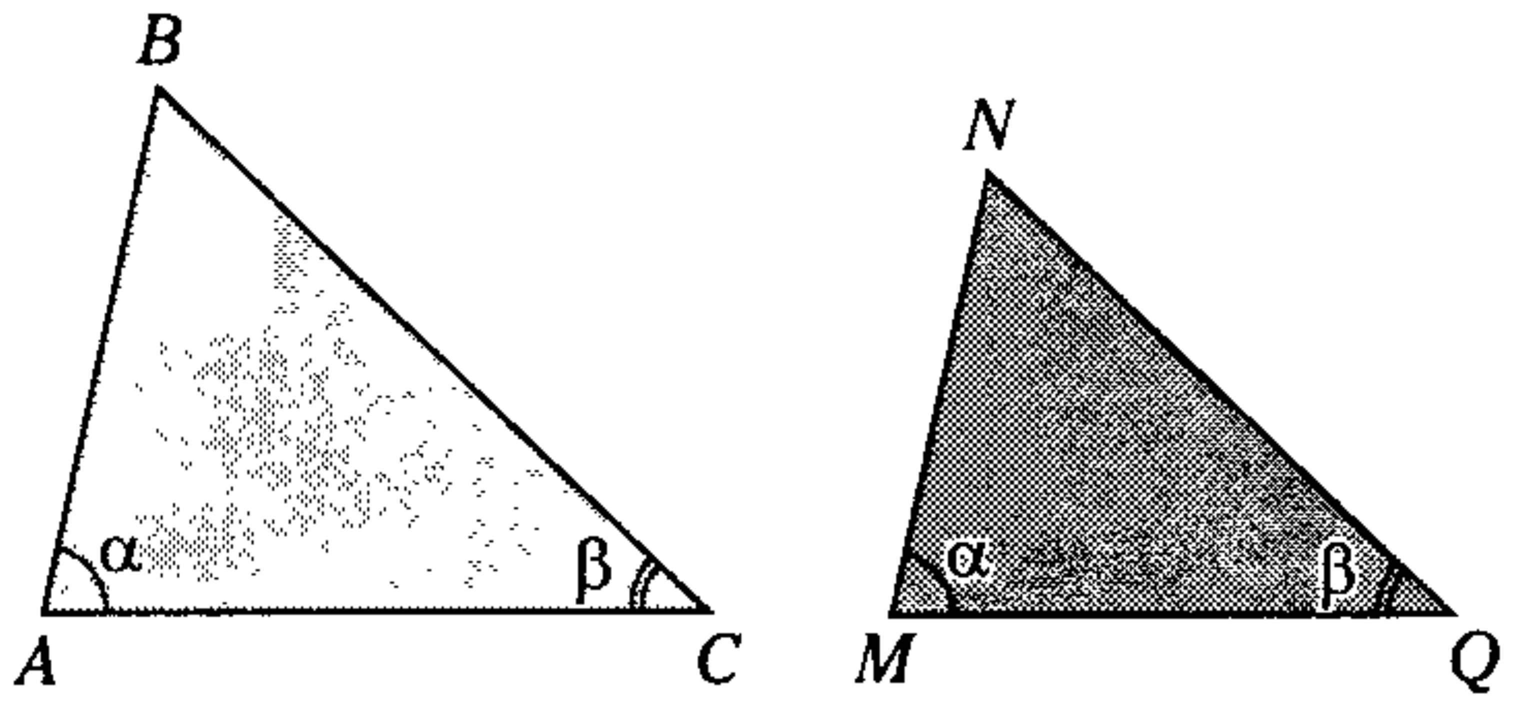


Figura 18.36

Si el $\triangle ABC \sim \triangle MNQ$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle MNQ}}=\frac{(AB)^2}{(MN)^2}=\frac{(AC)^2}{(MQ)^2}=\ldots=k^2}$$

k : razón de semejanza de los triángulos ABC y MNQ.

Demostración

Como m∢BAC = m∢NMQ,

entonces del teorema de relación de áreas

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle MNQ}}=\frac{(AB).(AC)}{(MN).(MQ)}=\left(\frac{AB}{MN}\right).\left(\frac{AC}{MQ}\right)$$

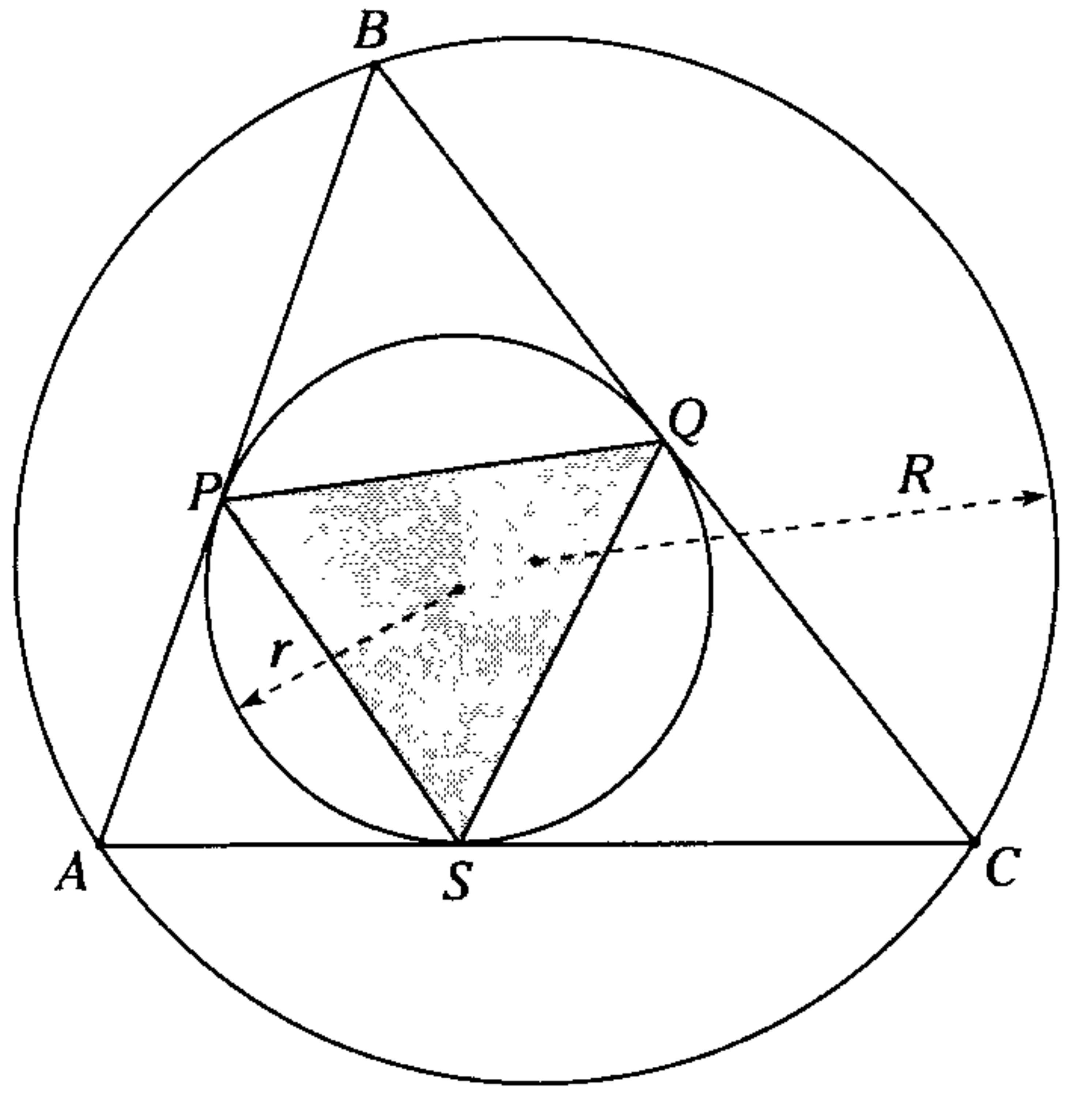
y de triángulos semejantes sabemos que

$$\frac{AC}{MQ}=\frac{AB}{MN}=\ldots=k$$

$$\therefore \frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle MNQ}}=\left(\frac{AB}{MN}\right).\left(\frac{AB}{MN}\right)=\frac{(AB)^2}{(MN)^2}=\ldots=k^2$$

Teorema

Dado un triángulo ABC, inscrito en una circunferencia de radio R y su triángulo tangencial respectivo (inscrito en una circunferencia de radio r). La relación de áreas de la región ABC y la región PQS es igual a la relación de radio r y de $2R$.



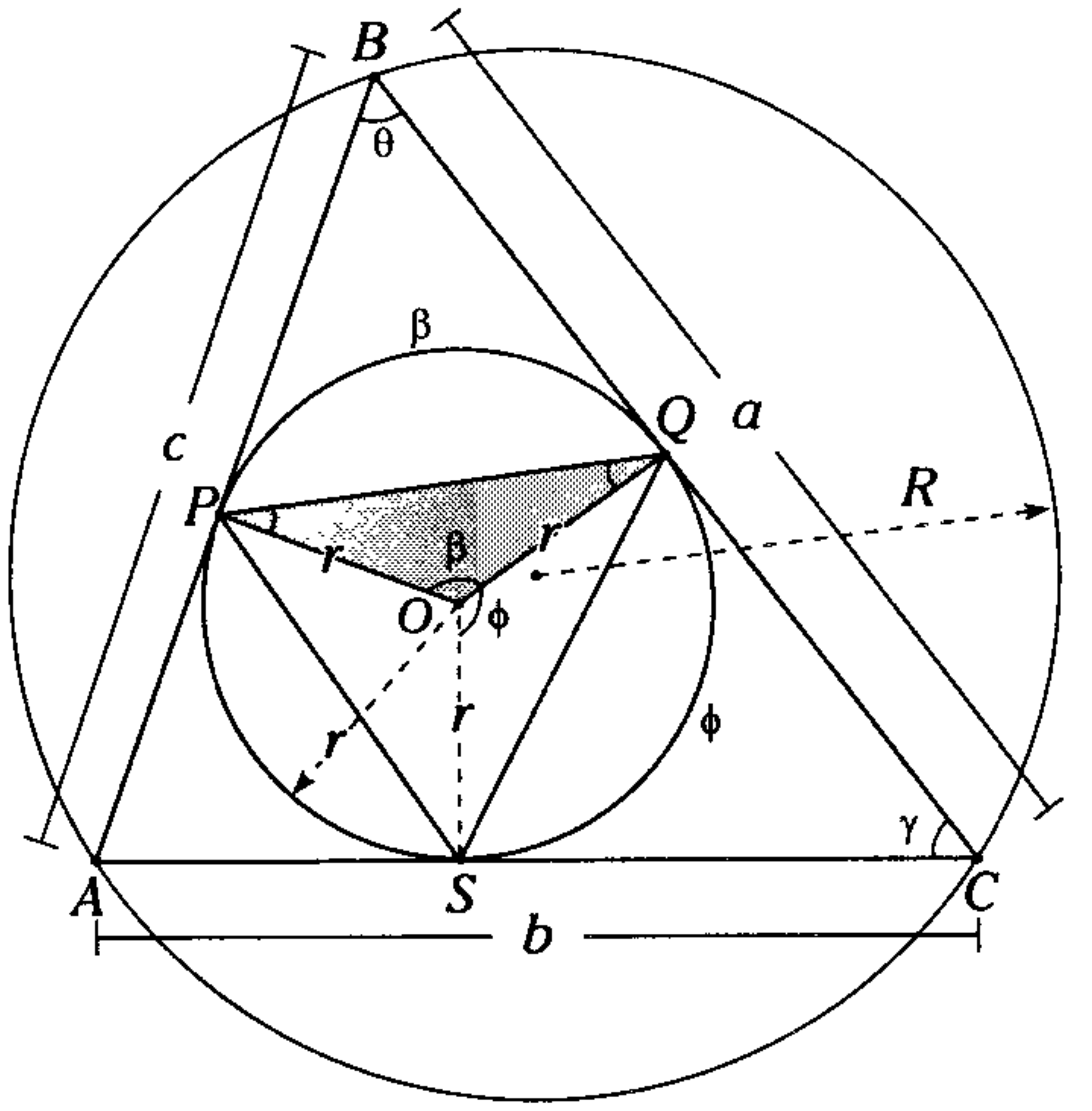
(a)

Donde

P, Q, S : puntos de tangencia

$\triangle PQS$: triángulo tangencial del $\triangle ABC$.

Demostración



(*b*)

Figura 18.37

Según la figura

$\beta + \theta = 180°$

Por teorema (Relación de áreas)

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle POQ}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}} = \frac{(r)(r)}{(a)(c)}$$

$$\rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle POQ} = \frac{r^2}{a \,.\, c} \,.\, \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} \qquad \text{(I)}$$

Análogamente

$$\phi + \gamma = 180° \rightarrow \frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle SOQ}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}} = \frac{(r)(r)}{(a)(b)}$$

$$\rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle SOQ} = \frac{r^2}{a \,.\, b} \,.\, \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} \qquad \text{(II)}$$

También

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle POS}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}} = \frac{(r)(r)}{(b)(c)}$$

$$\rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle POS} = \frac{r^2}{b \,.\, c} \,.\, \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} \qquad \text{(III)}$$

Sumando las ecuaciones (I), (II) y (III)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle POQ} + \mathbb{A}_{\blacktriangle SOQ} + \mathbb{A}_{\blacktriangle POS} = r^2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}$$

De la figura 18.37(b) se observa

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PQS} = \mathbb{A}_{\blacktriangle POQ} + \mathbb{A}_{\blacktriangle SOQ} + \mathbb{A}_{\blacktriangle POS}$$

Luego

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PQS} = \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} \,.\, r^2 \,.\, \frac{(a+b+c)}{a \,.\, b \,.\, c} \qquad \text{(IV)}$$

De los teoremas anteriores se sabe

$$a + b + c = 2p$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = p \,.\, r = \frac{abc}{4R}$$

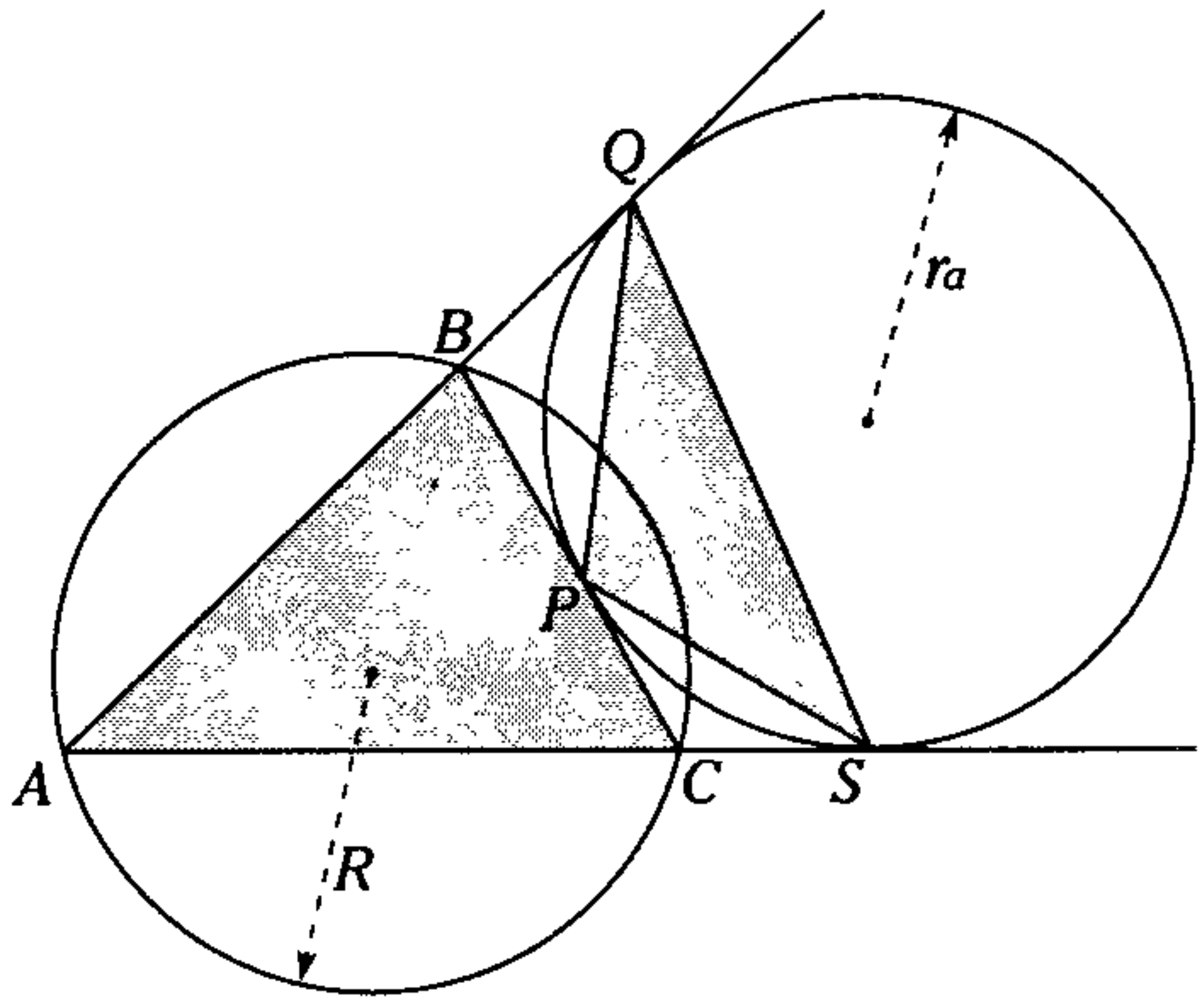
Reemplazando en la ecuación (IV)

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle PQS}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}} = \frac{r(r)(2p)}{\left(\frac{abc}{4R}\right)(4R)} = \frac{(r.p)}{\left(\frac{abc}{4R}\right)} \cdot \left(\frac{2r}{4R}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle PQS}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}} = \frac{r}{2R}$$

Teorema

Según la figura R y r_a son el circunradio y exradio del triángulo *ABC*, además *P*, *Q* y *S* son puntos de tangencia y la relación de áreas de las regiones *PQS* y *ABC* es igual a la relación del exradio (r_a) y el doble del circunradio (2*R*), respecto del triángulo *ABC*.



(*a*)

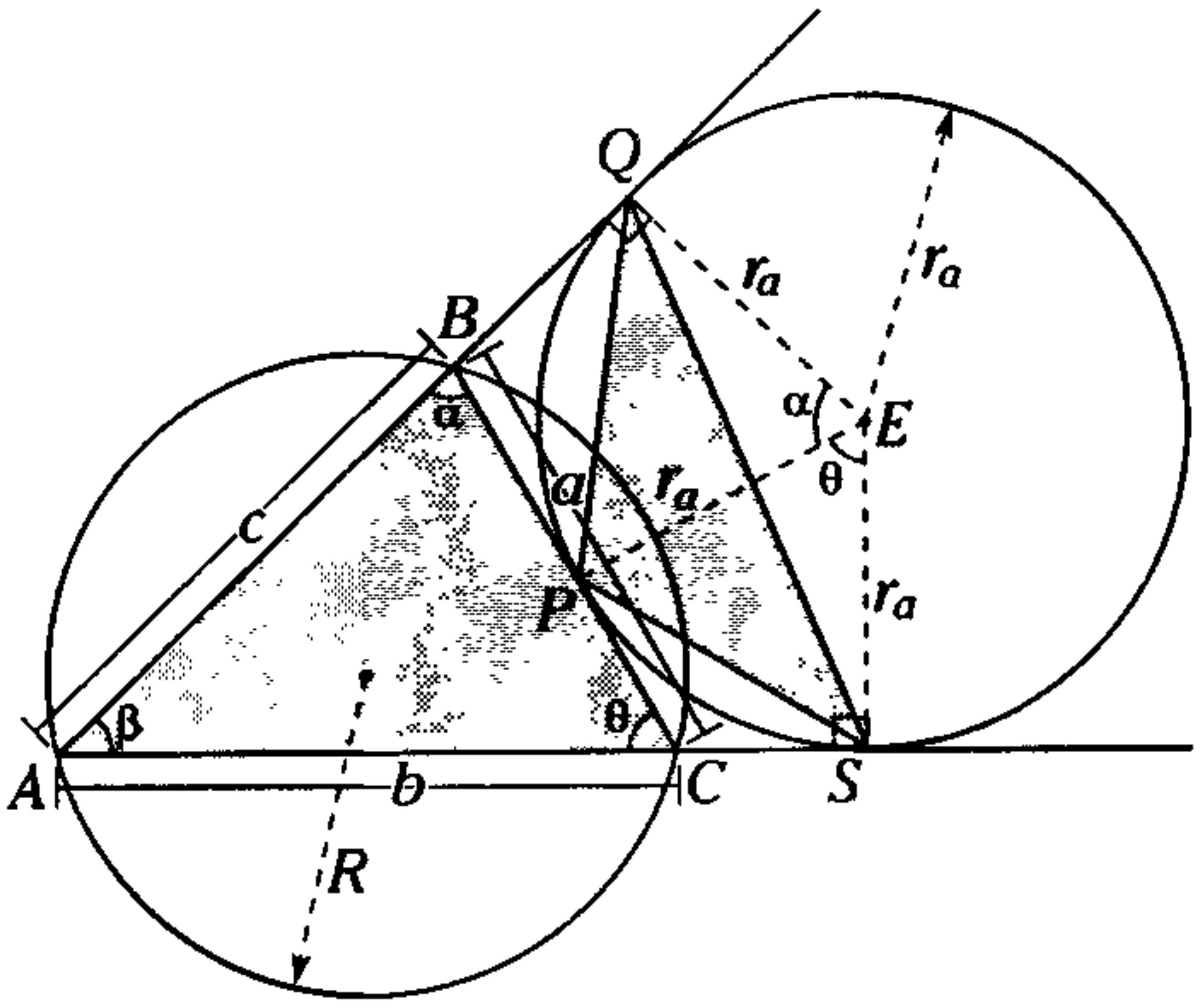
$$\boxed{\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle PQS}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}} = \frac{r}{2R}}$$

Donde

P, Q y S : puntos de tangencia

$\triangle PQS$: triángulo tangencial externo $\triangle ABC$

Demostración



(b)

Figura 18.38

Según la figura

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PQS} = \mathbb{A}_{\blacktriangle PQE} + \mathbb{A}_{\blacktriangle PES} - \mathbb{A}_{\blacktriangle QES} \qquad \text{(I)}$$

Del teorema, la relación de áreas con un ángulo de igual medida.

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle PQE}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}} = \frac{r_a \cdot r_a}{a \cdot c} \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle PES}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}} = \frac{r_a \cdot r_a}{a \cdot b} \qquad \text{(III)}$$

Del teorema, la relación de áreas con ángulos suplementarios

$$\beta + (\alpha + \theta) = 180°$$

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle QES}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}} = \frac{r_a \cdot r_a}{b \cdot c} \qquad \text{(IV)}$$

Ecuaciones (IV), (III) y (II) en (I)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PQS} = \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} \cdot \frac{r_a^2}{ac} + \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} \cdot \frac{r_a^2}{ab} - \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} \cdot \frac{r_a^2}{bc}$$

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle PQS}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}} = r_a^2 \left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} \right)$$

Efectuando operaciones y recordando que

$$2p = a + b + c$$

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle PQS}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}} = \frac{2r_a^2 (p-a)}{abc} \qquad \text{(V)}$$

Además

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = (p-a) \cdot r_a \qquad \text{(VI)}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{abc}{4R} \qquad \text{(VII)}$$

De (VI) y (VII)

$$\frac{p-a}{abc} = \frac{1}{4Rr_a} \qquad \text{(VIII)}$$

Reemplazando (VIII) en (V)

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle PQS}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}} = 2r_a^2 \cdot \frac{1}{4R\, r_a}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle PQS}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}} = \frac{r_a}{2R}$$

ÁREAS EN DIFERENTES CAMPOS

El problema de cómo calcular el área de una región determinada tiene sus inicios en la antigüedad, en aquellas civilizaciones donde la base económica era la agricultura. Por ejemplo, surge la necesidad de medir los terrenos de cultivo que, debido a la geografía y otros factores, eran limitadas por diversas figuras geométricas, sabiendo que la experiencia diaria puede dar origen a algunos conceptos sencillos, como la recta, plano y circunferencia. El conocer las propiedades de dichas figuras requiere de estudio, análisis e investigación que el hombre fue desarrollando en el transcurso del tiempo. Prueba de ello, tenemos los restos arquitectónicos dejados por las diferentes culturas que nos muestran su conocimiento sobre las figuras geométricas y sus propiedades. Saber calcular el área de una región, tiene aplicación en las actividades prácticas de la vida cotidiana, y actualmente, para construir un edificio o una vivienda es necesario saber cuánto mide el terreno, o en el campo bélico, por ejemplo, para saber qué área será afectada por una explosión.

También es relacionado con otras ciencias como lo hizo Johanes Kepler para enunciar su famosa

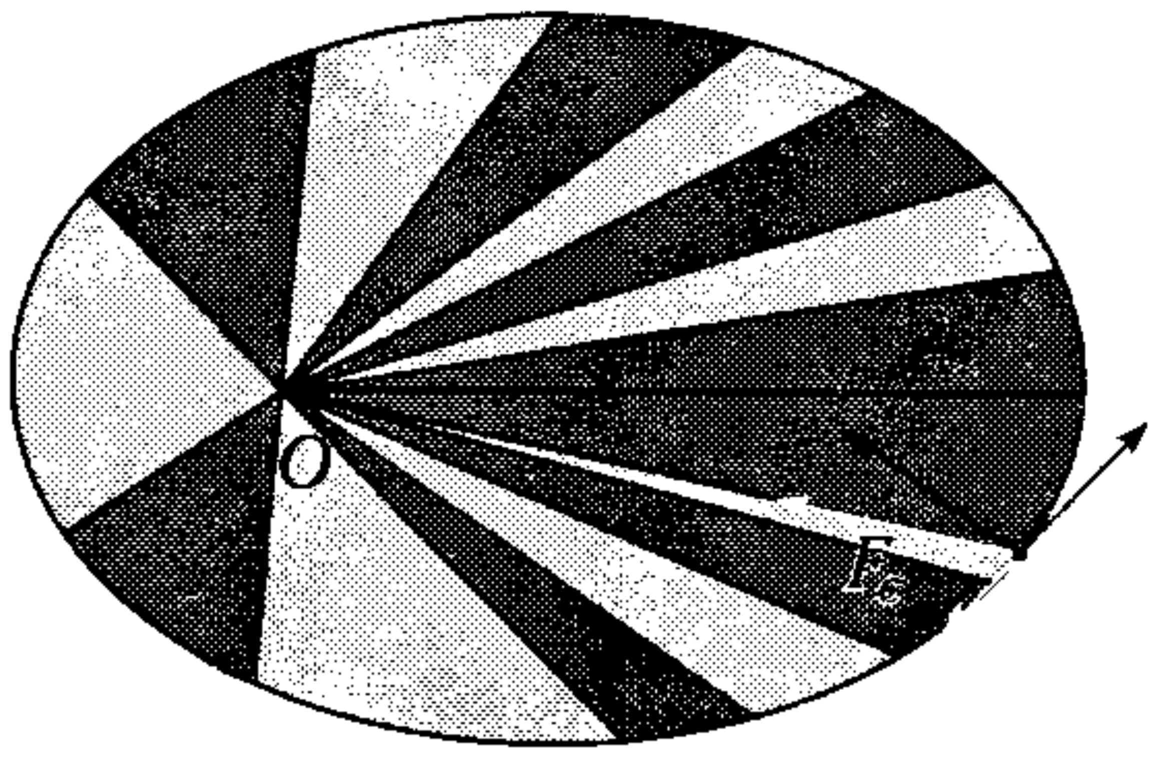
Segunda Ley de Kepler

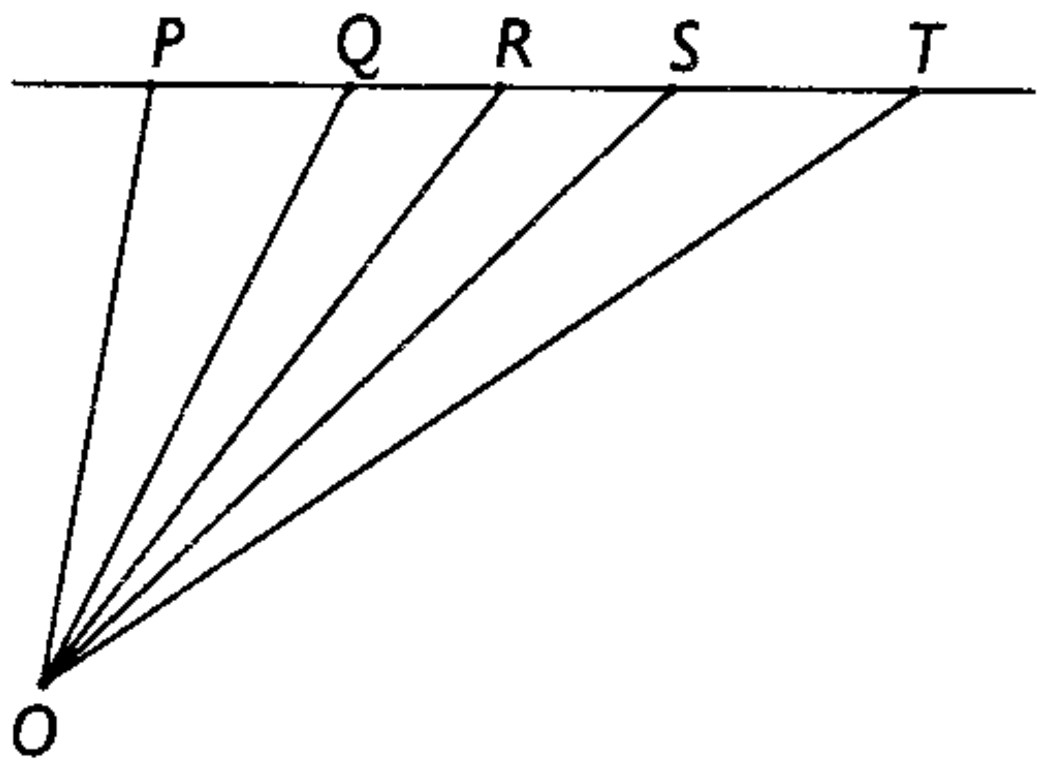
Dice que los cuerpos celestes describen trayectorias en las que se cumple que: las áreas barridas por el radio vector en tiempos iguales son iguales. El radio vector va desde el foco de la elipse a la posición del planeta en cada instante.

Explicación geométrica

Los cuerpos que se mueven en línea recta con velocidad constante también cumplen la ley de las áreas.

Un cuerpo que se mueve en línea recta respecto de O, con velocidad constante, avanza distancias iguales en tiempos iguales: $PQ = QR = RS$





Las áreas de las regiones barridas en tiempos iguales por el vector que tiene origen en O son iguales, es decir las regiones triangulares OPQ, OQR y ORS son equivalentes, porque sus bases son iguales ($PQ=QR=RS$) y comparten la misma altura.

BIOGRAFÍA

HERÓN DE ALEJANDRÍA (Se cree que nació 126 a.n.e. y murió 50 a.n.e.)

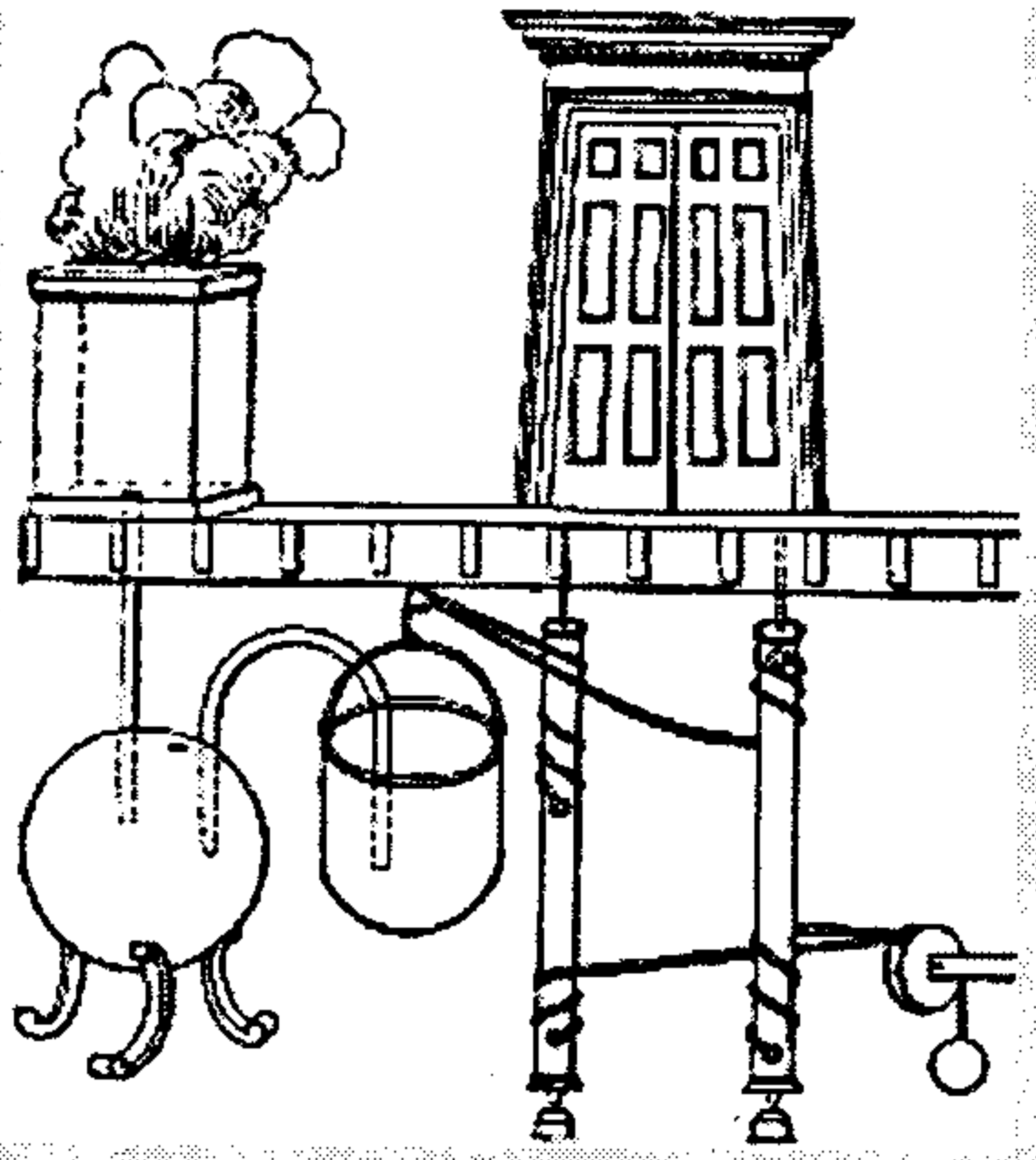
No existen datos dignos de crédito sobre su nacimiento y muerte. Sus conocimientos de obras y autores permiten situarlo a finales del siglo II a.n.e.

Entre los muchos personajes célebres que existieron en la historia con ese nombre, uno de los más importantes fue Herón de Alejandría.

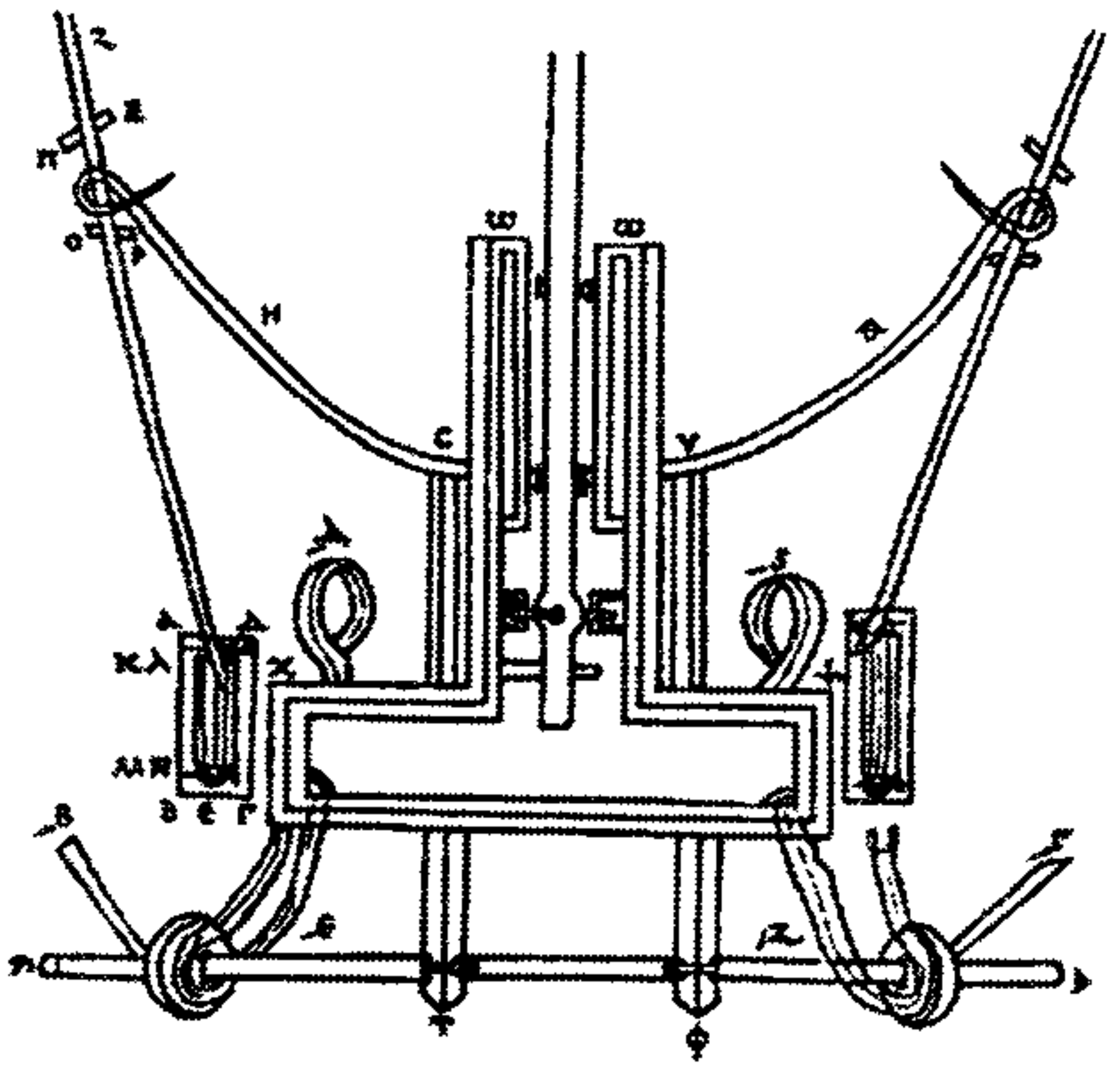
De condición humilde, fue el inventor de máquinas como la dioptría, el odómetro (sistema de engranajes combinados para contar las vueltas de una rueda) o, quizás la más importante, el eolípila, un precursor de la turbina a vapor.

En el trabajo sobre geometría (métrica: que es una colección de 13 libros), enumera diferentes maneras para hallar el área de la región triangular, cuadrangular, poligonal regular, de tres a doce lados, también calcula superficies y volúmenes de cilindros y conos. En este libro se incluye la fórmula conocida que permite calcular el área de la región triangular a partir de las longitudes de sus lados.

Actualmente, se manifiesta que la fórmula del área de una región triangular en función de sus lados se debe a Arquímedes.



La "pneumática", máquina que utilizando la teoría del aire eleva agua a grandes alturas.



La "quirobalista" una parte de una colección de catapultas y otros aparatos para lanzar flechas.

Problema 1

En un triángulo rectángulo ABC recto B, de incentro I, la suma de los cuadrados de las áreas de las regiones ABI y BCI es ℓ. Calcule el área de la región ACI.

A) $\dfrac{\sqrt{\ell}}{2}$ B) $\sqrt{\ell}$ C) $\sqrt{2\ell}$

D) $\sqrt{\dfrac{\ell}{2}}$ E) $\sqrt{\dfrac{\ell}{3}}$

Resolución

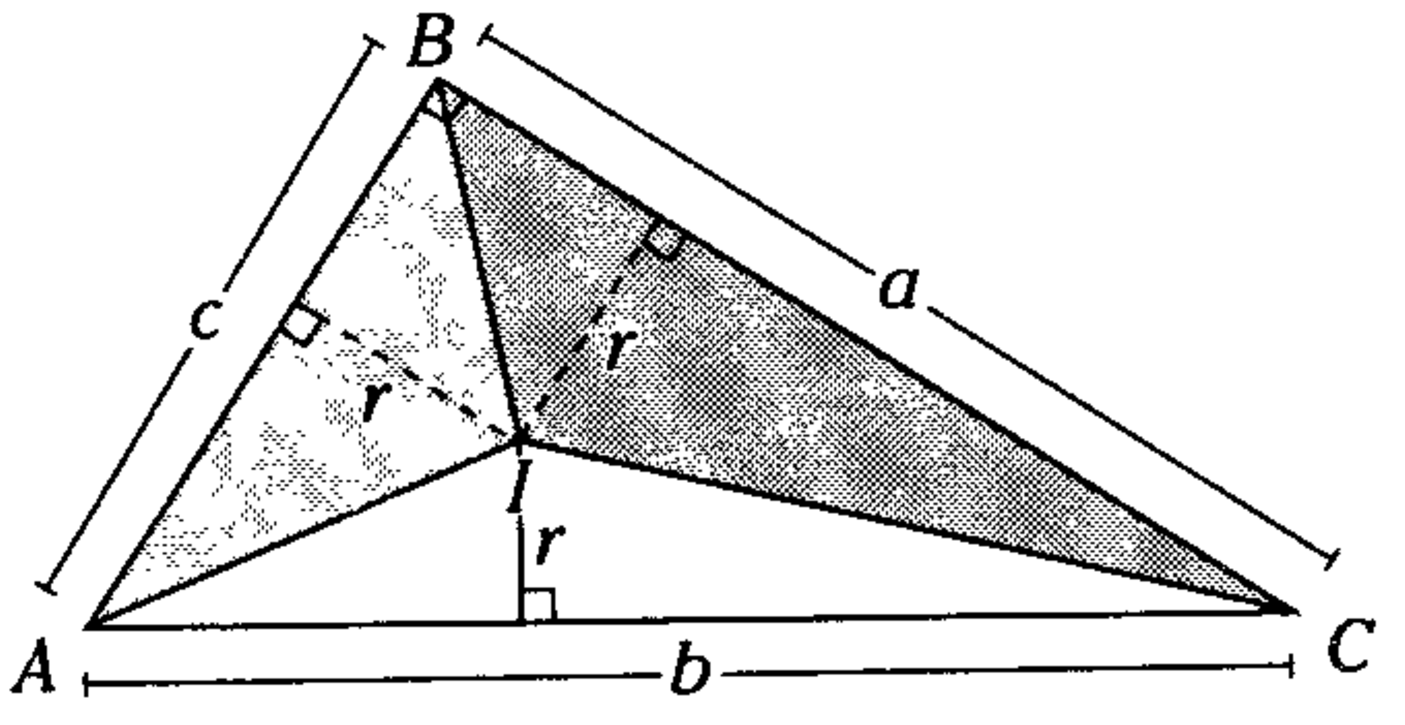


Figura 18.39

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle ACI}$

Datos

I: incentro $\triangle ABC \rightarrow I$: equidista de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$

$$\mathbb{A}^2_{\blacktriangle ABI} + \mathbb{A}^2_{\blacktriangle BCI} = \ell$$

$$\left(\frac{c.r}{2}\right)^2 + \left(\frac{a.r}{2}\right)^2 = \ell$$

Factorizando

$$\frac{r^2}{4}(a^2 + c^2) = \ell \qquad \text{(I)}$$

Pero se sabe: $b^2 = a^2 + c^2$

Reemplazando en (I)

$$\frac{r^2}{4}(b^2) = \ell \rightarrow \left(\frac{rb}{2}\right)^2 = \ell$$

Pero $\mathbb{A}_{\blacktriangle AIC} = \dfrac{br}{2}$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ACI} = \sqrt{\ell}$$

CLAVE B

Problema 2

En un triángulo rectángulo ABC, recto B, exteriormente al triángulo se construyen los triángulos equiláteros ADB y BEC. Calcule la razón de las áreas de las regiones ABC y DBE.

A) 4 B) 3 C) 2

D) 3/2 E) 4/3

Resolución

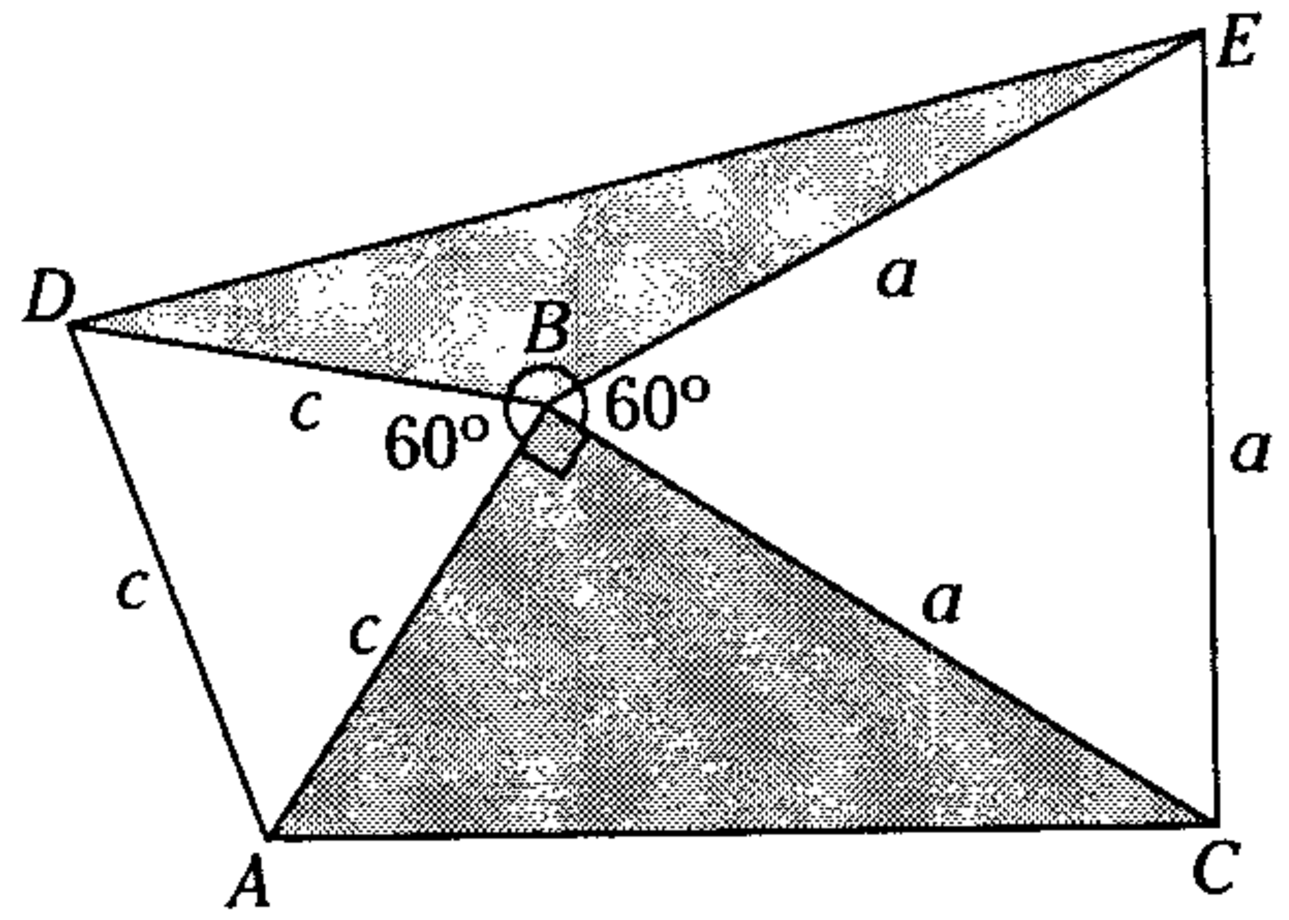


Figura 18.40

Piden $\dfrac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle DBE}}$

En B: $m\sphericalangle DBE = 150°$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{a.c}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle DBE} = \frac{a.c}{2}\operatorname{sen} 150° \qquad \text{(II)}$$

Dividiendo (I) y (II)

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle DBE}} = \frac{\frac{a.c}{2}}{\frac{a.c}{2}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore\ \frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle DBE}} = 2$$

CLAVE C

Problema 3

En un triángulo ABC, se traza la altura BH, tal que $m\sphericalangle ABH = 2(m\sphericalangle HBC)$, $2(AH) = 5(HC)$ y $AB = 6$. Halle el área de la región triangular BHC.

A) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

D) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

Resolución

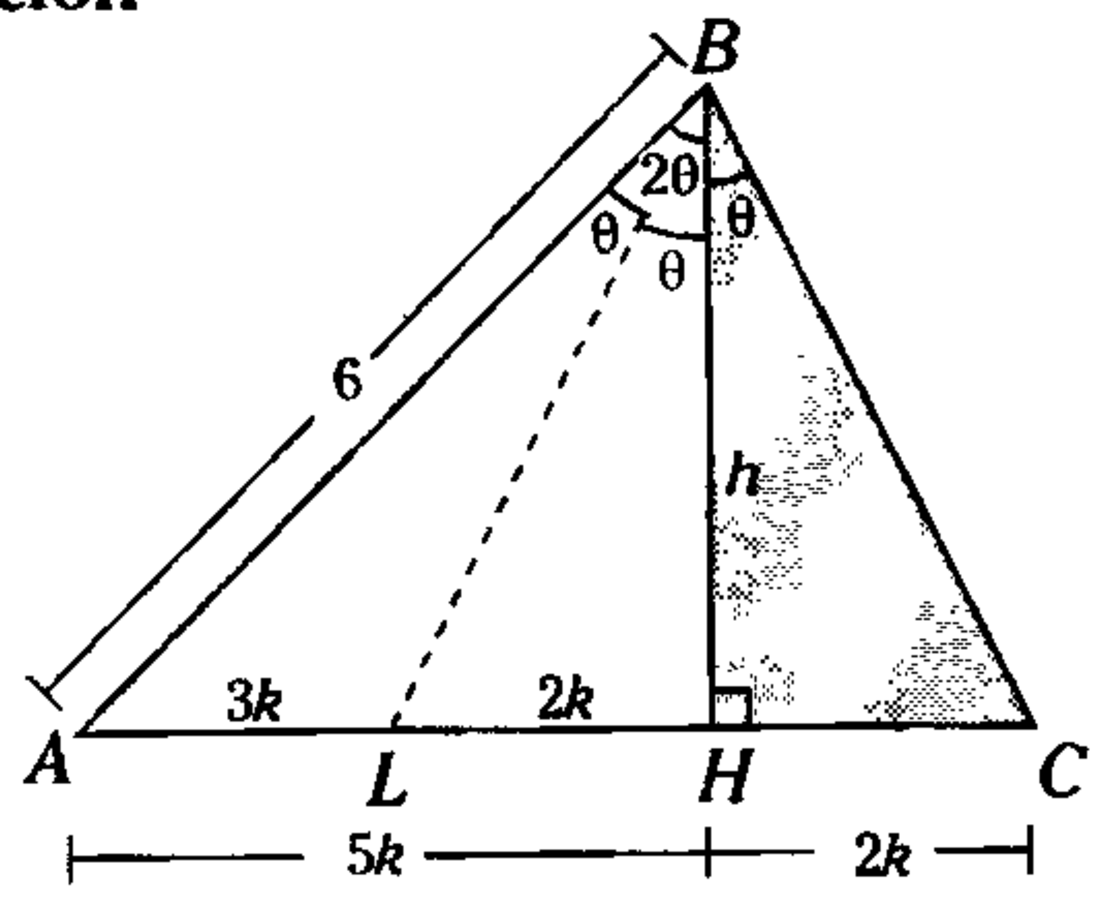


Figura 18.41

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle BHC}$

Datos: $2(AH) = 5(HC)$, sea $AH = 5k \rightarrow HC = 2k$

$m\sphericalangle ABH = 2(m\sphericalangle HBC)$, sea $m\sphericalangle HBC = \theta$

$\rightarrow m\sphericalangle ABH = 2\theta$

Por la fórmula básica

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle BHC} = \frac{(2k)h}{2} \qquad \text{(I)}$$

Se traza la bisectriz interior BL del $\triangle ABH$ se nota

$LH = HC = 2k \rightarrow AL = 3k$

$\triangle AHB$, teorema de la bisectriz interior

$$\frac{h}{6} = \frac{2k}{3k} \rightarrow h = 4$$

$\triangle AHB$, teorema de Pitágoras

$$(5k)^2 + 4^2 = 6^2$$

$$(5k)^2 = 20 \rightarrow k = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Reemplazando en (I)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle BHC} = \left(2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\frac{4}{2}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle BHC} = \frac{8}{5}\sqrt{5}$$

CLAVE E

Problema 4

En un triángulo ABC, $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$. Si la mediatriz de $\overline{AB}$ interseca a $\overline{BC}$ en P y a la circunferencia circunscrita al triángulo APC en Q; además, $BQ = \ell$, determine el área de la región triangular ABC.

A) $(a + b + c)\,\frac{\ell}{2}$ B) $\frac{(ac)^2}{b\ell}$

C) $\frac{abc}{\ell}$

D) $\frac{abc}{4\ell}$ E) $\frac{abc}{2\ell}$

Resolución

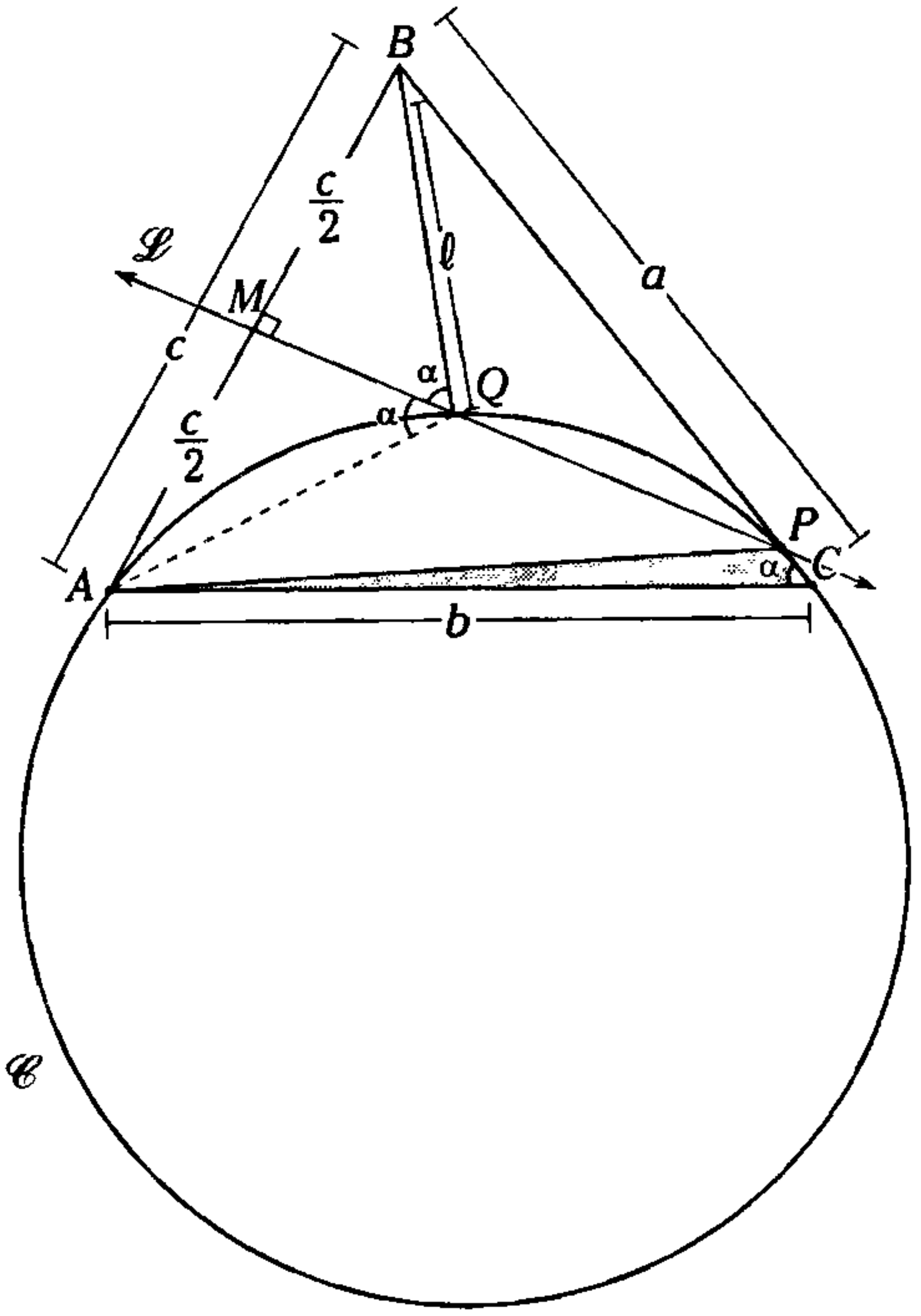


Figura 18.42

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}$

Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ mediatriz de $\overline{AB}$ $\rightarrow BQ = QA$

Se nota que $AQPC$: ▰ inscrito en $\mathscr{C}$

$\rightarrow m\sphericalangle MQA = m\sphericalangle ACP = \alpha$

Por propiedad: $m\sphericalangle BQM = m\sphericalangle AQM = \alpha$

Se observa que $BQ = QA$ y $m\sphericalangle BQA = 2(m\sphericalangle BCA)$

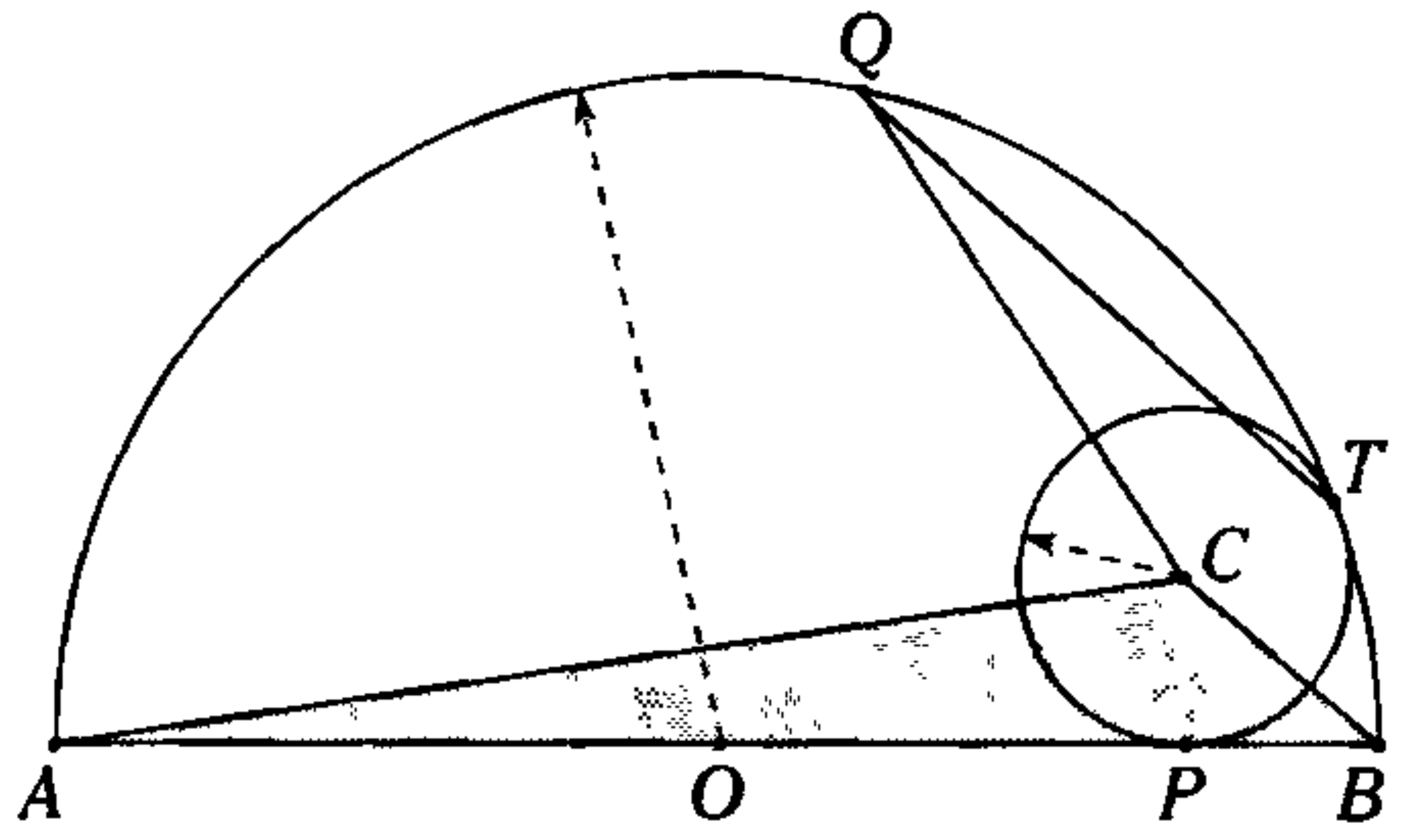
$\rightarrow$ Q: es circuncentro del $\triangle ABC$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{abc}{4\ell}$$

CLAVE D

Problema 5

En la figura, T y P son puntos de tangencia. Si $m\widehat{TQ} = m\sphericalangle TQC$ y $QC = 8$ m, señale el área de la región sombreada.



A) 18 m^2 B) 32 m^2 C) 49 m^2
D) 64 m^2 E) 72 m^2

Resolución

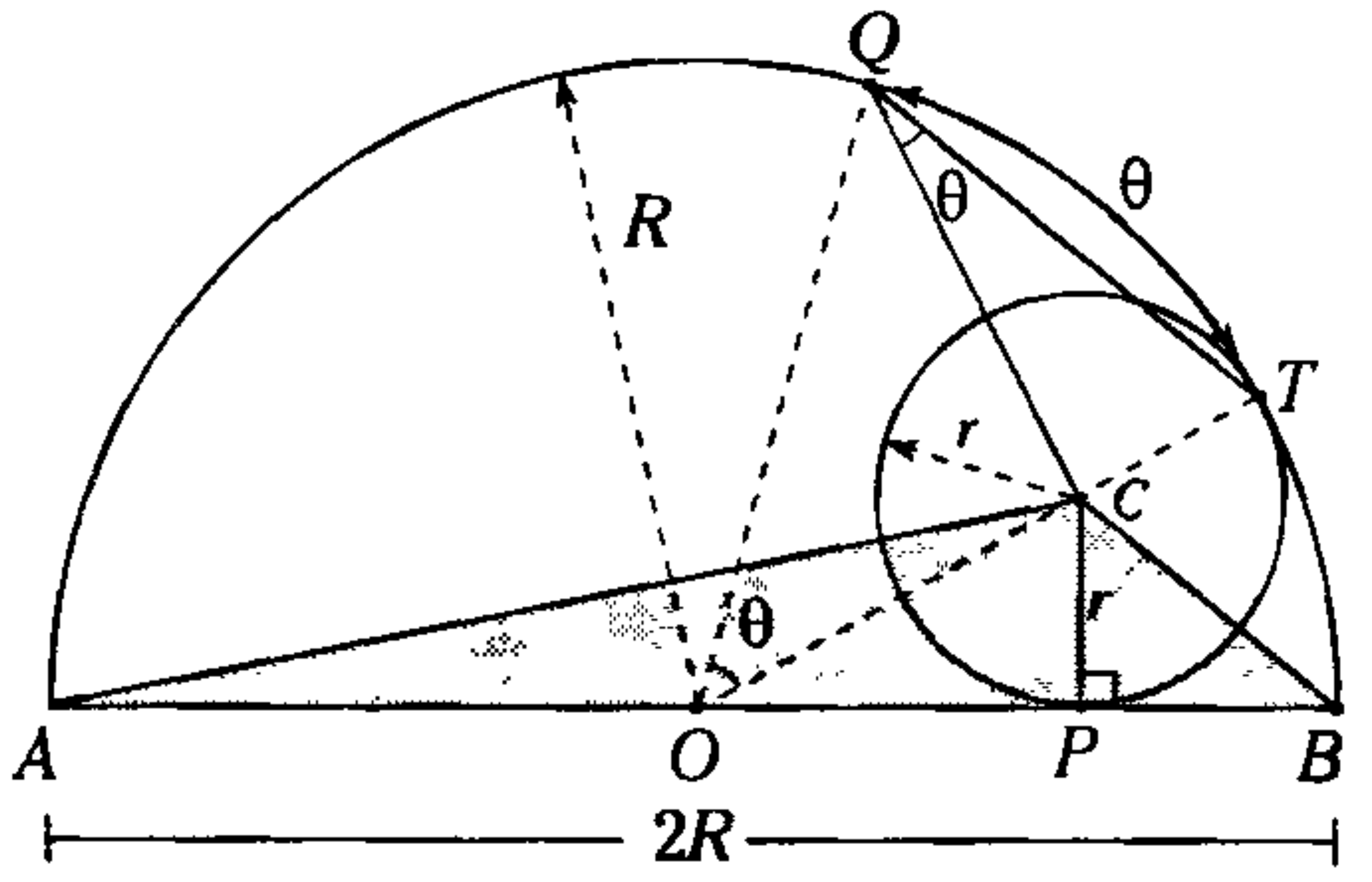


Figura 18.43

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle ACB}$

Se sabe $\overline{CP} \perp \overline{AB}$ en P

Por la fórmula básica

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ACB} = \frac{(AB)(CP)}{2} \qquad \text{(I)}$$

Sea $AB = 2R$, $CP = r$

$$\rightarrow\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ACB} = \frac{2R.r}{2} = Rr \qquad \text{(II)}$$

Se sabe que O, C y T son colineales

Del dato $m\widehat{QT} = m\sphericalangle TQC = \theta$

Por ángulo central $m\sphericalangle TOQ = \theta$

Completando las medidas angulares

$\rightarrow$ $TQ = CQ = 8$

Por propiedad de semejanza en el $\triangle TOQ$

$8^2 = (TO)(TC)$

$8^2 = R.r$

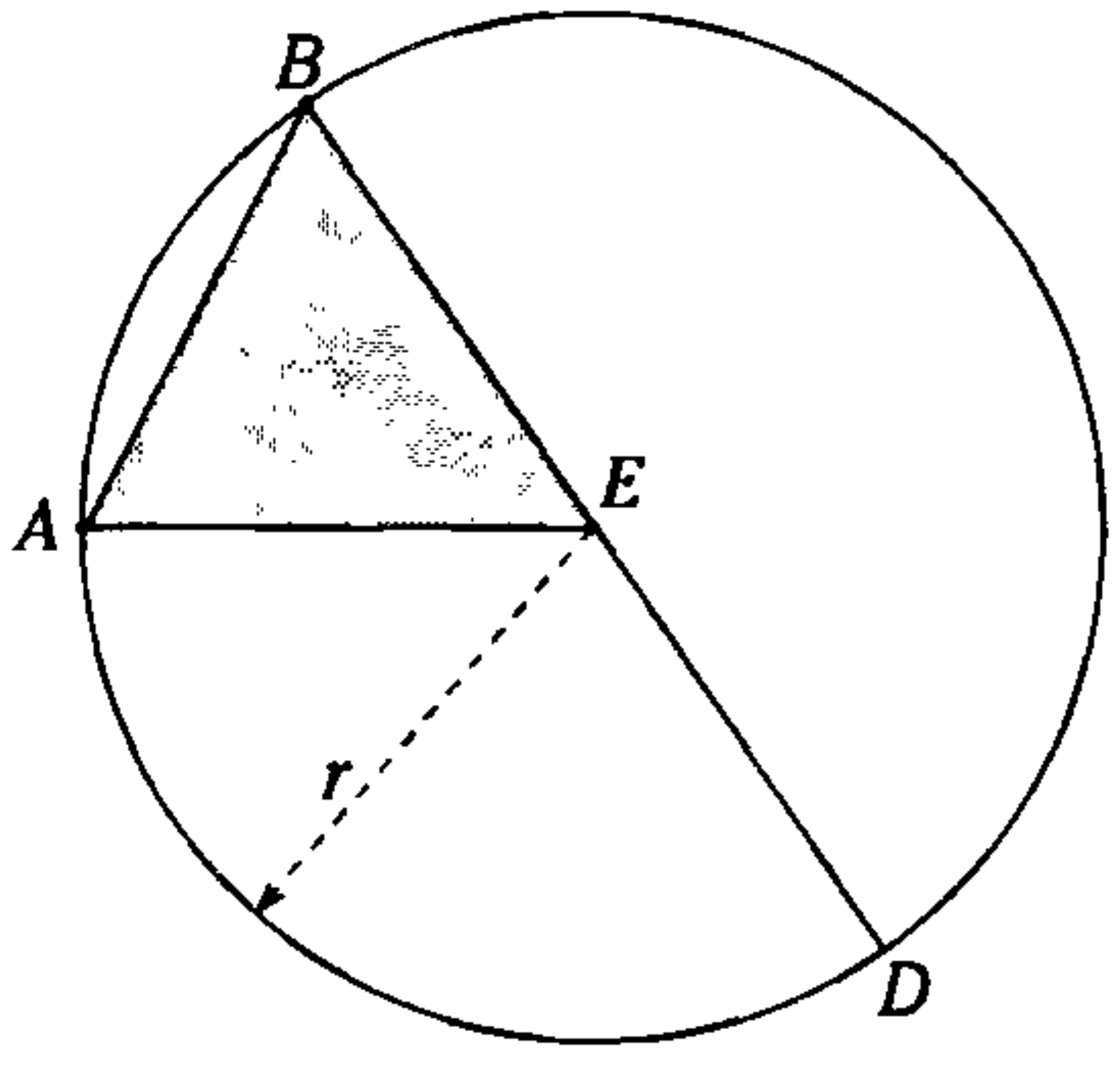
Reemplazando en (II)

$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ACB} = 64\ m^2$

CLAVE D

Problema 6

De la figura, $AE = 8 + 6\sqrt{3}$; $AB = r$ y $m\widehat{AD} = 134°$. Señale el área de la región sombreada.



A) $4(5\sqrt{3}+6)\ u^2$

B) $6(4\sqrt{3}+11)\ u^2$

C) $8(3\sqrt{3}+7)\ u^2$

D) $8(4\sqrt{3}+9)\ u^2$

E) $(4\sqrt{3}+7)\ u^2$

Resolución

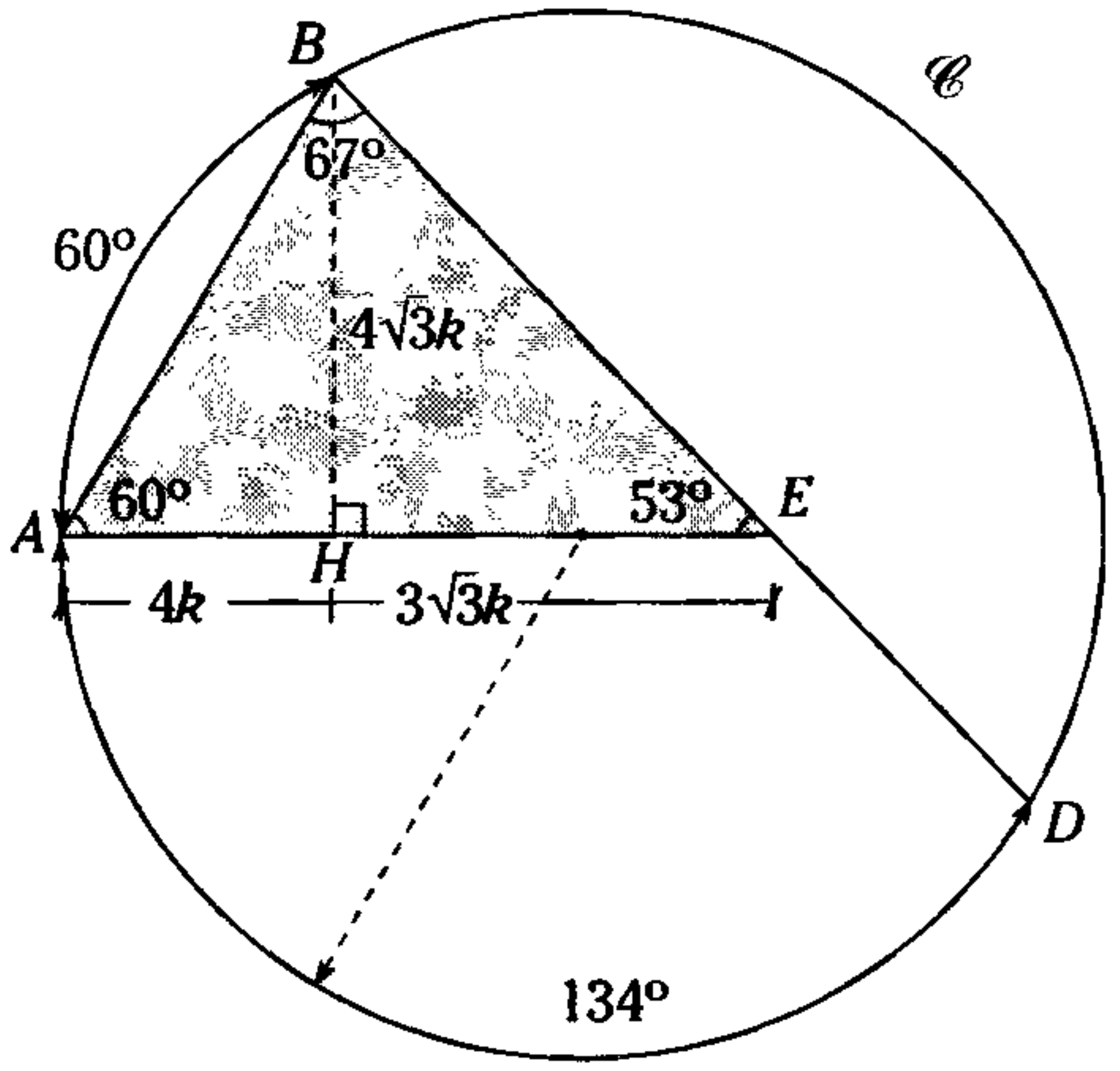


Figura 18.44

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABE}$

Como $AB = r \rightarrow \text{m}\widehat{AB} = 60°$ y $\text{m}\sphericalangle BAE = 60°$

Por ángulo inscrito $\text{m}\sphericalangle ABE = 67°$

$\triangle ABE$:

$$60° + 67° + \text{m}\sphericalangle ABE = 180°$$

$$\rightarrow \text{m}\sphericalangle BEA = 53°$$

Luego al trazar $\overline{BH} \perp \overline{AE}$ ($H \in \overline{AE}$) formamos 2 triángulos rectángulos (notable de 30° y el aproximado de 53°)

Si $AH = 4k \rightarrow BH = 4\sqrt{3}k$ y $HE = 3\sqrt{3}k$

Del dato

$$8 + 6\sqrt{3} = (4 + 3\sqrt{3})k \rightarrow k = 2$$

Aplicando la fórmula básica

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABE} = \frac{(8+6\sqrt{3})(8\sqrt{3})}{2}$$

$$\therefore \mathbb{A}_{\blacktriangle ABE} = 8(4\sqrt{3} + 9)\text{u}^2$$

CLAVE D

Problema 7

En un triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores AM y CN que se intersecan en E. Luego, se prolonga $\overline{CN}$ hasta L, tal que $\overline{NM} \parallel \overline{LB}$. Si $AN = 2(NB)$, $3(LN) = 2(NC)$ y el área de la región triangular NME es $\mathbb{A}$, determine el área de la región ANE.

A) $(5/3)\mathbb{A}$ B) $2\mathbb{A}$ C) $(5/2)\mathbb{A}$
D) $(8/3)\mathbb{A}$ E) $(10/3)\mathbb{A}$

Resolución

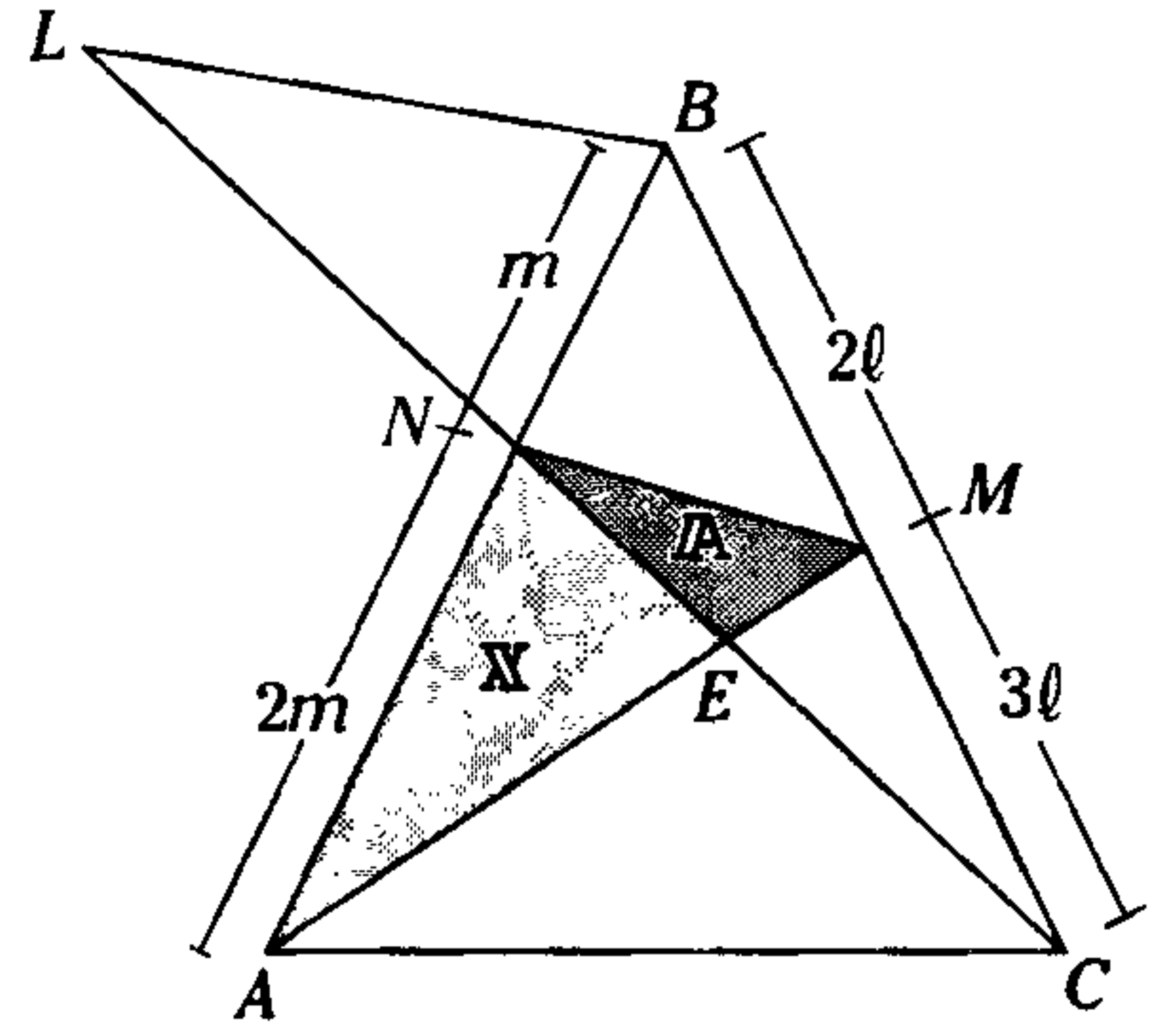


Figura 18.45

Piden $\mathbb{X}$ (área de la región ANE)

Datos

$AN = 2(NB)$, sea $NB = m \rightarrow AN = 2m$

$3(LN) = 2(NC)$, sea $LN = 2k \rightarrow NC = 3k$

Como $\overline{NM} \parallel \overline{LB}$: Por corolario del teorema de Tales $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{LN}{NC} = \dfrac{2k}{3k}$

$\triangle ABM$ ($\overline{NC}$: secante) del teorema de Menelao

$$(m)(AE)(3\ell) = 2m(EM)(5\ell)$$

$$\rightarrow \frac{AE}{EM} = \frac{10}{3}$$

$\triangle ANM$: por relación de áreas

$$\frac{\mathbb{X}}{\mathbb{A}} = \frac{AE}{EM}$$

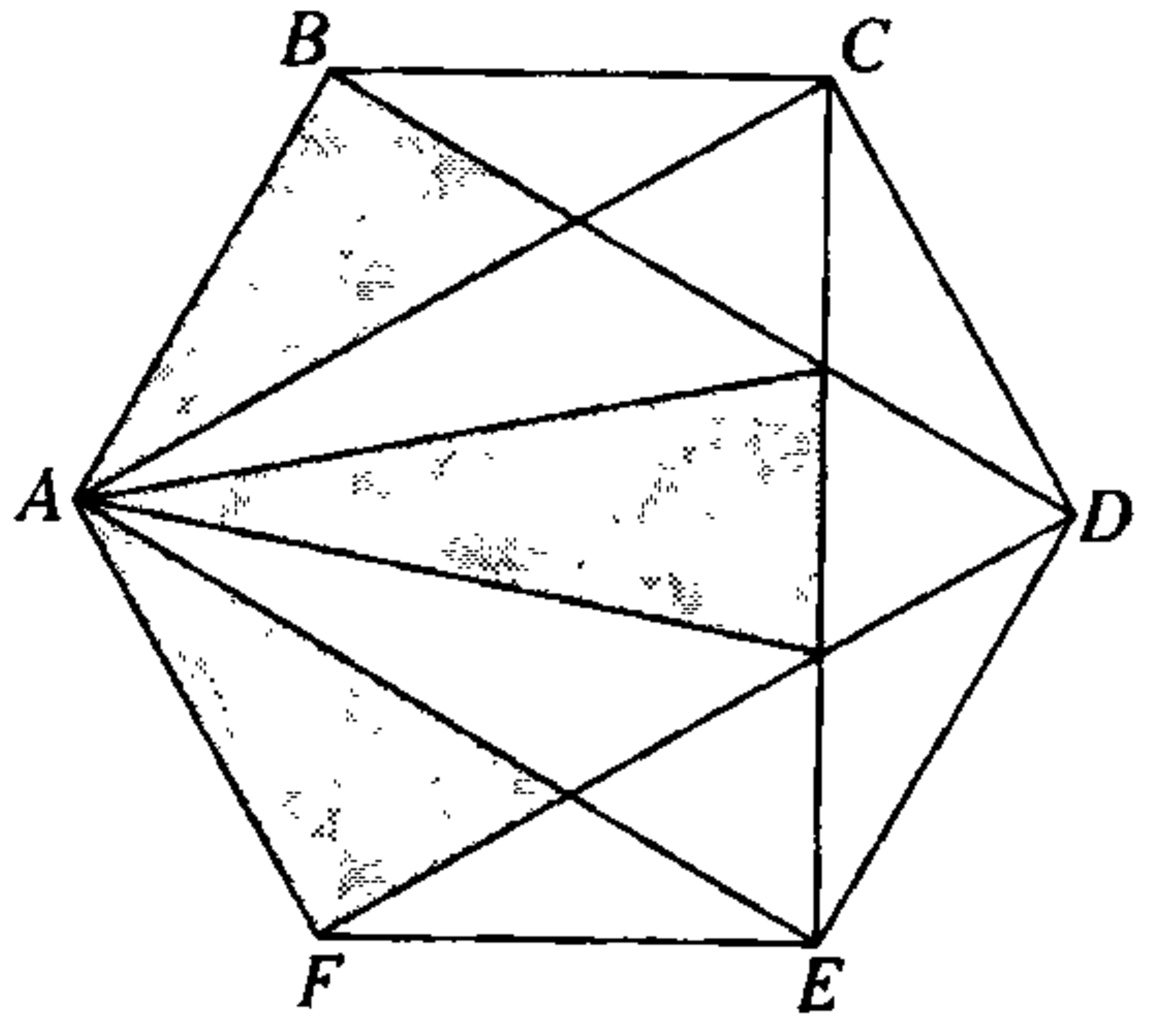
$$\therefore \mathbb{X} = \frac{10}{3}\mathbb{A}$$

CLAVE E

Problema 8

Según la figura, $ABCDEF$ es un exágono regular. Si $BC = 4\sqrt{3}$, indique la suma de las áreas de las regiones sombreadas.

A) $26\sqrt{2}$
B) $32\sqrt{3}$
C) $28\sqrt{3}$
D) $36\sqrt{3}$
E) $40\sqrt{3}$



Resolución

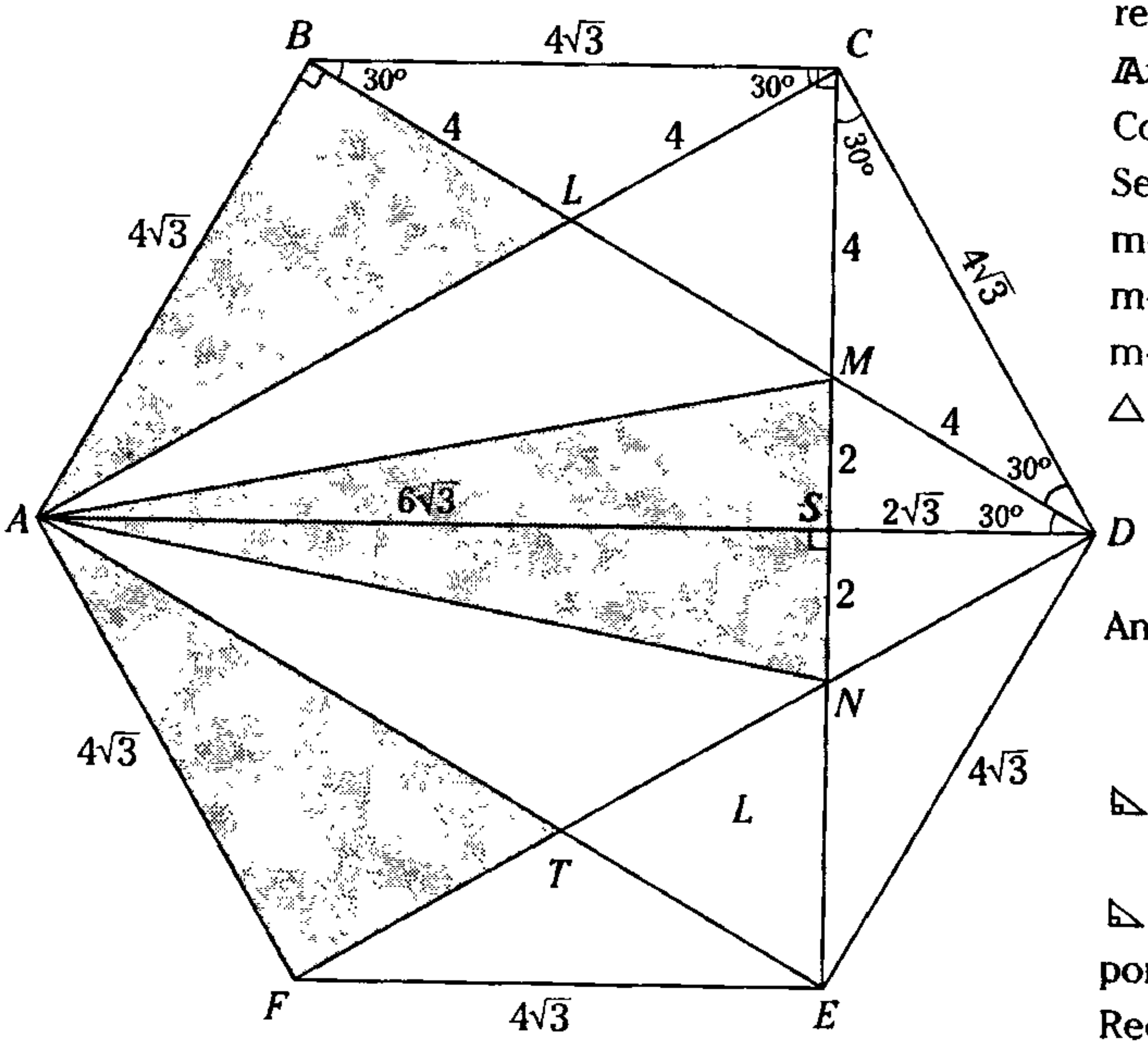


Figura 18.46

Piden la suma de las áreas de las regiones sombreadas: $\mathbb{A}x$

$$\mathbb{A}x = \mathbb{A}_{\blacktriangle ABL} + \mathbb{A}_{\blacktriangle AMN} + \mathbb{A}_{\blacktriangle FAT} \quad \text{(I)}$$

Como en un exágono regular.

Se sabe

$m\sphericalangle CBD = m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle DCE = m\sphericalangle CDB = m\sphericalangle BDA = 30°$ y

$m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle DSC = 90°$

$\triangle BLC$, $\triangle CMD$: por propiedad:

$BL = LC = CM = MD = 4$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABL} = \frac{4(4\sqrt{3})}{2} = 8\sqrt{3}$$

Analógamente

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle AFT} = \frac{4(4\sqrt{3})}{2} = 8\sqrt{3}$$

$\triangle MSD$: notable de 30°, 60°

$\rightarrow MS = 2$ y $SD = 2\sqrt{3}$

$\triangle ABD$: notable de 30° $\rightarrow AD = 8\sqrt{3}$ y por diferencia $AS = 6\sqrt{3}$

Reemplazando en (I)

$$\mathbb{A}x = 8\sqrt{3} + \frac{4(6\sqrt{3})}{2} + 8\sqrt{3}$$

$$\therefore \ \mathbb{A}x = 28\sqrt{3}$$

CLAVE C

Problema 9

En un triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores AN y CE secantes en Q. Si el producto de las áreas de las regiones triangulares ABC y EQN es k, calcule el producto de las áreas de las regiones triangulares EBN y AQC.

A) $\frac{k}{2}$ B) $2k$ C) $3k$

D) $\frac{3k}{2}$ E) k

Resolución

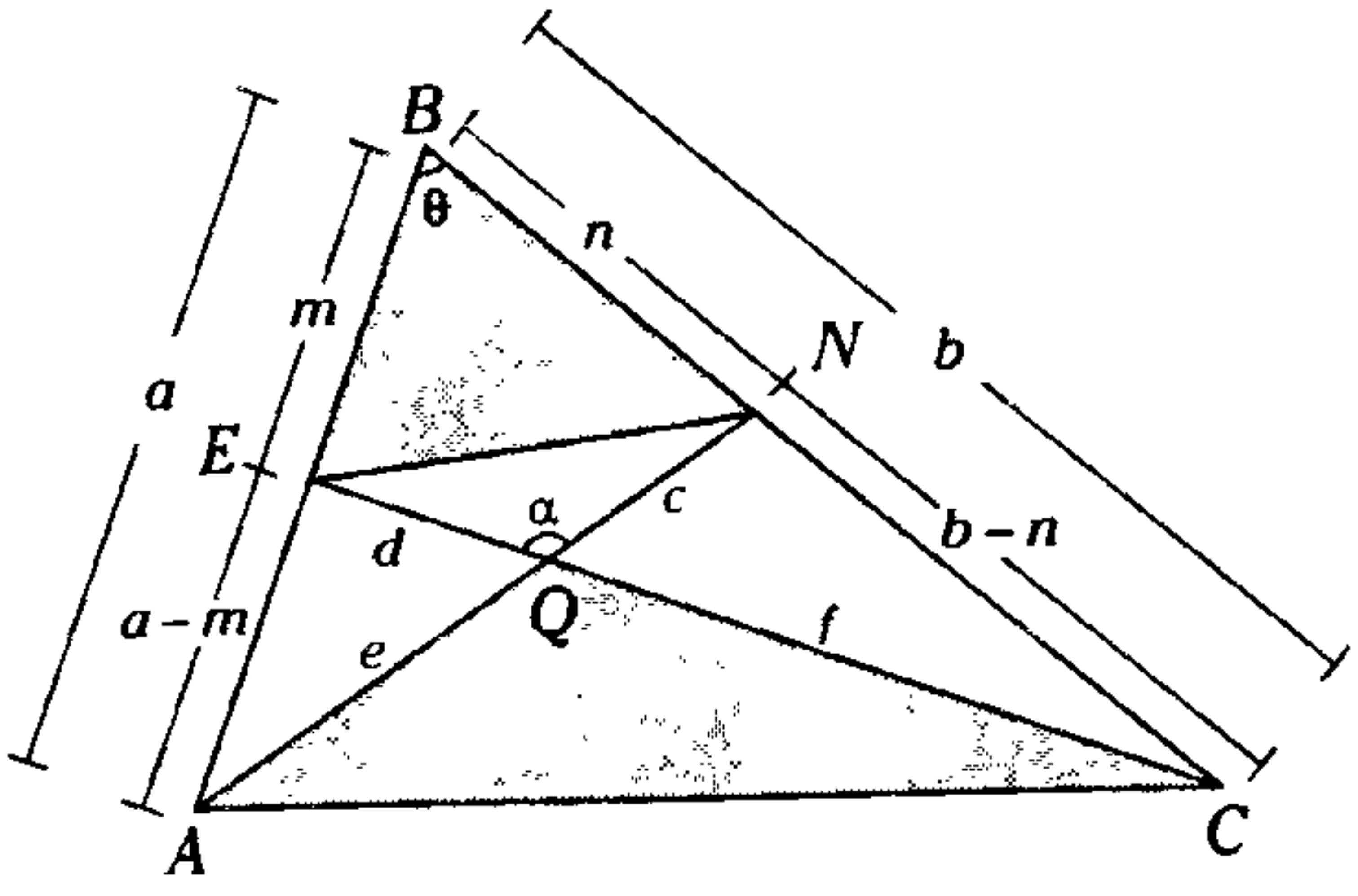


Figura 18.47

Piden $(\mathbb{A}_{\blacktriangle EBN})(\mathbb{A}_{\blacktriangle AQC})$

Dato $(\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC})(\mathbb{A}_{\blacktriangle EQN})=k$

Sea $\ell=(\mathbb{A}_{\blacktriangle EBN})(\mathbb{A}_{\blacktriangle AQC})$

Según la figura 18.47

$$\left(\frac{ab\operatorname{sen}\theta}{2}\right)\left(\frac{cd\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)=k$$

$$\left(\frac{mn\operatorname{sen}\theta}{2}\right)\left(\frac{ef\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)=\ell$$

Luego

$$\frac{(a)(b)(c)(d)}{(m)(n)(e)(f)}=\frac{k}{\ell} \qquad \text{(I)}$$

Se observa

$\triangle EBC$: (T. Menelao) $\overleftrightarrow{AN}$ es la recta secante

$\rightarrow\ n(f)(a-m)=(b-n)(d)(a) \qquad \text{(II)}$

$\triangle ABN$: (T. Menelao) $\overleftrightarrow{EC}$ es la recta secante

$\rightarrow\ (m)(e)(b-n)=(a-m)(c)(b) \qquad \text{(III)}$

Al multiplicar las ecuaciones (III) y (II), se obtiene

$$(n)(f)(m)(e)=(a)(d)(b)(c)$$

Reemplazando en (I)

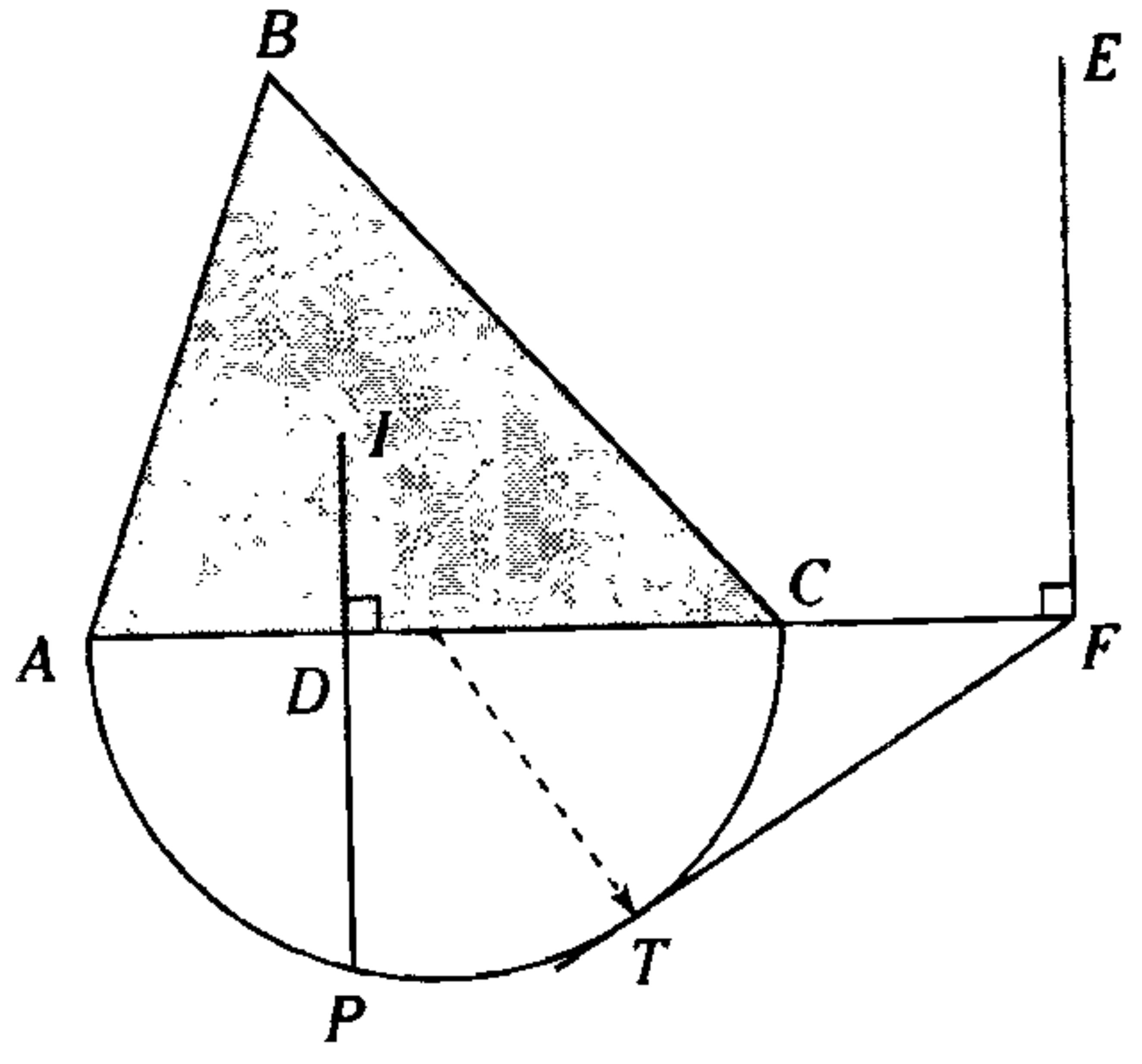
$$\ell=k$$

$$\therefore\ (\mathbb{A}_{\blacktriangle EBN})(\mathbb{A}_{\blacktriangle AQC})=k$$

CLAVE E

Problema 10

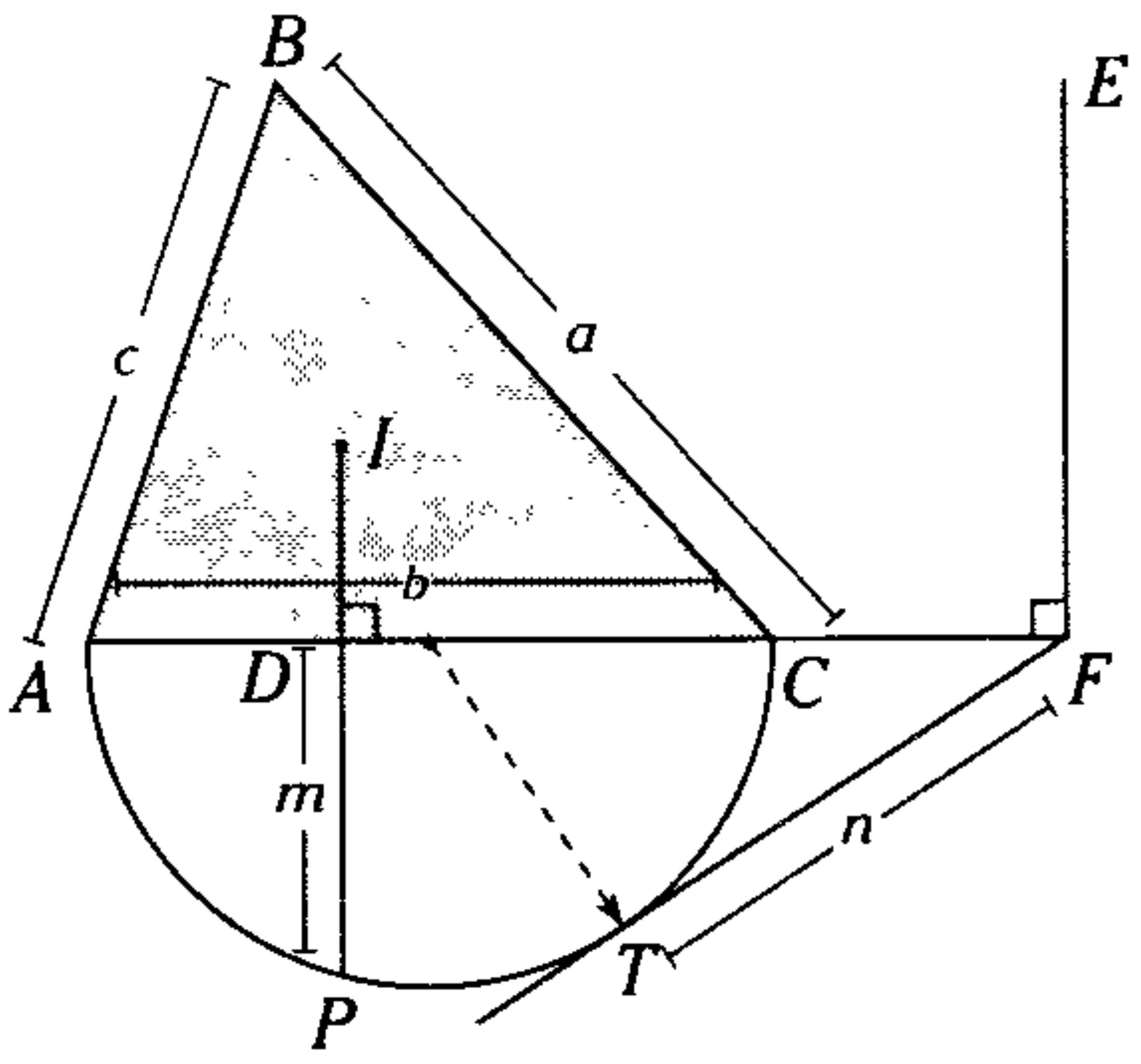
Según la figura mostrada, tanto I como E representan el incentro y el excentro del triángulo ABC. Si T es punto de tangencia $DP=m$ y $FT=n$, halle el área de la región ABC.



A) $(m+n)n$ B) $\frac{mn}{2}$ C) $2(mn)$

D) $(m+n)m$ E) mn

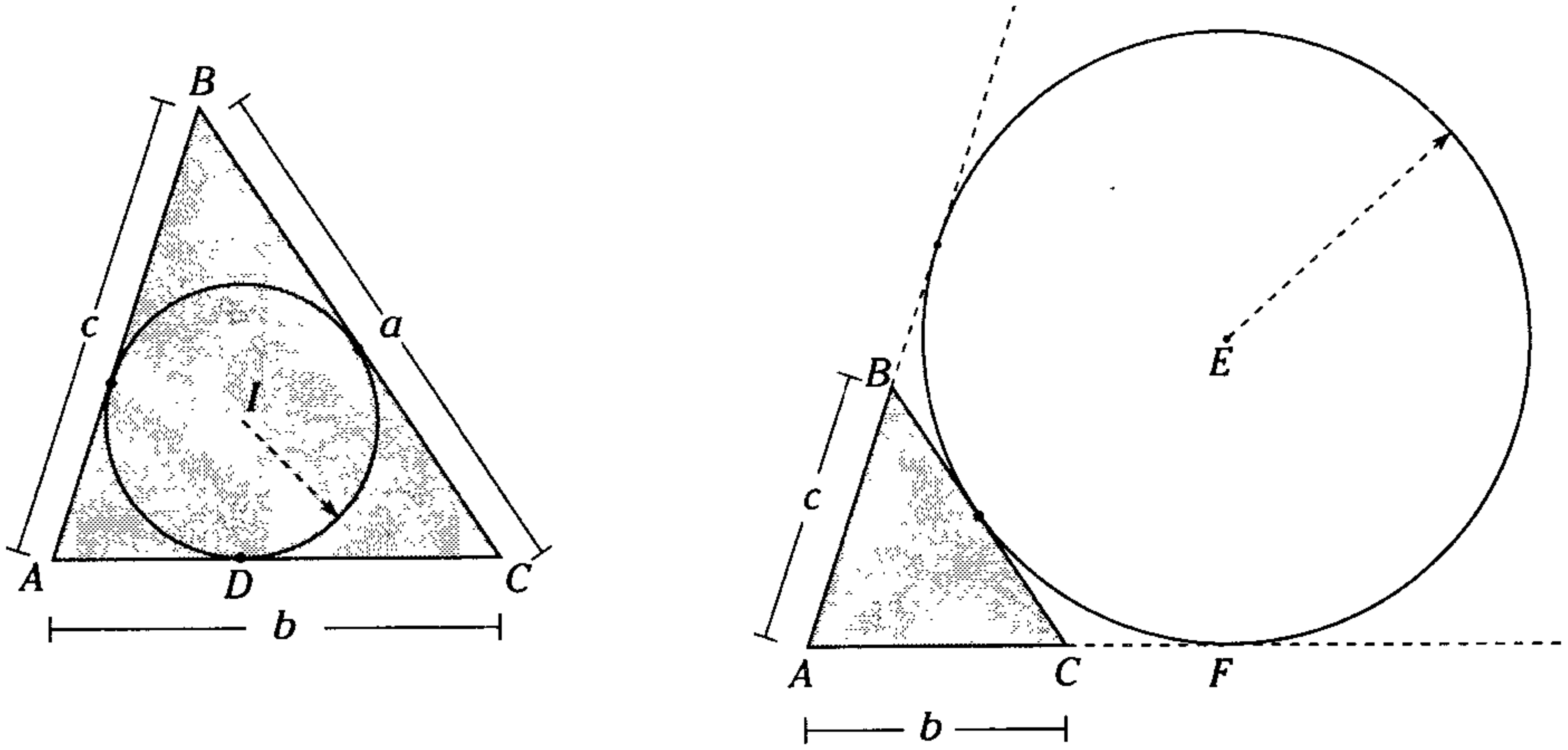
Resolución



(a)

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{(I)}$$



(b)

Figura 18.48

De la figura 18.48(b), I y E son el incentro y el excentro del triángulo ABC.

Se cumple

$$AD = p-a,\ DC = p-c,\ CF = p-b \ \text{ y } \ AF = p$$

Se considera a p como semiperímetro de la región ABC.

En la semicircunferencia

$$m^2 = (AD)\,(DC) = (p-a)(p-c)$$

Teorema de la tangente:

$$n^2 = (AF)\,(CF) = (p)\,(p-b)$$

En (I)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \sqrt{m^2n^2}$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = mn$$

CLAVE E

Problema 11

De la figura, T, B y K son puntos de tangencia. Si $BK = 8$, indique el área de la región triangular ABC.

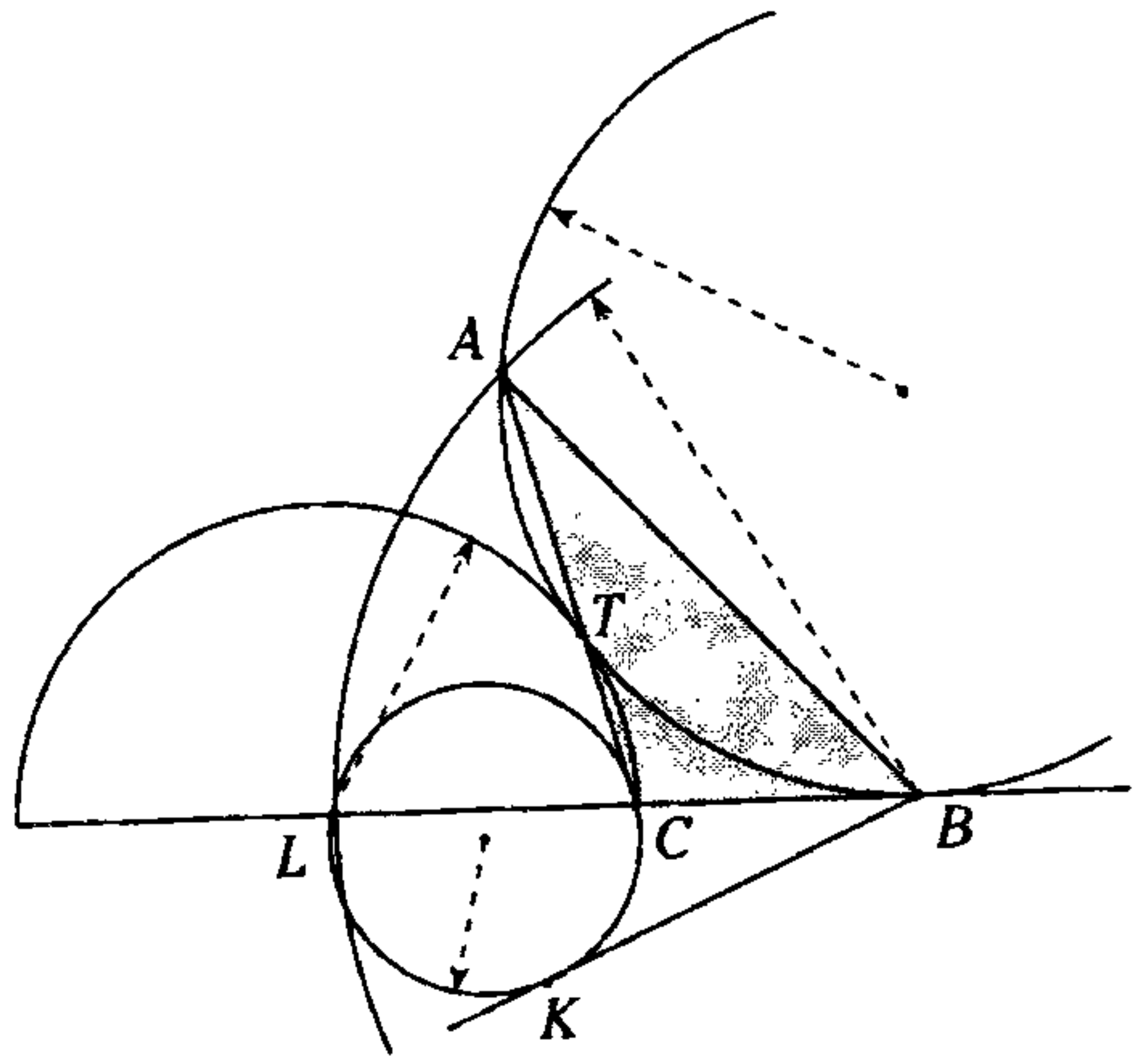
A) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

B) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{5}$

C) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

D) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$

E) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$



Resolución

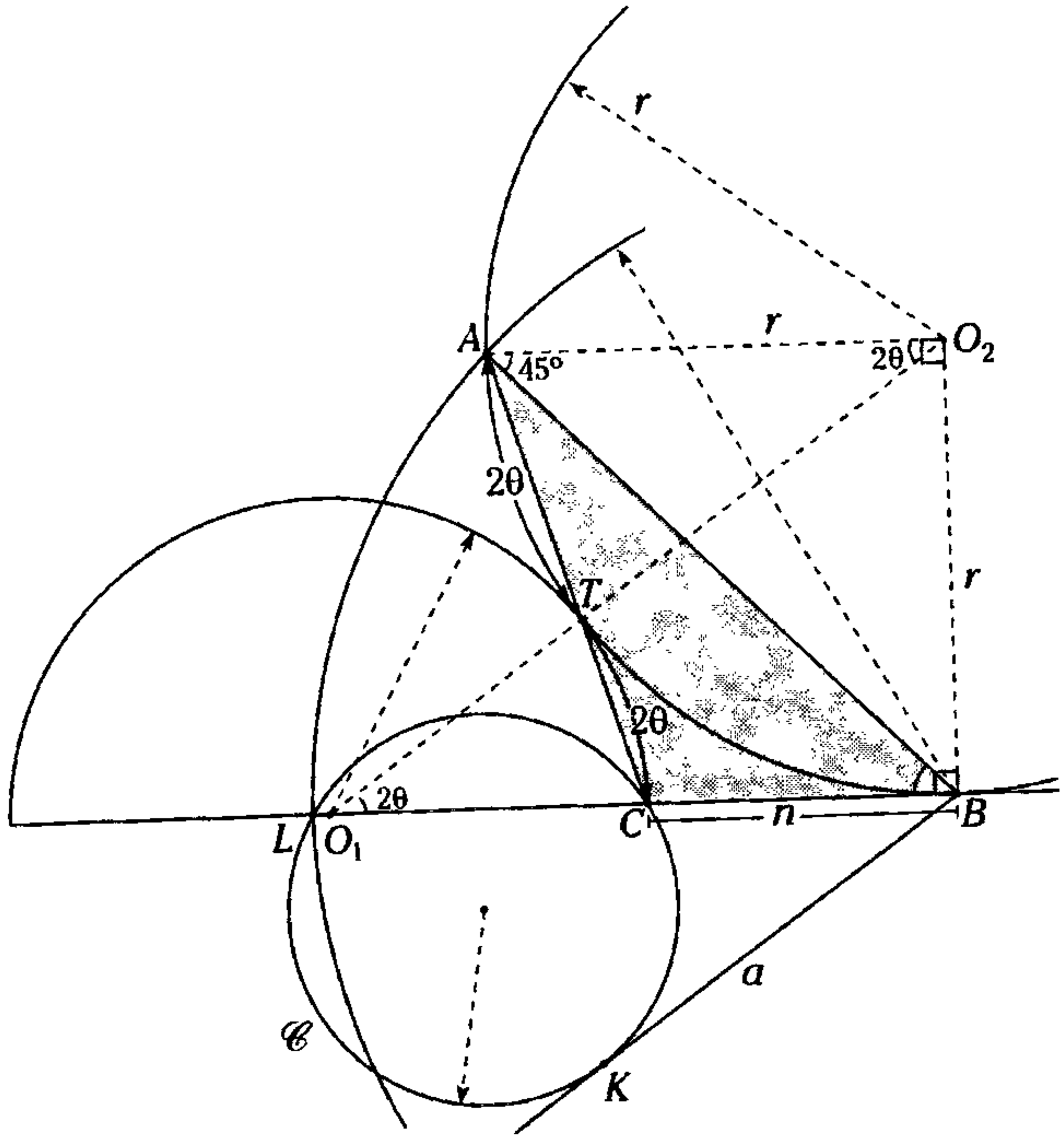


Figura 18.49

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{(AB)n}{2}\,\text{sen}(m\sphericalangle ABC) \qquad \text{(I)}$$

Se sabe que O_1, T y O_2 son colineales; también, $m\widehat{AT} = m\widehat{TC}$

$\rightarrow\ \overline{AO_2} \,//\, \overline{CO_1}$ y $m\sphericalangle AO_2B = 90°$

Por paralelas $m\sphericalangle ABC = 45°$

En $\mathscr{C}$: teorema tangente

$a^2 = (LB)(n)$

Como $AB = LB \ \rightarrow\ a^2 = (AB)\,n$

Reemplazando en (I)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{a^2}{2}\,\text{sen}45°$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

CLAVE D

Problema 12

Calcule el área de la región sombreada. Si T es punto de tangencia. ($\mathscr{C}$ esta inscrita en $ABCD$)

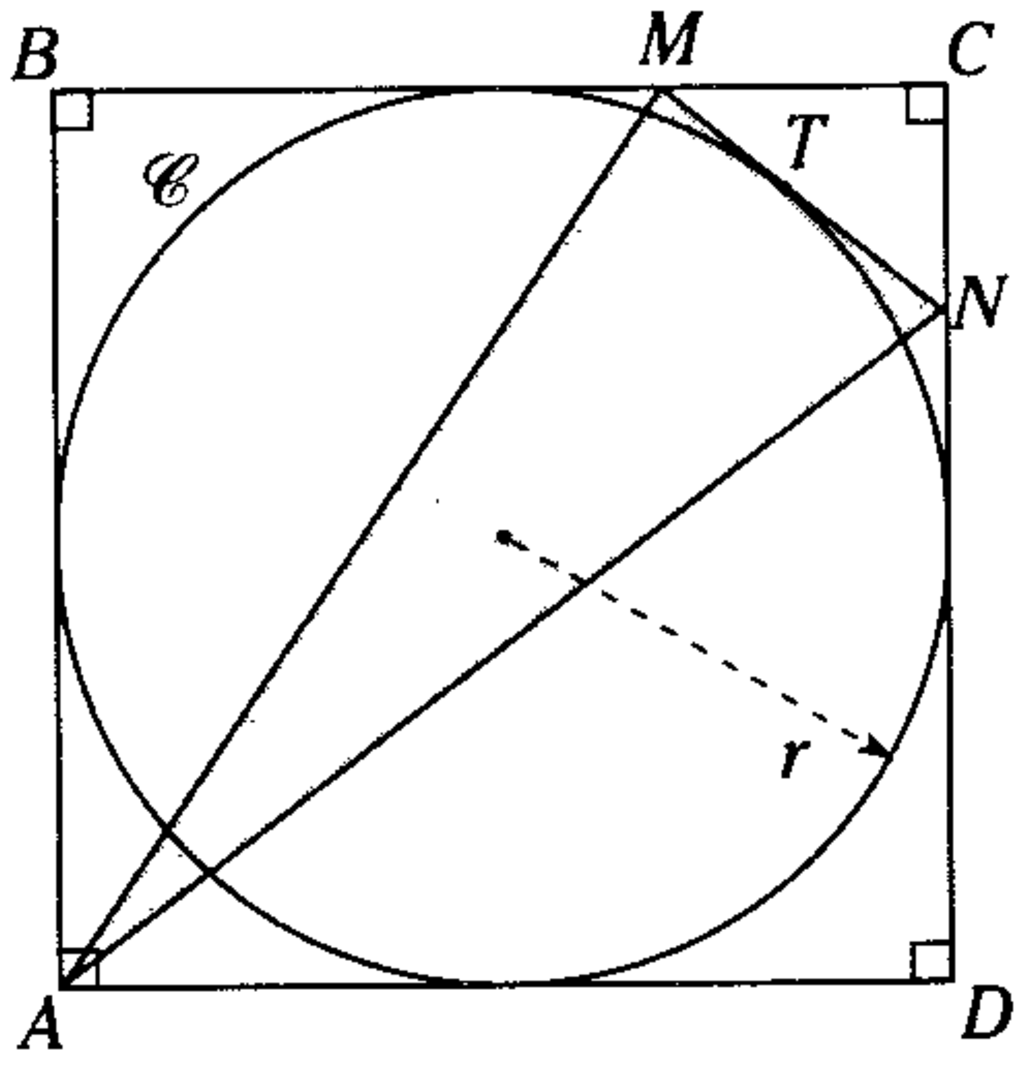
A) $\frac{r^2}{2}$

B) $\frac{3r^2}{5}$

C) r^2

D) $\frac{r^2}{3}$

E) $\frac{r^2}{4}$



Resolución

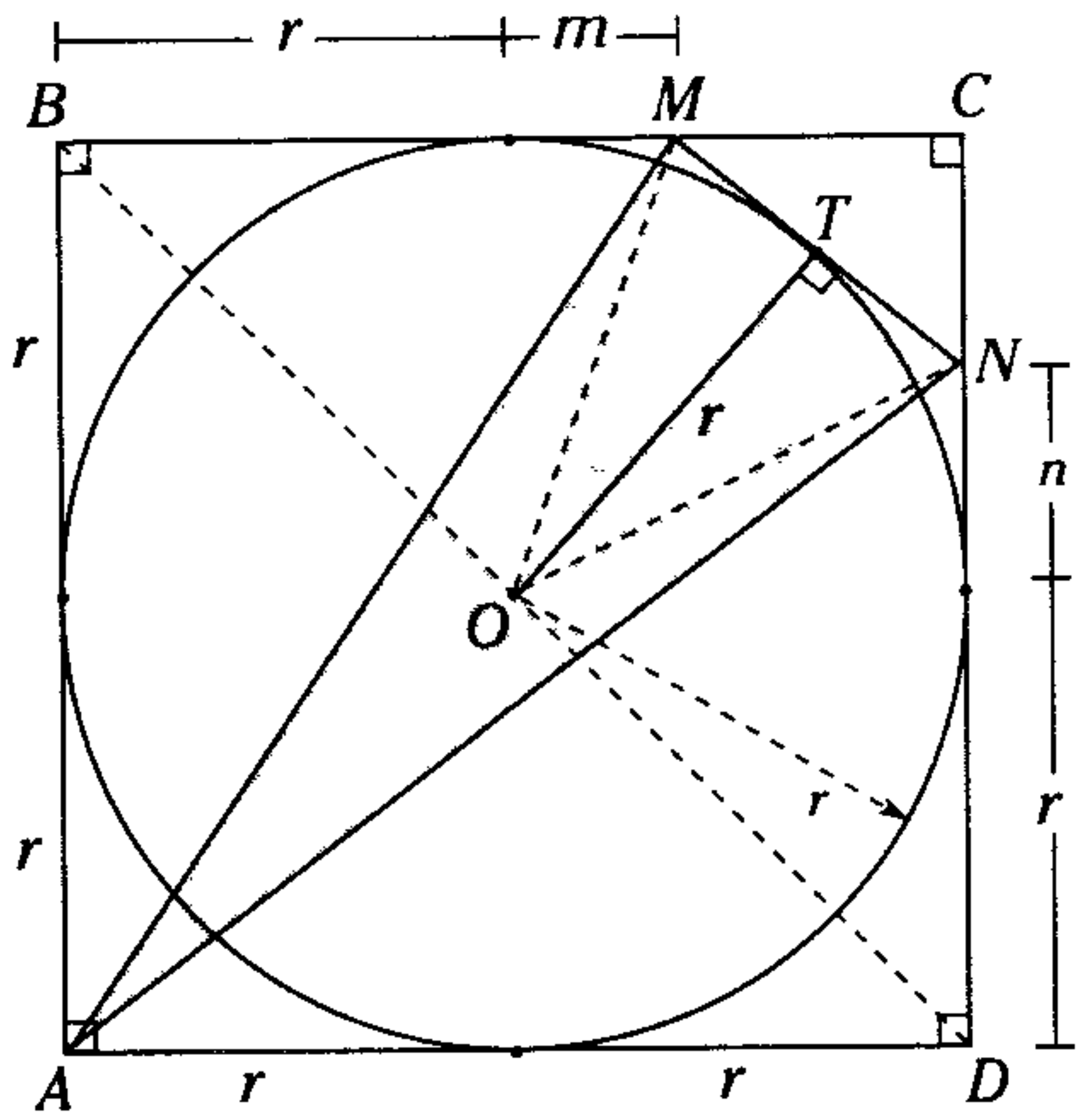


Figura 18.50

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle MNA}$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle AMN} = \mathbb{A}_{\blacktriangle BAD} + \mathbb{A}_{\blacktriangle BMO} + \mathbb{A}_{\blacktriangle DNO} + \mathbb{A}_{\blacktriangle MNO} - \mathbb{A}_{\blacktriangle ABM} - \mathbb{A}_{\blacktriangle ADN}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle AMN} = \frac{(2r)(2r)}{2} + \frac{(r+m)(r)}{2} + \frac{(r+n)(r)}{2} + \frac{(m+n).(r)}{2} - \frac{2r(r+m)}{2} - \frac{2r(r+n)}{2}$$

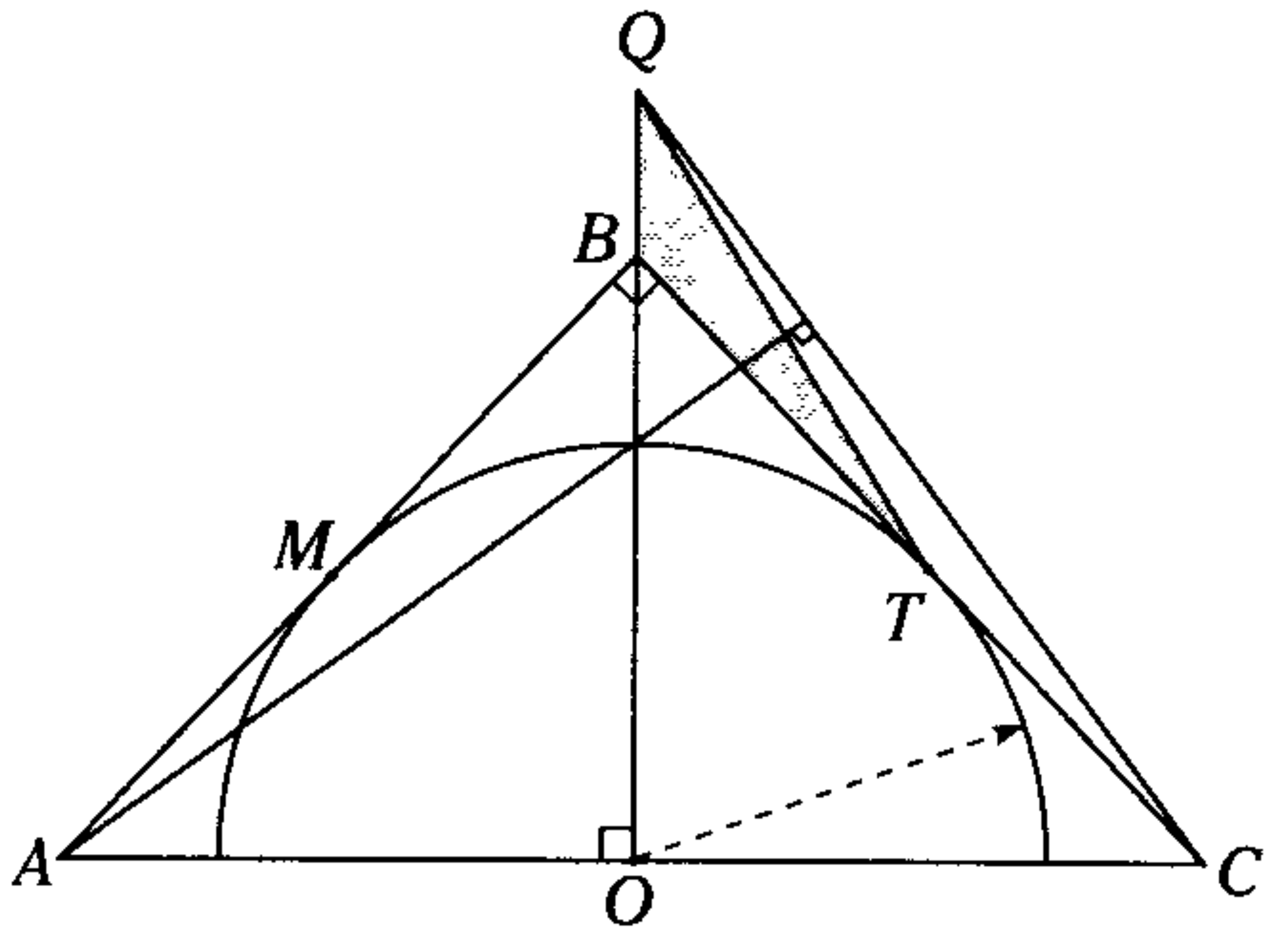
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle AMN} = \frac{2r^2}{2}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle AMN} = r^2$$

CLAVE C

Problema 13

Según la figura, M y T son puntos de tangencia. Si $AB = 2 + \sqrt{2}$, halle el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{2}$ B) $\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{4}$ C) $\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{6}$

D) $\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{8}$ E) $\dfrac{(2+\sqrt{2})}{4}$

Resolución

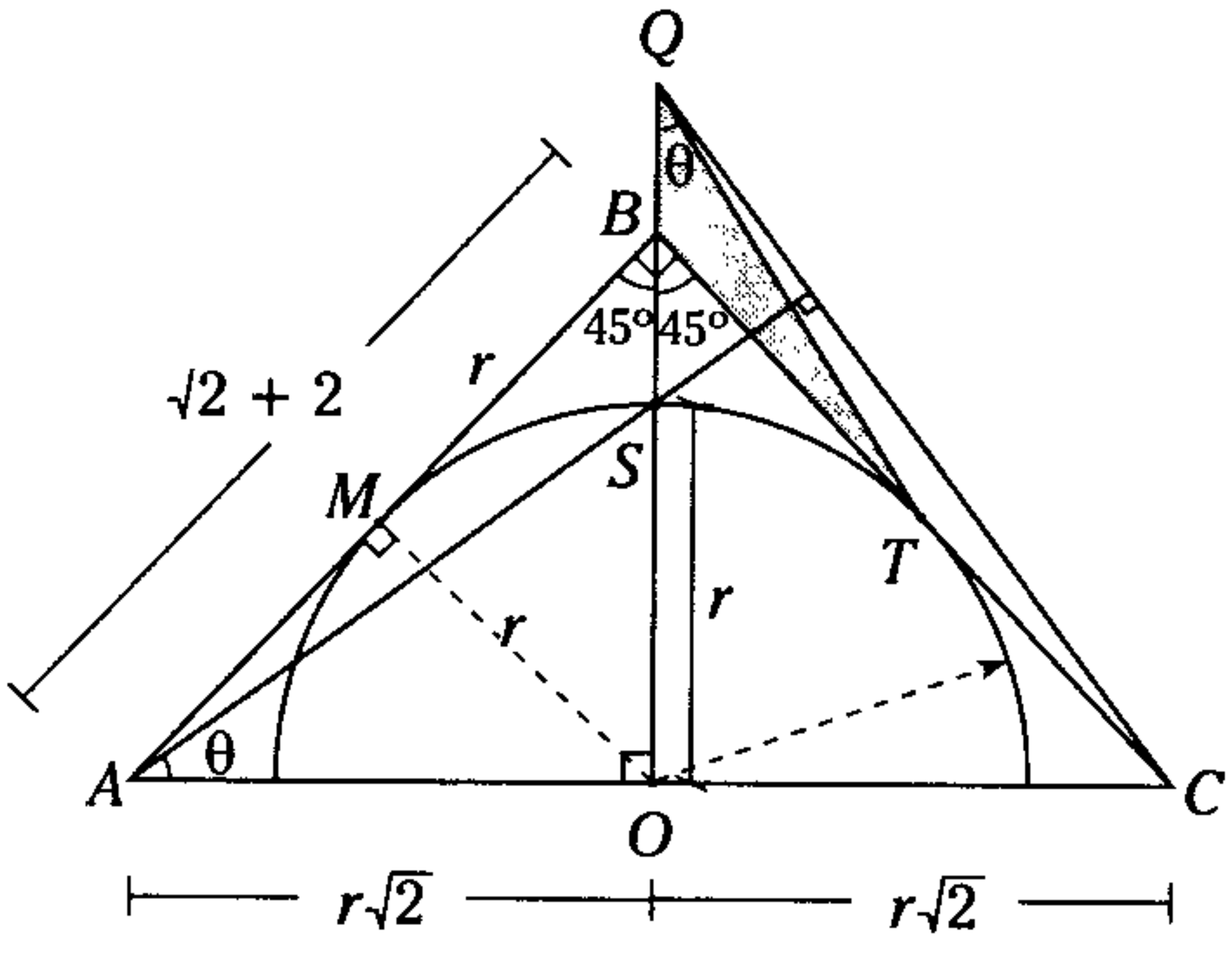


Figura 18.51

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle BQT}$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle BQT} = \frac{(BT)(BQ)}{2} \text{ sen } 135° \qquad \text{(I)}$$

De la figura, $BM = BT = MA = \dfrac{\sqrt{2}+2}{2}$ (II)

⊾$COQ \sim$ ⊾SOA (A.A.A.)

$$\frac{OQ}{r\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{r} \rightarrow OQ = 2r$$

De la figura

$$BQ = OQ - OB$$

$$BQ = 2r - r\sqrt{2} = r(2-\sqrt{2})$$

Como

$$r = \frac{\sqrt{2}+2}{2} \rightarrow BQ = \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)(2-\sqrt{2})$$

Por lo cual $BQ = 1$ (III)

Reemplazando (III), (II) en (I)

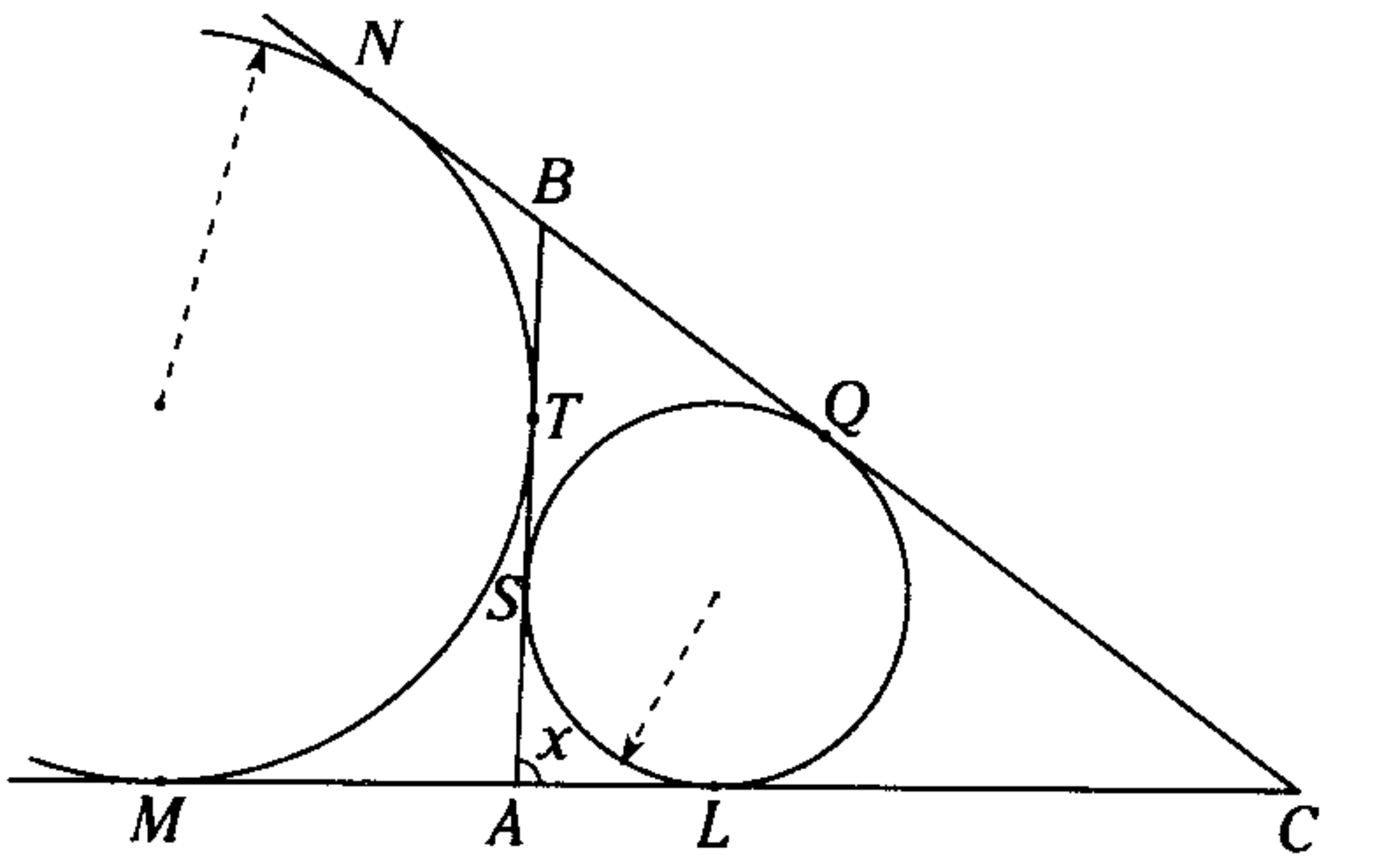
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle BQT} = \frac{(\sqrt{2}+2)}{2} \cdot (1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathbb{A}_{\blacktriangle BQT} = \frac{(\sqrt{2}+1)}{4}$$

CLAVE B

Problema 14

De la figura, M, N, T, S, L y Q son puntos de tangencia, mientras que M, A, L y C son puntos armónicos. Calcule x.



A) 60° B) 75° C) 80°

D) 90° E) 120°

Resolución

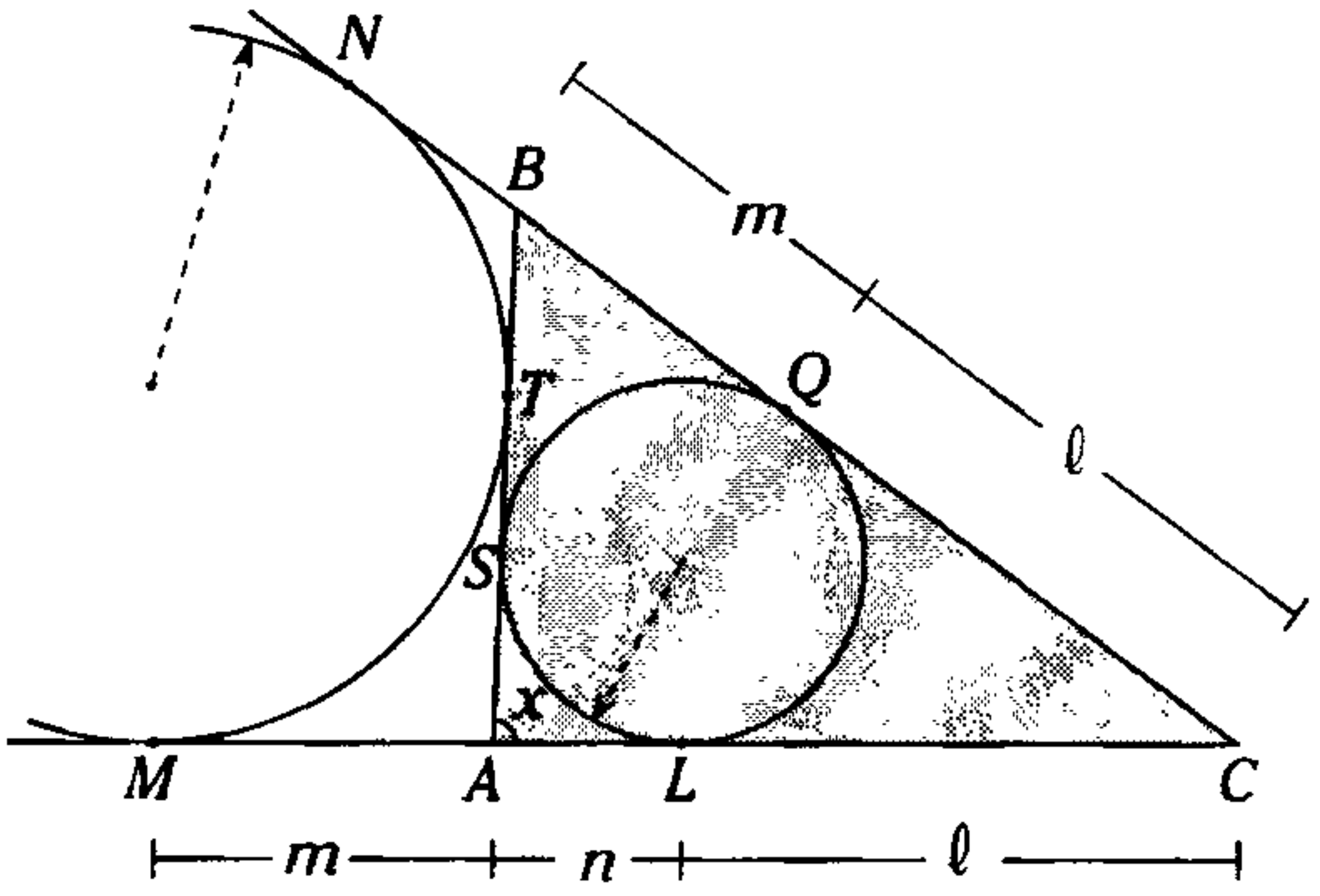


Figura 18.52

Piden x

Por teorema en la circunferencia

$MA = BQ = m$

Por fómula de Herón

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$$

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = \sqrt{(m+n+\ell)(\ell)(n)(m)} \qquad \text{(I)}$$

Por teoría de áreas

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = (m)\,(\ell)\cot\frac{x}{2} \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I) y (II)

$$(m)(\ell)\cot\frac{x}{2} = \sqrt{(m+n+\ell)(\ell)(n)(m)} \qquad \text{(III)}$$

Por dato: cuaterna armónica

$(m)(\ell) = (m+n+\ell)n$

Reemplazando en (III)

$$(m)(\ell)\cot\frac{x}{2} = \sqrt{(m)(\ell)(\ell)(m)}$$

$$(m)(\ell)\cot\frac{x}{2} = (m)(\ell)$$

$$\cot\frac{x}{2} = 1$$

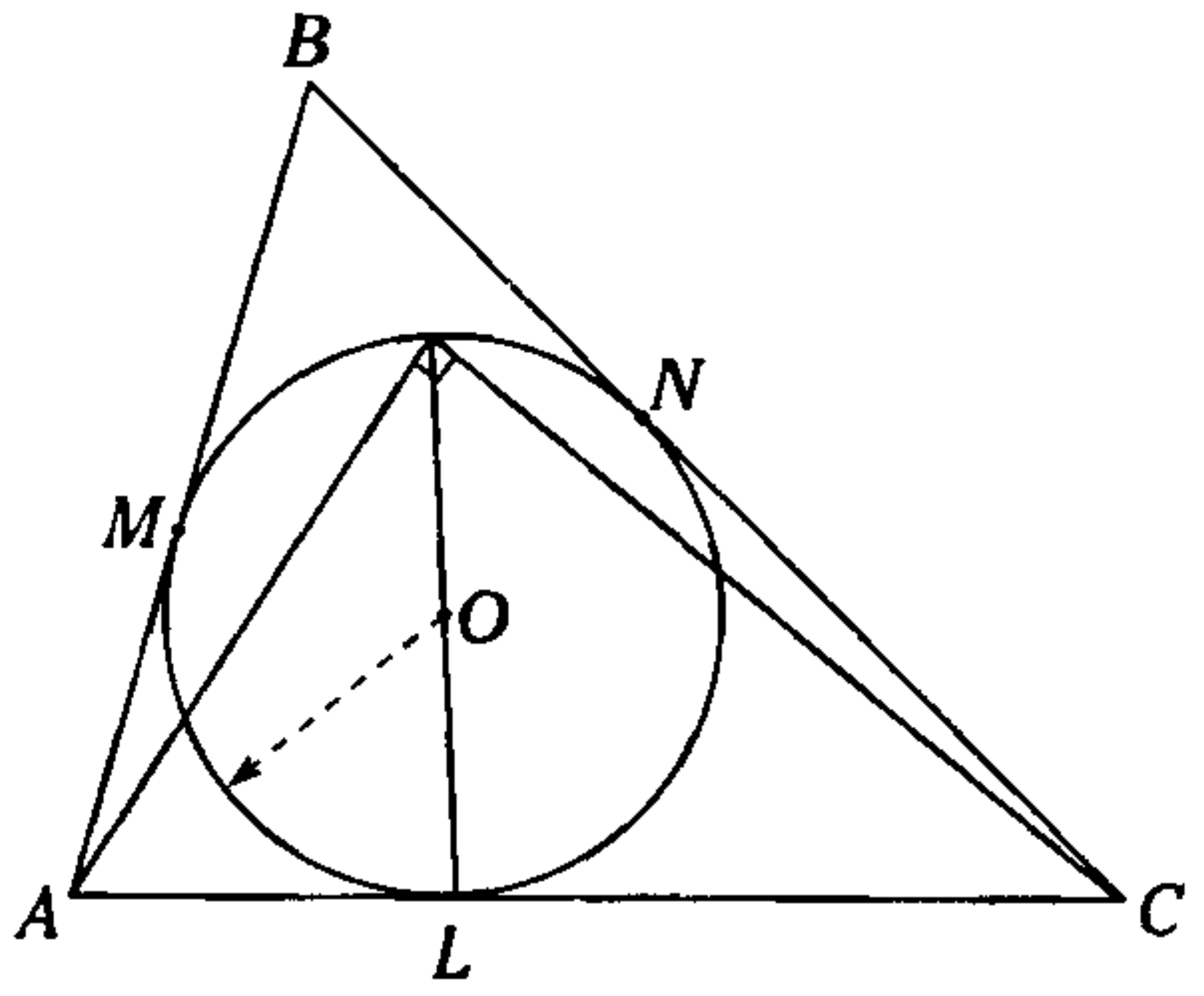
$$\rightarrow \frac{x}{2} = 45°$$

$$\therefore\ x = 90°$$

CLAVE D

Problema 15

De la figura, M, N y L son puntos de tangencia. Si el perímetro de la región ABC es $2p$, señale BN.



A) $p/3$ B) $p/2$ C) $p/4$

D) $p/6$ E) $p/5$

Resolución

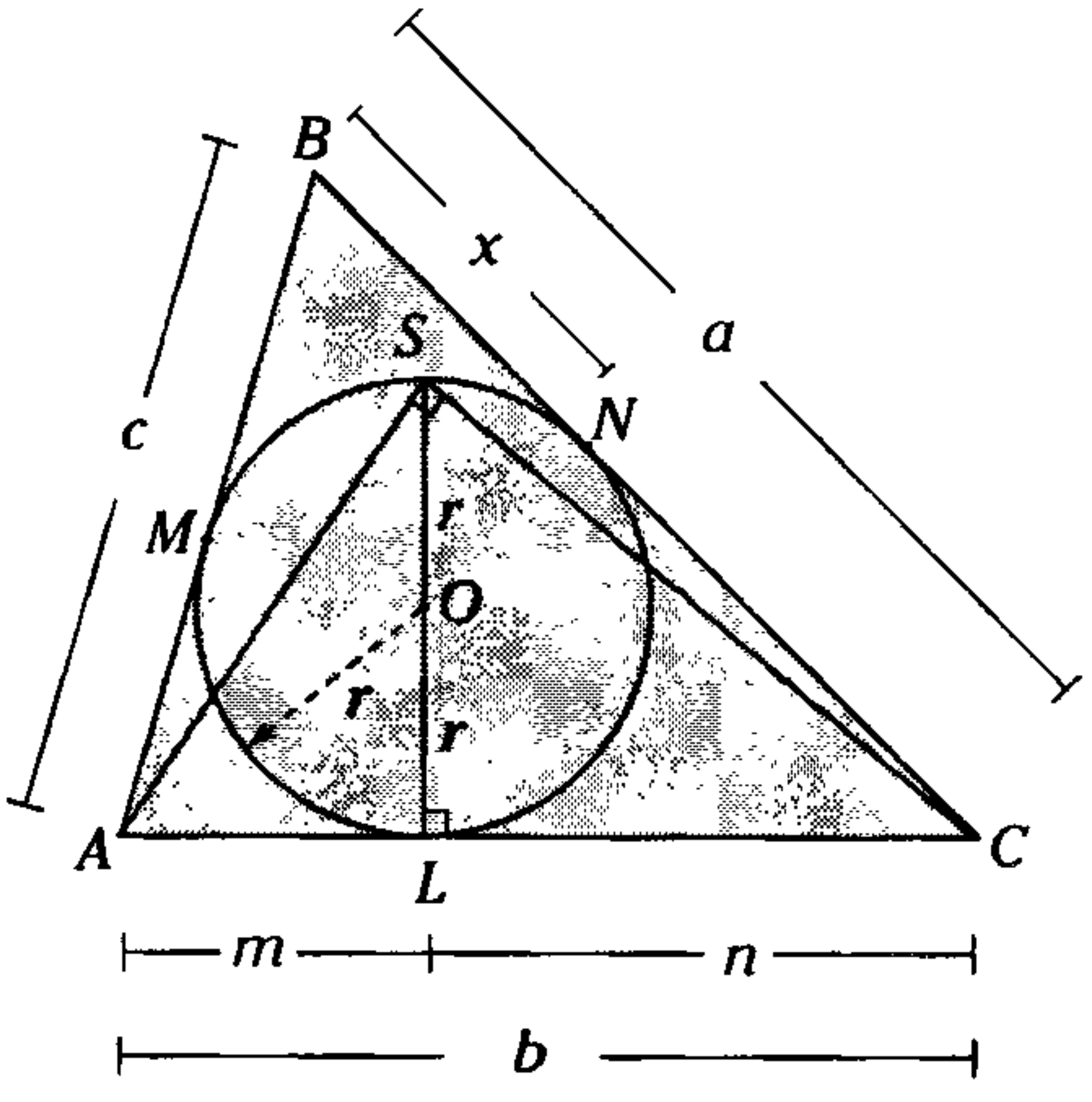


Figura 18.53

Piden $BN = x$

Por teorema se sabe que $OL \perp AC$

Al ser

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = pr \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

No obstante,

$x = p - b$

$m = p - a$

$n = p - c$

Reemplazando en la relación anterior

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = \sqrt{p(m)(x)(n)} \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I) y (II)

$$pr = \sqrt{p(m)(x)(n)}$$

Elevando al cuadrado

$$p^2r^2 = pmxn \rightarrow x = \frac{pr^2}{mn} \qquad \text{(III)}$$

En el $\triangle ASC$: relaciones métricas

$$(2r)^2 = mn \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazando (IV) en (III)

$$x = \frac{pr^2}{4r^2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{p}{4}$$

CLAVE C

Problema 16

En un triángulo ABC, $AB = 6$, $BC = 7$ y $AC = 9$, la circunferencia inscrita es tangente en M y N con $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, determine el área de la región triangular AMN.

A) $\frac{14}{27}\sqrt{110}$ B) $\frac{5}{9}\sqrt{110}$

C) $\frac{13}{25}\sqrt{110}$

D) $\frac{16}{27}\sqrt{110}$ E) $\frac{3}{7}\sqrt{110}$

Resolución

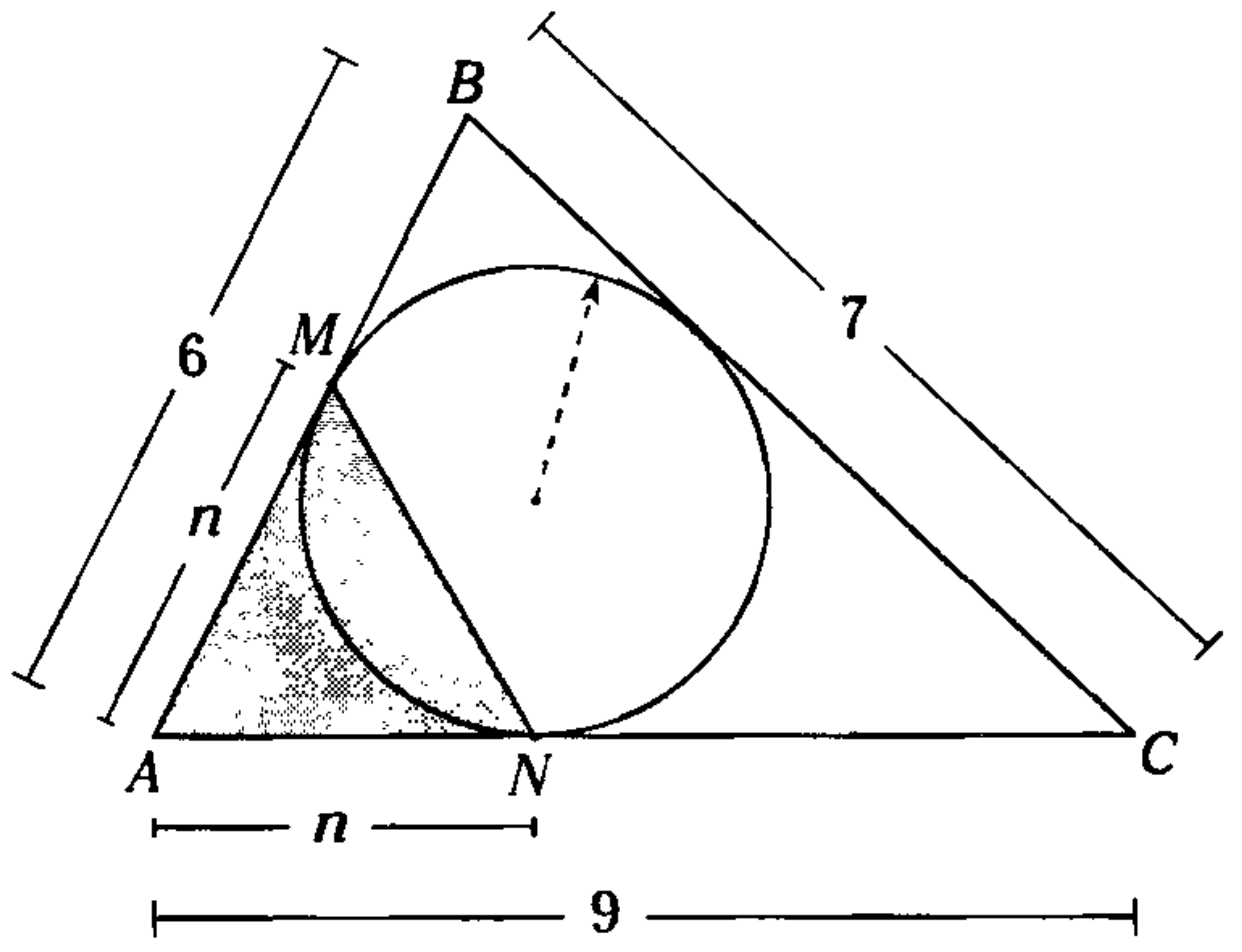


Figura 18.54

Piden $\mathbb{A}_{\triangle AMN}$

Por propiedad $AM = AN = n$

Por teoría

$$\frac{\mathbb{A}_{\triangle AMN}}{\mathbb{A}_{\triangle ABC}} = \frac{n.n}{(6)(9)} \qquad \text{(I)}$$

Por propiedad

$$n = p - (BC) = \left(\frac{6+7+9}{2}\right) - 7 \rightarrow n = 4$$

Por fórmula de Herón (p: semiperímetro de la región ABC)

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$$

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = \sqrt{11(11-6)(11-7)(11-9)}$$

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = \sqrt{11(5)(4)(2)}$$

Reemplazando en (I)

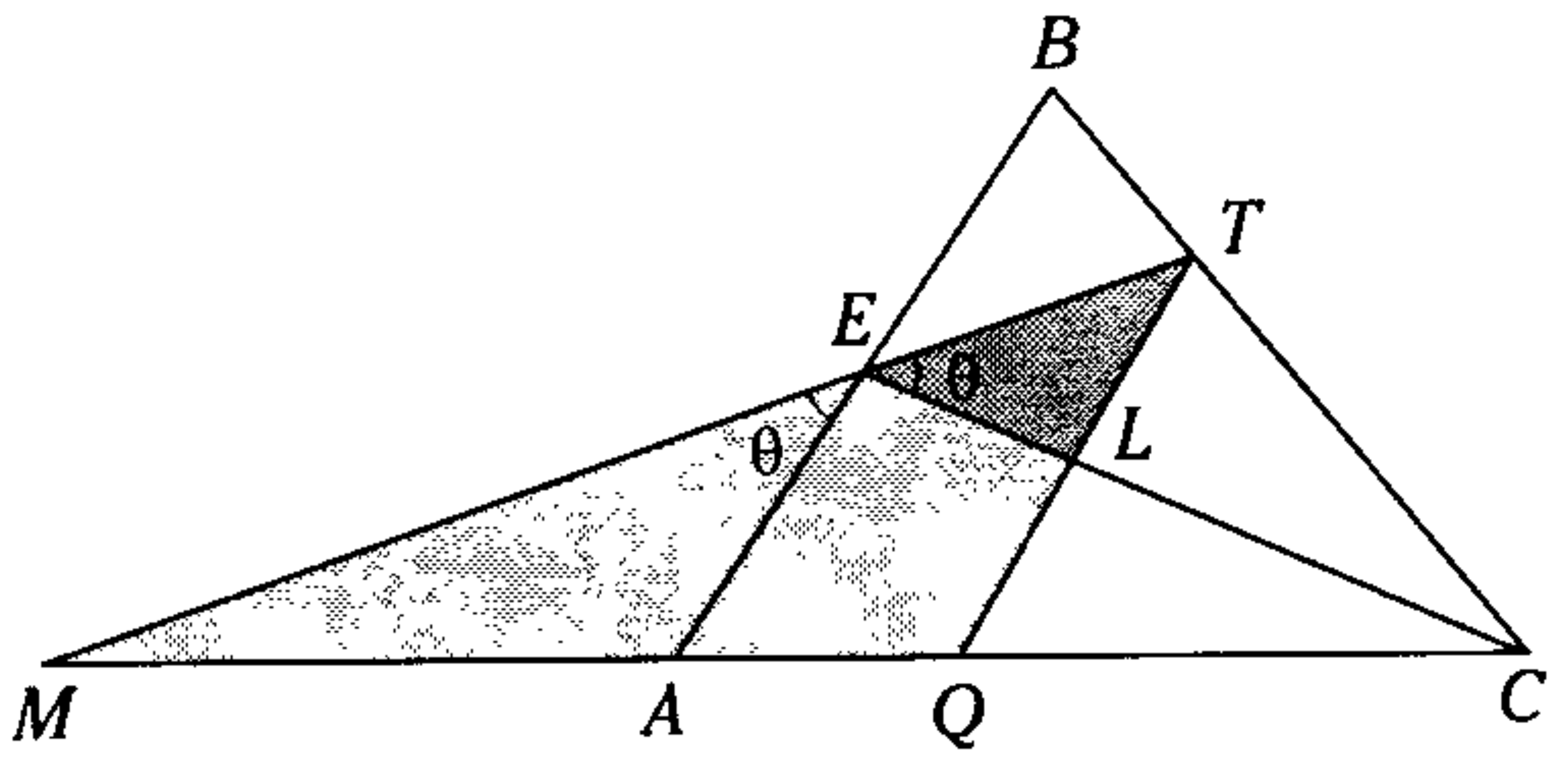
$$\frac{\mathbb{A}_{\triangle AMN}}{2\sqrt{110}} = \frac{(4)(4)}{(6)(9)}$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{\triangle AMN} = \frac{16}{27}\sqrt{110}$$

CLAVE D

Problema 17

En la figura mostrada, $BE = EA = a$, $EC = b$ y $\overline{AB} \parallel \overline{TQ}$. Calcule la razón de áreas entre las regiones sombreadas ETL y $MELQ$.



A) $\dfrac{3b+a}{b-a}$ B) $\dfrac{3b-a}{a+b}$ C) $\dfrac{2b+a}{b-a}$

D) $\dfrac{b-a}{2b+a}$ E) $\dfrac{b-a}{3b+a}$

Resolución

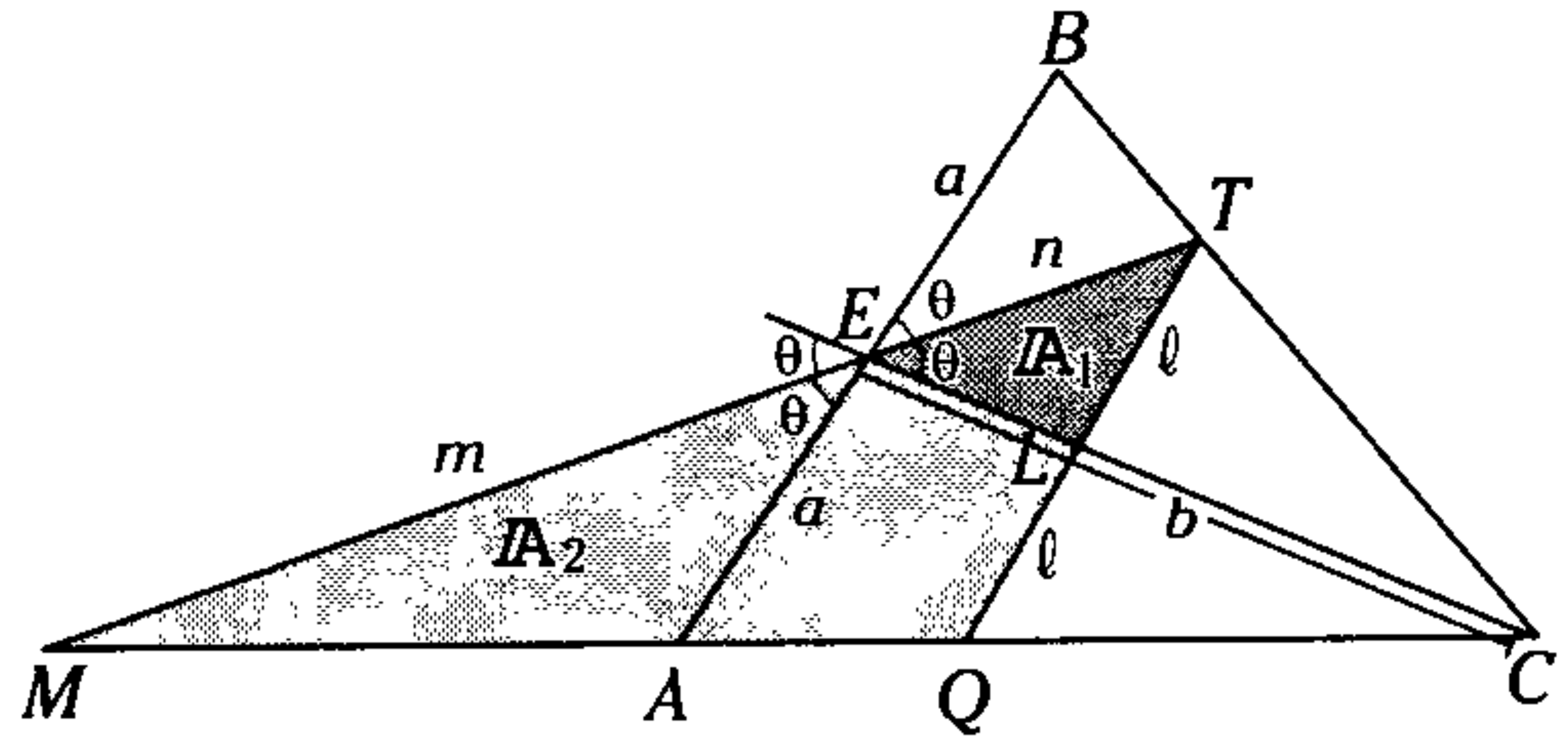


Figura 18.55

Piden $\dfrac{\mathbb{A}_{\triangle ETL}}{\mathbb{A}_{MELQ}} = \dfrac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2}$

$\triangle ABC \sim \triangle QTC$ (A.A.A.)

Como $\overline{CE}$: mediana del triángulo ABC

$\rightarrow$ $\overline{CL}$ también es mediana del triángulo QTC

$\rightarrow$ $(TL = LQ = \ell)$

$\triangle MTQ$: por propiedad de áreas

$$\frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2} = \frac{(n)(\ell)}{(m+n)2\ell} \rightarrow \frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2} = \frac{n}{2m+n} \quad \text{(I)}$$

De la observación

En $\triangle BEC$

$$n = \frac{2ab}{a+b}\cos\theta$$

En $\triangle AEC$

$$m = \frac{2ab}{b-a}\cos\theta$$

Reemplazando en (I)

$$\frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2} = \frac{\dfrac{2ab\cos\theta}{(b+a)}}{2\left(\dfrac{2ab\cos\theta}{b-a}\right) + \dfrac{2ab\cos\theta}{b+a}}$$

$$\therefore \ \frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2} = \frac{b-a}{3b+a}$$

CLAVE E

Nota

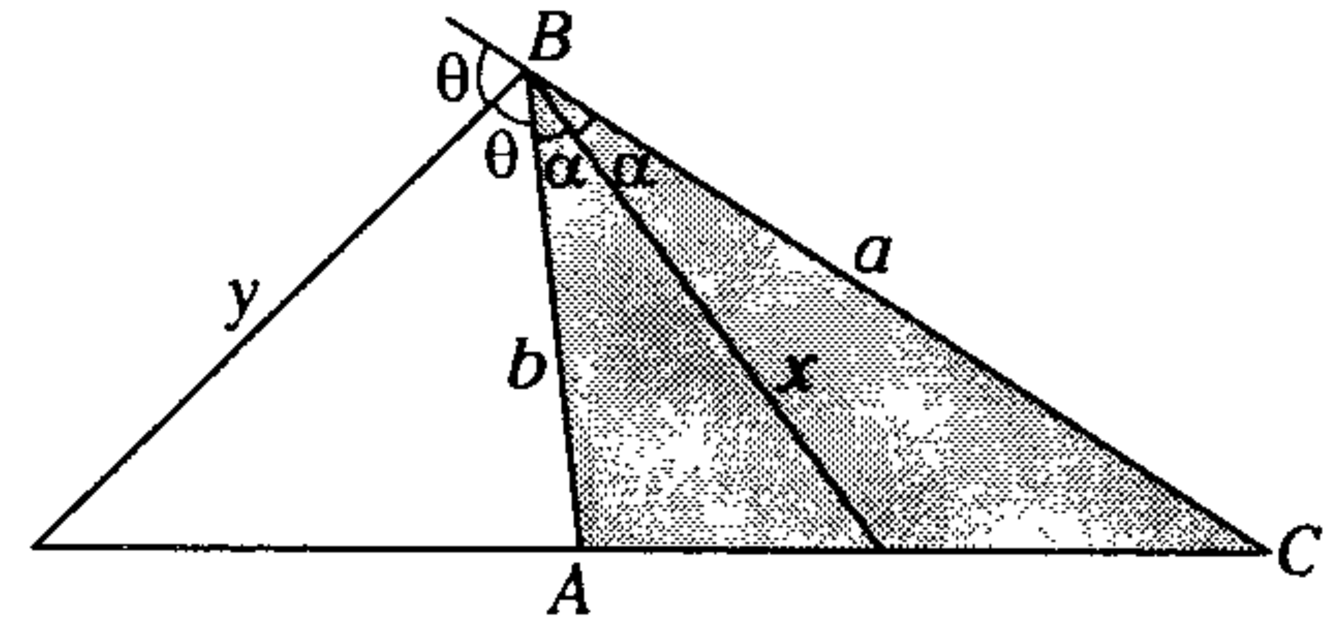


Figura 18.56

Se cumple en el $\triangle ABC$

$$x = \frac{2ab}{a+b}\cos\alpha$$

$$y = \frac{2ab}{a-b}\cos\theta$$

Problema 18

De la figura, $R=8$ y $r=4$. Señale el área de la región sombreada.

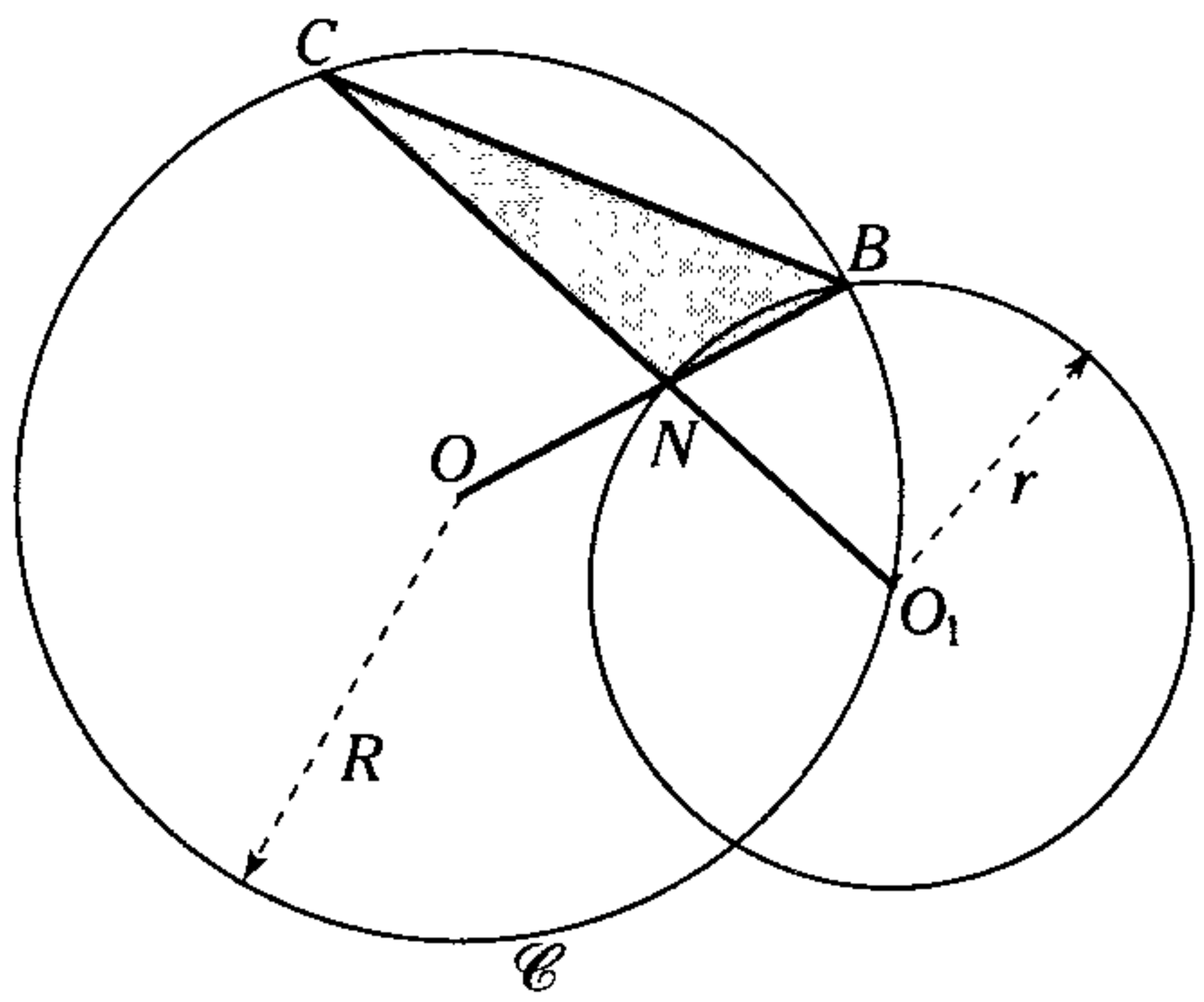
A) $\dfrac{7\sqrt{15}}{8}$

B) $\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

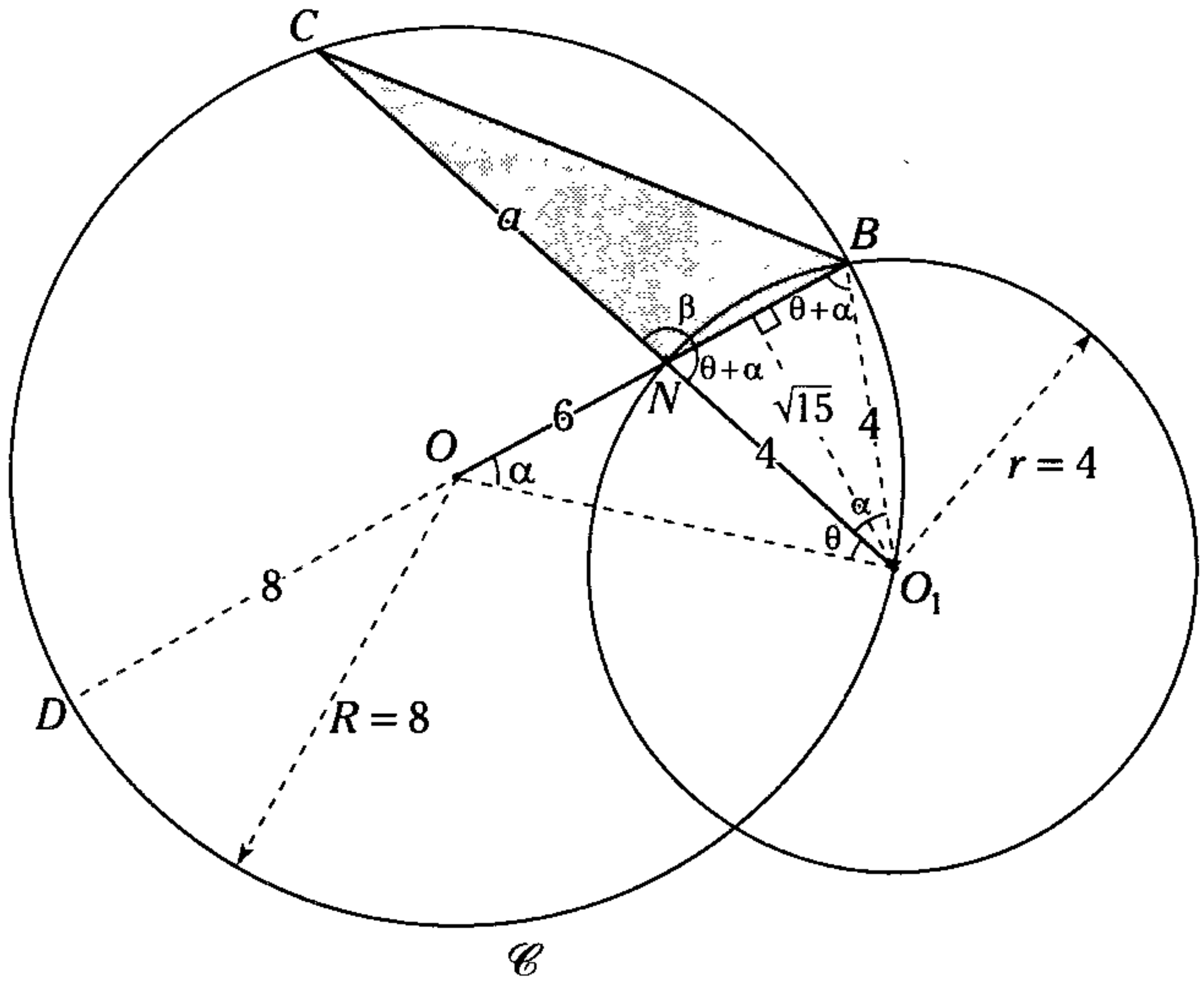
C) $\dfrac{5\sqrt{15}}{4}$

D) $\dfrac{9\sqrt{15}}{2}$

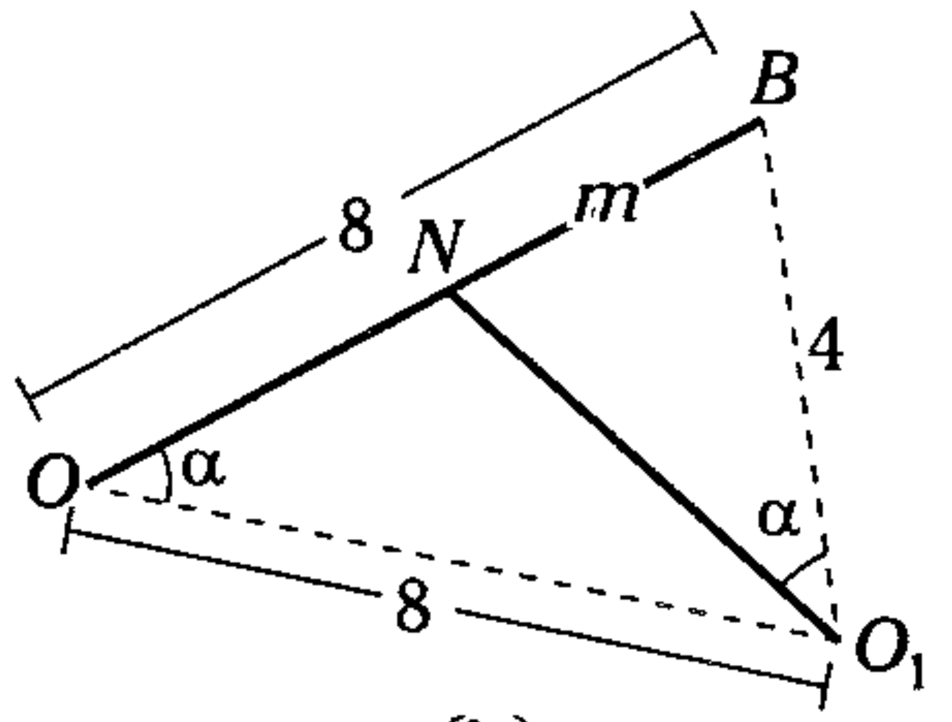
E) $\dfrac{9\sqrt{15}}{8}$



Resolución



(b)



(b)

Figura 18.57

De lo anterior se sabe $4^2=8m \rightarrow m=2$

En la figura 18.57(a) se prolonga $\overline{BO}$ hasta D.

$\rightarrow \; DN=14$

En $\mathscr{C}$: por teorema de las cuerdas

$a(4)=2(14) \;\rightarrow\; a=7$

Se sabe $\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}(\alpha+\theta)$

y como $\operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Reemplazando en (I)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle BCN}=\frac{(7)(2)}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

$$\therefore\; \mathbb{A}_{\blacktriangle BCN}=\frac{7\sqrt{15}}{4}$$

CLAVE B

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle BCN}$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle BCN}=\frac{(a)(NB)}{2}\operatorname{sen}\beta \qquad \text{(I)}$$

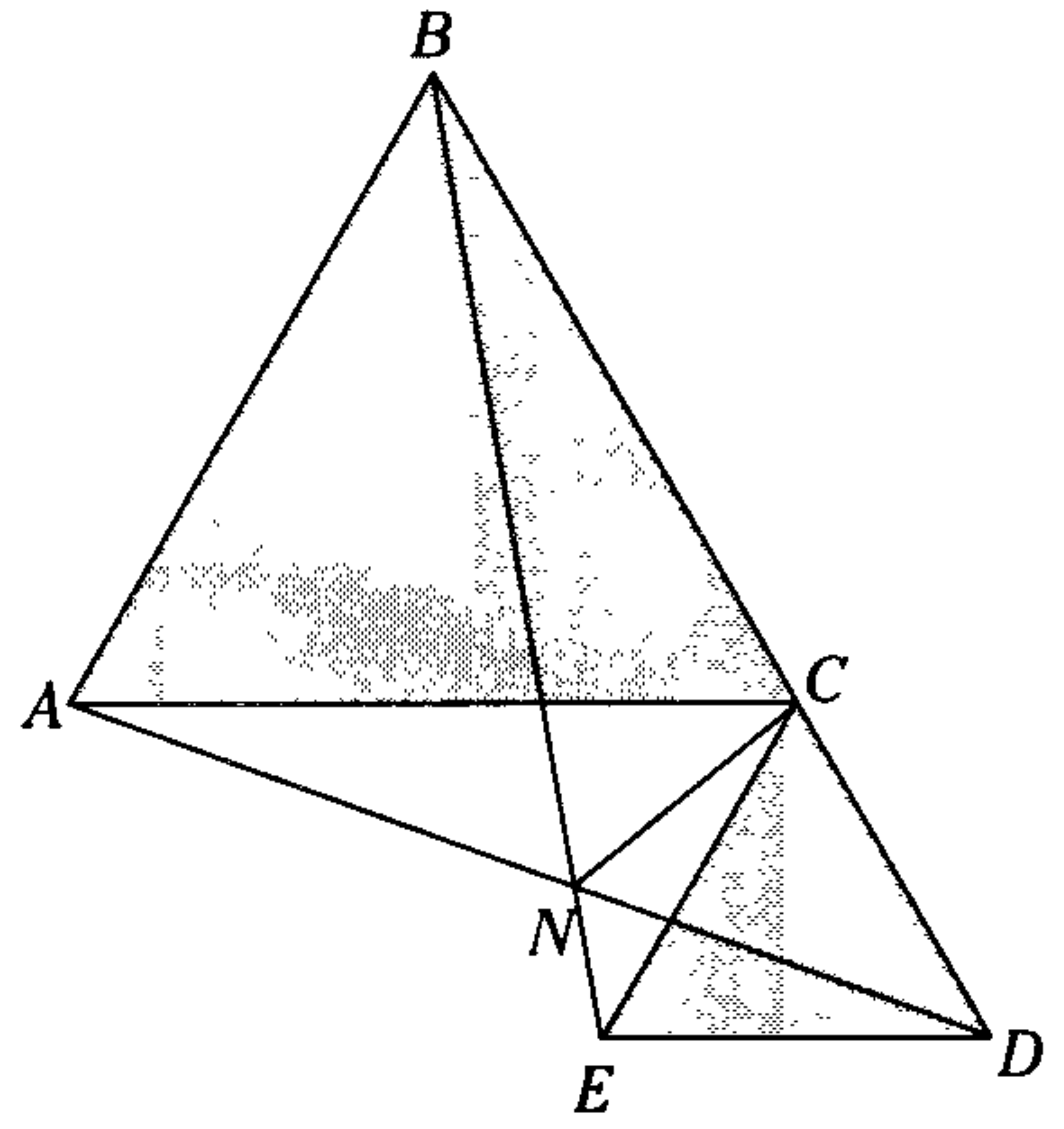
En el $\triangle OBO_1$:

$OB=OO_1=R$ y

$O_1B=O_1N=r$

Problema 19

De la figura, *ABC* y *CDE* son triángulos equiláteros. Si $AN = 5$ y $NC = 3$, señale la suma de las áreas de las regiones sombreadas.



A) $\frac{833}{50}$ B) $\frac{803}{25}u^2$ C) $\frac{733}{50}$

D) $\frac{823_2}{50}$ E) $\frac{723}{50}$

Resolución

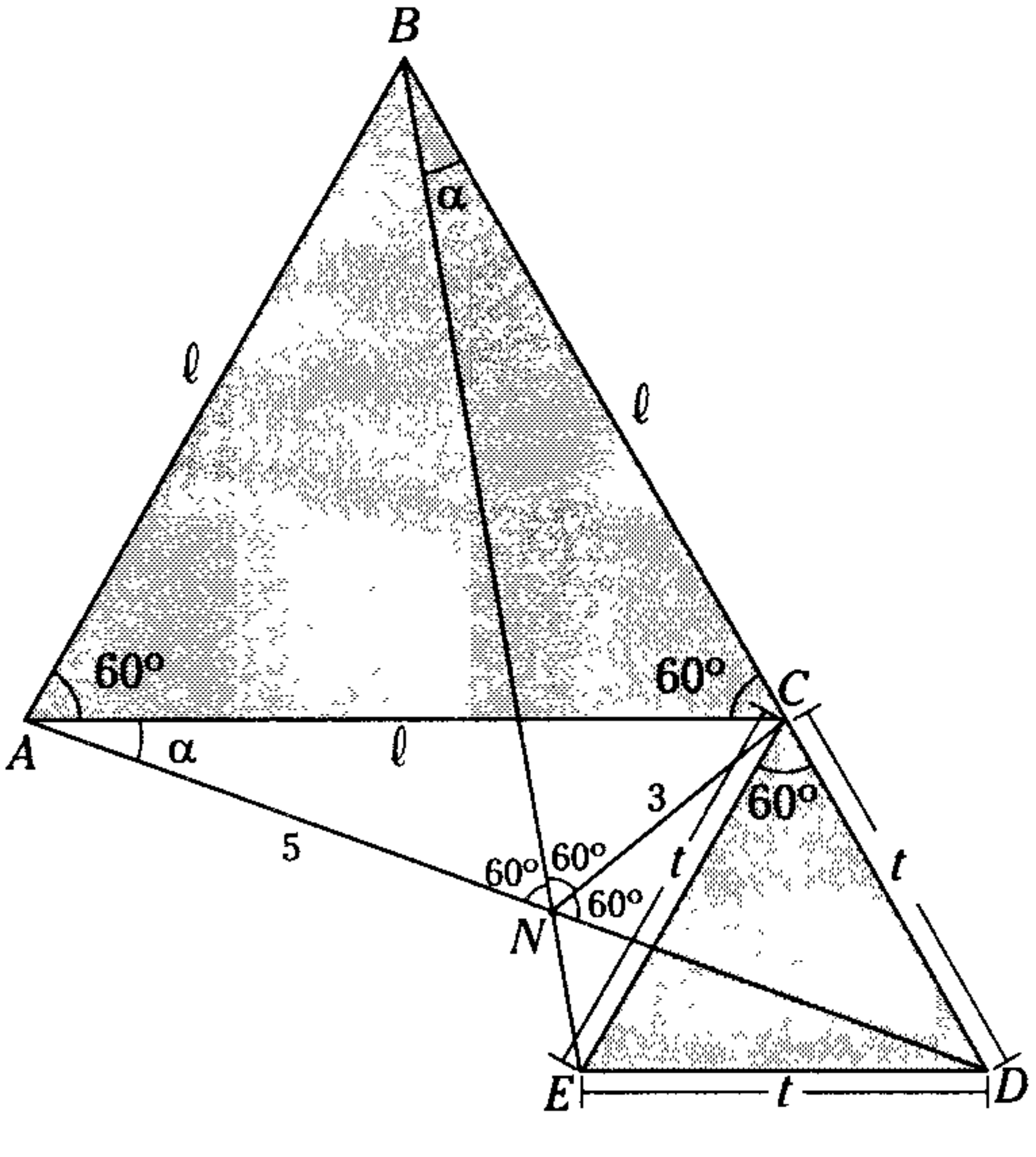


Figura 18.58

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} + \mathbb{A}_{\blacktriangle CDE}$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} + \mathbb{A}_{\blacktriangle CDE} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} + \frac{t^2\sqrt{3}}{4} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle BCE \cong \triangle ACD$ (L.A.L.)

$\rightarrow$ m∢CBE = m∢$CAD = \alpha$

Se observa que *ABCN*: ⏢ inscriptible

$\rightarrow$ m∢CND = m∢BNA = m∢$BNC = 60°$

$\triangle ACN$: teorema de cosenos

$$\ell^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos 120°$$

$$\rightarrow \ell = 7$$

Por teorema de Chadú: $BN = 5 + 3 = 8$

$\triangle BCN$: teorema de la bisectriz exterior

$$\frac{8}{3} = \frac{7+t}{t} \rightarrow t = \frac{21}{5}$$

Reemplazando en (I)

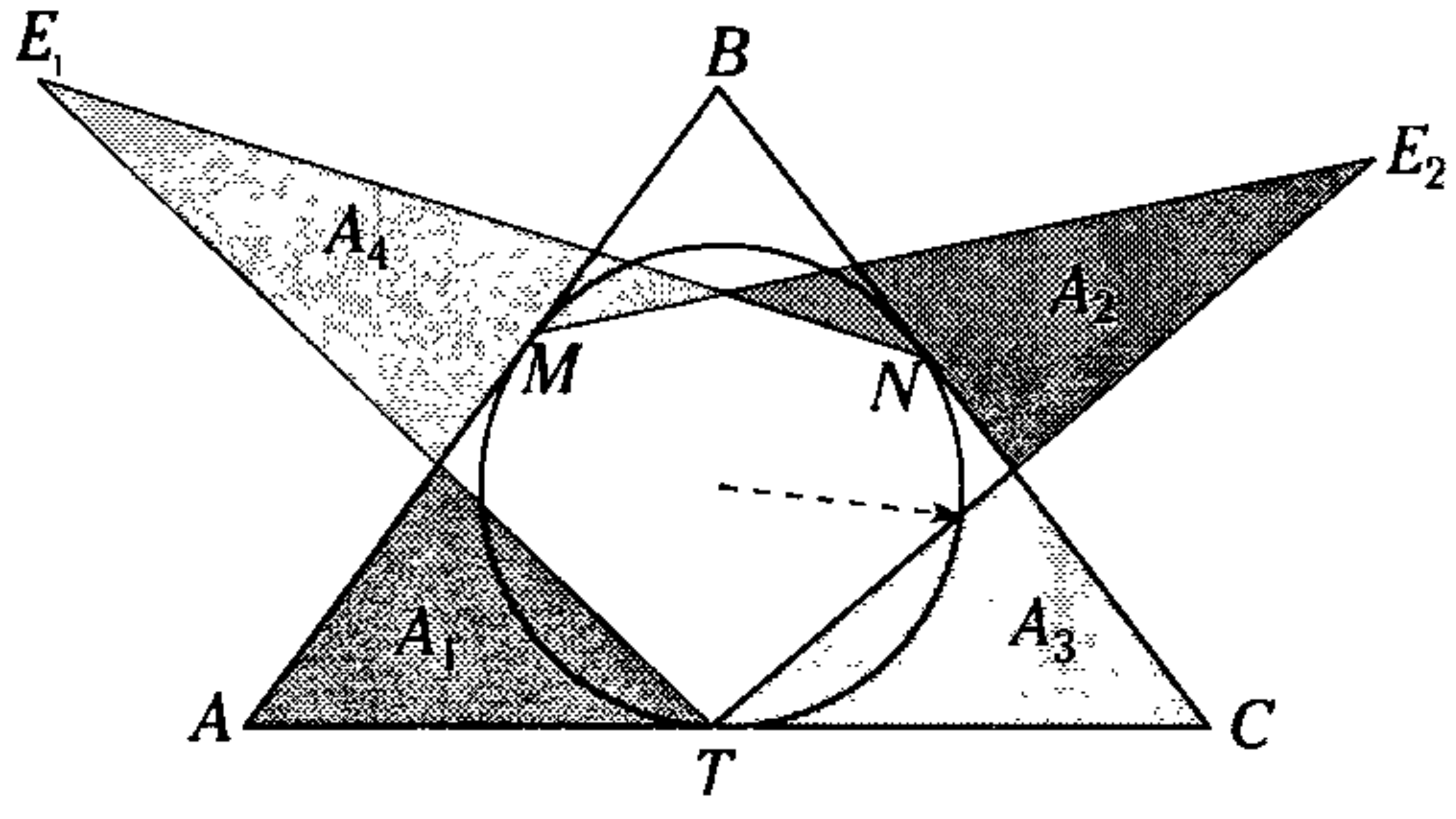
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} + \mathbb{A}_{\blacktriangle CDE} = \frac{49\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{21}{5}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} + \mathbb{A}_{\blacktriangle CDE} = \frac{833}{50}$$

CLAVE A

Problema 20

En la figura, *M*, *N* y *T* son puntos de tangencia, mientras que E_1 y E_2 son excentros relativos a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Calcule la relación entre $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$, $\mathbb{A}_4$, si las áreas de las regiones son sombreadas.



A) $\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_3 = \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_4$

B) $\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4$

C) $\mathbb{A}_2 - \mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_4 - \mathbb{A}_3$

D) $\mathbb{A}_2 \cdot \mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_4 \cdot \mathbb{A}_3$

E) $\mathbb{A}_2 \cdot \mathbb{A}_4 = \mathbb{A}_1 \cdot \mathbb{A}_3$

Resolución

Piden la relación entre $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$ y $\mathbb{A}_4$

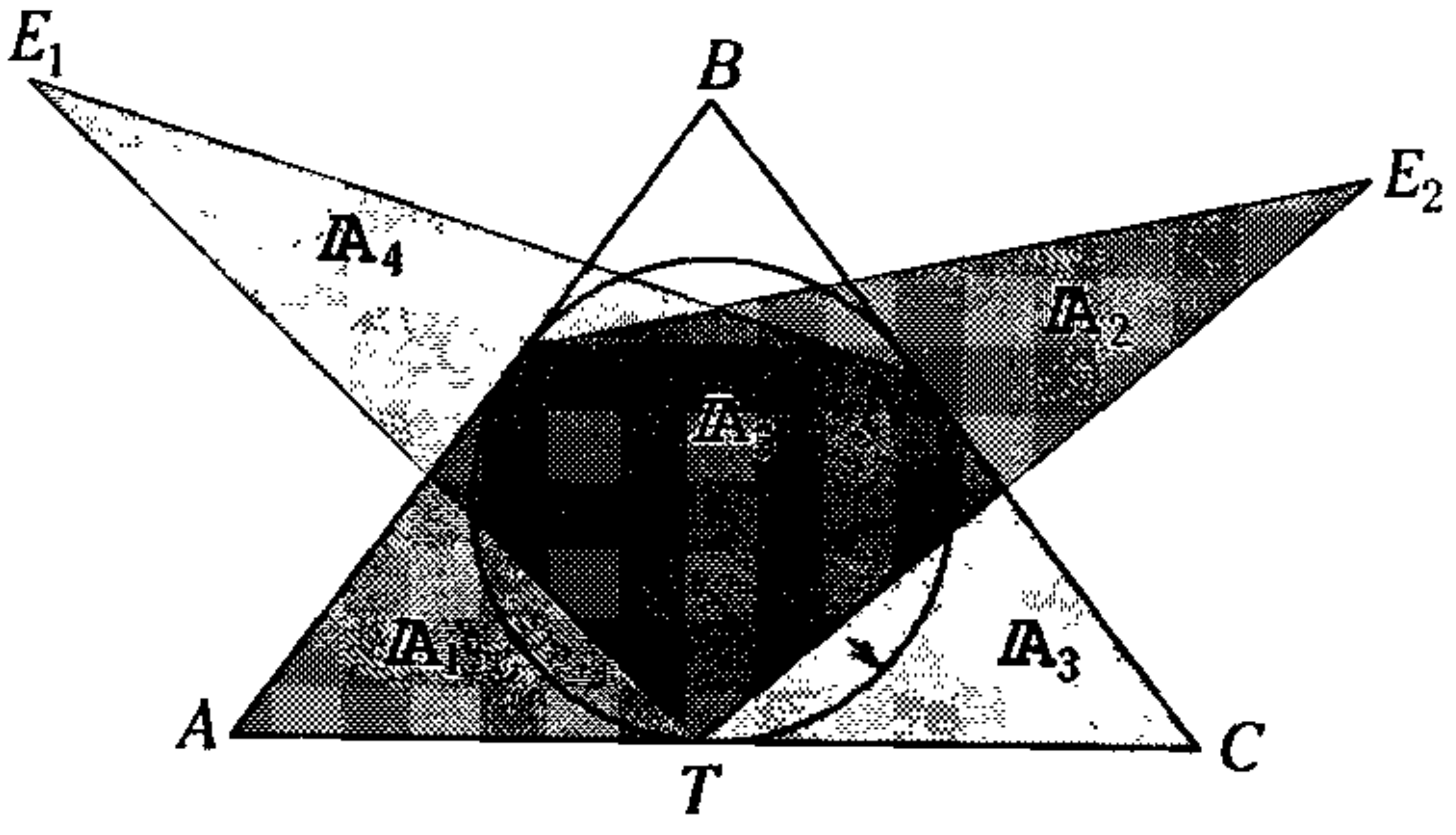


Figura 18.59

De la observación

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \mathbb{A}_{AME_2T} = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_5 + \mathbb{A}_2 \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \mathbb{A}_{CNE_1T} = \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_5 + \mathbb{A}_4 \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I) y (II)

$$\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_5 + \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_5 + \mathbb{A}_4$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4$$

Observación

En la figura, E_2 es uno de los excentros de *ABC*.

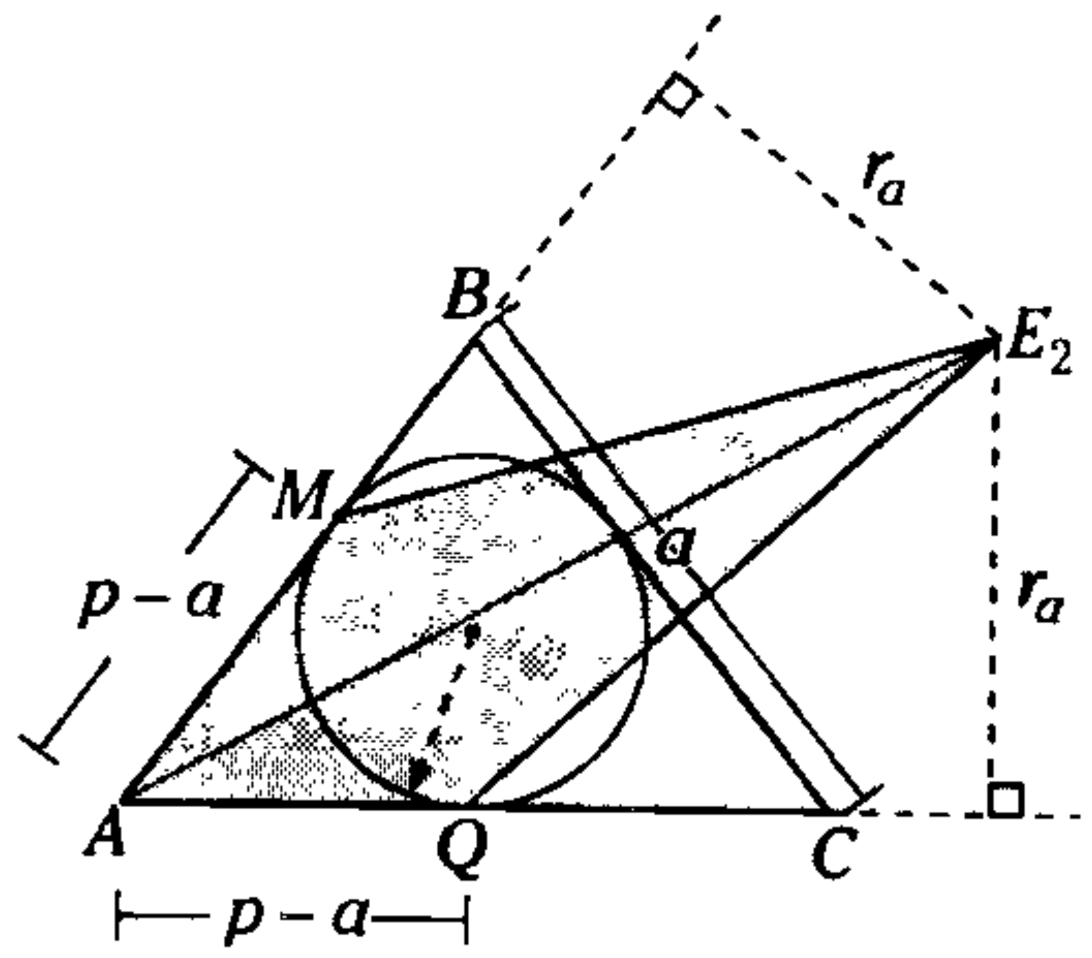


Figura 18.60

Luego

$$\mathbb{A}_{AME_2Q} = (p-a)\frac{r_a}{2} + (p-a)\frac{r_a}{2}$$

$$\mathbb{A}_{AME_2Q} = (p-a)r_a$$

también

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = (p-a)r_a$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{AME_2Q} = \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}$$

CLAVE B

Problema 21

En un triángulo *ABC*, *a*, *b* y *c* son las longitudes de los lados y *p* es longitud del semiperímetro de la región triangular. ¿Cuánto dista el vértice *A* del incentro del triángulo?

A) $\sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}}$ B) $\sqrt{\frac{(p-b)ac}{p}}$

C) $\sqrt{\frac{(p-c)ab}{p}}$

D) $\sqrt{\frac{abc}{p}}$ E) $\sqrt{\frac{abc}{2p}}$

Resolución

Primer Método

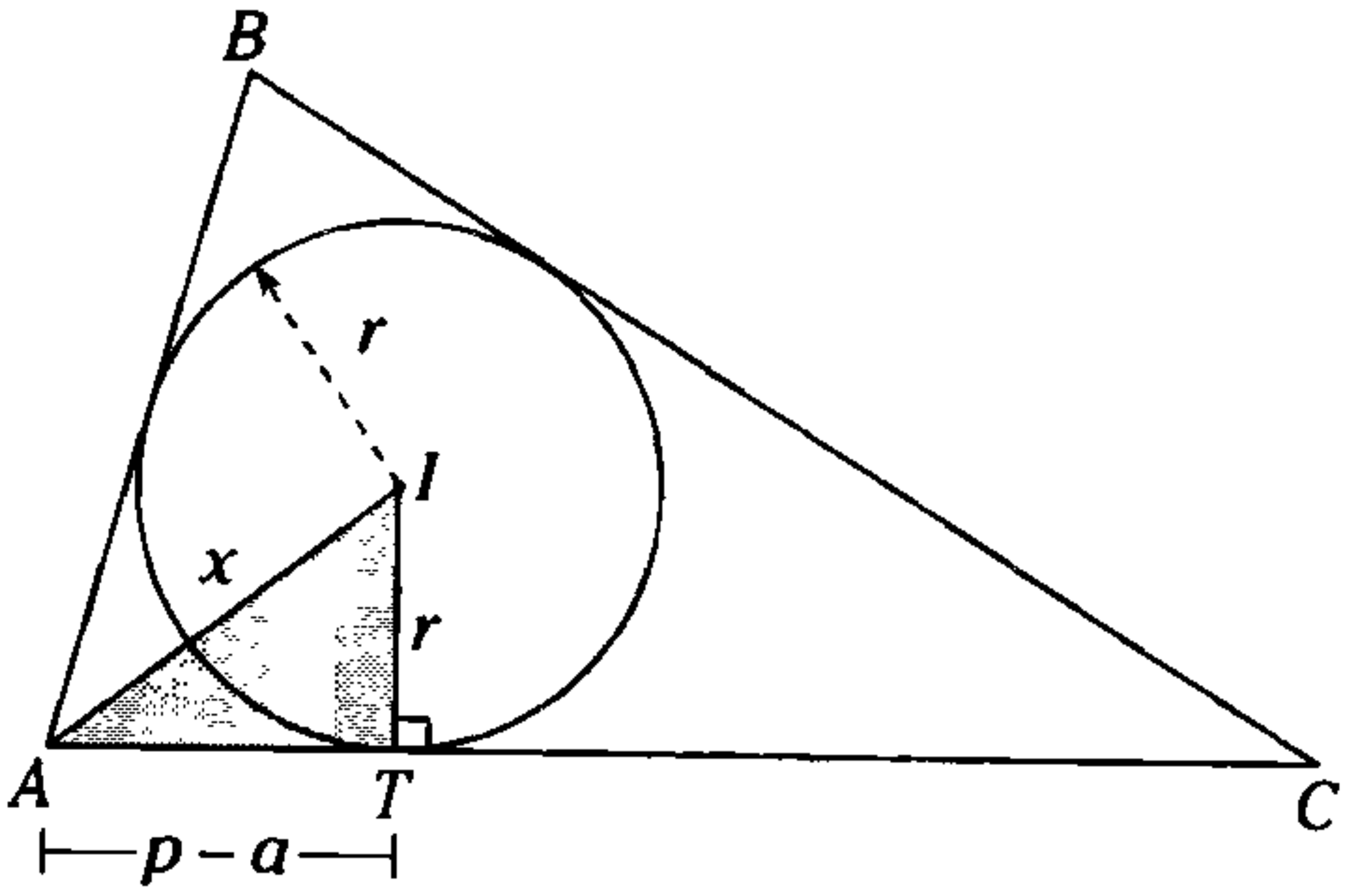


Figura 18.61

Piden $AI = x$

ATI : teorema de Pitágoras

$$x^2 = r^2 + (p-a)^2 \qquad \text{(I)}$$

Por áreas

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = p.r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Elevando al cuadrado

$$p^2.r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$r^2 = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}$$

$$\rightarrow r = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

Reemplazando en (I)

$$x^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} + (p-a)^2$$

Factorizando

$$x^2 = (p-a)\frac{[(p-b)(p-c)+(p-a)p]}{p}$$

Operando

$$x = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}$$

Segundo método

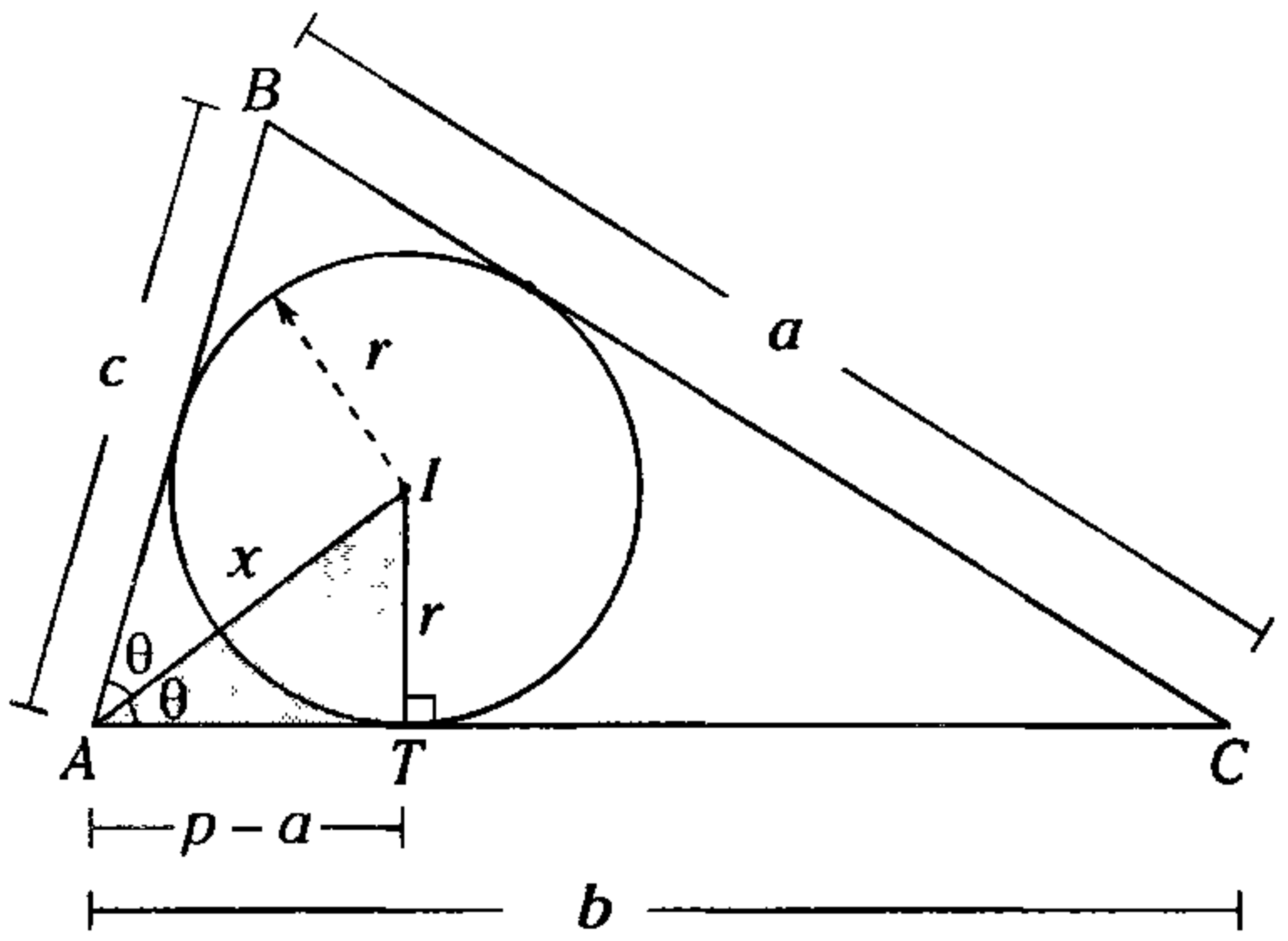


Figura 18.62

Piden $AI = x$

Por áreas

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = pr = \frac{bc}{2}\text{sen}2\theta$$

Pero $\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\cos\theta$

$$pr = \frac{bc}{2}2\text{sen}\theta\cos\theta$$

$$\rightarrow pr = bc\,\text{sen}\theta\cos\theta \qquad \text{(I)}$$

$\triangle AIT$: $\text{sen}\theta = \dfrac{r}{x}$; $\cos\theta = \dfrac{p-a}{x}$

Reemplazando en (I)

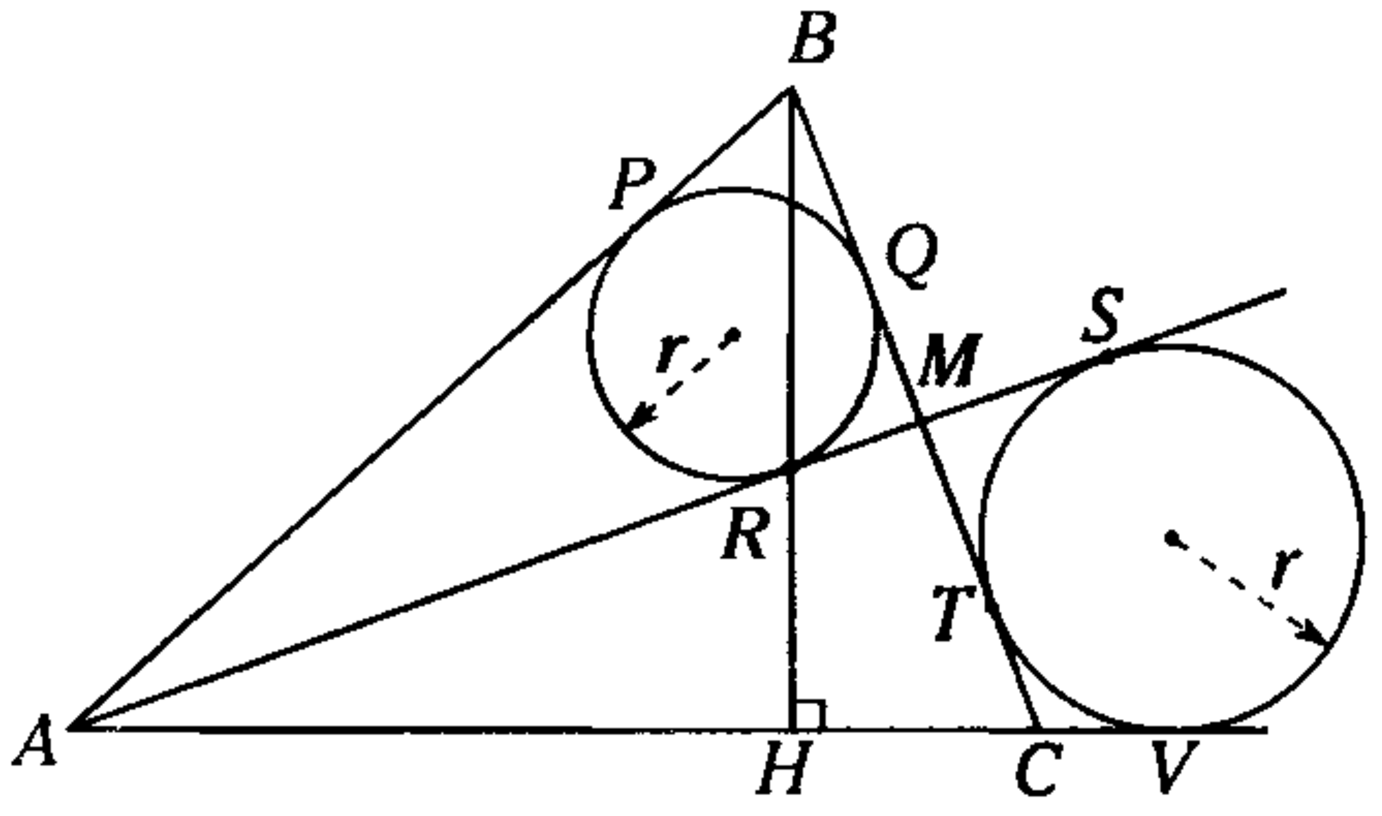
$$pr = bc\left(\frac{r}{x}\right)\left(\frac{p-a}{x}\right)$$

$$\therefore\ x = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}$$

CLAVE A

Problema 22

En un triángulo isósceles ABC ($AB = AC$), se traza la ceviana interior AM como se muestra en la figura. Calcule BH, si P, Q, R, S, T y V son puntos de tangencia.



A) $3r$ B) $4r$ C) $2r\sqrt{2}$

D) $3r\sqrt{2}$ E) $5r$

Resolución

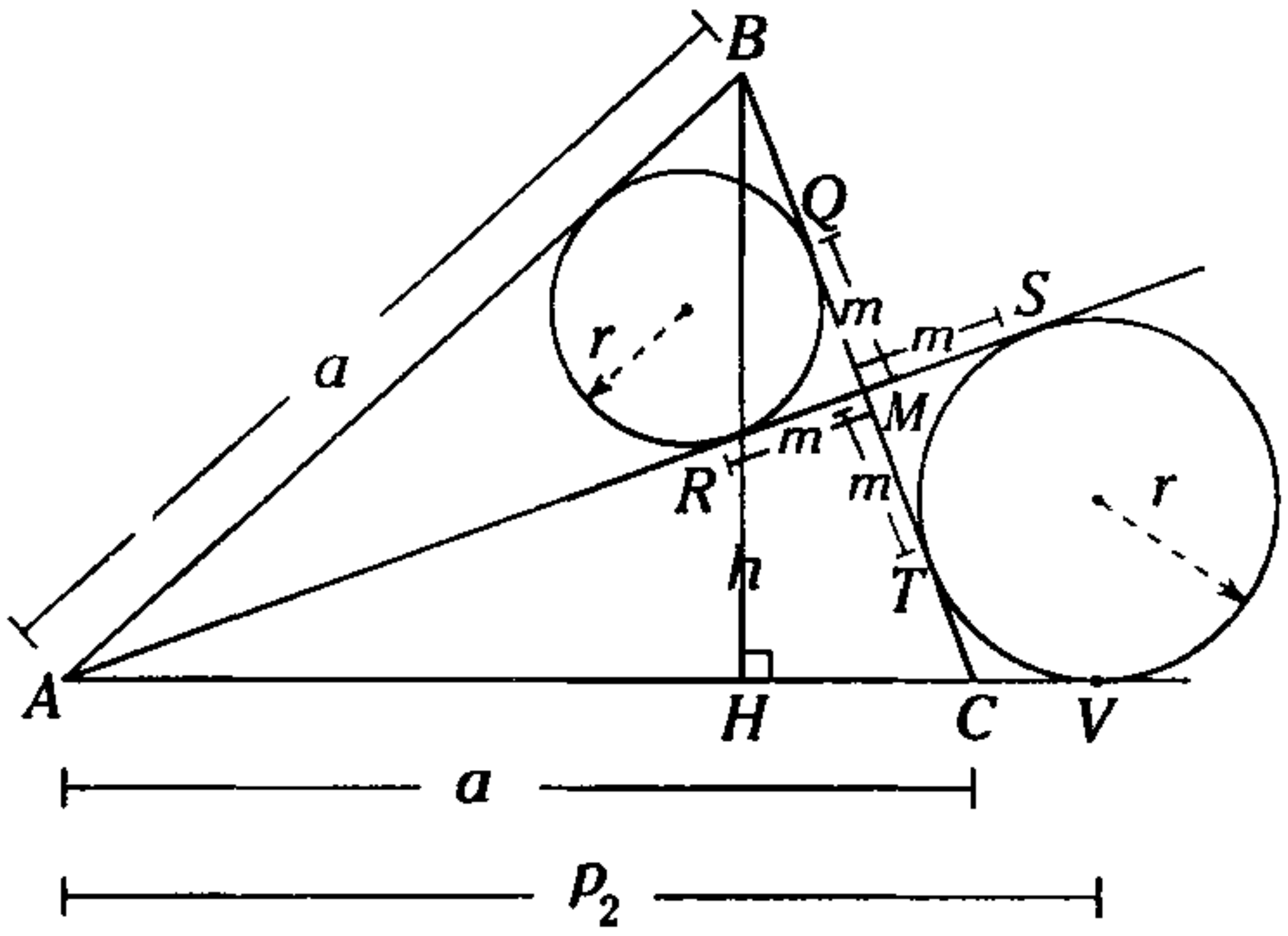


Figura 18.63

Piden $BH = h$

$p_1 = a + m$

$p_2 = a + MC - m$

Sea p_1 longitud del semiperímetro de la región ABM $\rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle ABM} = p_1 . r$

Sea p_2 longitud del semiperímetro de la región AMC $\rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle AMC} = (p_2 - MC).r$

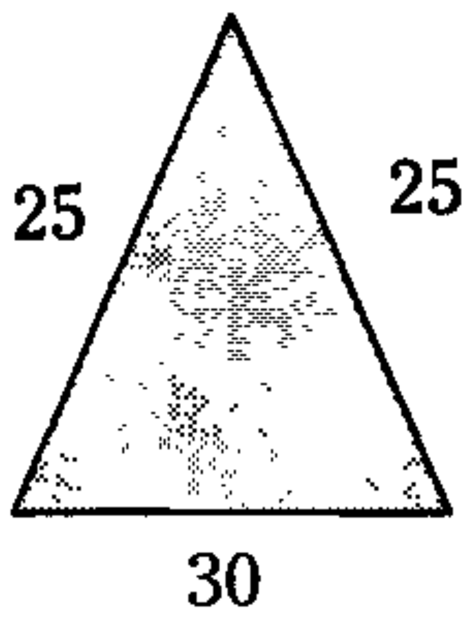
Mas $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \mathbb{A}_{\blacktriangle ABM} + \mathbb{A}_{\blacktriangle AMC} = (p_1 + p_2 - MC).r$

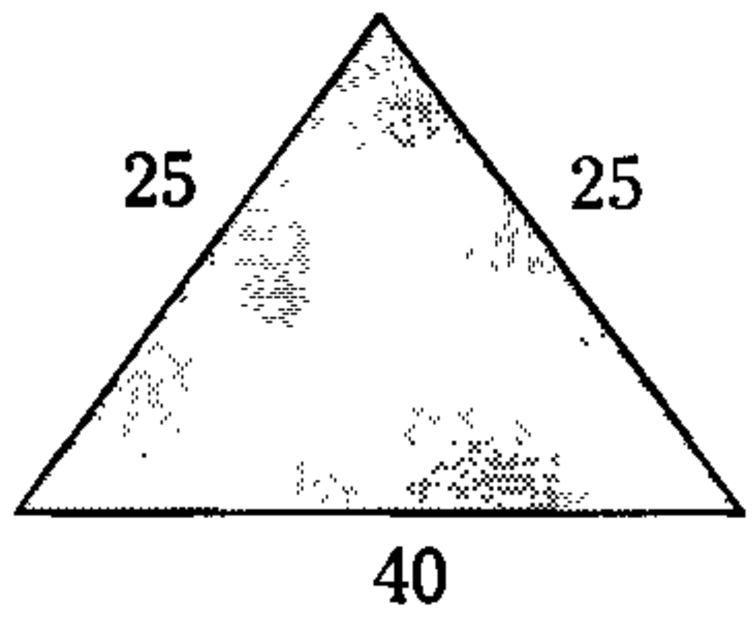
$$\frac{a.h}{2} = ((a+m)+(a+MC-m)-MC)r = 2ar$$

$$\therefore\ h = 4r$$

CLAVE B

1. **¿A mayor perímetro, mayor área?**
Los lados de un triángulo miden 25 m, 25 m y 30 m. Si los lados de otro triángulo miden 25 m, 25 y 40 m, ¿cuál de los dos triángulos encierra la región de mayor área?

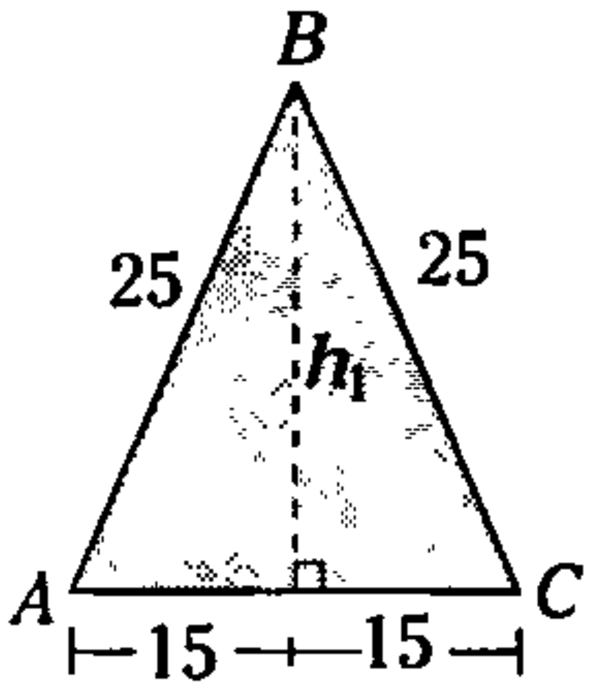


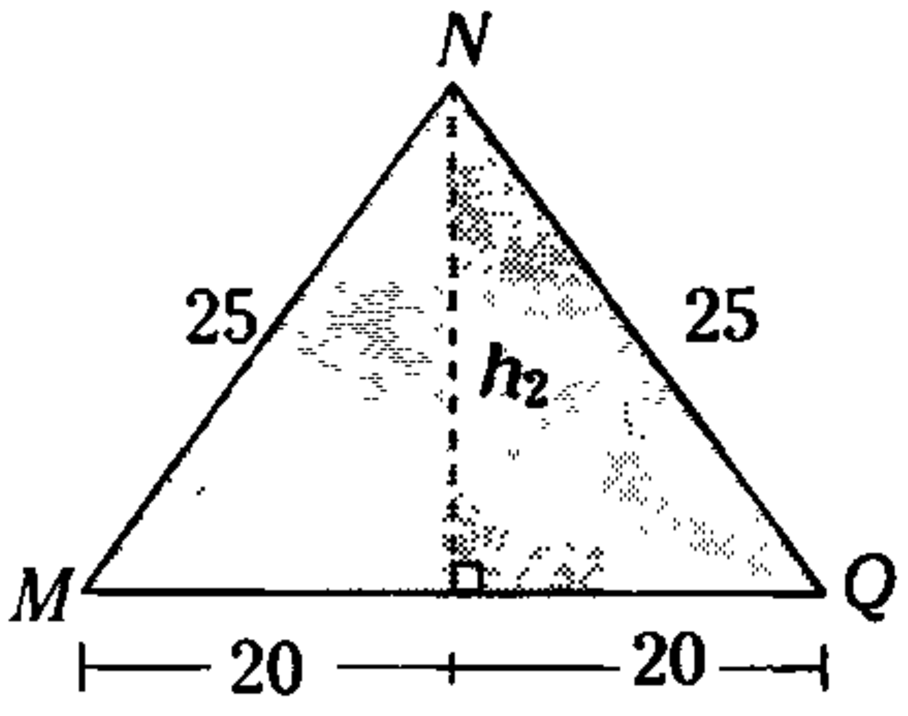


2. **Fórmula matemática del buen chocolate**
Se desea fabricar chocolates con leche. Los ingredientes fundamentales de este artículo son el cacao, el azúcar y la leche; para obtener una tableta de chocolate no es posible mezclarlos en cualquier proporción. En efecto, si ponemos demasiado cacao nuestro chocolate saldrá demasiado amargo; si ponemos demasiado azúcar, será demasiado dulce; si ponemos demasiada leche, ya no será chocolate.
Inspirémonos en una antigua receta: *Para hacer buen chocolate, deben observarse las siguientes proporciones:*
Cacao: algo menos de la mitad
Leche: algo menos de la mitad.
Azúcar en cantidad tal que no rebase la mitad de la cantidad de chocolate y la mitad de la cantidad de leche..."
¿Podría hallar una fórmula para fabricar chocolates que cumplan las condiciones anteriores?

Resolución 1
El área de una región triangular no es directamente proporcional al perímetro de la región que limita.

En efecto, calculamos las áreas de las regiones dadas con la fórmula de semiproducto de la base y su altura relativa.





$h_1 = 20$ $h_2 = 15$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \frac{30.20}{2} \qquad \mathbb{A}_{\blacktriangle MNQ} = \frac{40.15}{2}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = 300 \text{ m}^2 \qquad \mathbb{A}_{\blacktriangle MNQ} = 300 \text{ m}^2$$

Como podemos concluir de los cálculos anteriores, el perímetro de la región *MNQ* es mayor que el de *ABC*, pero las áreas de las regiones son iguales.

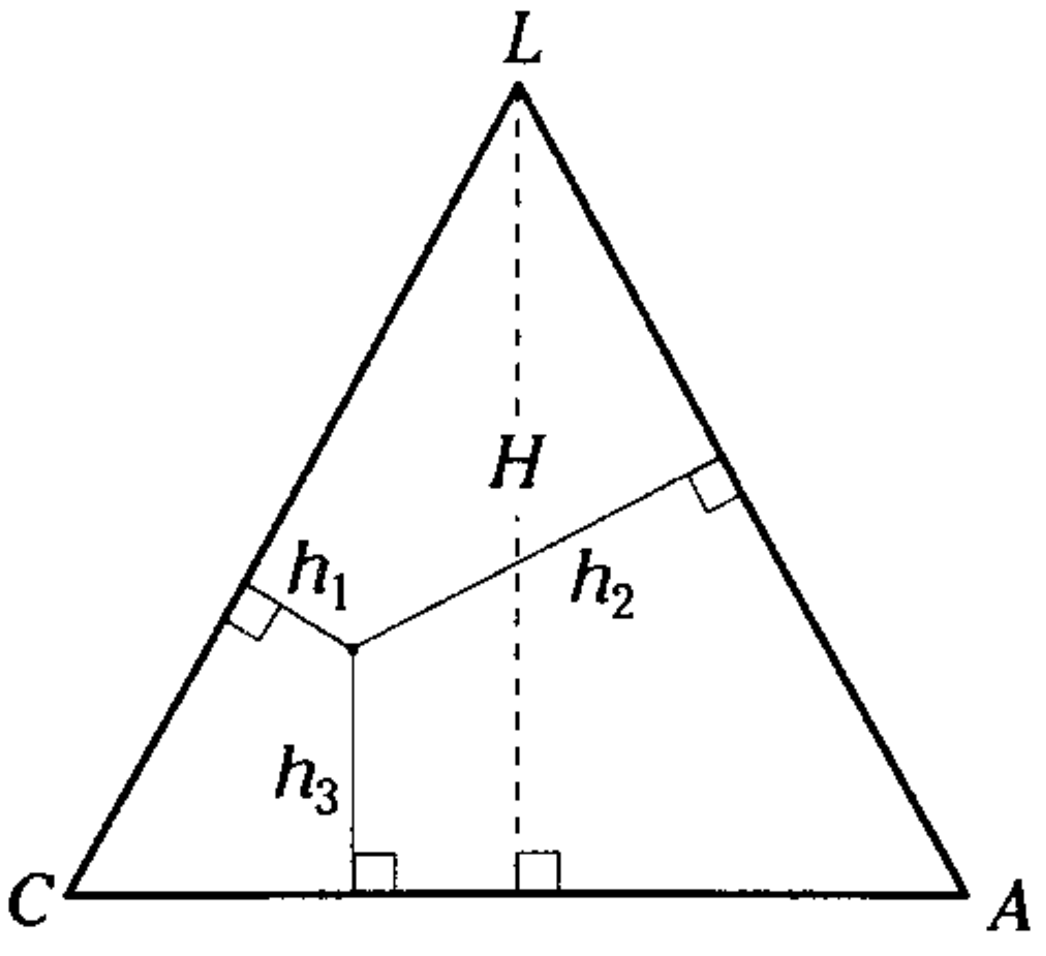
Resolución 2
Para la fabricación de un kilo de chocolate, hemos visto que estas cantidades no pueden escogerse arbitrariamente. Por lo cual necesitamos:

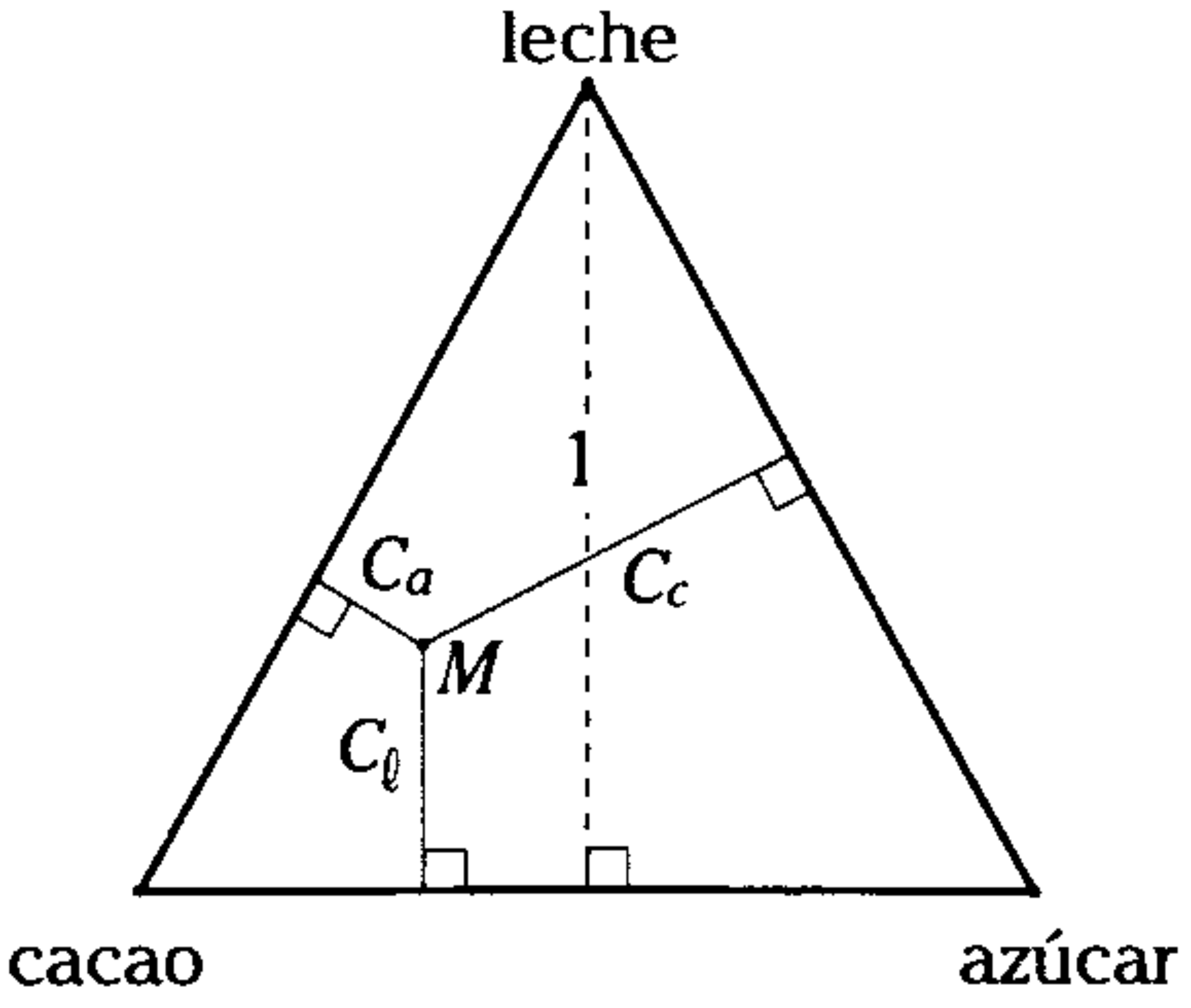
$$C_c \leq \frac{1}{2} \qquad C_\ell \leq \frac{1}{2}$$

$$C_a \leq \frac{1}{2} C_c \qquad C_a \leq \frac{1}{2} C_\ell$$

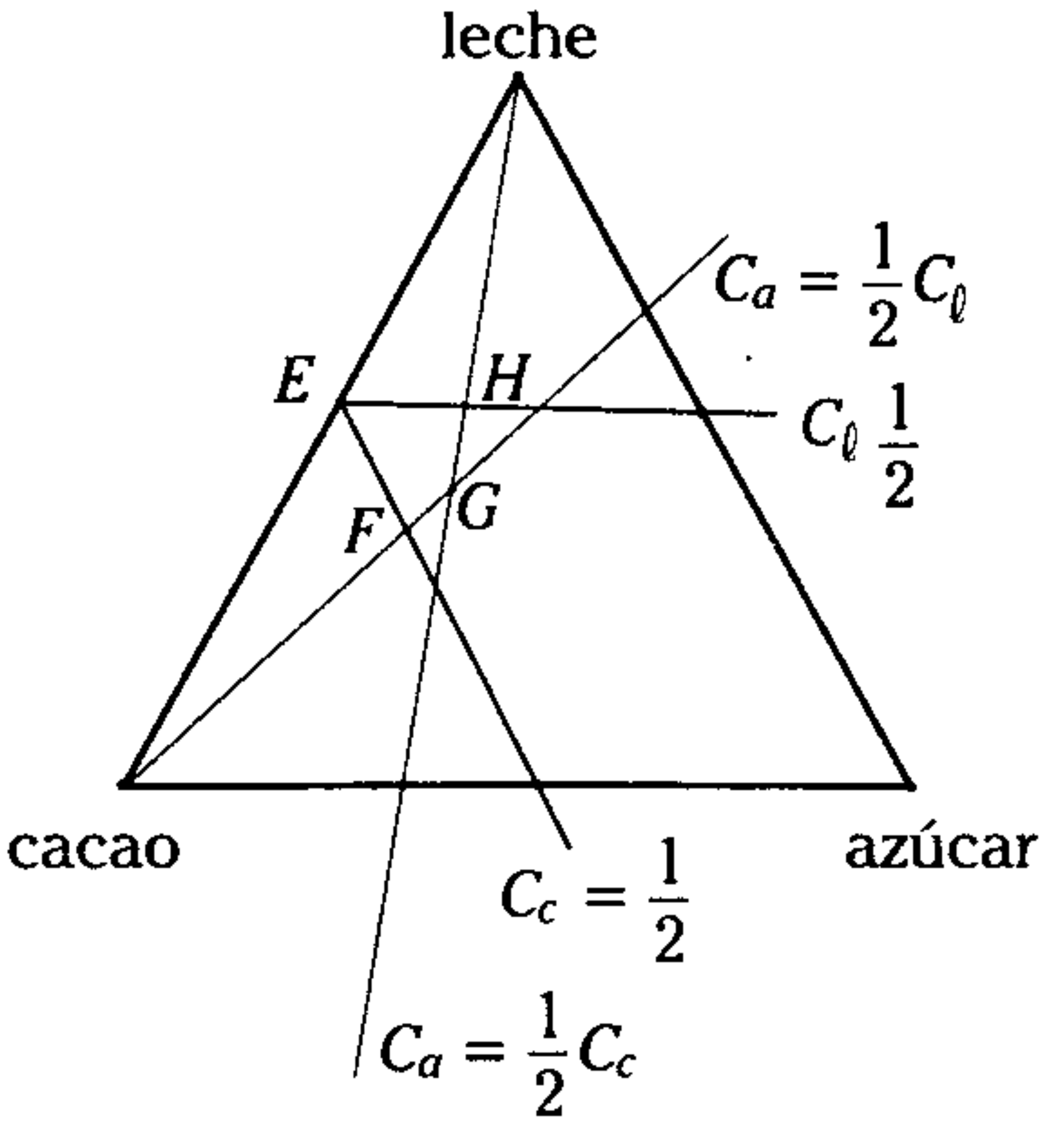
Sabiendo que $C_c + C_a + C_\ell = 1$

Sin importar cuáles sean las ternas (C_c, C_a, C_ℓ) que verifiquen las anteriores expresiones, nos darán la composición de un chocolate conforme con la receta que hemos escogido.





$$C_C + C_a + C_\ell = 1$$



Zona de producción

Intentemos hallar, gráficamente, el conjunto de las ternas (C_c, C_a, C_ℓ) compatibles con los límites señalados, esto nos permitirá definir la zona de producción de chocolate. Citaremos, en primer lugar, la siguiente propiedad geométrica. *Si desde un punto cualquiera, situado en el interior de un triángulo equilátero, trazamos las perpendiculares a los lados, la suma de las longitudes de estas es igual a la altura del triángulo.*

Utilizaremos esta propiedad para representar todas las mezclas posibles de cacao, azúcar y leche en un triángulo equilátero, cuya altura es 1. El cacao puro corresponde al punto C, el azúcar a A, y la leche a L. Cada tipo de chocolate queda así representado por un punto del triángulo. El punto M por tanto representa una mezcla hecha con las cantidades.

$$C_c + C_a + C_\ell = 1$$

Los chocolates amargos se encuentra en las proximidades de C, los chocolates azucarados cerca de A y los chocolates con leche próximos a L. Volviendo a nuestra receta, podemos representa cada una de las condiciones.

$$C_c \leq \frac{1}{2} \qquad C_\ell \leq \frac{1}{2}$$

$$C_a \leq \frac{1}{2}C_c \qquad C_a \leq \frac{1}{2}C_\ell$$

Por medio de planos, que nos definirán en el triángulo CAL el cuadrilátero $EFGH$ (ver figura), todos los puntos de este último representan la mezcla compatible con la receta dada.

Advirtamos que E corresponde a un chocolate para diabéticos.

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

FÓRMULA GENERAL

El área de una región cuadrangular convexa o no convexa es igual al semiproducto de las longitudes de sus diagonales por el seno de la medida del ángulo determinado por dichas diagonales.

1.

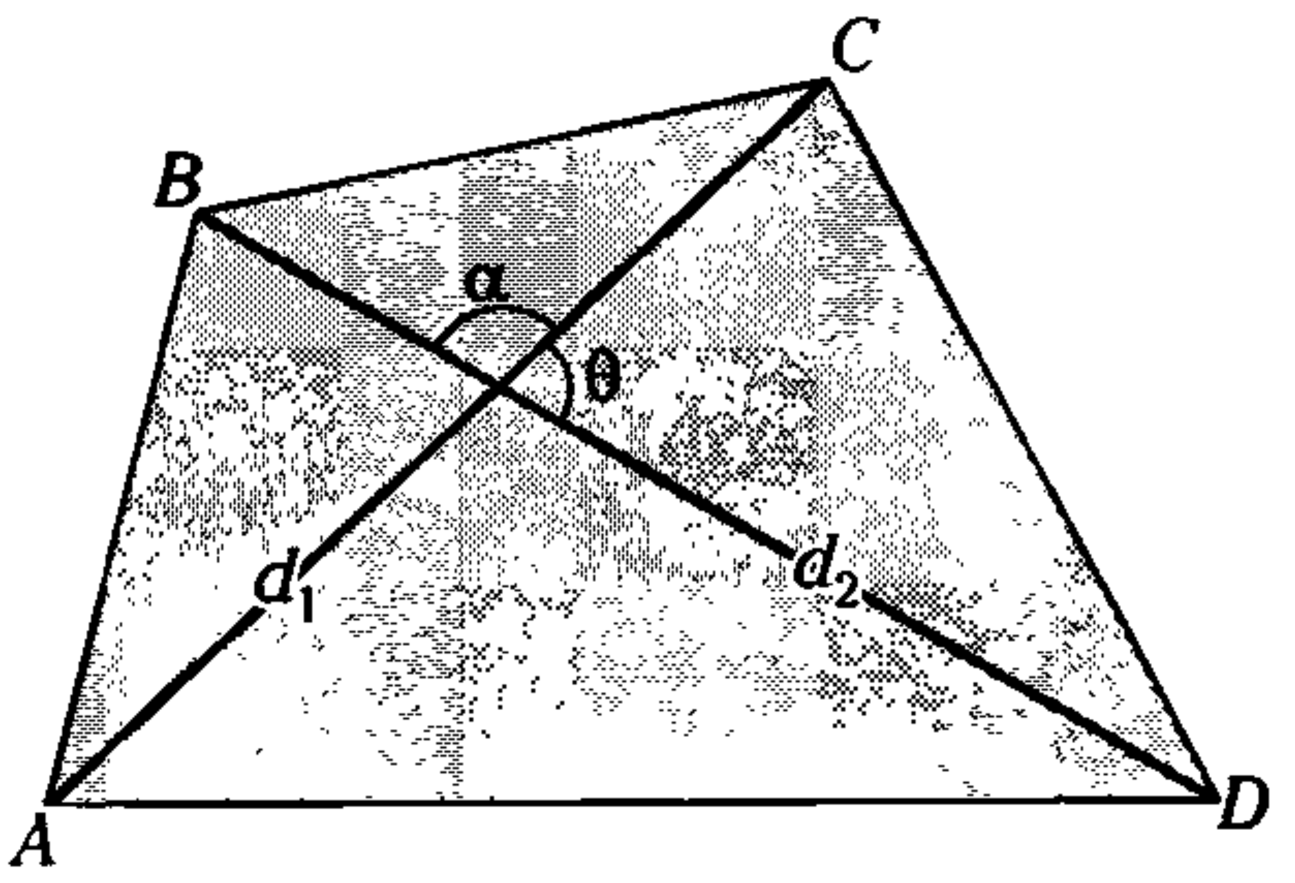


Figura 18.64

En la figura

d_1 y d_2 : longitudes de las diagonales del $\square ABCD$.

α y θ : medida del ángulo determinado por las diagonales del $\square ABCD$.

Entonces

$$\mathbb{A}_{\square ABCD} = \frac{d_1.d_2}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

2.

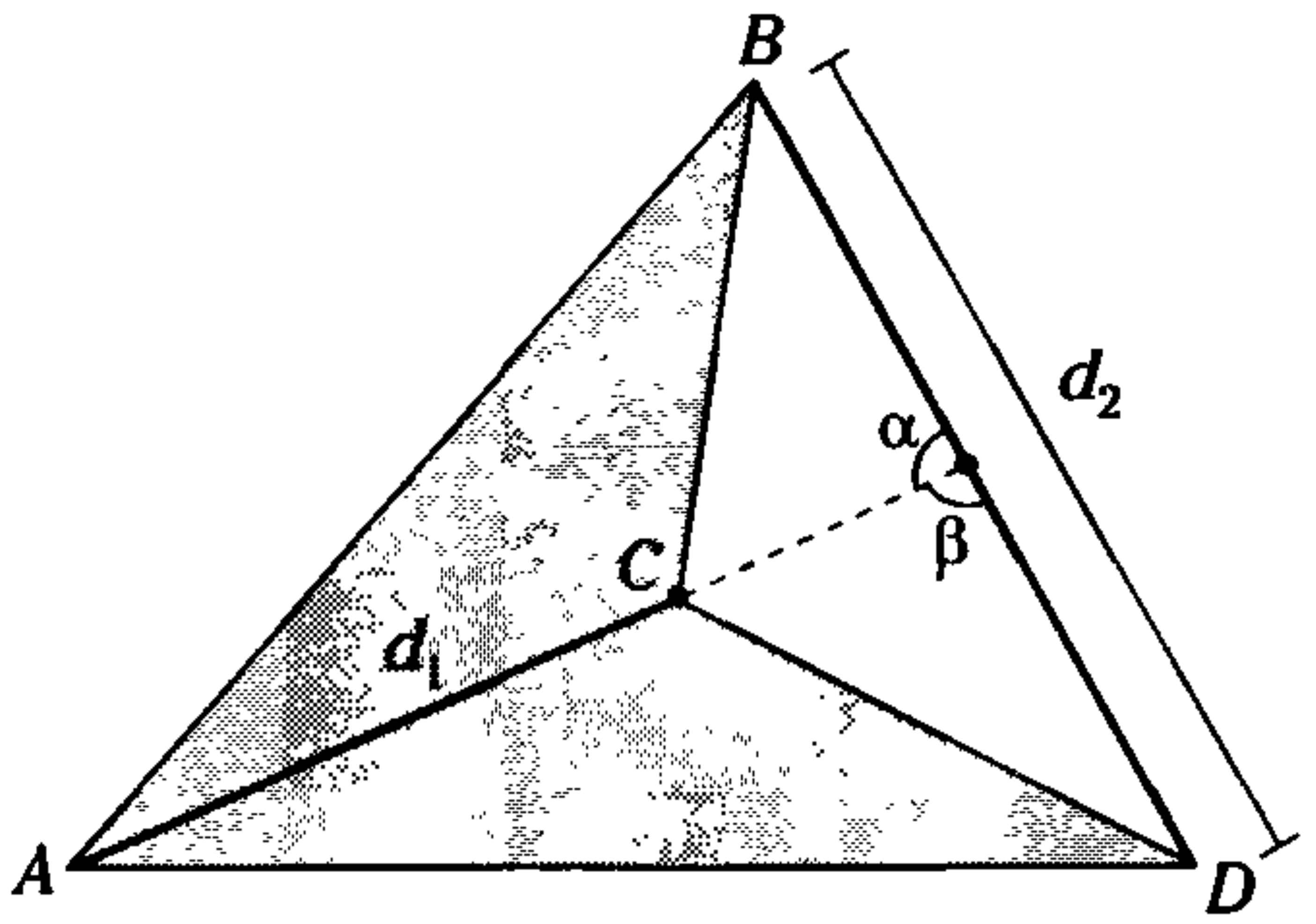


Figura 18.65

En la figura

d_1 y d_2 : longitudes de las diagonales del $\square ABCD$.

α o β : medida del ángulo determinado por las diagonales del $\square ABCD$.

Entonces

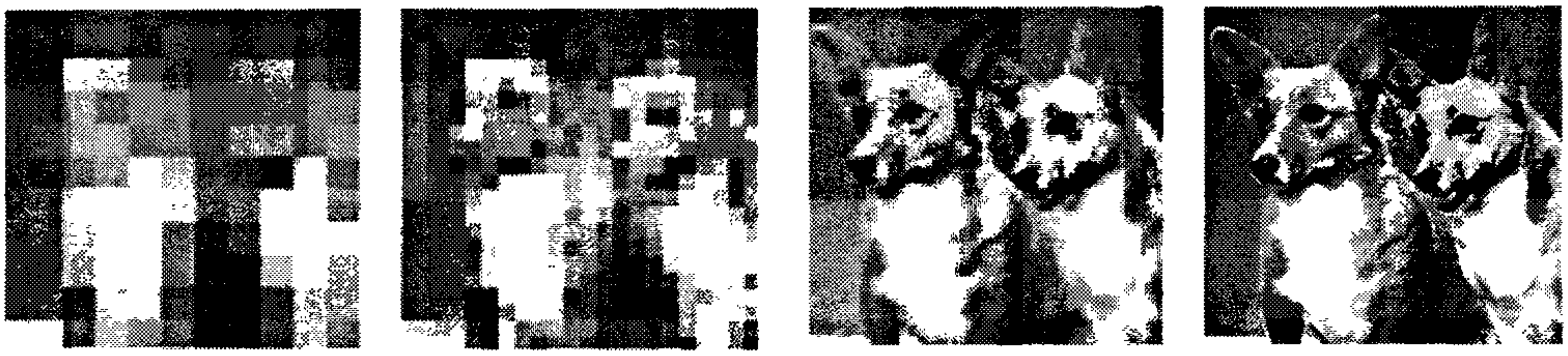
$$\mathbb{A}_{\square ABCD} = \frac{d_1.d_2}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

Nota

Si $\alpha+\theta = 180° \rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\theta$

Nota

Si $\alpha+\beta = 180° \rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$



El posicionamiento de colores en un enmallado tendrá mayor resolución, si mayor es la cantidad de píxeles (regiones cuadradas de un determinado color) que tiene una imagen. Esto muestra una de las aplicaciones de las regiones cuadrangulares en la informática.

Demostración

1.

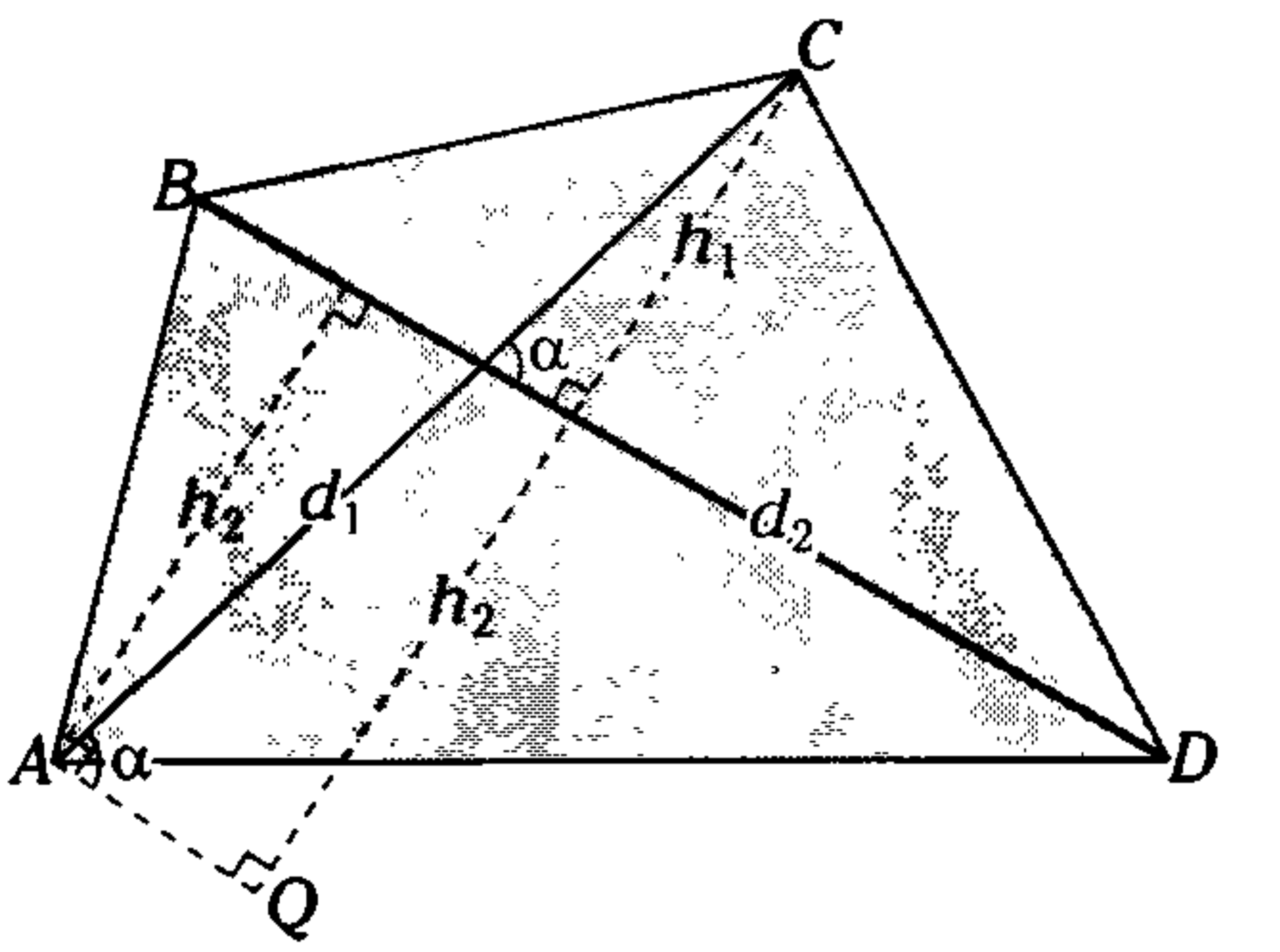


Figura 18.66

De la figura

$$\mathbb{A}_{ABCD} = \mathbb{A}_{\triangle ABD} + \mathbb{A}_{\triangle BCD}$$

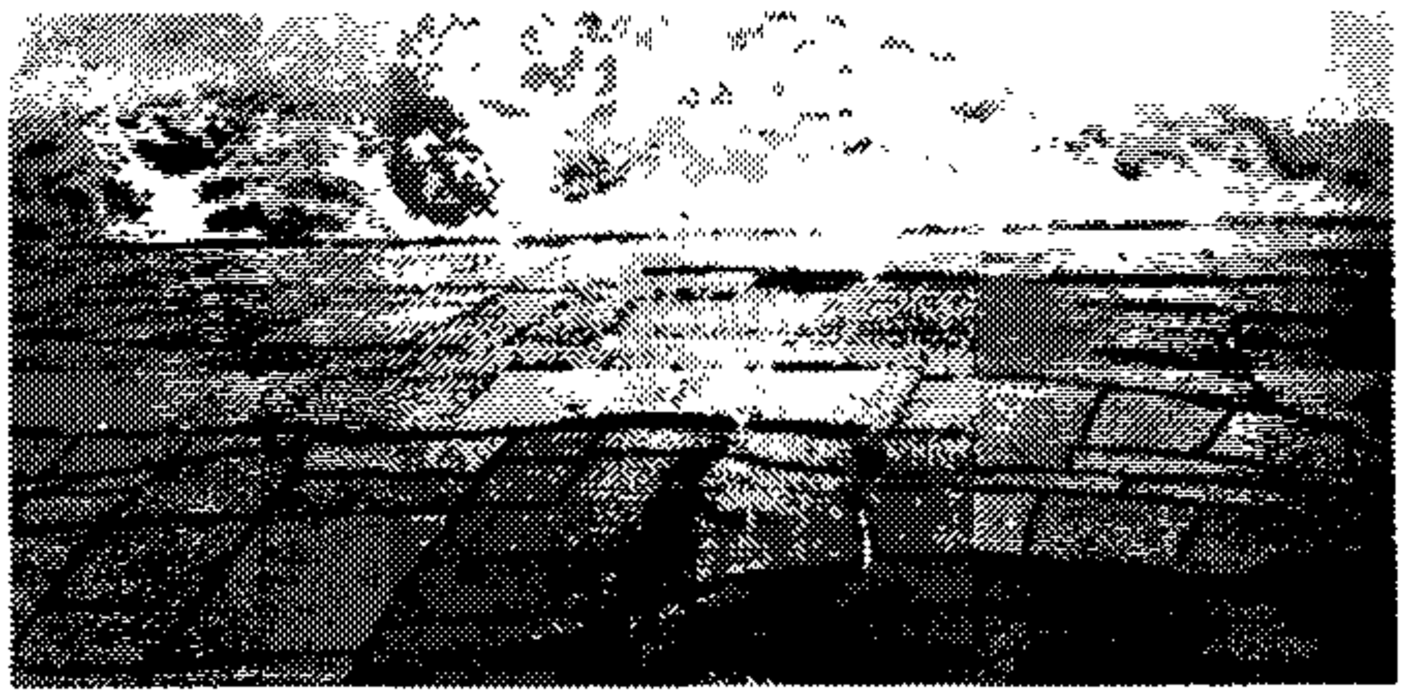
$$\mathbb{A}_{ABCD} = \frac{d_2 . h_2}{2} + \frac{d_2 . h_1}{2}$$

$$\mathbb{A}_{ABCD} = (h_2 + h_1)\frac{d_2}{2} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle AQC$: $h_1 + h_2 = d_1 \text{sen}\alpha$ (II)

Reemplazando (II) en (I)

$$\therefore \ \mathbb{A}_{ABCD} = \frac{d_1 . d_2}{2}\text{sen}\alpha$$



Para obtener una mejor eficiencia productiva en el sector agrícola, los terrenos deben tener formas rectangulares para aprovechar al máximo el agua en el sistema de riego.

2.

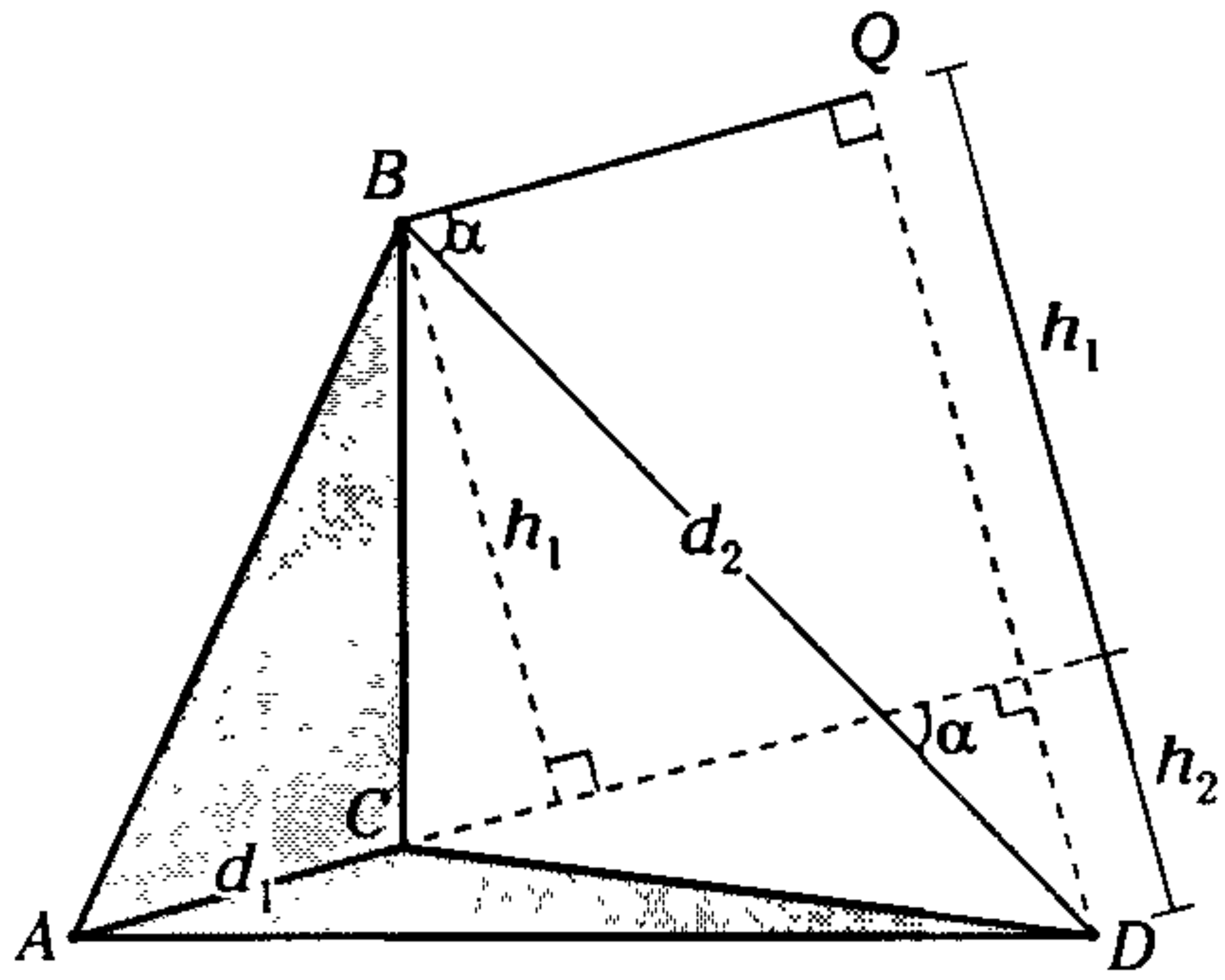


Figura 18.67

De la figura

$$\mathbb{A}_{ABCD} = \mathbb{A}_{\triangle ABC} + \mathbb{A}_{\triangle ACD}$$

$$\mathbb{A}_{ABCD} = \frac{d_1 . h_1}{2} + \frac{d_1 . h_2}{2}$$

$$\mathbb{A}_{ABCD} = \frac{d_1}{2}(h_1 + h_2) \qquad \text{(I)}$$

$\triangle BQD$: $h_1 + h_2 = d_2 \text{sen}\alpha$ (II)

Reemplazando (II) en (I)

$$\therefore \ \mathbb{A}_{ABCD} = \frac{d_1 . d_2}{2}\text{sen}\alpha$$

Observación

Sabemos que el área de una región paralelográmica *ABCD* es base por altura.

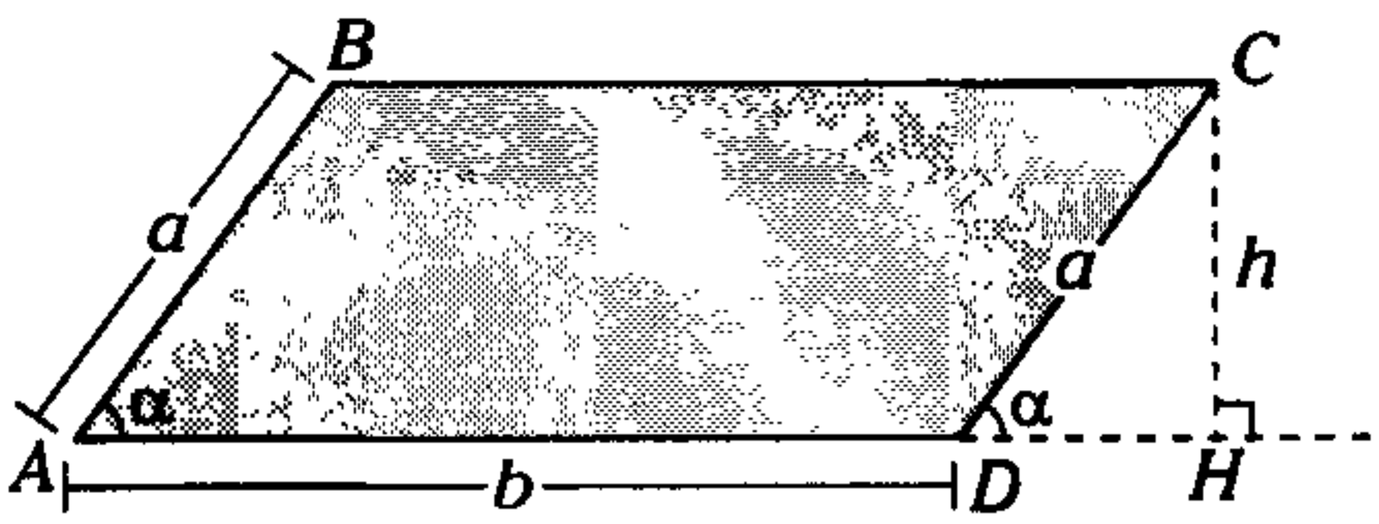


Figura 18.68

$\mathbb{A}_{ABCD} = b . h$

pero $h = a . \text{sen}\alpha$

$\rightarrow$ $\boxed{\mathbb{A}_{ABCD} = a . b\text{sen}\alpha}$

Por lo tanto, otra manera de demostrar la fórmula general podría ser la siguiente:

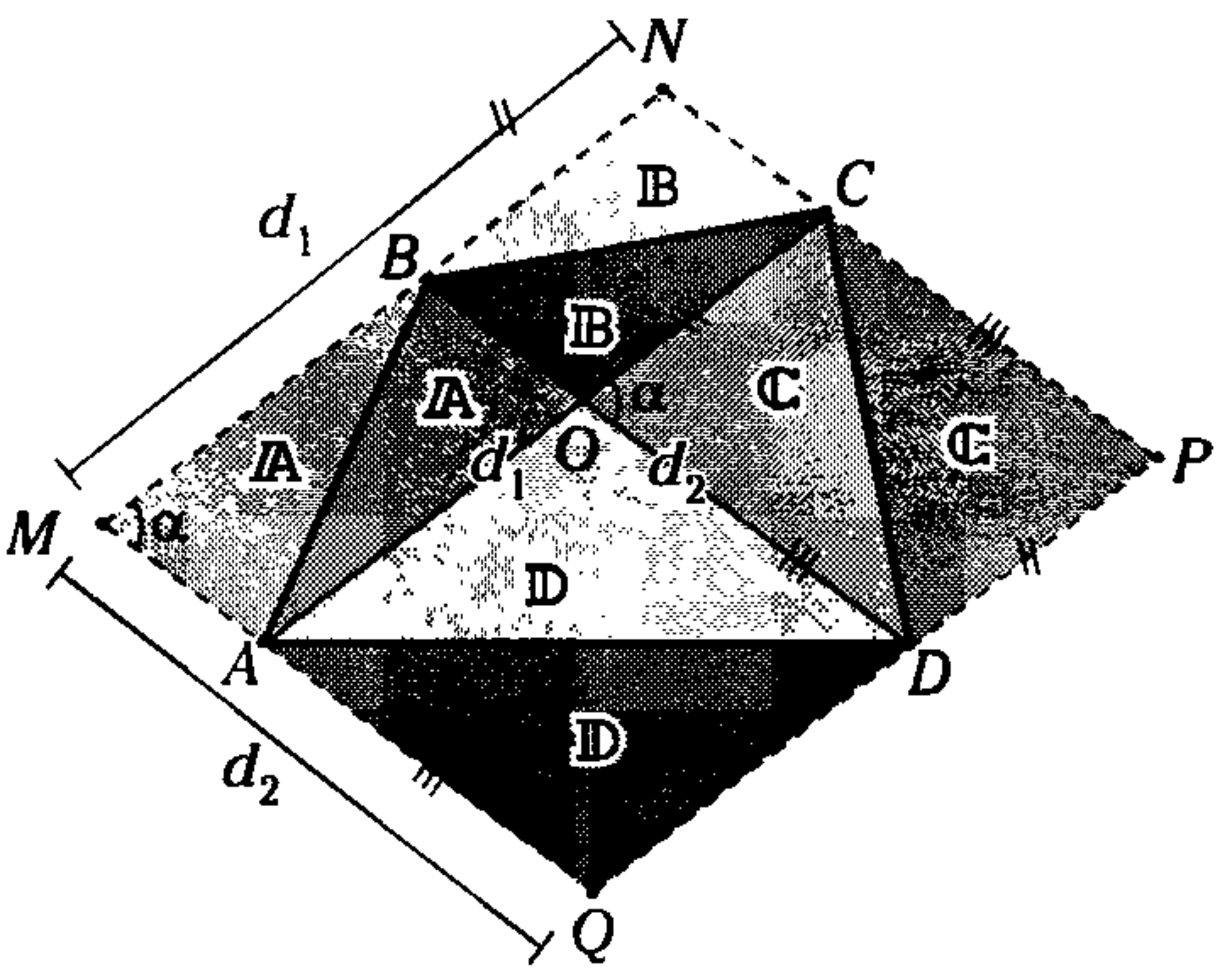


Figura 18.69

Sea $AC = d_1; BD = d_2$ y

la medida del ángulo formado por las diagonales es α.

$(\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{0\}) \rightarrow m\measuredangle COD = \alpha$

Por los vértices del cuadrilátero *ABCD*, trazamos rectas paralelas a sus diagonales, $\overline{MN} \,//\, \overline{AC} \,//\, \overline{QP}$ y $\overline{MQ} \,//\, \overline{BD} \,//\, \overline{NP}$ formándose el paralelogramo *MNPQ*.

Entonces en los paralelogramos *AOBM*, *COBN*, *DOCP* y *AODQ*, las diagonales *AB*, *BC*, *CD* y *DA*, respectivamente, dividen a dichas regiones en dos regiones triangulares equivalentes. Podemos notar así

$$\mathbb{A}_{\blacksquare MNPQ} = 2\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}$$

$$\rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD} = \frac{\mathbb{A}_{\blacksquare MNPQ}}{2} = \frac{d_1 . d_2}{2}\text{sen}\alpha$$

$$\therefore \boxed{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD} = \frac{d_1 . d_2}{2}\text{sen}\alpha}$$

Observación

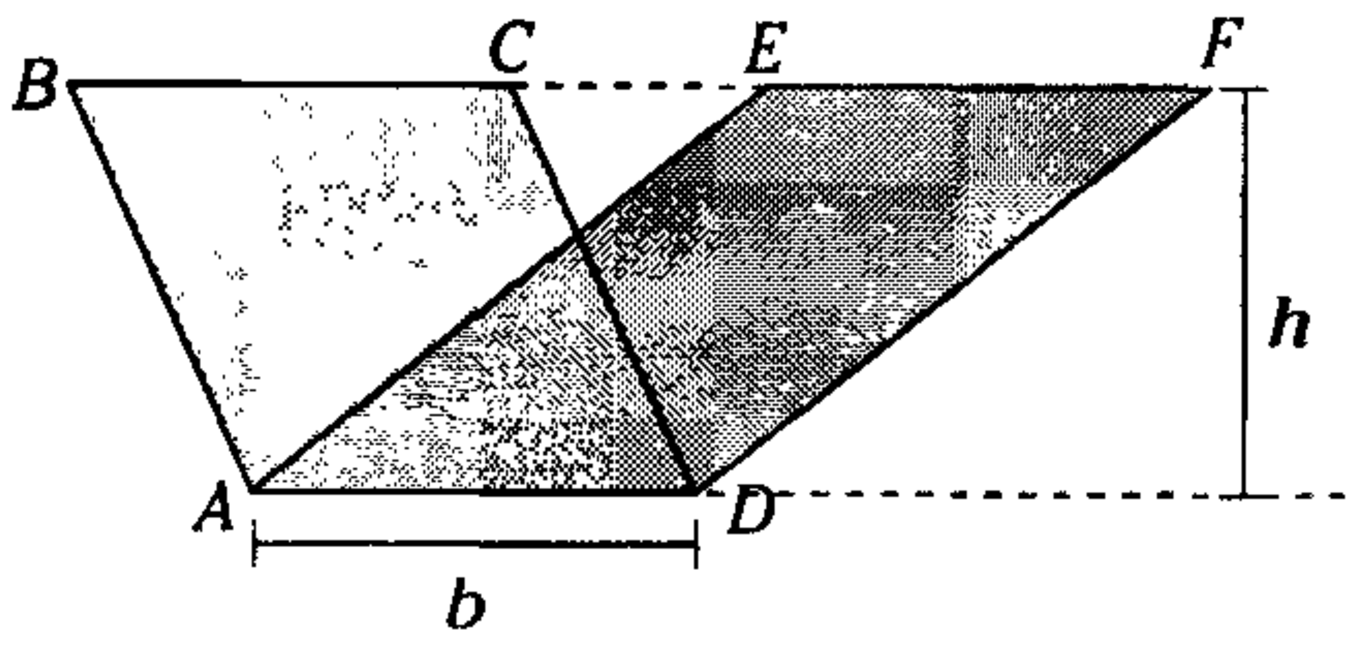


Figura 18.70

Si *ABCD* y *AEFD* son paralelogramos y $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ son coliniales

$$\rightarrow \boxed{\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \mathbb{A}_{\blacksquare AEFD} = b.h}$$

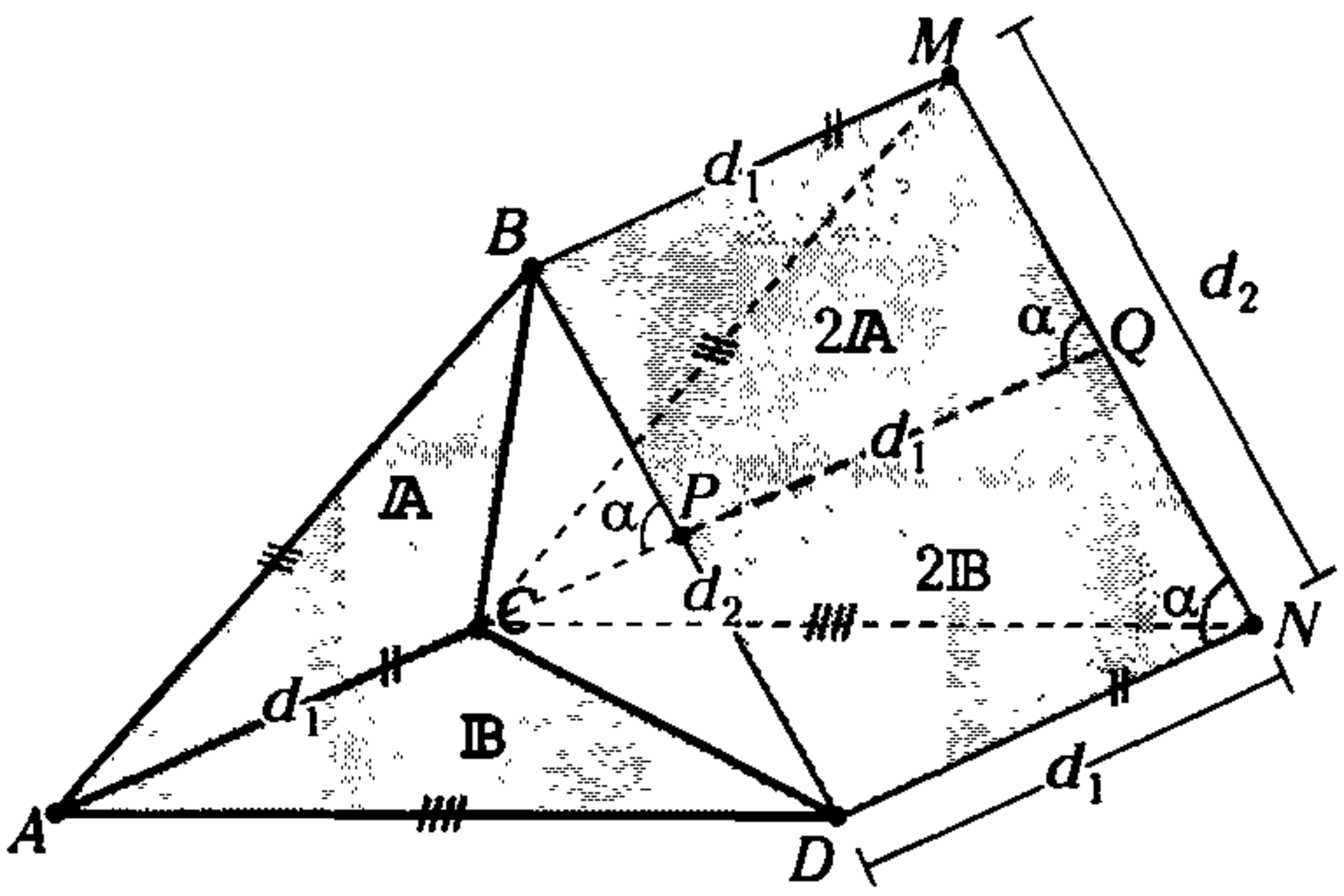


Figura 18.71

$$\mathbb{A}_{\blacksquare PBNQ} = \mathbb{A}_{\blacksquare ABMC} = 2\mathbb{A}$$

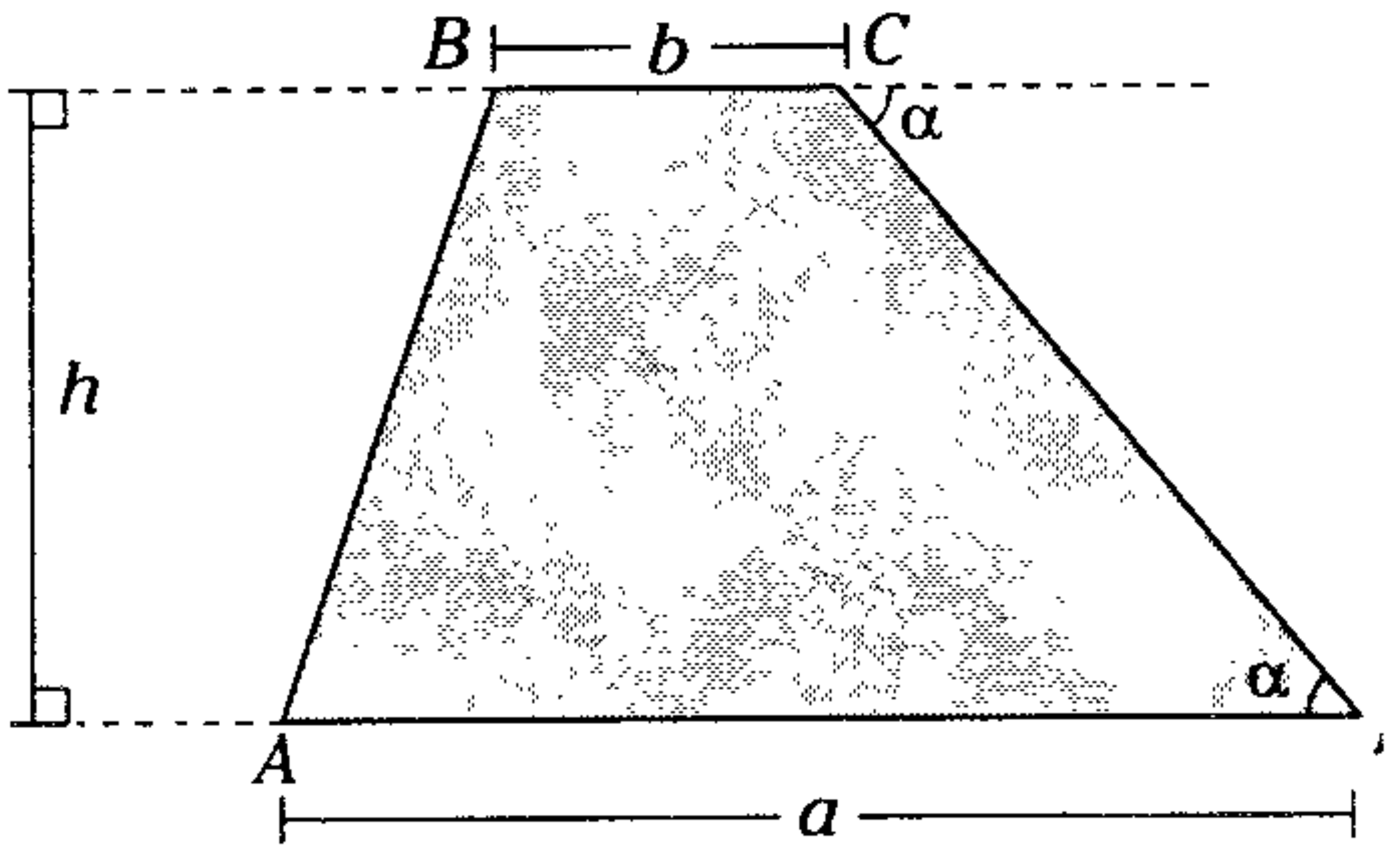
$$\mathbb{A}_{\blacksquare DPQN} = \mathbb{A}_{\blacksquare DACN} = 2\mathbb{B}$$

$$\rightarrow \mathbb{A}_{\blacksquare DBMN} = 2\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD} = d_1 . d_2\,\text{sen}\alpha$$

$$\therefore \boxed{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD} = \frac{d_1 . d_2}{2}\text{sen}\alpha}$$

REGIÓN TRAPECIAL

El área de la región trapecial es igual al producto de la semisuma de las longitudes de sus bases (a y b) y su altura (h).

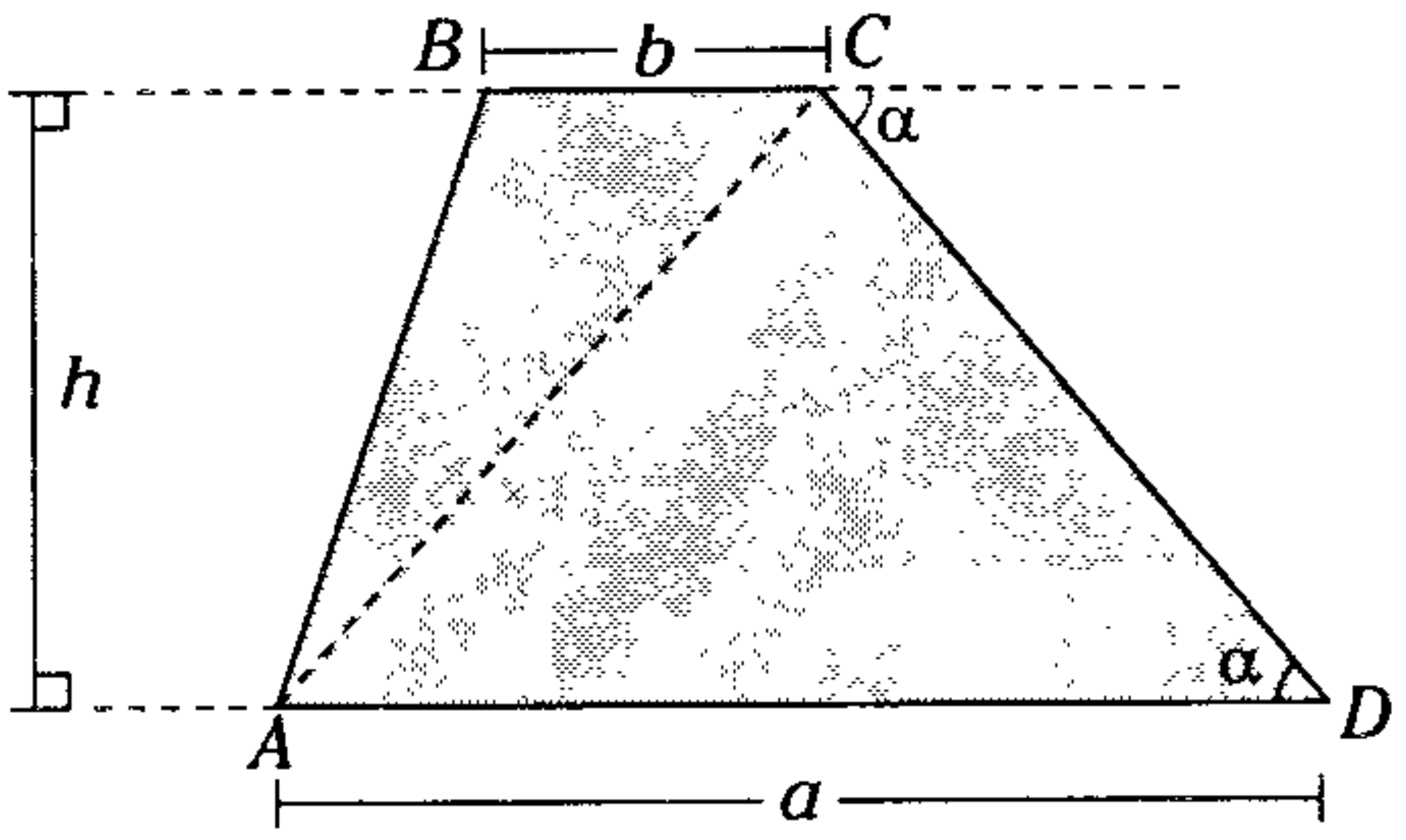


(a)

$$\mathbb{A}_{⏢ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right).(h)$$

Demostración

Primer método



(b)

Figura 18.72

Se traza la diagonal $\overline{AC}$, luego se tiene

$$\mathbb{A}_{⏢ABCD}=\mathbb{A}_{\triangle ABC}+\mathbb{A}_{\triangle ACD}$$

$$\mathbb{A}_{⏢ABCD}=\frac{b.h}{2}+\frac{a.h}{2}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{⏢ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

Segundo método

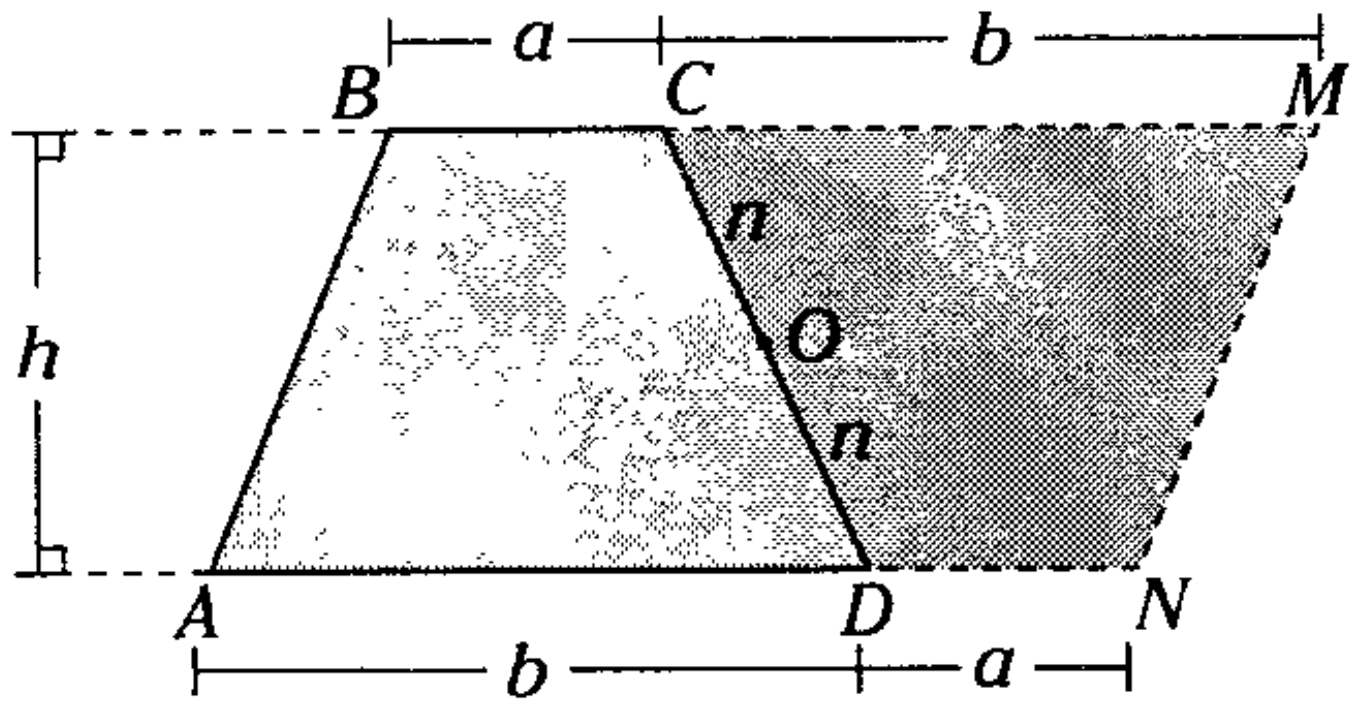


Figura 18.73

Dado el ⏢$ABCD$

Se traza $MNDC$ el simétrico de $ABCD$ respecto de O. (O: punto medio de $\overline{CD}$) formándose el ▱$ABMN$.

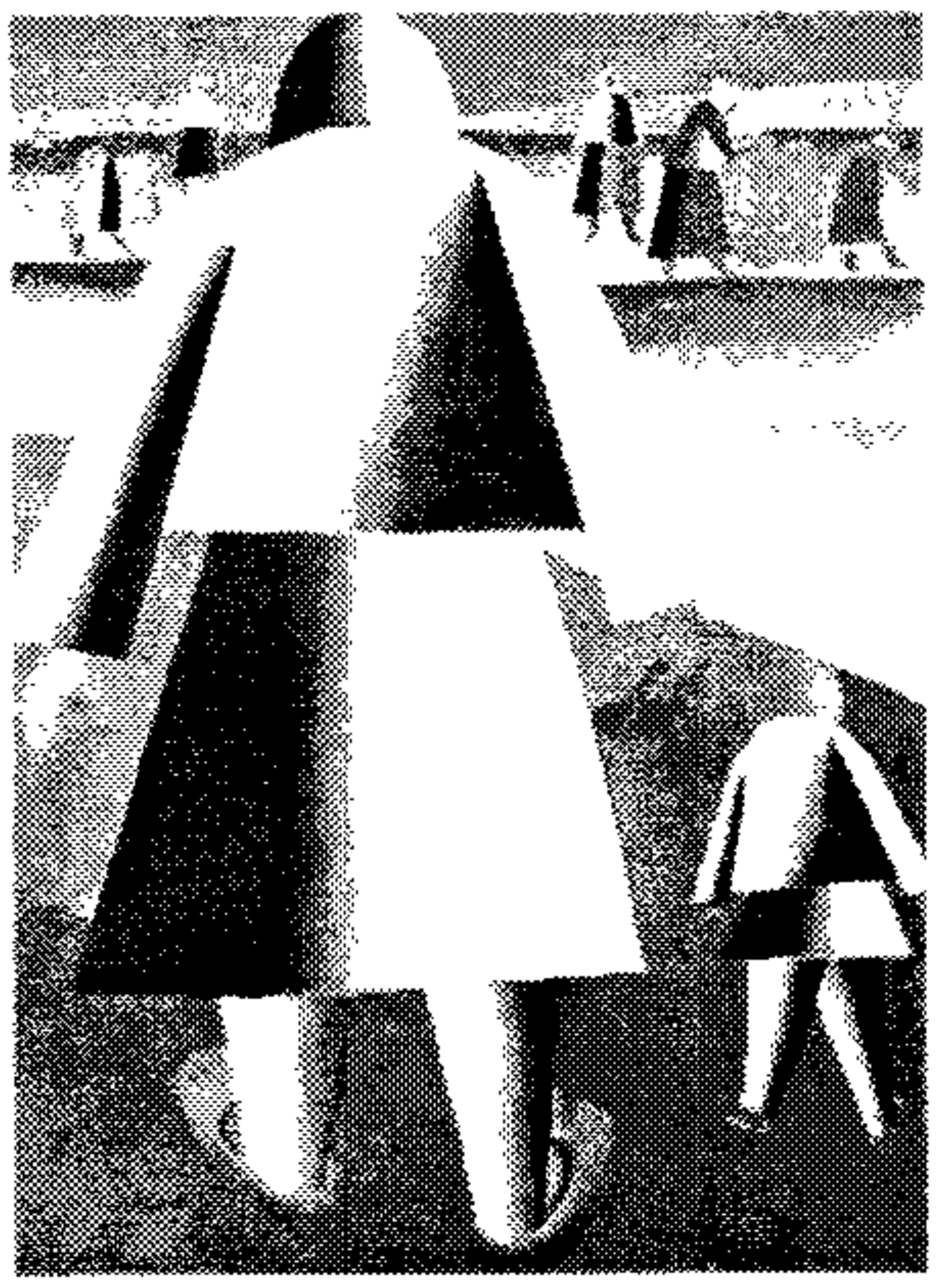
Como ⏢$MNDC\cong$ ⏢$ABCD$

$$\rightarrow\ \mathbb{A}_{▱ABMN}=2\mathbb{A}_{⏢ABCD}$$

pero

$$\mathbb{A}_{▱ABMN}=(b+a).h$$

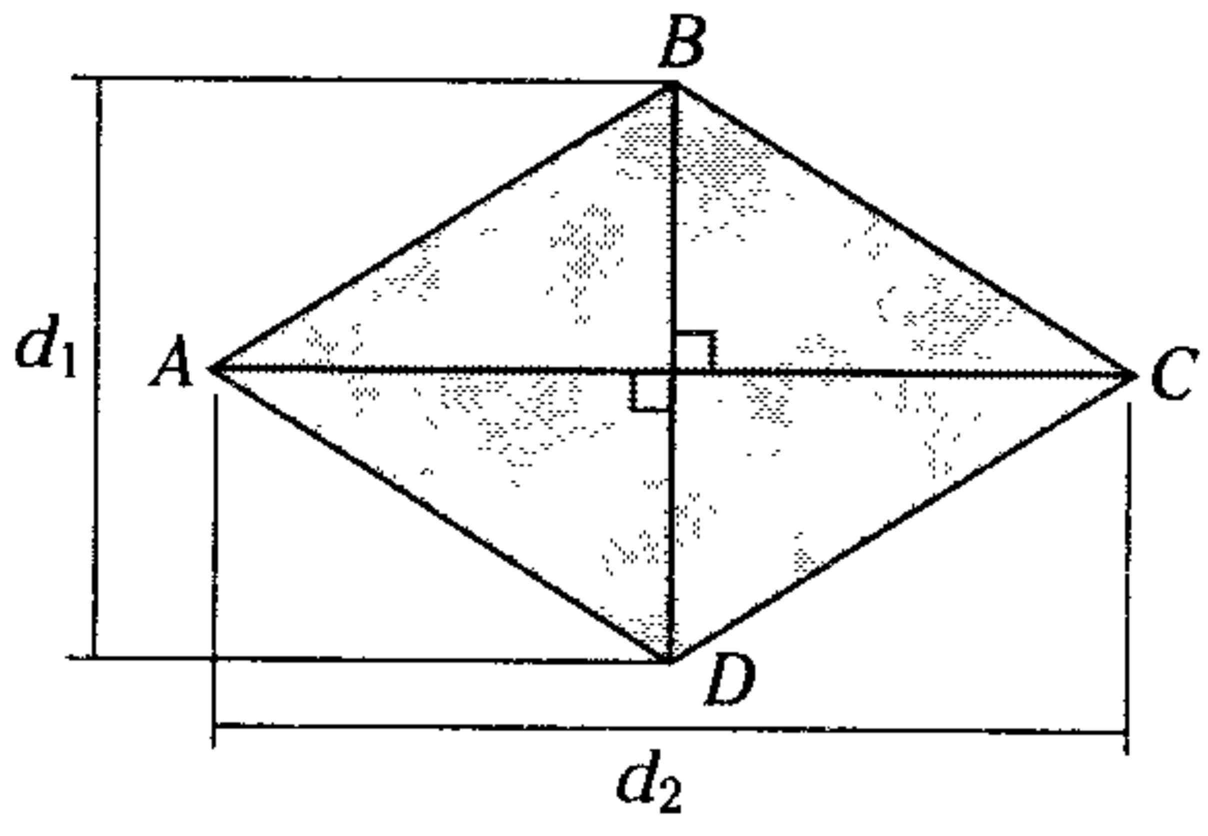
$$\therefore\ \mathbb{A}_{⏢ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right).h$$



El pintor Kasimir Malevich usa regiones trapeciales para representar una mujer y su hija.

REGIÓN ROMBAL

El área de la región rombal es igual al semiproducto de las longitudes de sus diagonales.

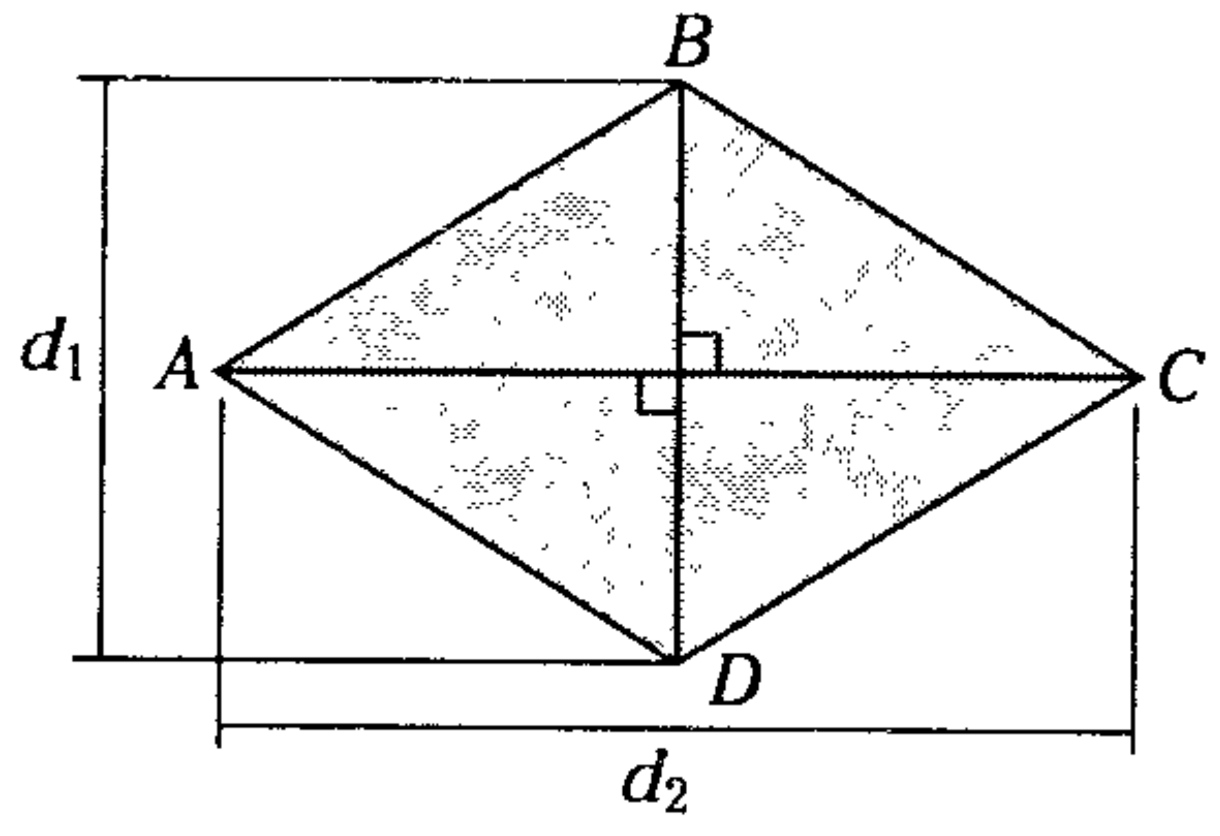


(a)

En la figura 18.63, ◇*ABCD* es un rombo, entonces

$$\mathbb{A}_{\blacklozenge ABCD}=\frac{d_1 \, . \, d_2}{2}$$

Demostración



(b)

Figura 18.74

Por fórmula general

$$\mathbb{A}_{\blacklozenge ABCD}=\frac{d_1 \, . \, d_2}{2}\text{sen}90^\circ \qquad \text{(I)}$$

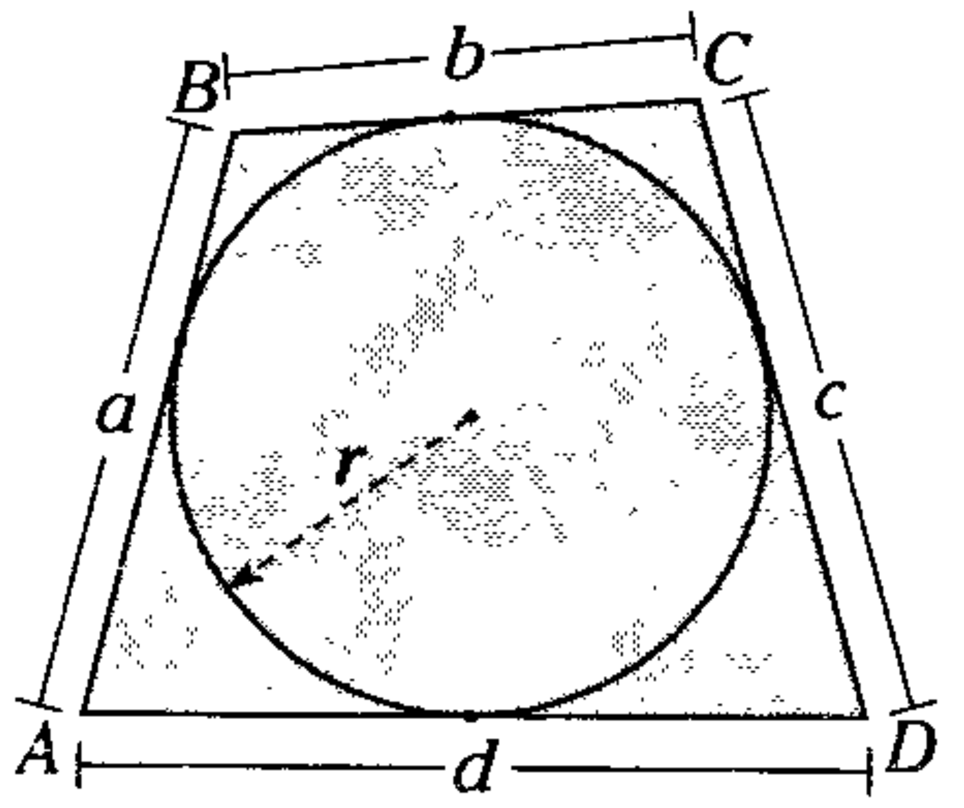
Como $\text{sen}(90^\circ)=1$ (II)

Reemplazando

$$\therefore \; \mathbb{A}_{\blacklozenge ABCD}=\frac{d_1 \, . \, d_2}{2}$$

CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO

El área de la región limitada por un cuadrilátero circunscrito a un circunferencia es igual al producto de la longitud de su semiperímetro (p) y su inradio (r).

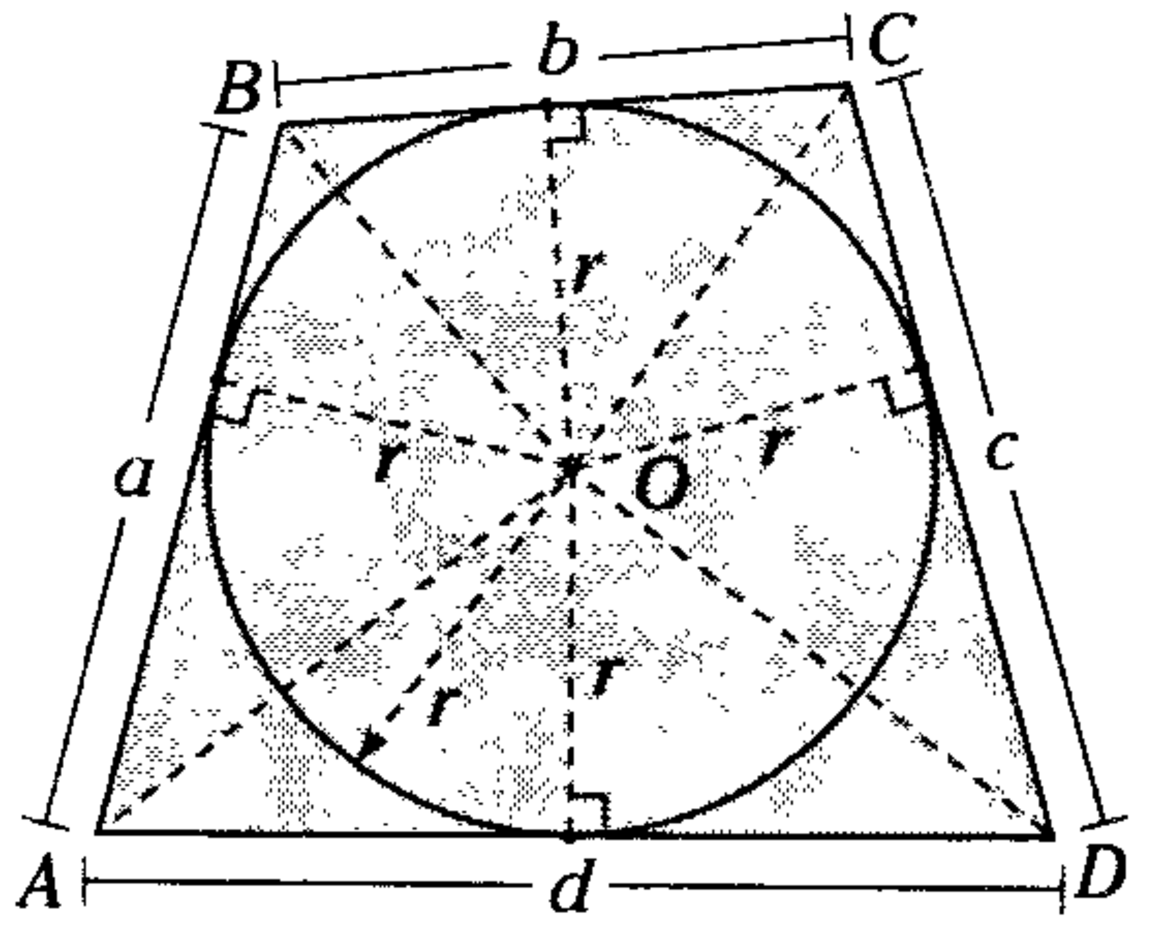


(a)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}=p\,.\,r$$

donde $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

Demostración



(b)

Figura 18.75

De la figura

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}=\mathbb{A}_{\blacktriangle ABO}+\mathbb{A}_{\blacktriangle BOC}+\mathbb{A}_{\blacktriangle COD}+\mathbb{A}_{\blacktriangle AOD}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}=\frac{a.r}{2}+\frac{b.r}{2}+\frac{c.r}{2}+\frac{d.r}{2}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}=\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right).r$$

$$\therefore \; \mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}=p\,.\,r$$

CUADRILÁTERO INSCRITO O INSCRIPTIBLE

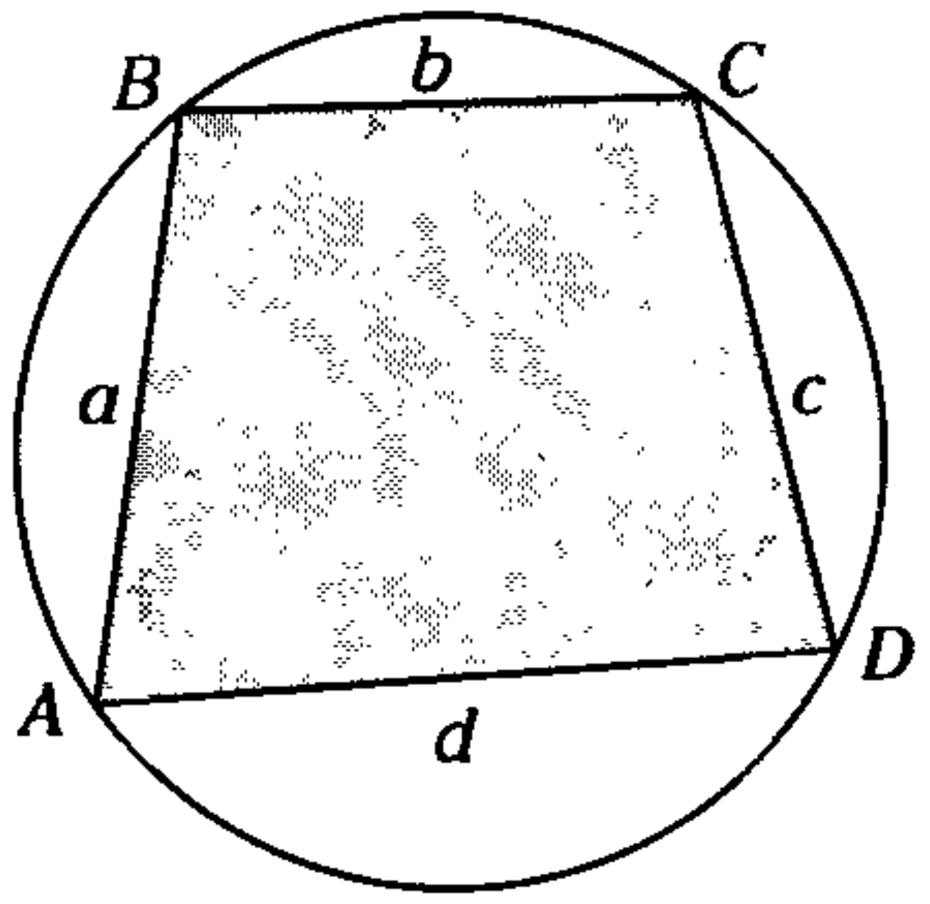


Figura 18.76

El área de la región limitada por un cuadrilátero inscrito o inscriptible, en función de las longitudes de los lados a, b, c y d y del semiperímetro p, se puede calcular con la siguiente fórmula notable:

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

donde $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

Fórmula notable descubierta en el siglo VII d.n.e. por el matemático hindú Brahmagupta. Según ella, el área de la región cuadrilátera inscrita es una función simétrica de las longitudes de los cuatro lados a, b, c y d, como a continuación demostramos.

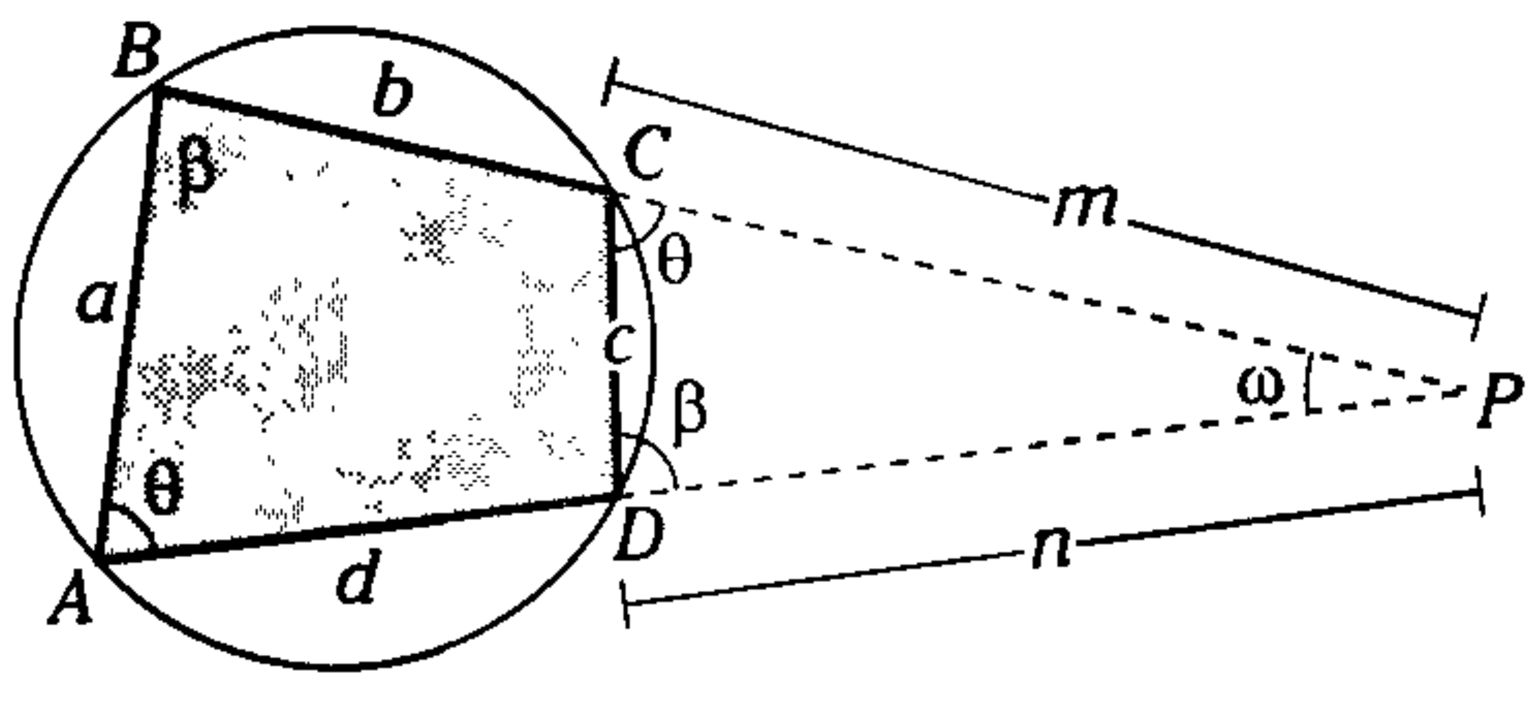


Figura 18.77

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}=\mathbb{A}_{\blacktriangle PAB}-\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD} \qquad \text{(I)}$$

$\square ABCD$: inscrito en la circunferencia mostrada

$\rightarrow \triangle PAB \sim \triangle PCD$ (A.A.A.)

Por relación de áreas en regiones triangulares

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle PAB}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD}}=\frac{a^2}{c^2}$$

$$\rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle PAB}=\frac{a^2}{c^2}\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}=\frac{a^2}{c^2}\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD}-\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}=\left(\frac{a^2-c^2}{c^2}\right)\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD} \qquad \text{(III)}$$

Cálculo de $\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD}$

Sea $p_1=\dfrac{c+m+n}{2}$ (IV)

Por la fórmula de Herón

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD}=\sqrt{p_1(p_1-c)(p_1-m)(p_1-n)}$$

Además

$$p_1-c=\frac{c+m+n}{2}-c=\frac{m+n-c}{2}$$

$$p_1-m=\frac{c+m+n}{2}-m=\frac{c+n-m}{2}$$

$$p_1-n=\frac{c+m+n}{2}-n=\frac{c+m-n}{2}$$

$$\rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle PCD}=\sqrt{\left(\frac{c+m+n}{2}\right)\left(\frac{m+n-c}{2}\right)\left(\frac{c+n-m}{2}\right)\left(\frac{c+m-n}{2}\right)} \qquad \text{(V)}$$

Se observa $\triangle PCD \sim \triangle PAB$ (A.A.A)

$$\frac{m}{d+n}=\frac{n}{b+m}=\frac{c}{a}$$

Por teorema de proporciones

$$\frac{m+n+c}{d+n+b+m+a}=\frac{c}{a}$$

Restando los consecuentes con antecedentes.

$$\frac{m+n+c}{d+b+a-c}=\frac{c}{a-c}$$

$$\frac{m+n+c}{2p-2c}=\frac{c}{a-c}$$

$$\frac{m+n+c}{2}=\frac{c}{a-c}(p-c) \qquad \text{(VI)}$$

Por teorema de proporciones

$$\frac{m+n-c}{d+n+b+m-a}=\frac{c}{a}$$

Restando los consecuentes con sus antecedentes, se tiene

$$\frac{m+n-c}{d+b-a+c}=\frac{c}{a-c}$$

$$\frac{m+n-c}{2p-2a}=\frac{c}{a-c}$$

$$\frac{m+n-c}{2}=\frac{c}{a-c}(p-a) \qquad \text{(VII)}$$

Por teorema de proporciones

$$\frac{n+c-m}{b+m+a-d-n}=\frac{c}{a}$$

Sumando los consecuentes con sus antecedentes, se tiene

$$\frac{n+c-m}{b+a-d+c}=\frac{c}{a+c}$$

$$\frac{n+c-m}{2p-2d}=\frac{c}{a+c}$$

$$\frac{n+c-m}{2}=\frac{c}{a+c}(p-d) \qquad \text{(VIII)}$$

Por teorema de proporciones

$$\frac{m+c-n}{d+n+a-b-m}=\frac{c}{a}$$

Sumando los consecuentes con sus antecedentes se tiene

$$\frac{m+c-n}{d+a-b+c}=\frac{c}{a+c}$$

$$\frac{m+c-n}{2p-2b}=\frac{c}{a+c}$$

$$\frac{m+c-n}{2}=\frac{c}{a+c}(p-b) \qquad \text{(IX)}$$

Reemplazando (VI), (VII), (VIII) y (IX) en (V)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD}=\sqrt{\frac{c}{a-c}(p-c)\frac{c}{a-c}(p-a)\frac{c}{a+c}(p-d)\frac{c}{a+c}(p-b)}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD}=\frac{c^2}{a^2-c^2}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad \text{(X)}$$

Reemplazando (X) en (III)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}=\left(\frac{a^2-c^2}{c^2}\right)\left(\frac{c^2}{a^2-c^2}\right)\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Simplificando

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

De lo general a lo particular

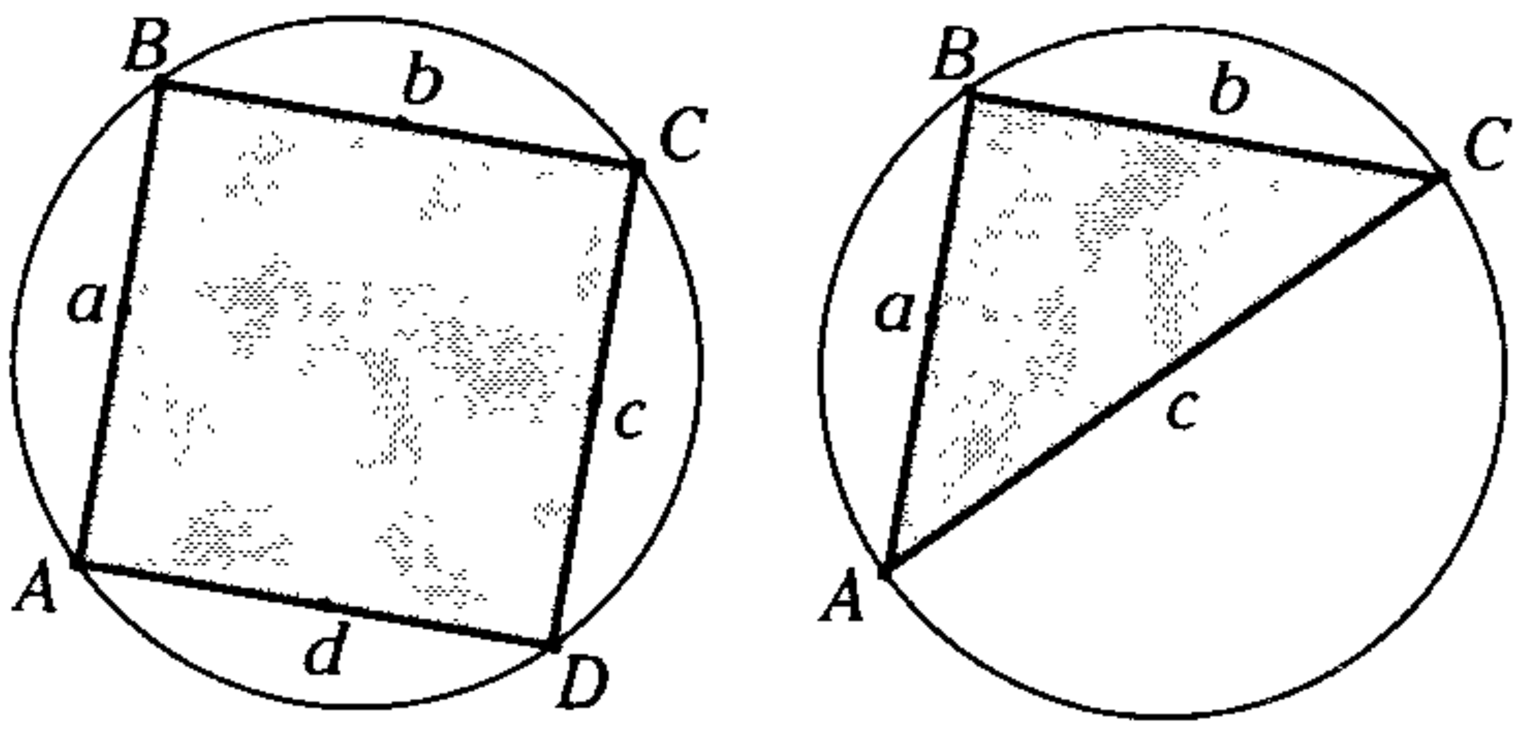


Figura 18.78

Si a, b, c y d son las longitudes de los lados del cuadrilátero inscrito o inscriptible y de semiperímetro p, el área de la región limitada es

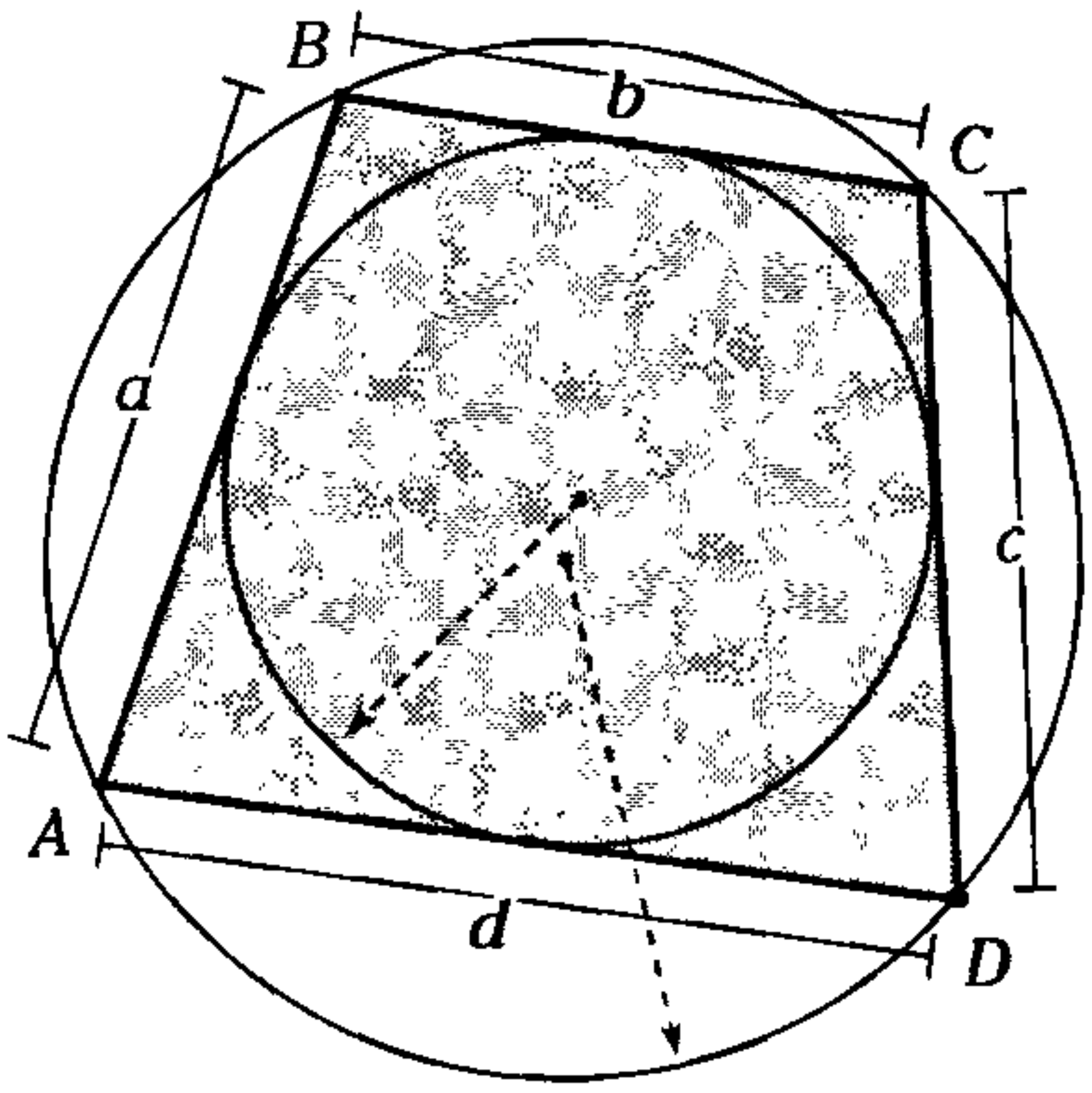
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Si suponemos que $d = 0$, nos encontramos con una fórmula muy conocida para el cálculo del área de la región triangular (llamada de Herón, en honor al matemático griego Herón de Alejandría). Así, a, b, c y p son longitudes de los lados y semiperímetro, respectivamente.

$$\boxed{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

CUADRILÁTERO INSCRITO Y CIRCUNSCRITO (BICÉNTRICO)

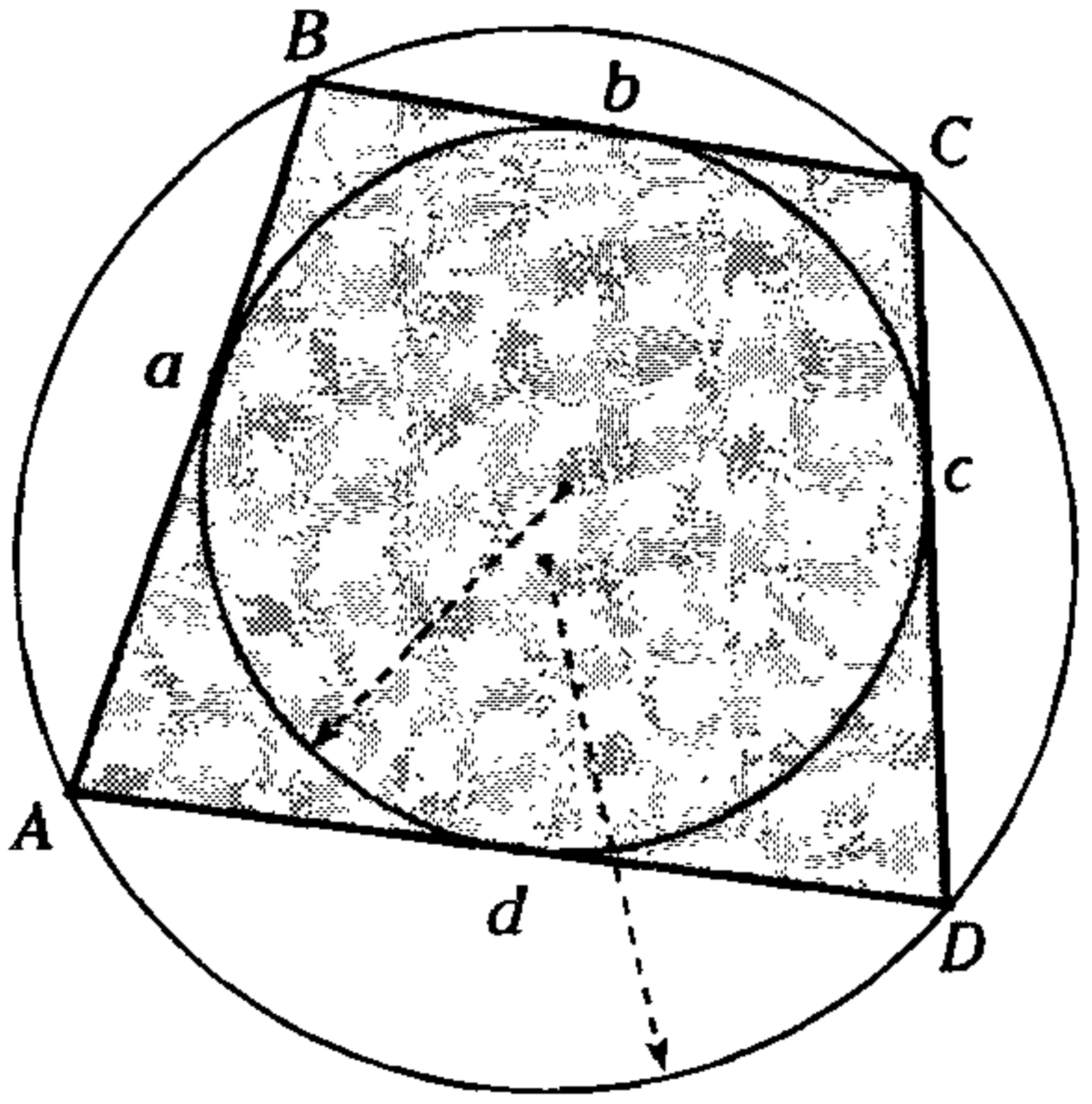
El área de la región limitada por un cuadrilátero bicéntrico es igual a la raíz cuadrada del producto de las longitudes de los cuatro lados.



(a)

$$\mathbb{A}_{\triangle ABCD} = \sqrt{a.b.c.d}$$

Demostración



(b)

Figura 18.79

Por la fórmula de Brahmagupta

$$\mathbb{A}_{\triangle ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad \text{(I)}$$

En el $\triangle ABCD$: Del teorema de Pithot

$$a+c=b+d$$

Reemplazando en

$$p=\frac{a+b+c+d}{2} \rightarrow p=a+c=b+d$$

Luego,

$$p-a=c\,; \quad p-b=d$$

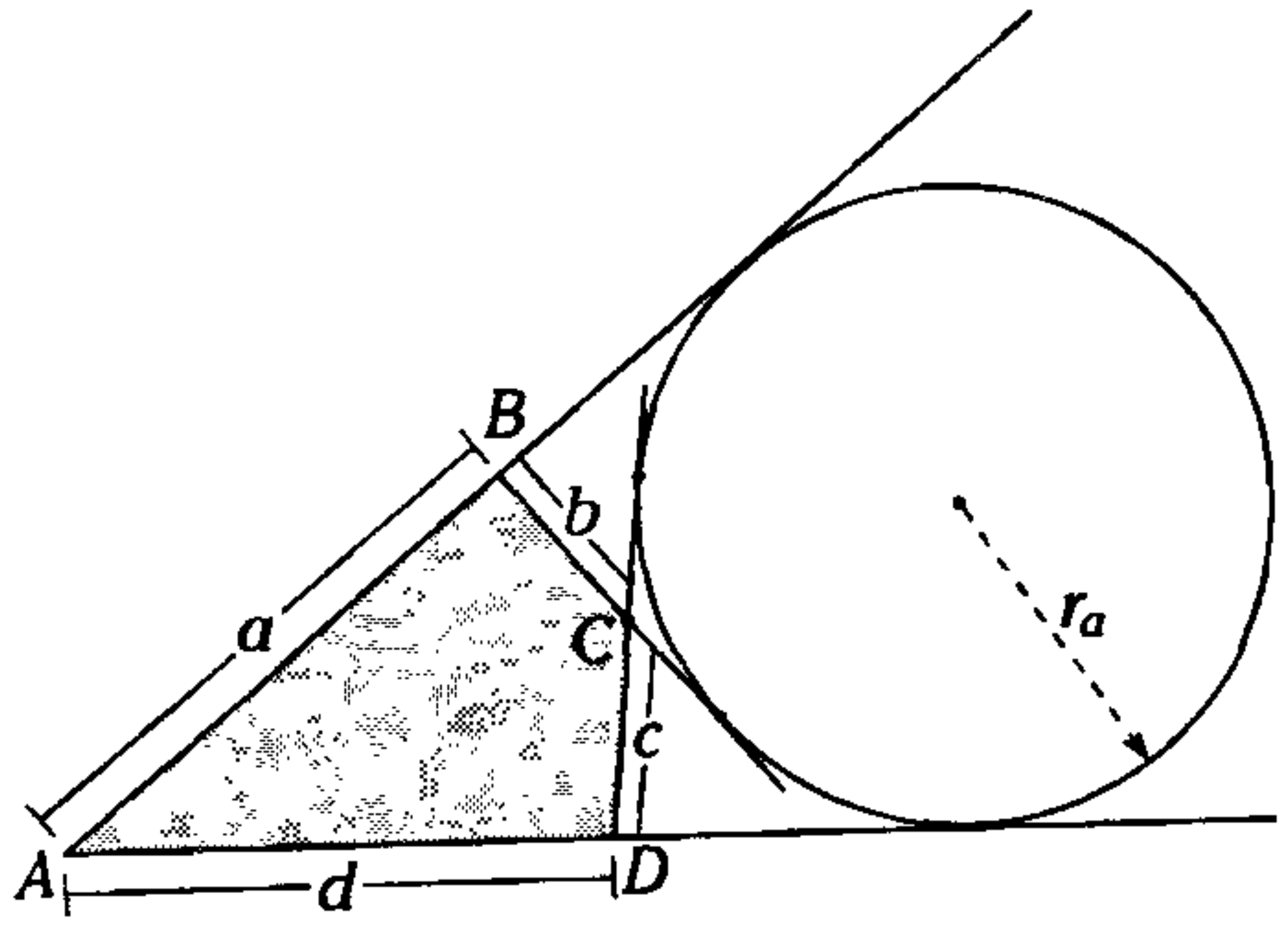
$$p-c=a\,; \quad p-d=b$$

Reemplazando en (I) y ordenando

$$\mathbb{A}_{\triangle ABCD} = \sqrt{a.b.c.d}$$

CUADRILÁTERO EXINSCRITO

El área de la región limitada por un cuadrilátero exinscrito o exinscriptible es igual al producto de la diferencia de las longitudes de dos lados opuestos y el radio de la circunferencia exinscrita.



(a)

Según la figura, $\triangle ABCD$: exinscrito a la circunferencia.

r_a: longitud del exradio, entonces

$$\mathbb{A}_{\triangle ABCD} = (a-c).r_a$$

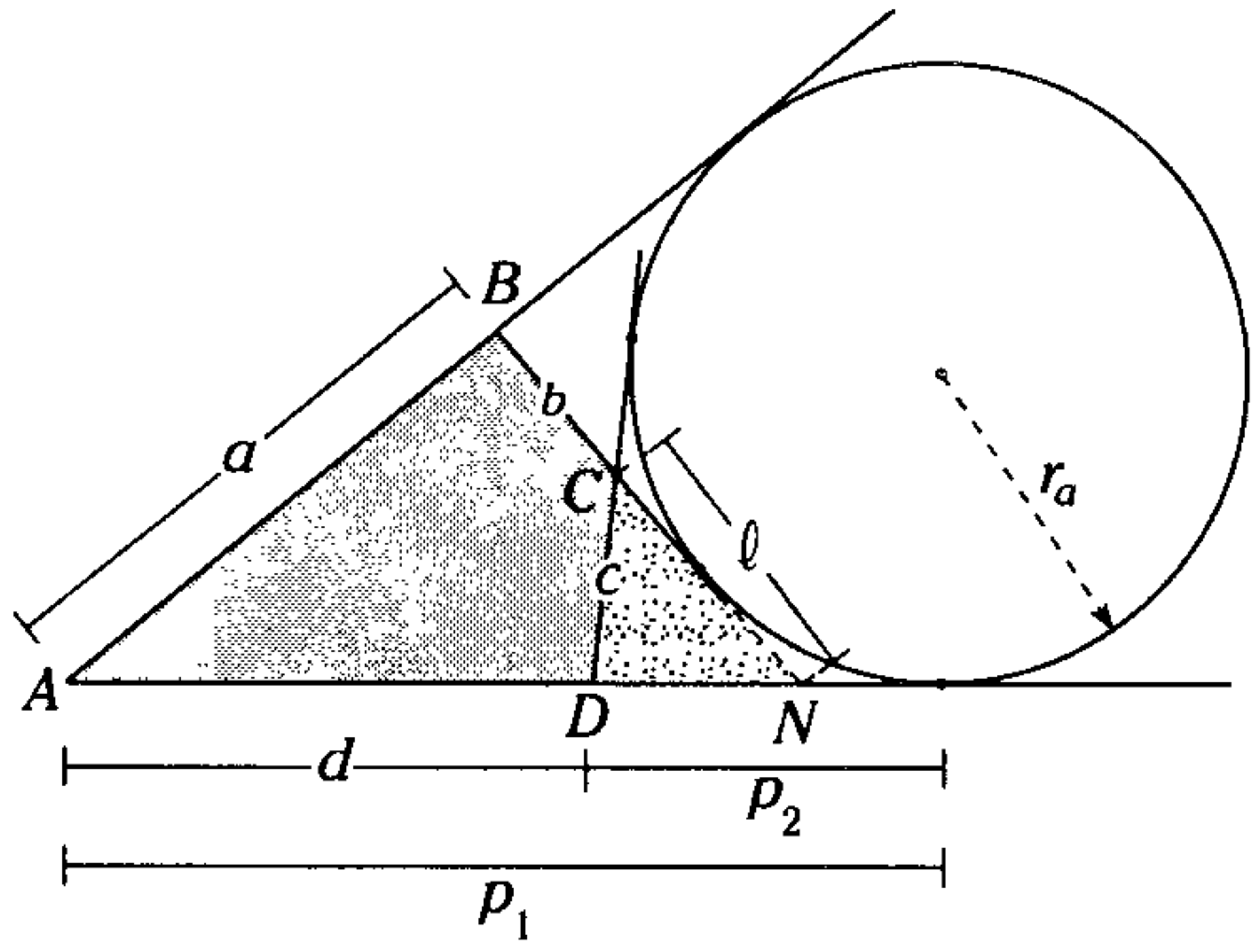
En el $\triangle ABCD$, del teorema de Steiner

$$a-c=d-b$$

Por lo tanto

$$\mathbb{A}_{\triangle ABCD} = (d-b).r_a$$

Demostración



(b)

Figura 18.80

p_1 y p_2 : longitudes de los semiperímetros de las regiones *ABN* y *CDN*.

De la figura, podemos observar que

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD} + \mathbb{A}_{\blacktriangle CDN} = \mathbb{A}_{\blacktriangle ABN}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD} + \mathbb{A}_{\blacktriangle CDN} = (p_1 - (b + \ell)) \,.\, r_a \qquad \text{(I)}$$

Se sabe que $\mathbb{A}_{\blacktriangle CDN} = (p_2 - \ell) \,.\, r_a$ (II)

Restando (I) y (II): $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD} = (p_1 - p_2 - b) \,.\, r_a$,

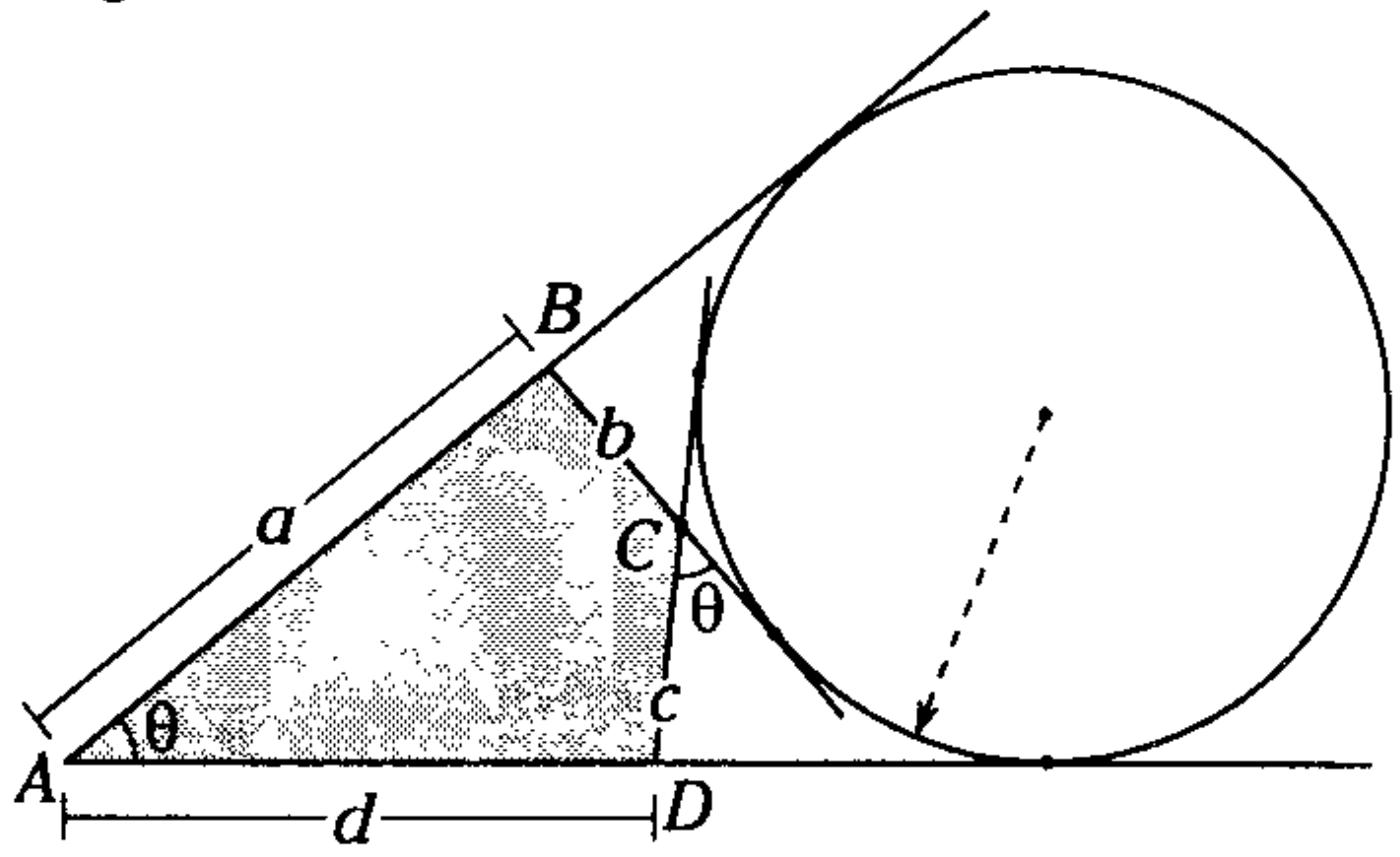
pero $p_1 - p_2 = d$

Reemplazando se tiene

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD} = (d - b) \,.\, r_a$$

CUADRILÁTERO INSCRITO Y EXINSCRITO

El área de la región limitada por un cuadrilátero inscrito o inscriptible y exinscrito es igual a la raíz cuadrada del producto de las longitudes de sus lados.



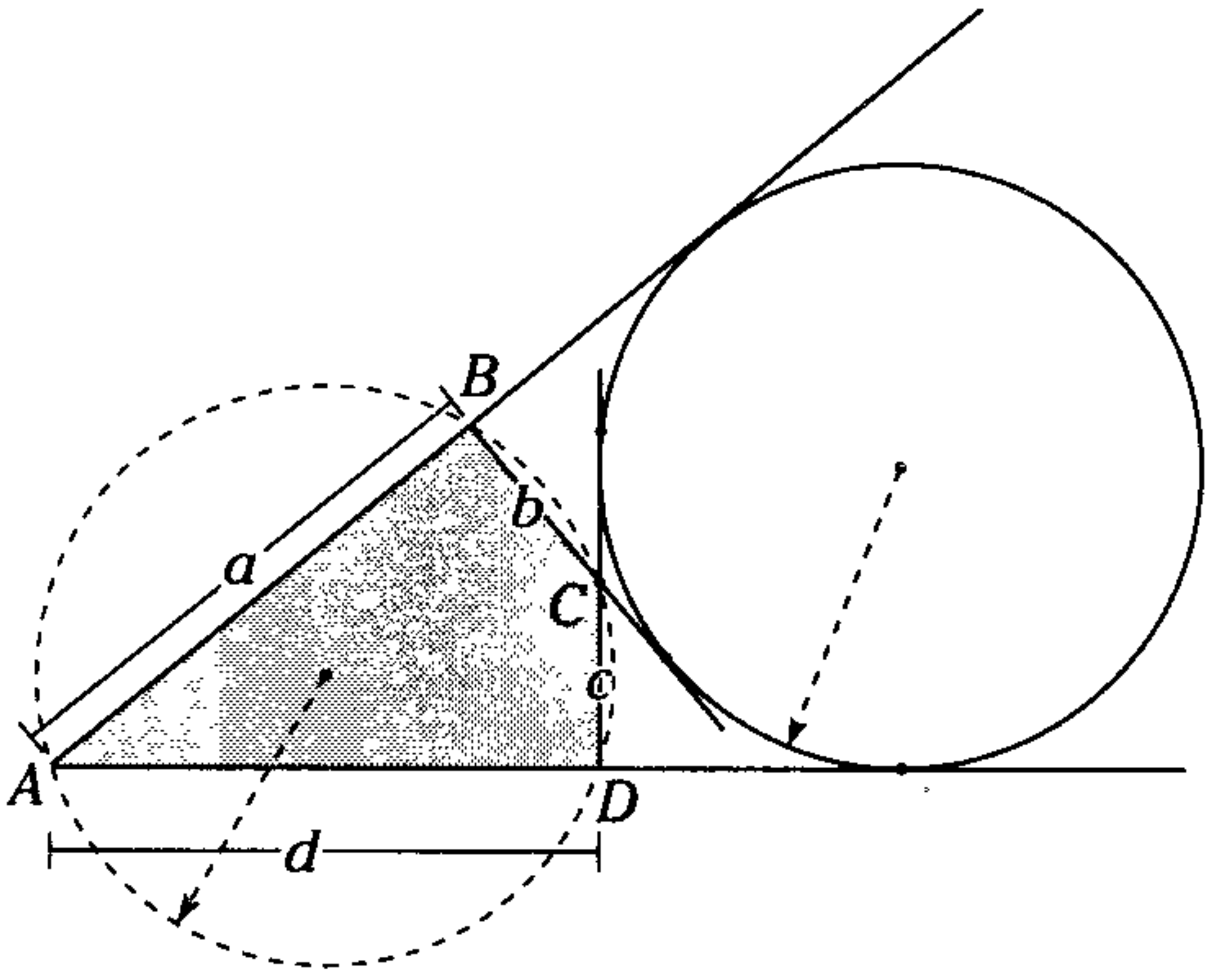
(a)

Según la figura

$\square ABCD$: inscriptible y exinscrito, entonces

$$\boxed{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD} = \sqrt{abcd}}$$

Demostración



(b)

Figura 18.81

Como el $\square$ *ABCD* es inscriptible, entonces trazamos la circunferencia que contiene a los cuatro vértices.

Del teorema de Steiner

$$a - c = d - b$$

$$\rightarrow\ a + b = c + d$$

$\square ABCD$: $2p = a + b + c + d$

$$\rightarrow\ \left.\begin{matrix} p = a + b \\ p = c + d \end{matrix}\right\} \qquad \text{(I)}$$

de la fórmula de Brahmagupta

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad \text{(II)}$$

De (I)

$$p - a = b\,;\quad p - b = a$$

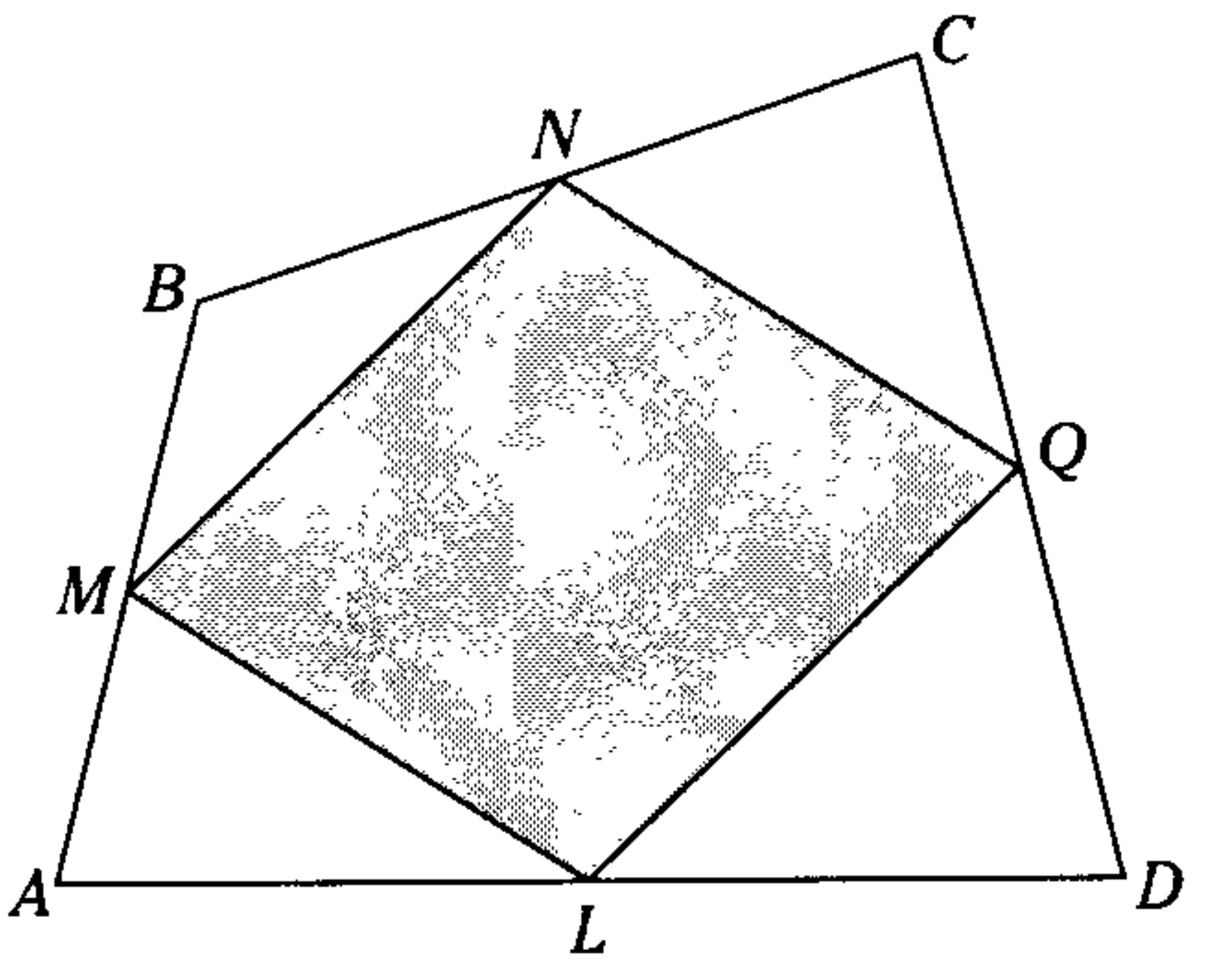
$$p - c = d\,;\quad p - d = c$$

Reemplazando en (II)

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD} = \sqrt{b\,.\,a\,.\,d\,.\,c}$$

RELACIÓN DE ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

1.



(a)

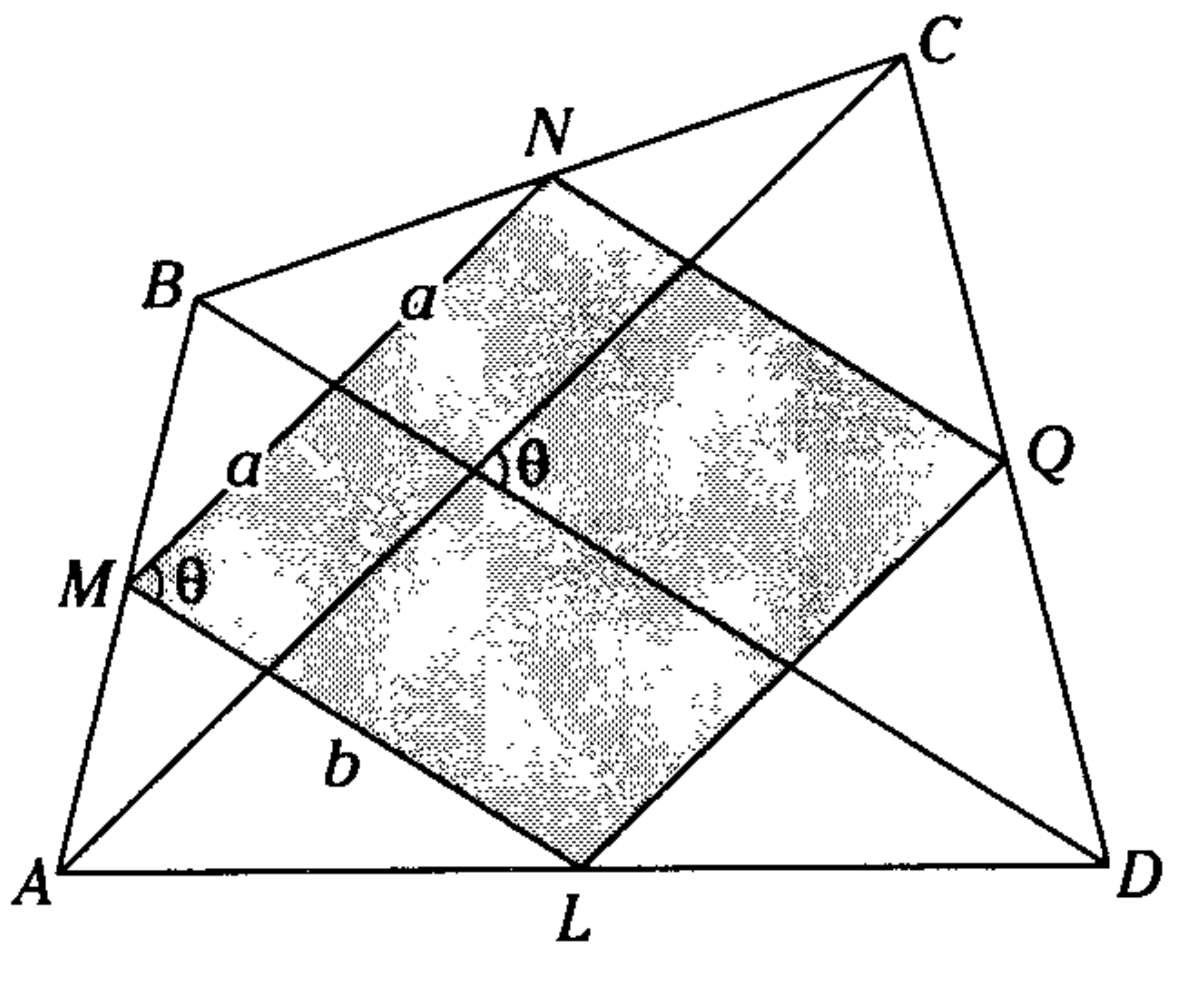
En la figura 18.82 (a), M, N, Q y L son puntos medios de los lados AB, BC, CD y AD, respectivamente.

Se cumple

$$\mathbb{A}_{\blacksquare MNQL} = \frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}}{2}$$

El cuadrilátero $MNQL$ es un paralelogramo.

Demostración



(b)

Figura 18.82

Si M, N, Q y L son puntos medios de los lados del $\triangle ABCD$, entonces $\square MNLQ$ es un paralelogramo (teorema de Varignon).

Sabemos que

$$\mathbb{A}_{\blacksquare MNQL} = ab\,\text{sen}\theta \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}\text{sen}\theta$$

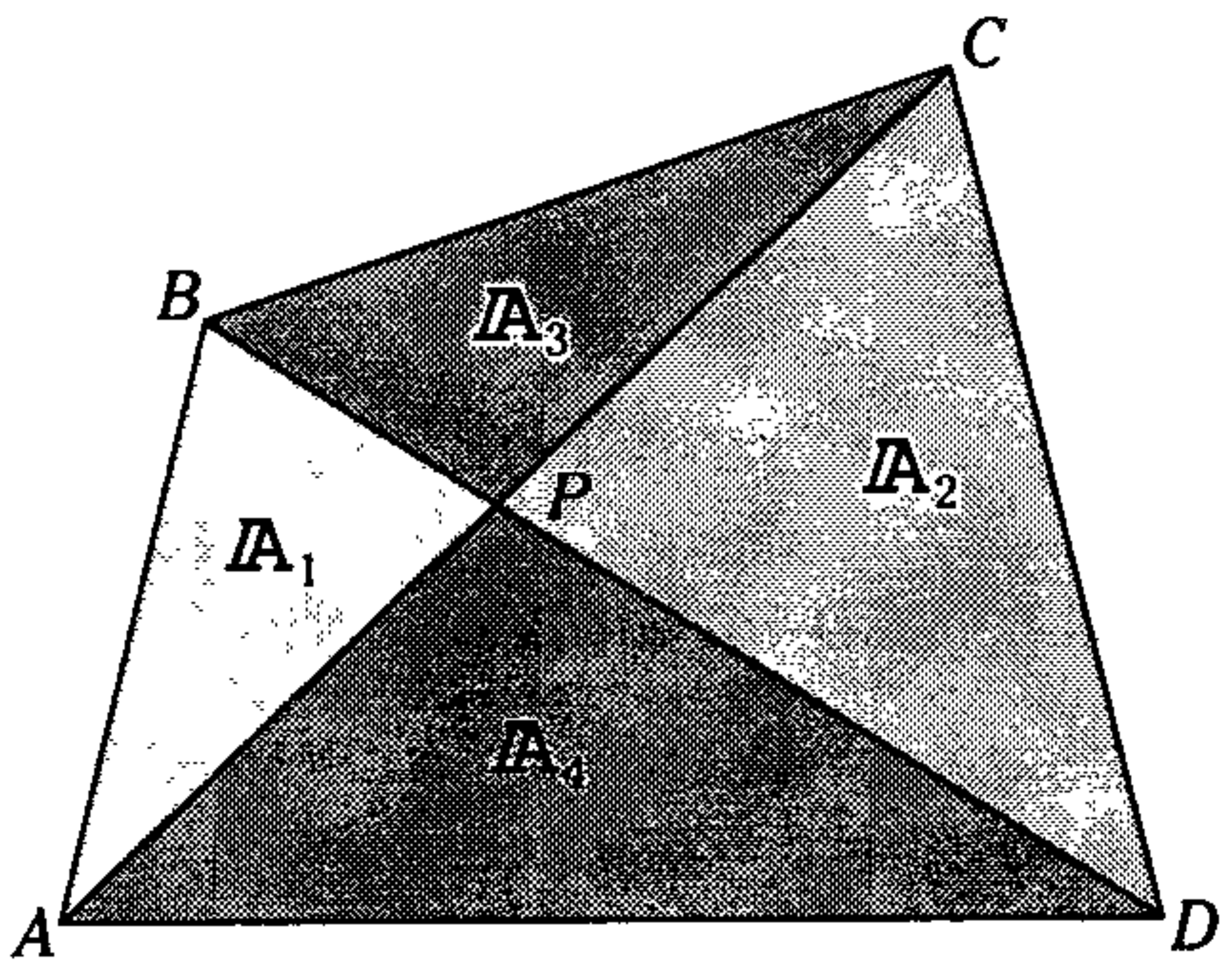
pero $AC = 2a$ y $BD = 2b$

$$\rightarrow \ \mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD} = \frac{(2a)(2b)}{2}\text{sen}\theta \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) se obtiene

$$\mathbb{A}_{\blacksquare MNQL} = \frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCD}}{2}$$

2.



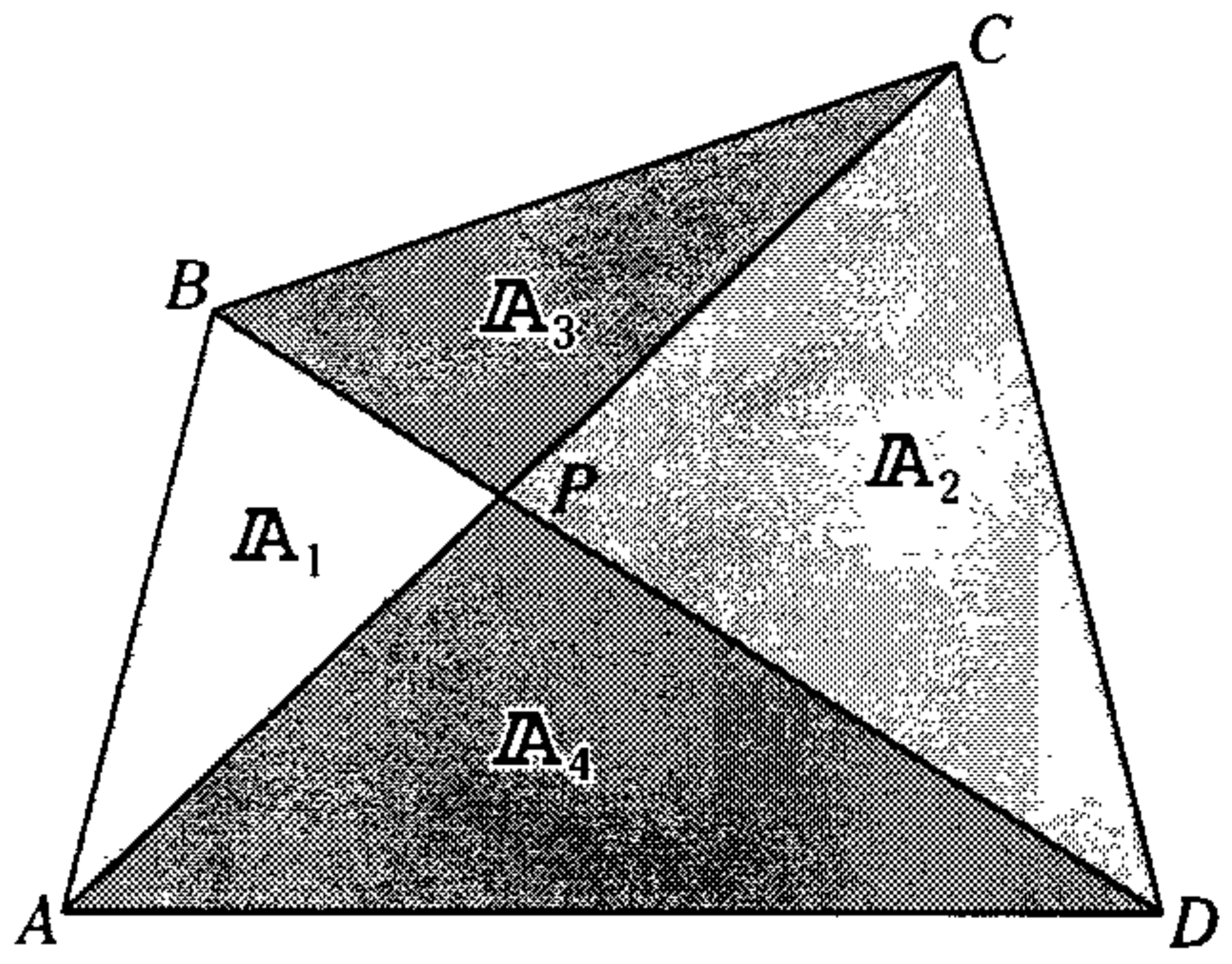
(a)

En la figura 18.83 (a), las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ determinan las regiones ABP, BCP, CDP y DAP de áreas $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_3$, $\mathbb{A}_2$ y $\mathbb{A}_4$, respectivamente.

Se cumple así

$$(\mathbb{A}_1)(\mathbb{A}_2) = (\mathbb{A}_3)(\mathbb{A}_4)$$

Demostración



(b)

Figura 18.83

Según la figura 18.83(b), por relaciones de áreas en las regiones triangulares *ABC* y *CDA*, respectivamente, se cumple

$\triangle ABC$: $\dfrac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_3}=\dfrac{AP}{PC}$ (I)

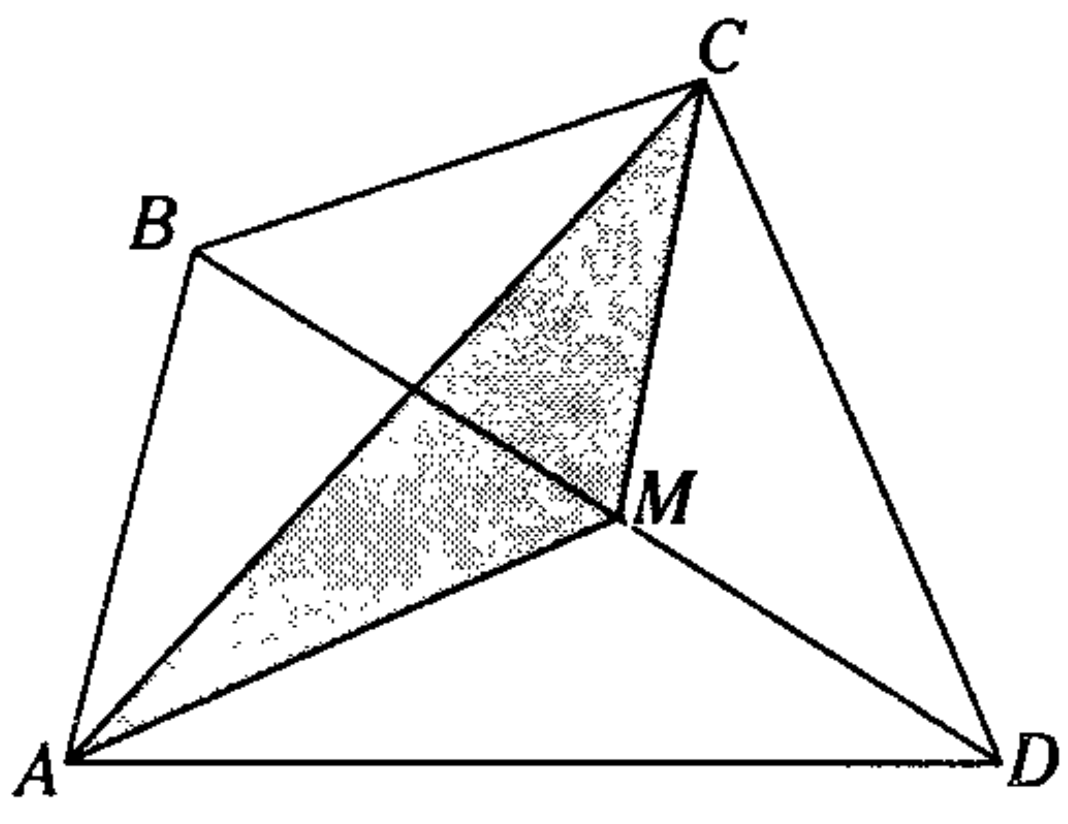
$\triangle CDA$: $\dfrac{\mathbb{A}_4}{\mathbb{A}_2}=\dfrac{AP}{PC}$ (II)

De (I) y (II)

$\therefore\ (\mathbb{A}_1)(\mathbb{A}_2)=(\mathbb{A}_3)(\mathbb{A}_4)$

Teorema

En un cuadrilátero convexo *ABCD*, si *M* es punto medio de la diagonal *BD*, entonces el área de la región *AMC* es igual a la semidiferencia de las áreas de las regiones *ADC* y *ABC*.



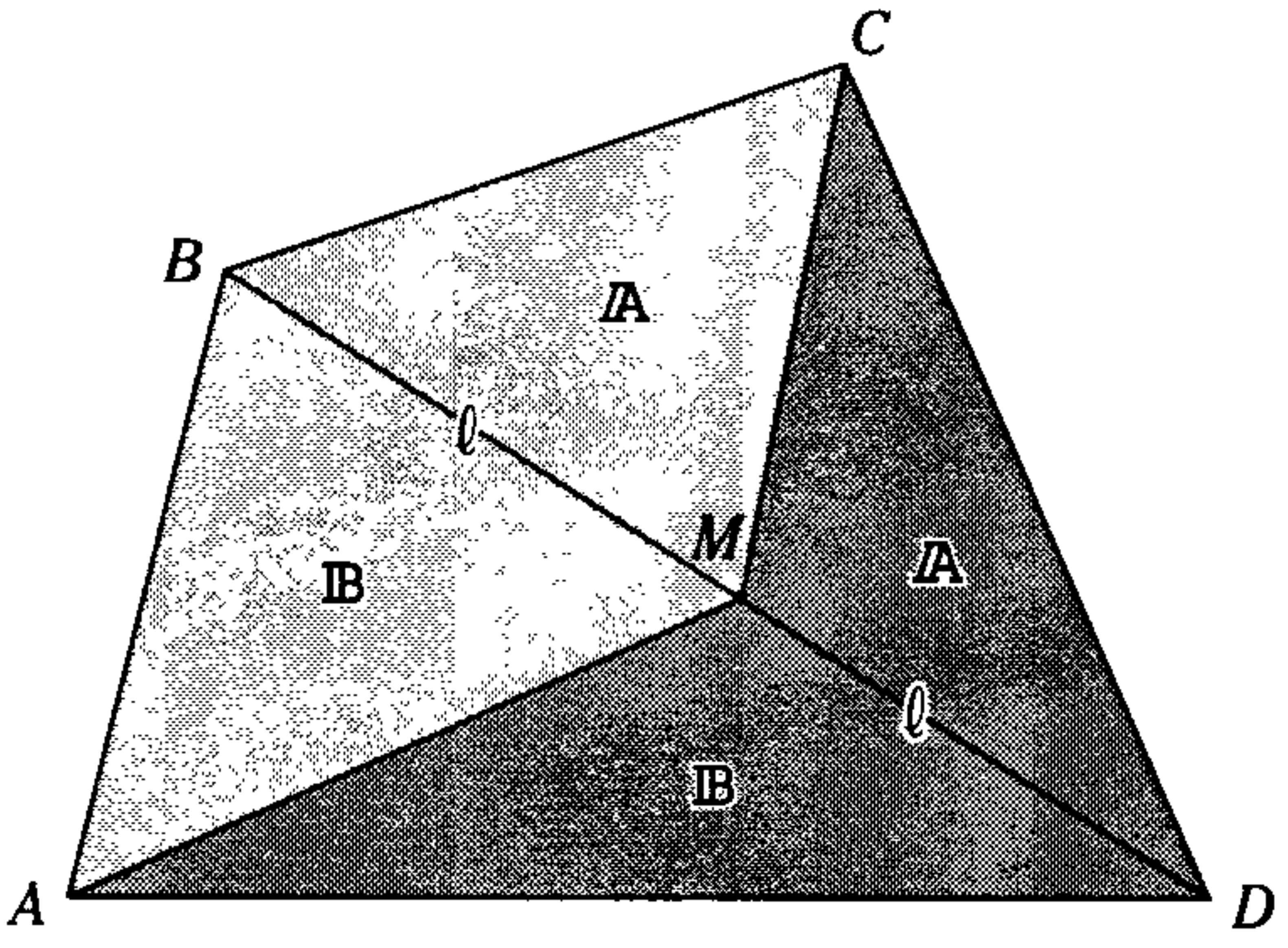
(a)

Si $BM=MD$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle AMC}=\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ADC}-\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}}{2}$$

Demostración

Sabemos que el área de la región *ABCM* es igual al área de la región *ADCM*.



(b)

Figura 18.84

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABCM}=\mathbb{A}_{\blacktriangle ADCM}$$

Entonces

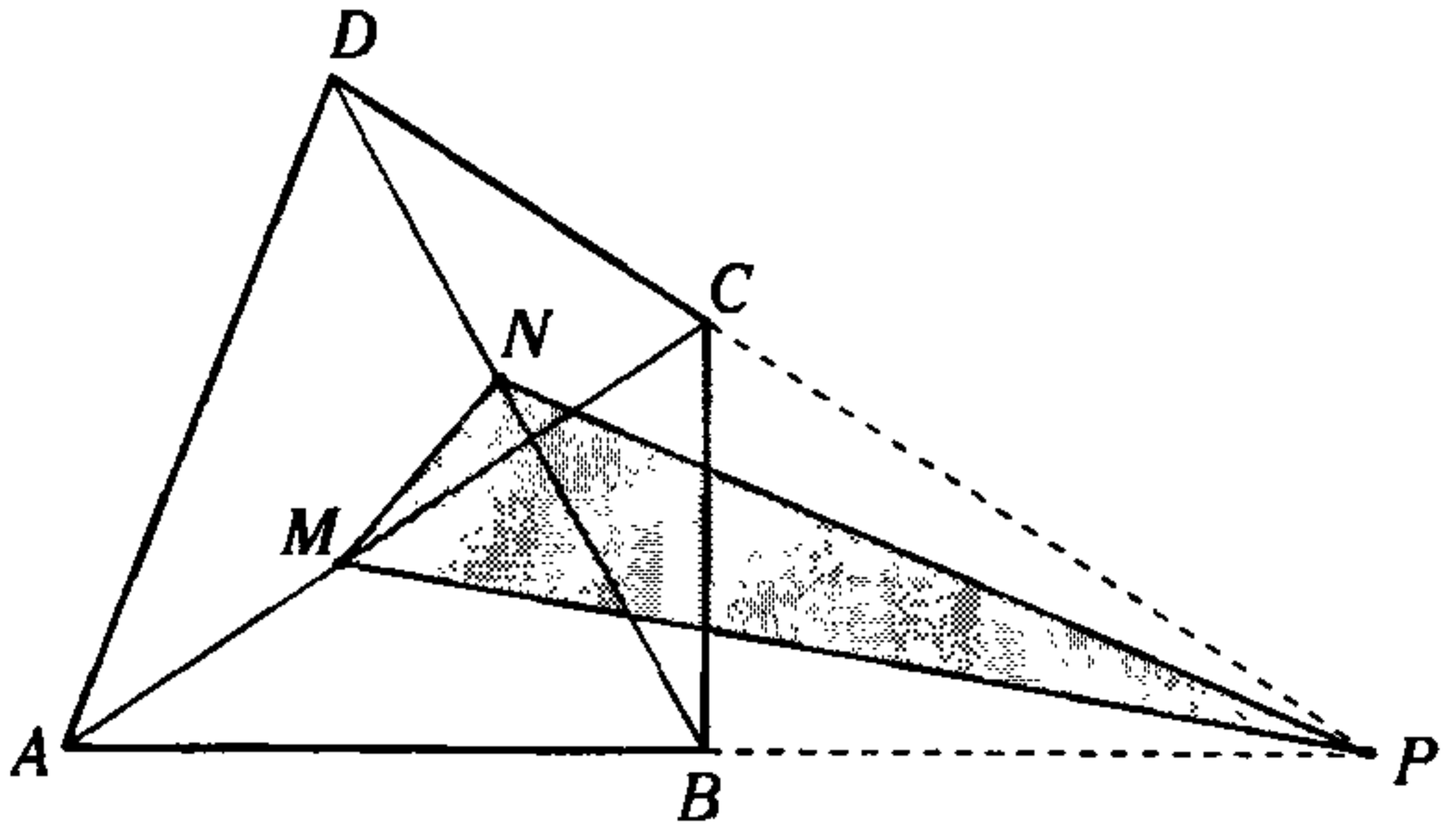
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}+\mathbb{A}_{\blacktriangle AMC}=\mathbb{A}_{\blacktriangle ADC}-\mathbb{A}_{\blacktriangle AMC}$$

$$2\mathbb{A}_{\blacktriangle AMC}=\mathbb{A}_{\blacktriangle ADC}-\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle AMC}=\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ADC}-\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}}{2}$$

Teorema

Las prolongaciones de los lados opuestos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se intersecan en P. Si M y N son puntos medios de las diagonales, entonces el área de la región MNP es la cuarta parte del área de la región $ABCD$.



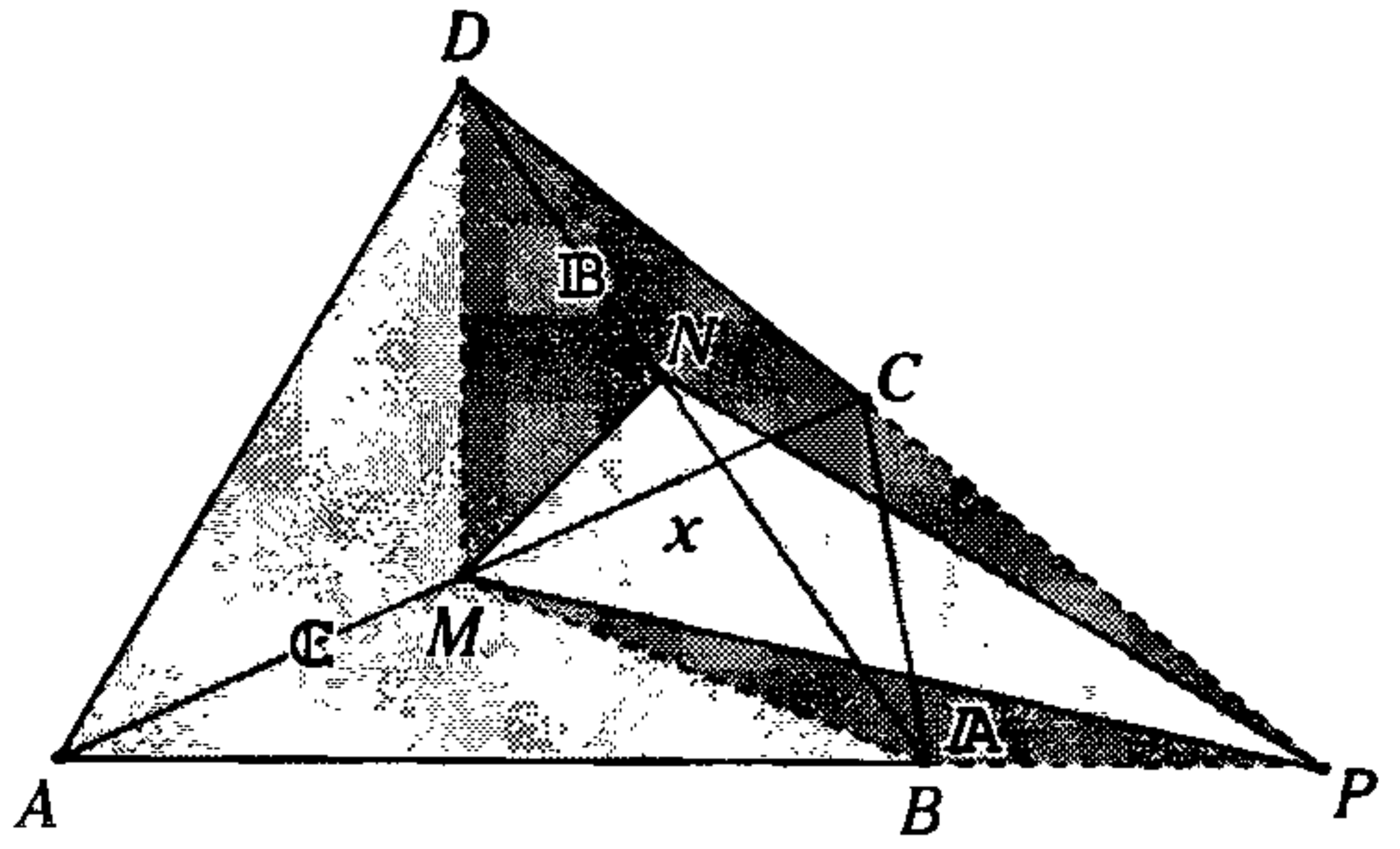
(a)

Si $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DC} = P$

$AM = MC$ y $DN = NB$

$$\mathbb{A}_{\triangle MNP} = \frac{\mathbb{A}_{ABCD}}{4}$$

Demostración



(b)

Figura 18.85

Observación

Si en una región triangular se ubica el punto medio de una ceviana

$\rightarrow \mathbb{A}_{\triangle BMC} = \mathbb{A}_{ABMC}$

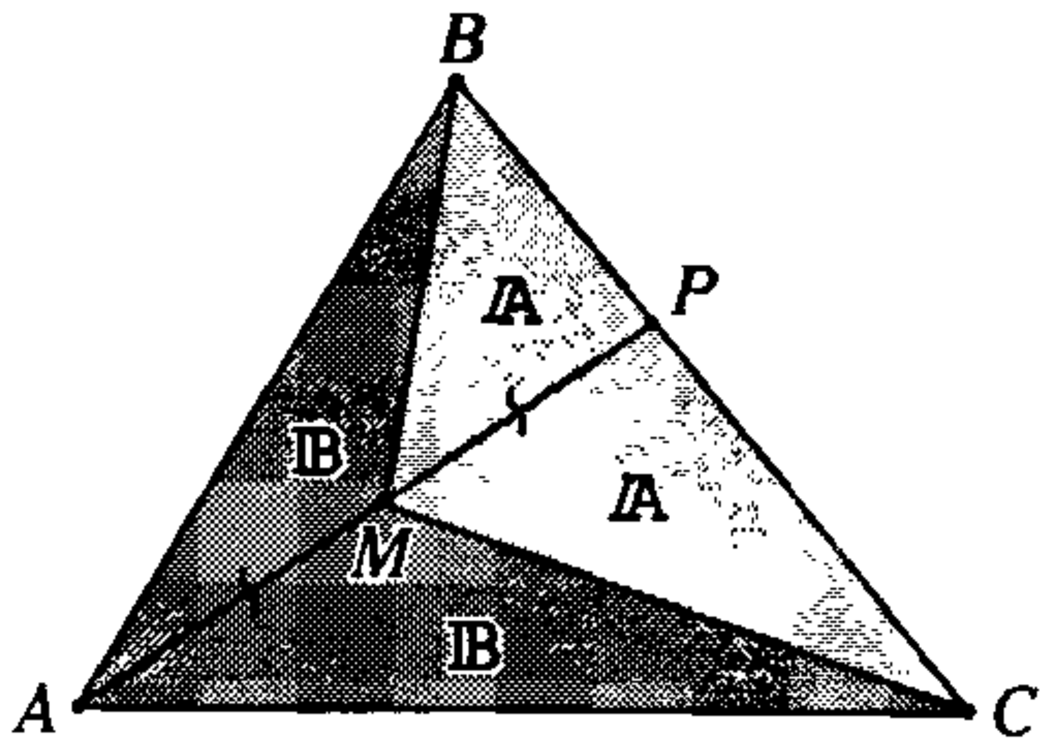


Figura 18.86

Sea $\mathbb{A}_{\triangle MNP} = x$

Entonces en la figura 18.85 (b)

$$\mathbb{A}_{\triangle DMP} = \mathbb{A}_{ADMP}$$

$$\therefore \quad \mathbb{B} + x = \mathbb{A} + \mathbb{C} \qquad \text{(I)}$$

En el cuadrilátero $BMDP$

$$\mathbb{A}_{BMNP} = \mathbb{A}_{MDPN} \quad \text{(teorema anterior)}$$

$$\therefore \quad \mathbb{A} + x = \mathbb{B} \qquad \text{(II)}$$

Sumando (I) y (II)

$$\mathbb{B} + x + \mathbb{A} + x = \mathbb{A} + \mathbb{C} + \mathbb{B}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\mathbb{C}}{2}$$

Mas, en el cuadrilátero $ABCD$

$$\mathbb{C} = \frac{1}{2}\mathbb{A}_{ABCD}$$

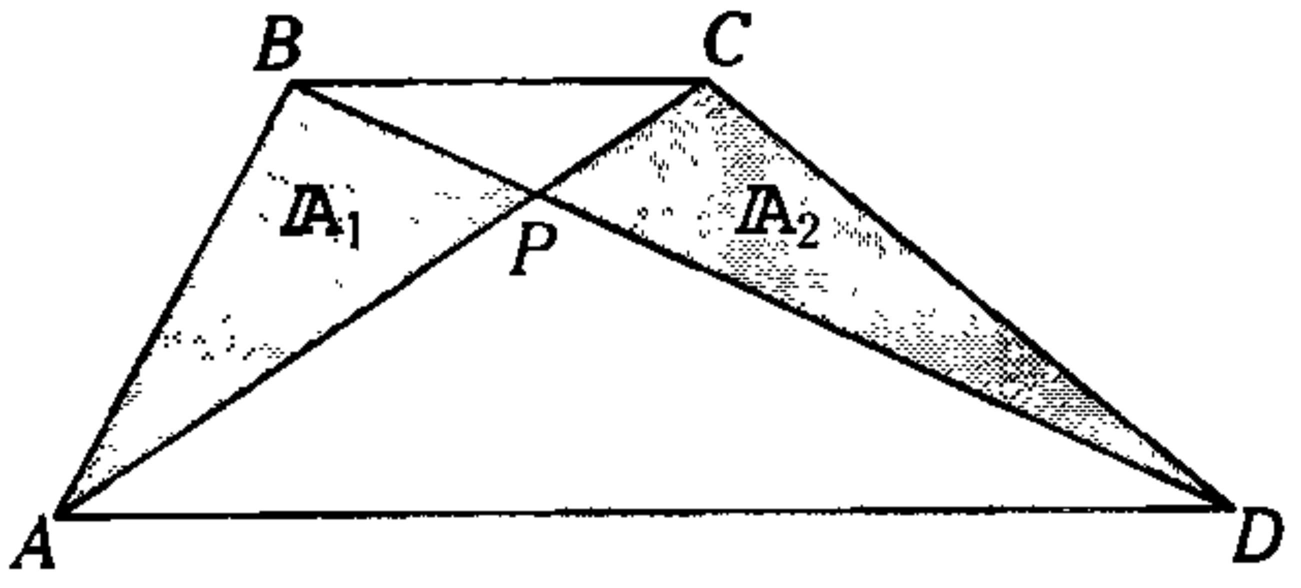
$$\therefore \quad x = \frac{1}{4}\mathbb{A}_{ABCD},$$

es decir,

$$\mathbb{A}_{\triangle MNP} = \frac{\mathbb{A}_{ABCD}}{4}$$

3. En una región trapecial

a.



(a)

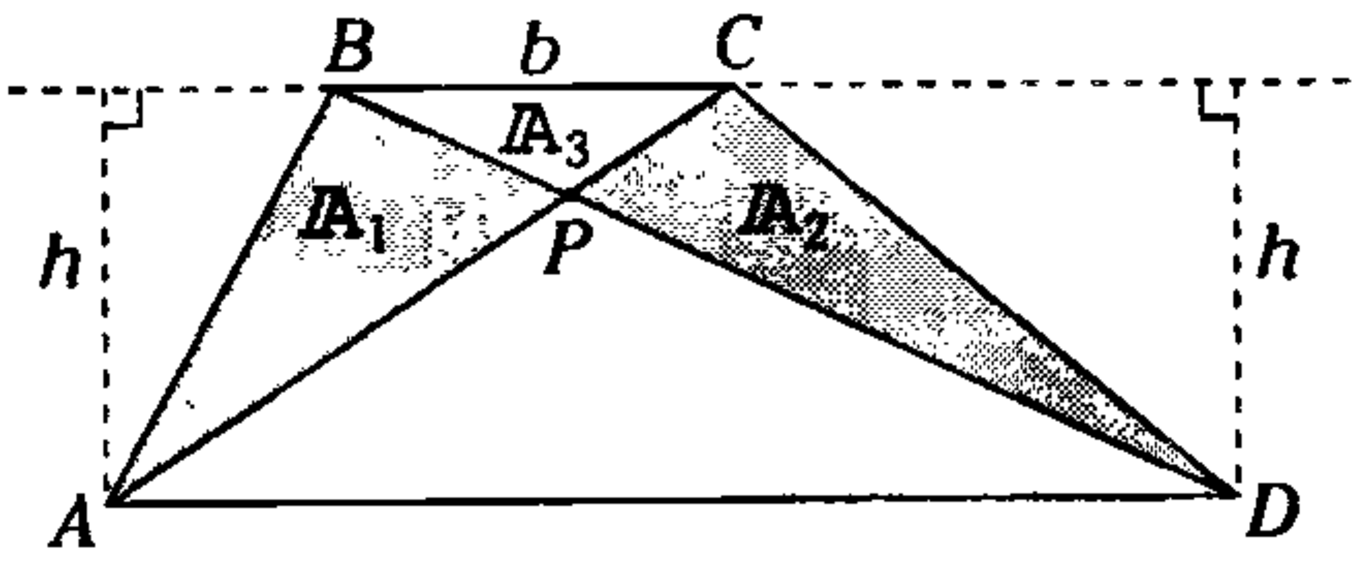
Según la figura 18.87 (a), $\overline{BC} // \overline{AD}$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABP} = \mathbb{A}_1 \text{ y } \mathbb{A}_{\blacktriangle PCD} = \mathbb{A}_2$$

se cumple

$$\boxed{\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2}$$

Demostración



(b)

Figura 18.87

Siendo $\mathbb{A}_{\blacktriangle BPC} = \mathbb{A}_3$ y $BC = b$, tenemos

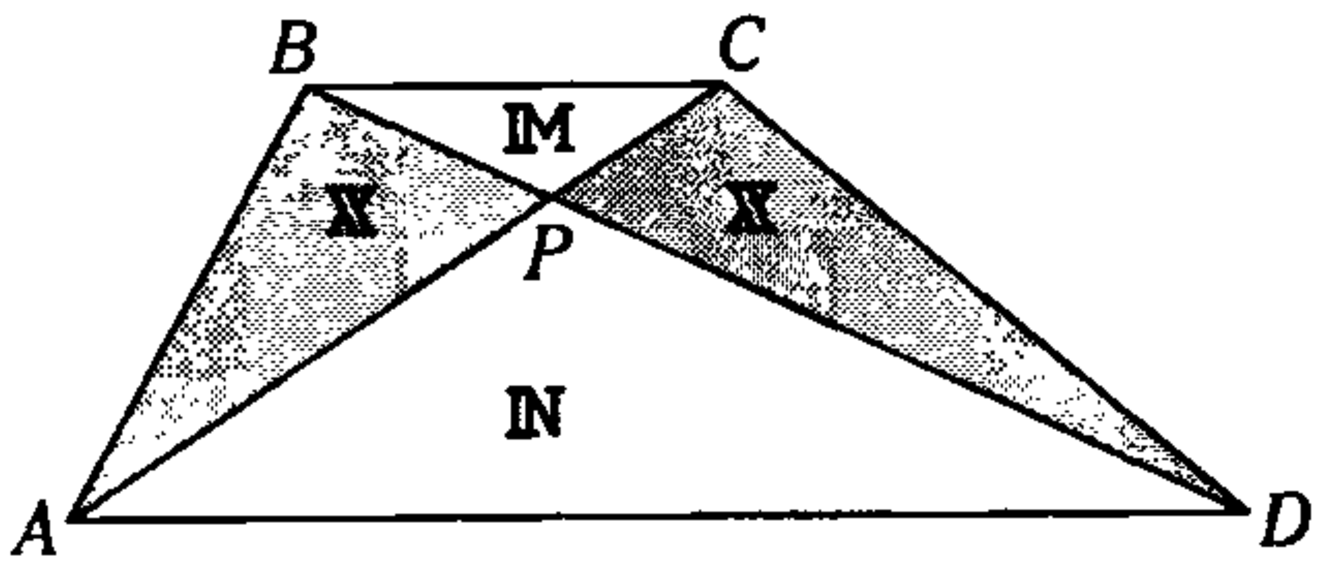
$$\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_3 = \frac{b.h}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_3 = \frac{b.h}{2} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\therefore\ \mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2$$

b.



(a)

Según la figura 18.88 (a), $\overline{BC} // \overline{AD}$

Sabemos que

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABP} = \mathbb{A}_{\blacktriangle PCD} = \mathbb{X}$$

Además

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PBC} = \mathbb{N} \text{ y } \mathbb{A}_{\blacktriangle PAD} = \mathbb{M}$$

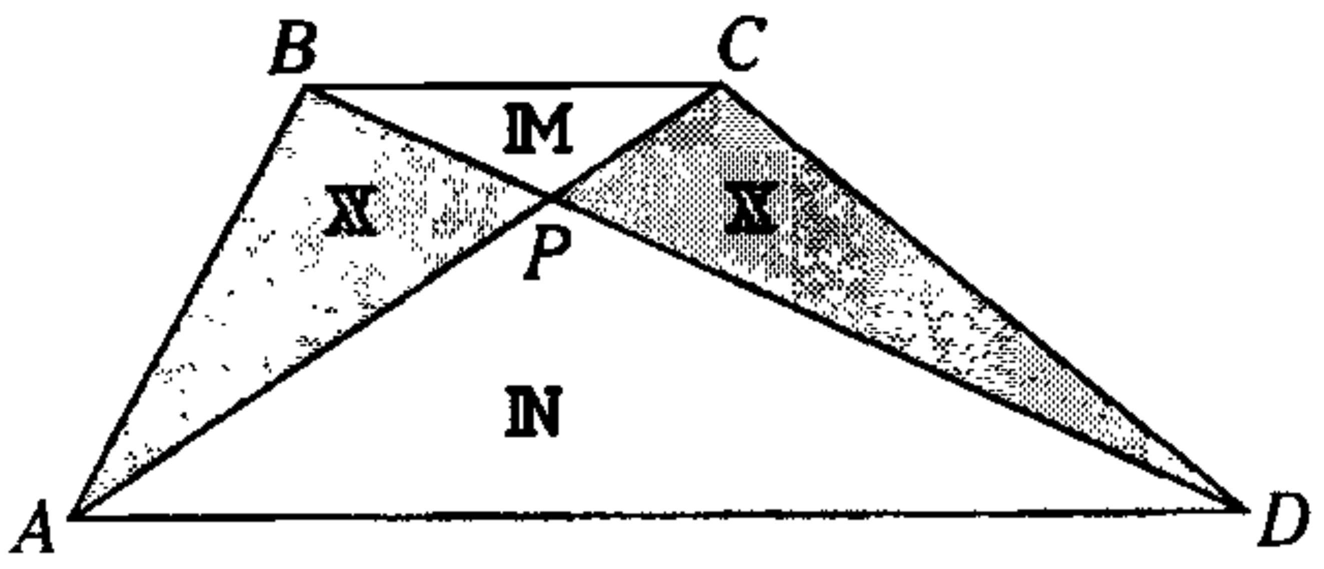
Se cumple

$$\boxed{\mathbb{X} = \sqrt{\mathbb{M}.\mathbb{N}}}$$

También

$$\boxed{\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \left(\sqrt{\mathbb{M}} + \sqrt{\mathbb{N}}\right)^2}$$

Demostración



(b)

Figura 18.88

Sabemos que

$$\mathbb{X}.\mathbb{X} = \mathbb{N}.\mathbb{M}$$

$$\therefore\ \mathbb{X} = \sqrt{\mathbb{M}.\mathbb{N}}$$

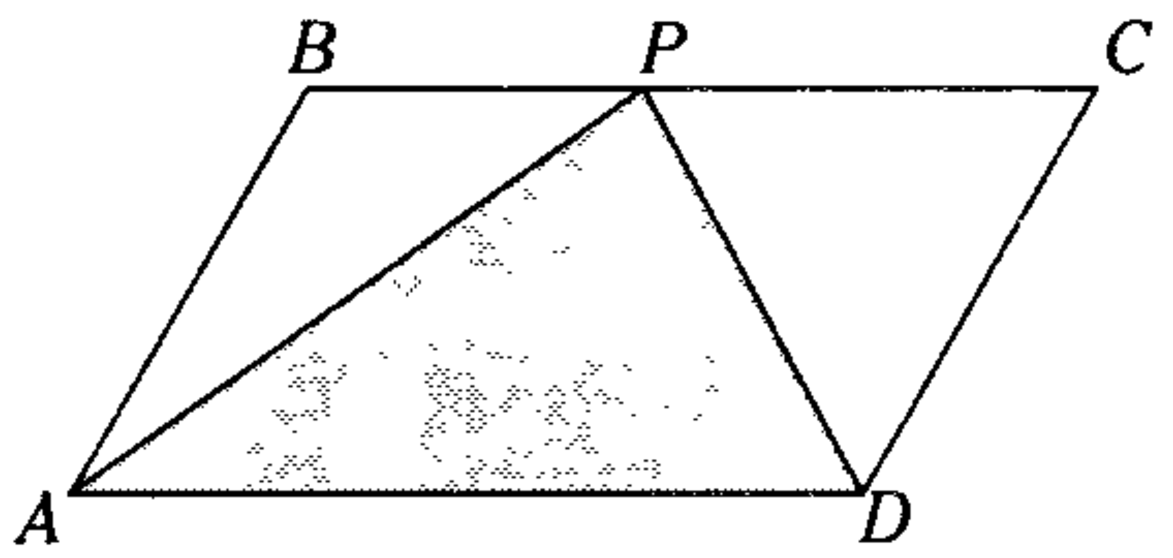
además

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \mathbb{M} + \mathbb{N} + 2\mathbb{X}$$

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \mathbb{M} + \mathbb{N} + 2\sqrt{\mathbb{M}.\mathbb{N}}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \left(\sqrt{\mathbb{M}} + \sqrt{\mathbb{N}}\right)^2$$

4. En una región paralelográmica



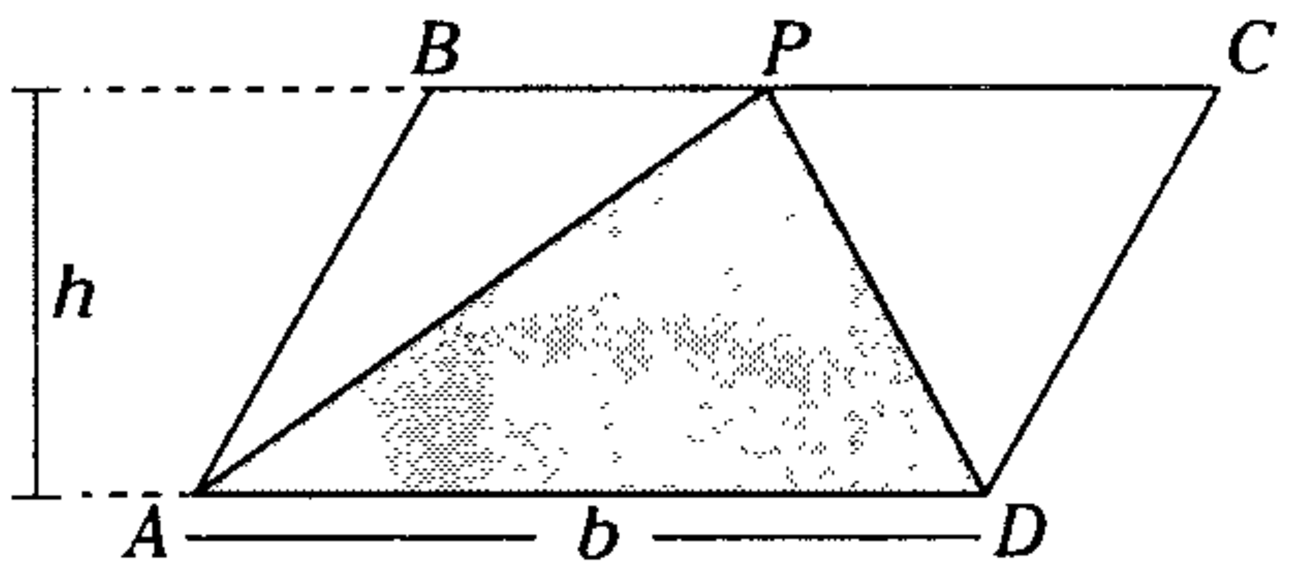
(a)

Según la figura 18.89(a), el cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo y *P* un punto de $\overline{BC}$ o de su prolongación.

Se cumple

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle APD}=\frac{\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}}{2}$$

Demostración



(b)

Figura 18.89

Según la figura 18.89(b)

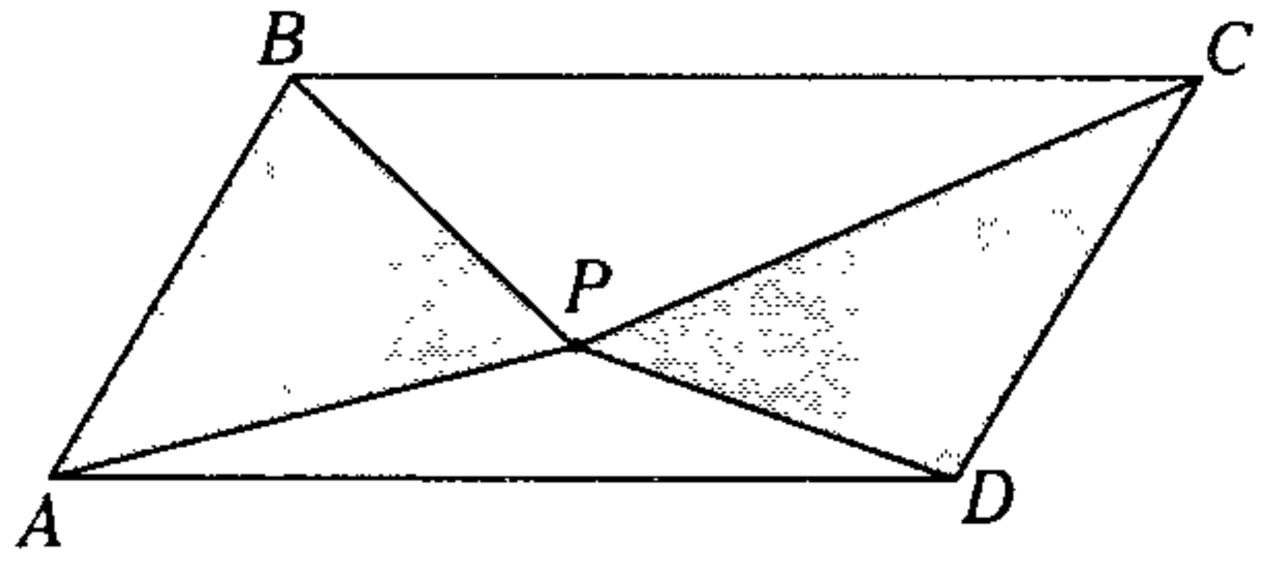
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle APD}=\frac{b\,.\,h}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}=b\,.\,h \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle APD}=\frac{\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}}{2}$$

5.



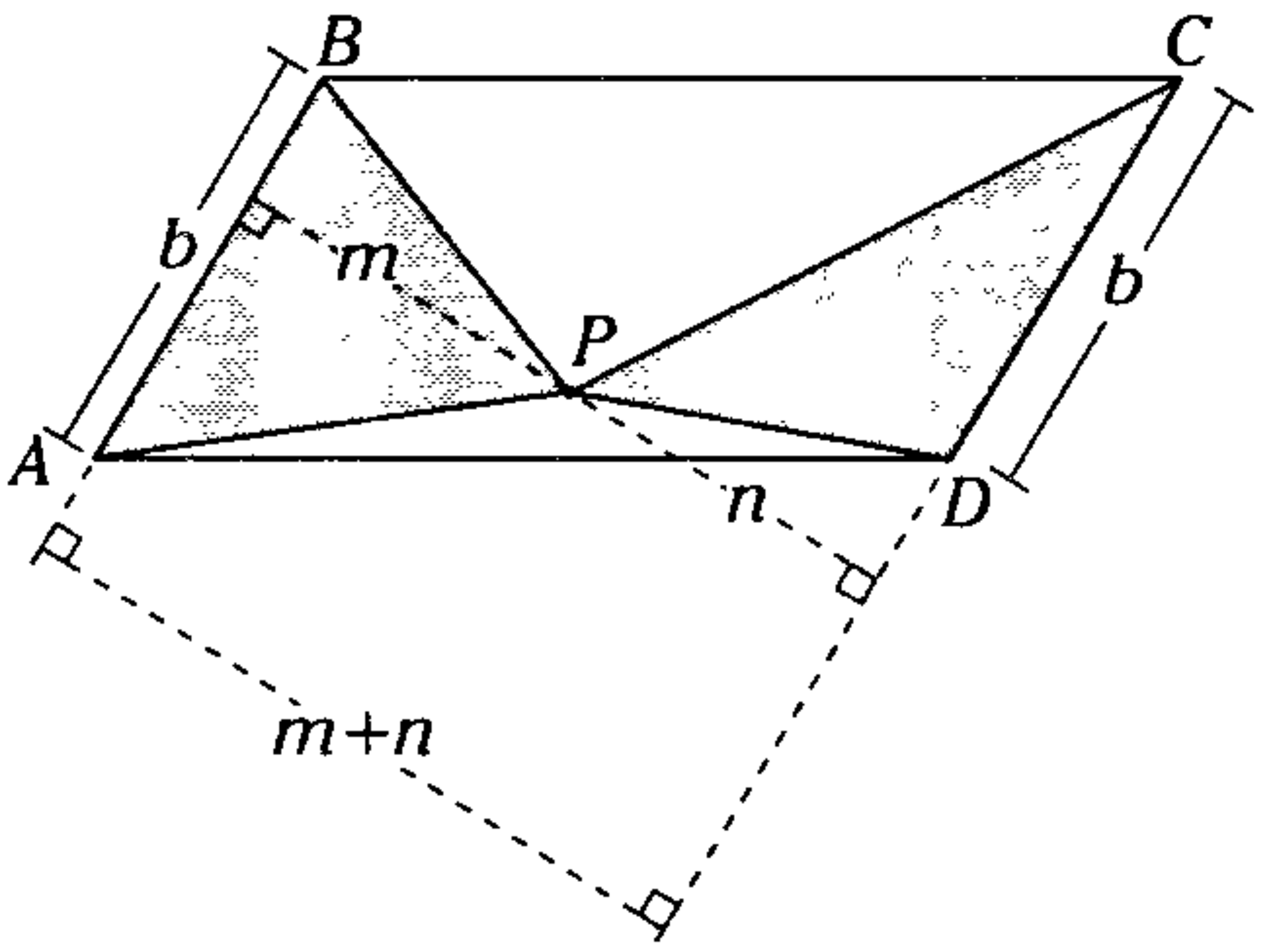
(a)

Según la figura 18.90(a), el cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo y *P* es un punto interior.

Se cumple

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PAB}+\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD}=\frac{\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}}{2}$$

Demostración



(b)

Figura 18.90

Según la figura 18.90(b)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PAB}+\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD}=\frac{b\,.\,m}{2}+\frac{b\,.\,n}{2}$$

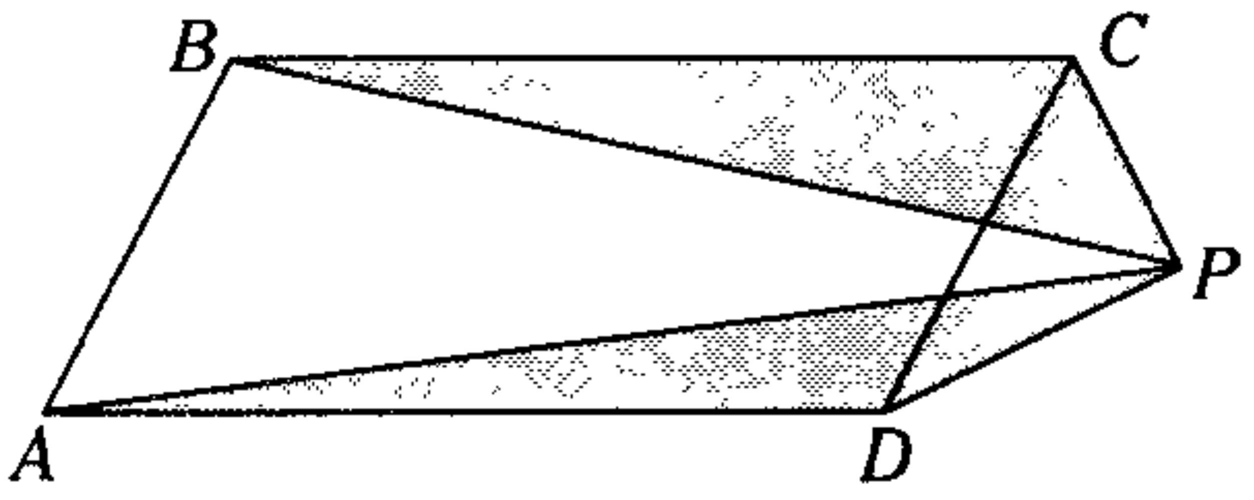
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PAB}+\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD}=\frac{b(m+n)}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A}_{ABCD}=b(m+n) \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle PAB}+\mathbb{A}_{\blacktriangle PCD}=\frac{\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}}{2}$$

6.



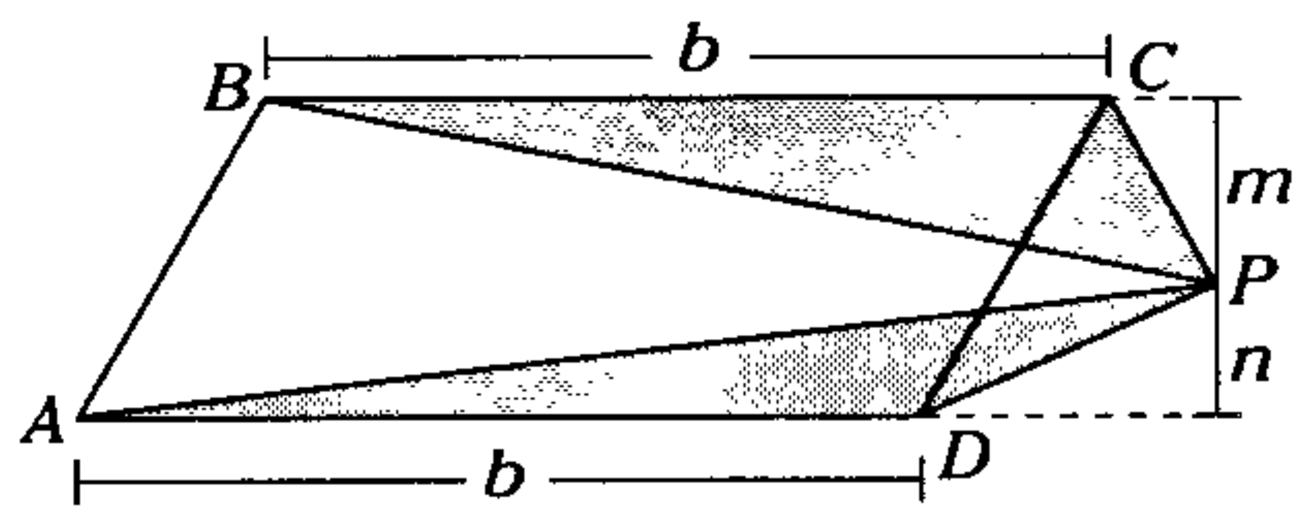
(a)

Según la figura 18.91 (a), el cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo y *P* es un punto interior.

Se cumple

$$\mathbb{A}_{\triangle PAD} + \mathbb{A}_{\triangle PCB} = \frac{\mathbb{A}_{\square ABCD}}{2}$$

Demostración



(b)

Figura 18.91

Según la figura 18.91 (b)

$$\mathbb{A}_{\triangle PAD} + \mathbb{A}_{\triangle PCB} = \frac{b.m}{2} + \frac{b.n}{2}$$

$$\mathbb{A}_{\triangle PAD} + \mathbb{A}_{\triangle PCB} = \frac{b(m+n)}{2} \qquad \text{(I)}$$

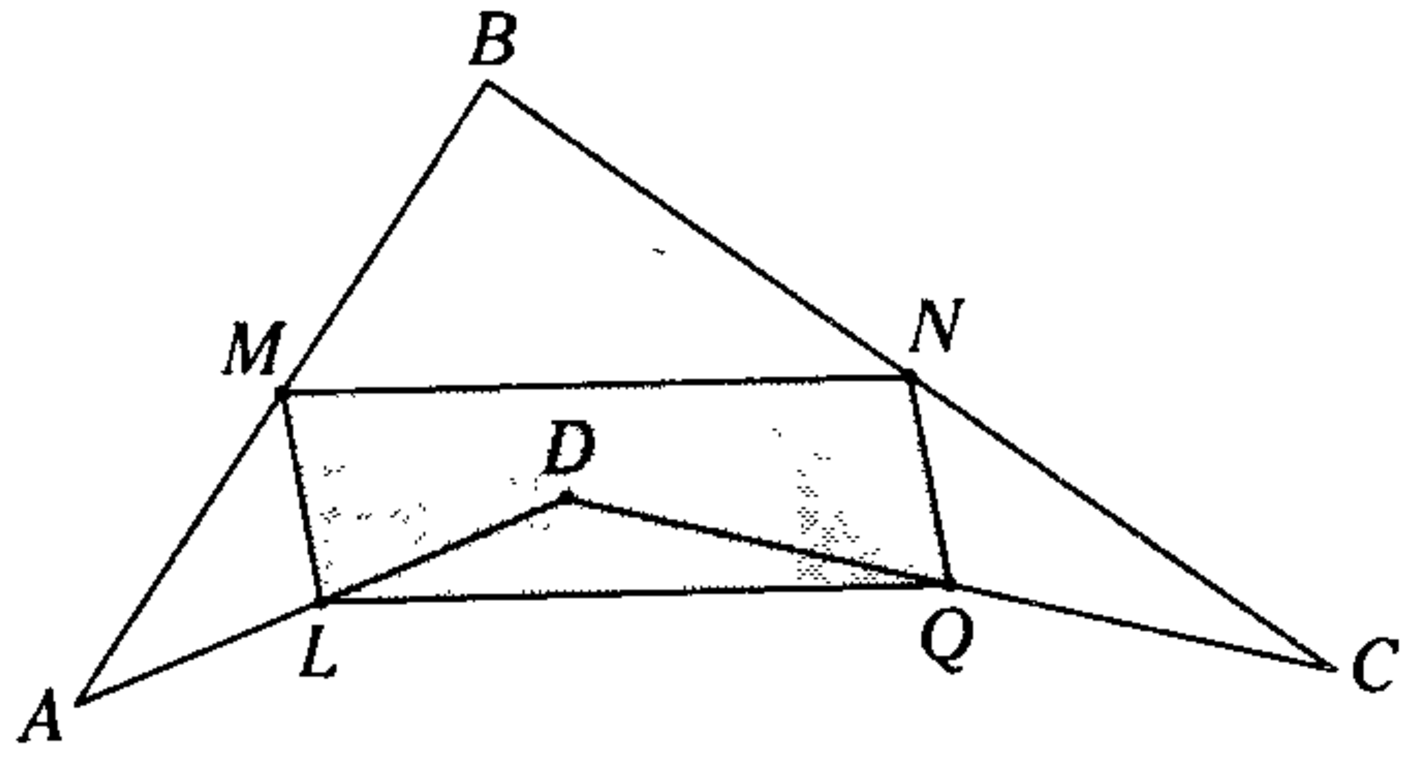
$$\mathbb{A}_{\square ABCD} = b(m+n) \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\therefore \ \mathbb{A}_{\triangle PAD} + \mathbb{A}_{\triangle PCB} = \frac{\mathbb{A}_{\square ABCD}}{2}$$

NO CONVEXA

1.



(a)

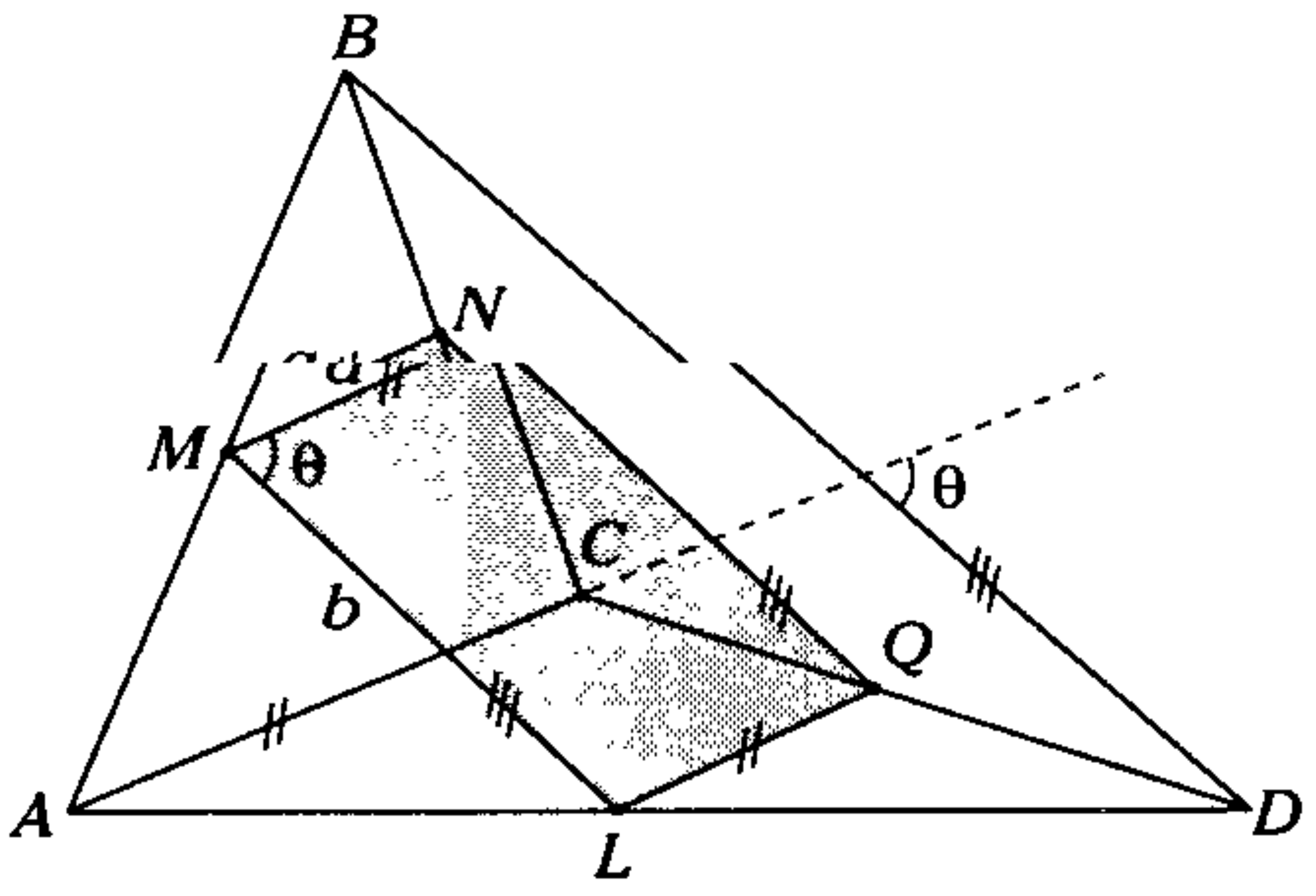
En la figura, *M*, *N*, *Q* y *L* son puntos medios de los lados *AB*, *BC*, *CD* y *AD*, respectivamente.

Se cumple

$$\mathbb{A}_{\square MNQL} = \frac{\mathbb{A}_{ABCD}}{2}$$

Además, el cuadrilátero *MNQL* es un paralelogramo.

Demostración



(b)

Figura 18.92

Siendo M, N, Q y L puntos medios de AB, BC, CD y AD.

$\square MNQL$ es un paralelogramo

Sabemos que

$$\mathbb{A}_{\blacksquare MNQL} = a\,.\,b\operatorname{sen}\theta \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A}_{ABCD} = \frac{(AC)\,.\,(BD)}{2}\operatorname{sen}\theta$$

Por base media

$$AC = 2a \;\text{ y }\; BD = 2b \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) se obtiene

$$\boxed{\mathbb{A}_{\blacksquare MNQL} = \frac{\mathbb{A}_{ABCD}}{2}}$$

TEOREMA DE GAUSS

Los puntos medios de las diagonales de todo cuadrilátero completo son colineales.

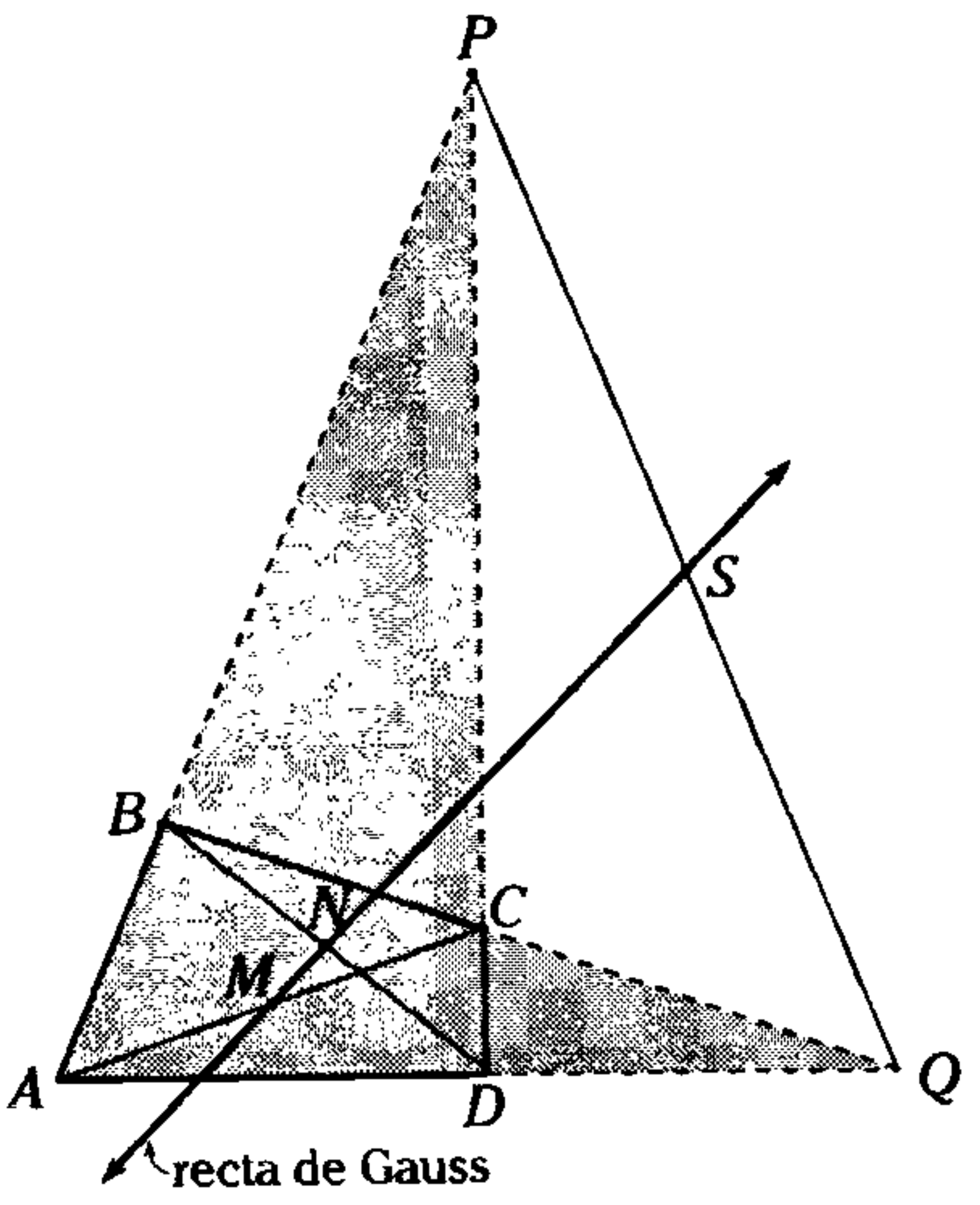


Figura 18.93

$\measuredangle\, APCQ$: cuadrilátero completo relativo al $\square ABCD$.

Si M, N y S son puntos medios de AC, BD y PQ, entonces M, N y S son colineales.

Demostración

Del teorema 2 en $ABCD$.

Si $AM = MC$ y $BN = ND$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle MNP} = \frac{1}{4}\mathbb{A}_{ABCD}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle MNQ} = \frac{1}{4}\mathbb{A}_{ABCD}$$

$$\rightarrow\; \mathbb{A}_{\blacktriangle MNP} = \mathbb{A}_{\blacktriangle MNQ}$$

Observación

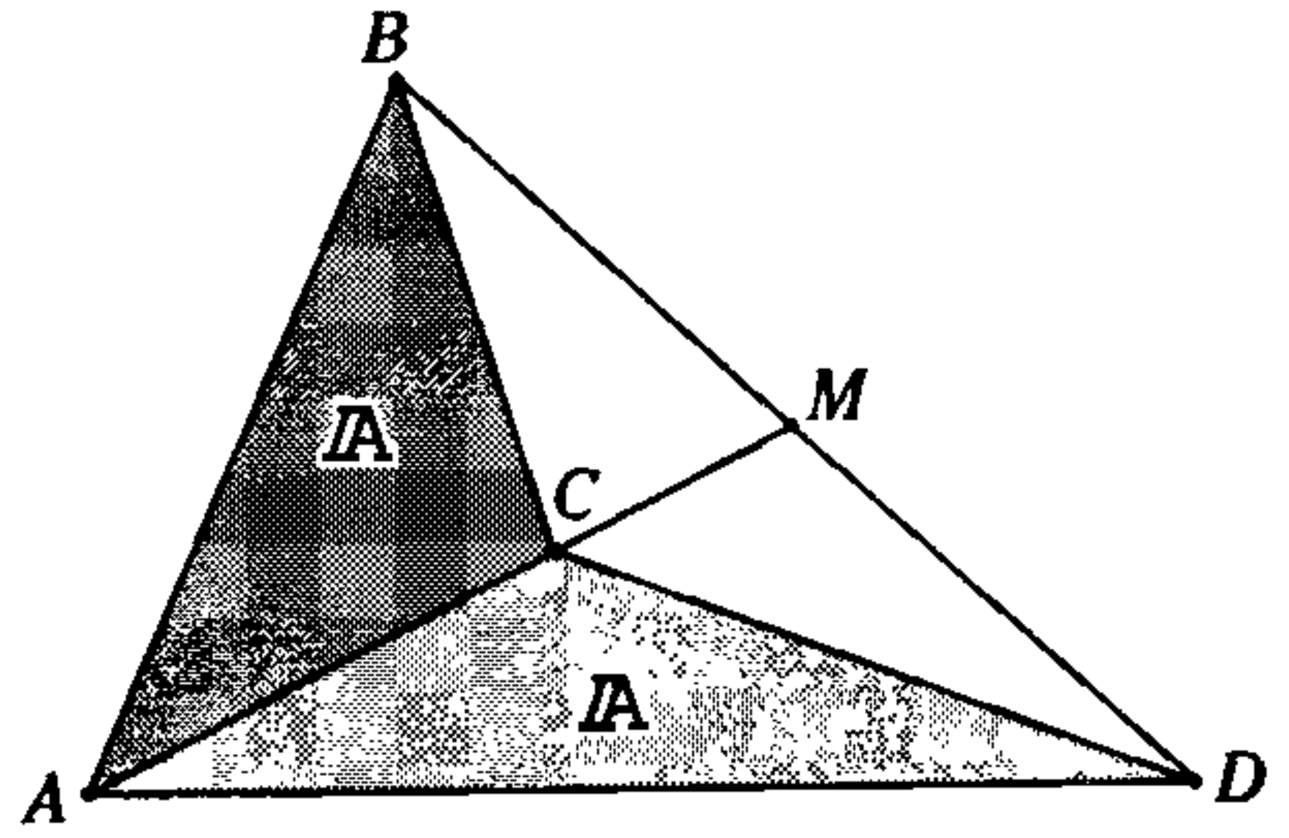


Figura 18.94

Si las áreas de las regiones ABC y ADC son iguales, entonces M es punto medio de $\overline{BD}$.

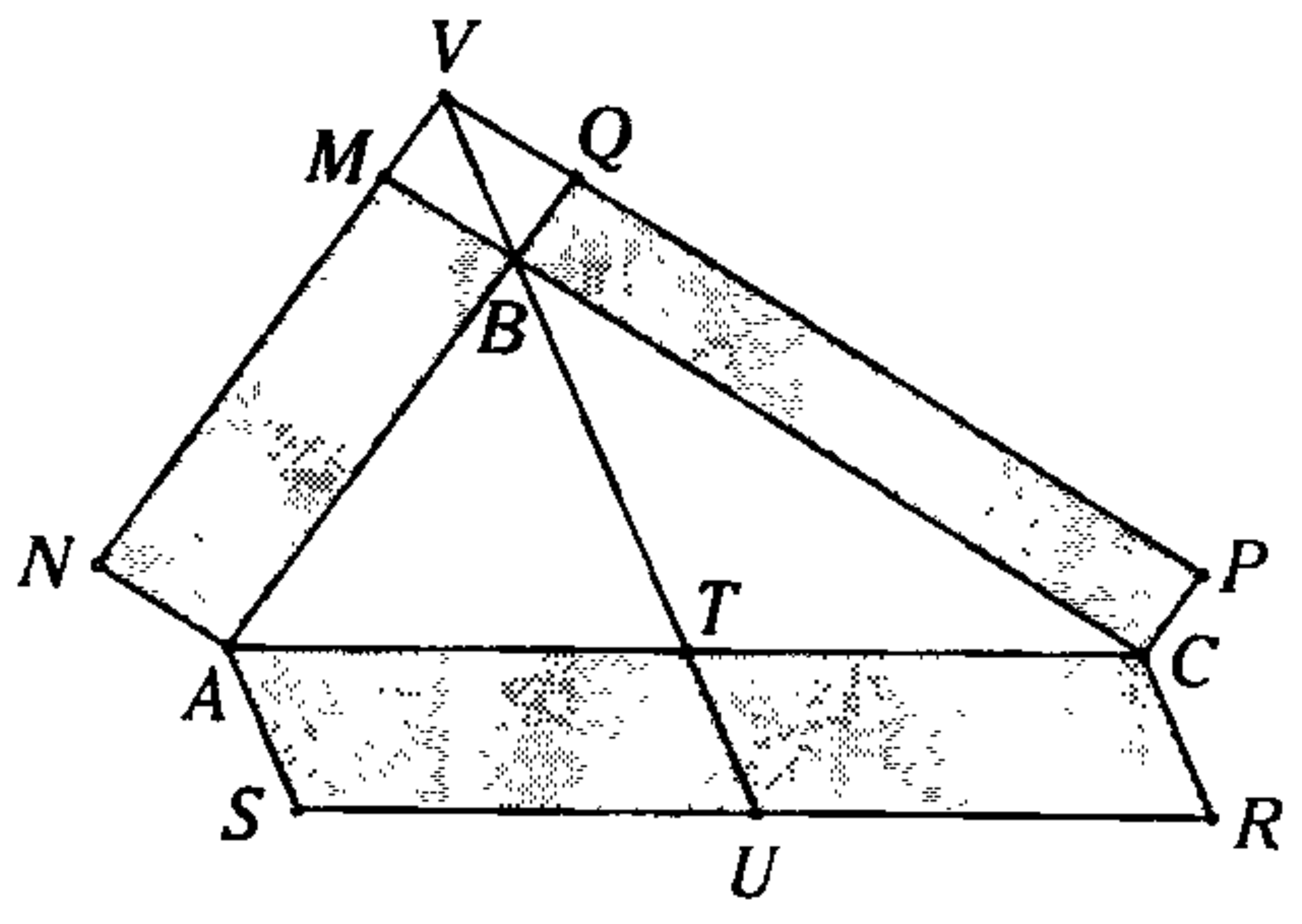
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \mathbb{A}_{\blacktriangle ADC} \;\rightarrow\; BM = MD$$

De la observación en el $\triangle PMQ$, N es punto de la ceviana MS y S es punto medio de $\overline{PQ}$.

$\therefore\;$ M, N y S son colineales.

TEOREMA DE PAPPUS

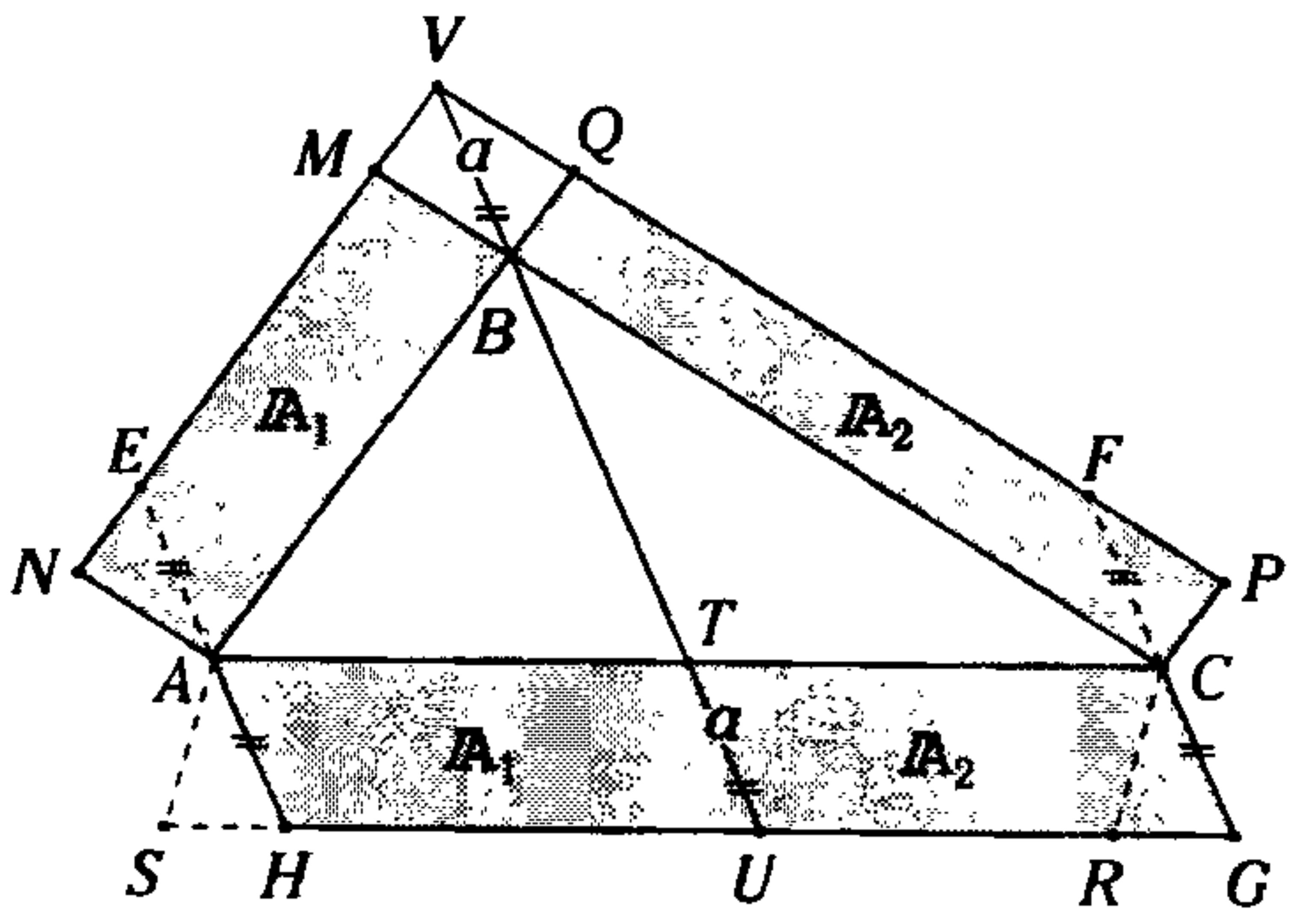
Dado el triángulo ABC, al ser $VB=TU$; el área de la región paralelográmica $ACRS$ es igual a la suma de las áreas de las regiones paralelográmicas $ABMN$ y $BCPQ$.



(a)

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ACRS}=\mathbb{A}_{\blacksquare ABMN}+\mathbb{A}_{\blacksquare BCPQ}$$

Demostración



(b)

Figura 18.95

Si $VB=TU$

$$\rightarrow\ \mathbb{A}_{\blacksquare HUTA}=\mathbb{A}_{\blacksquare VBAE}=\mathbb{A}_1 \ \text{y}$$

$$\mathbb{A}_{\blacksquare GUTC}=\mathbb{A}_{\blacksquare VBCF}=\mathbb{A}_2$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacksquare ACGH}=\mathbb{A}_{\blacksquare VBAE}+\mathbb{A}_{\blacksquare VBCF} \qquad \text{(I)}$$

Mas,

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ABMN}=\mathbb{A}_{\blacksquare VBAE} \ \text{ y } \ \mathbb{A}_{\blacksquare BCPQ}=\mathbb{A}_{\blacksquare VBCF}$$

También,

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ACRS}=\mathbb{A}_{\blacksquare ACGH} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando en (I)

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ACRS}=\mathbb{A}_{\blacksquare ABMN}+\mathbb{A}_{\blacksquare BCPQ}$$

Este teorema es atribuido también a Frere de Clairaut (París, 1713-1765) ya que en 1731, en su libro *Elementos de Geometría*, lo incluye como un teorema ingenioso. No obstante, Pappus ya conocía de este teorema, según el libro *Matemática recreativa* de d'Ozanam y que en 1778 fue reeditado con los argumentos de Montucla (voir Aussi Mathesis).

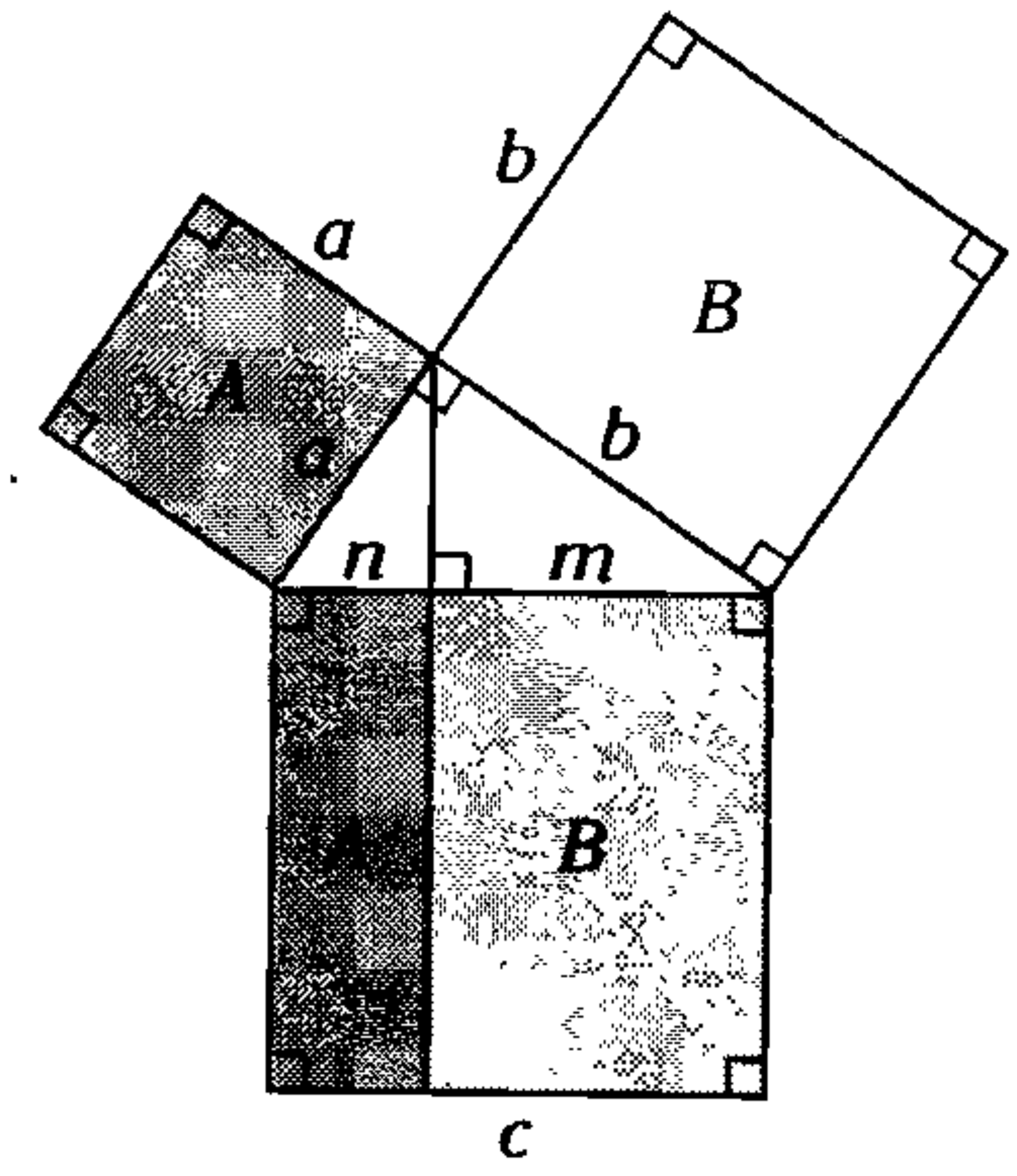


Figura 18.96

El teorema de Pitágoras es un caso particular del teorema de Pappus.

LECTURA

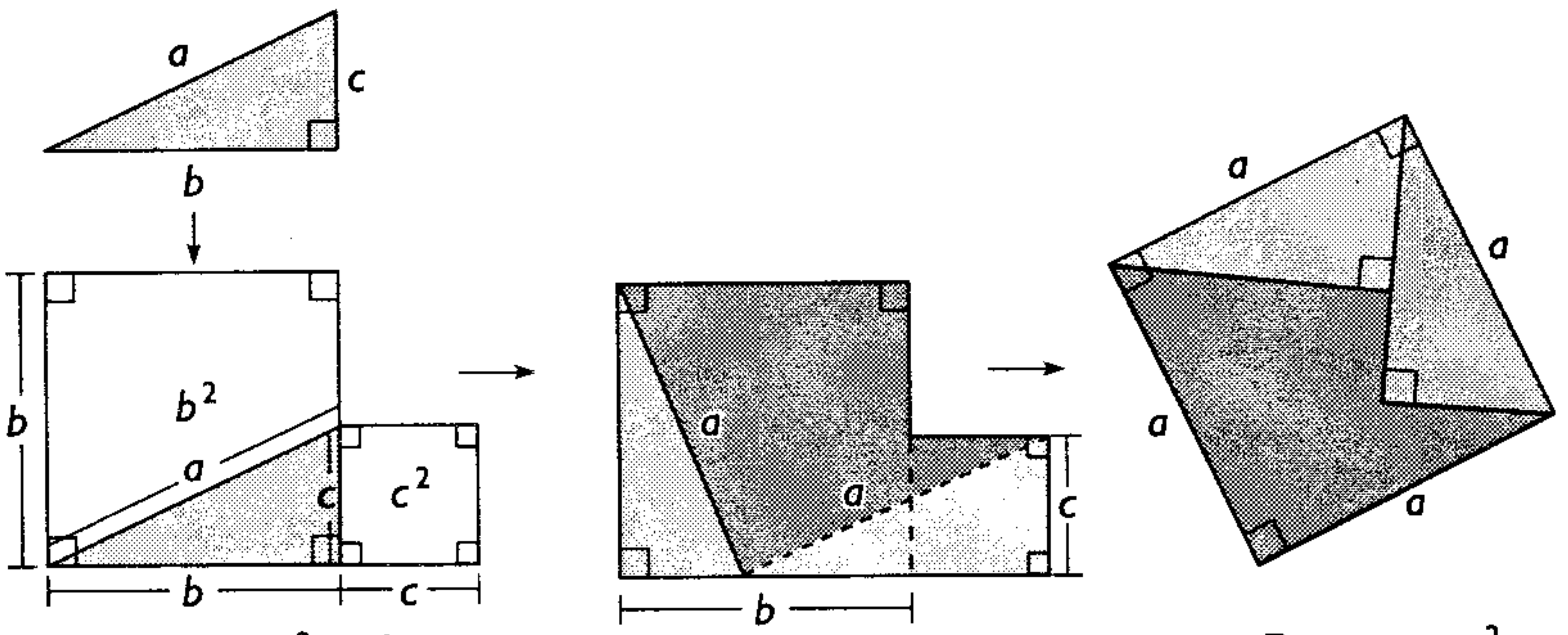
DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras es de los más conocidos y básicos que todavía no ha desaparecido de nuestras escuelas.

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Una demostración, que utiliza la disección, consiste en trozar una figura y ensamblarla de nuevo de otra forma, se muestra en el siguiente gráfico.

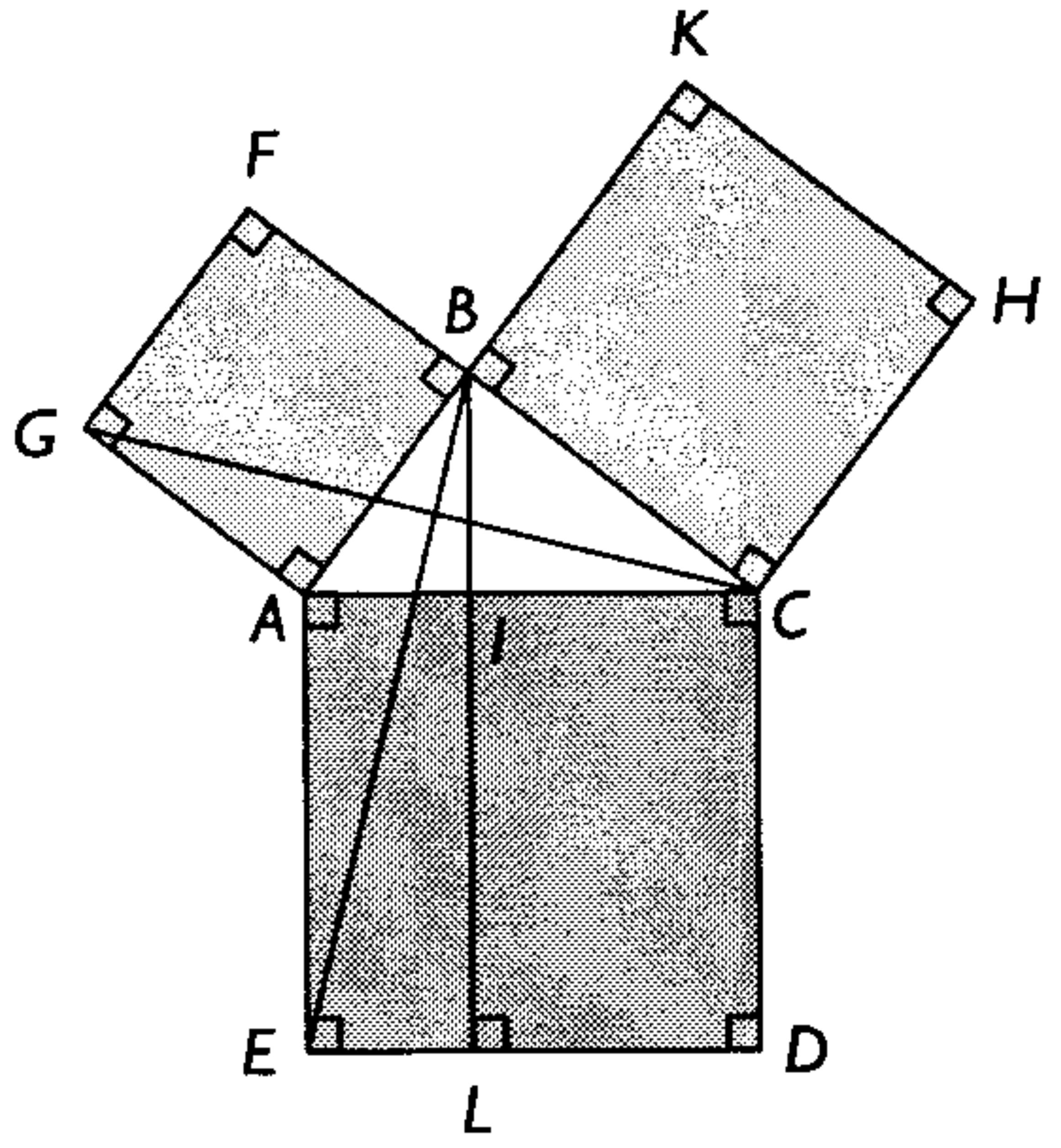
Demostración del teorema de Pitágoras, según Thabit ibn Qurra (869-901).



$\mathbb{A}_{región} = b^2 + c^2$ $\mathbb{A}_{región} = a^2$

La demostración que aparece en los *Elementos de Euclides* se basa en la figura conocida como **molino de viento.**

- Sea *ABC*, los vértices del triángulo rectángulo recto en *B*, trazamos la regiones cuadradas *ACDE*, *AGFB* y *CHKB*.
- Trazamos *BL* paralela a $\overline{AE}$ y unimos *B* y *E*; *C* y *G*.
- Se nota que *A*, *B* y *K* están alineados; así también *C*, *B* y *F* están alineados.
- Se observa $\triangle BAE \cong \triangle GAC$ (LAL)
- $\mathbb{A}_{\blacksquare AILE} = 2\mathbb{A}_{\blacktriangle BAE}$ (porque base común, tienen la misma altura)
- $\mathbb{A}_{\blacksquare AGFB} = 2\mathbb{A}_{\blacktriangle GAC}$ (porque base común, tienen la misma altura)
- Entonces $\mathbb{A}_{\blacksquare AILE} = \mathbb{A}_{\blacksquare AGFB}$
- De forma similar, uniendo *B*, *D* y *A*, *H*:
  $\mathbb{A}_{\blacksquare CDLI} = \mathbb{A}_{\blacksquare CHKB}$
- Por lo tanto $\boxed{\mathbb{A}_{\blacksquare AEDC} = \mathbb{A}_{\blacksquare AGFB} + \mathbb{A}_{\blacksquare BCHK}}$



LECTURA

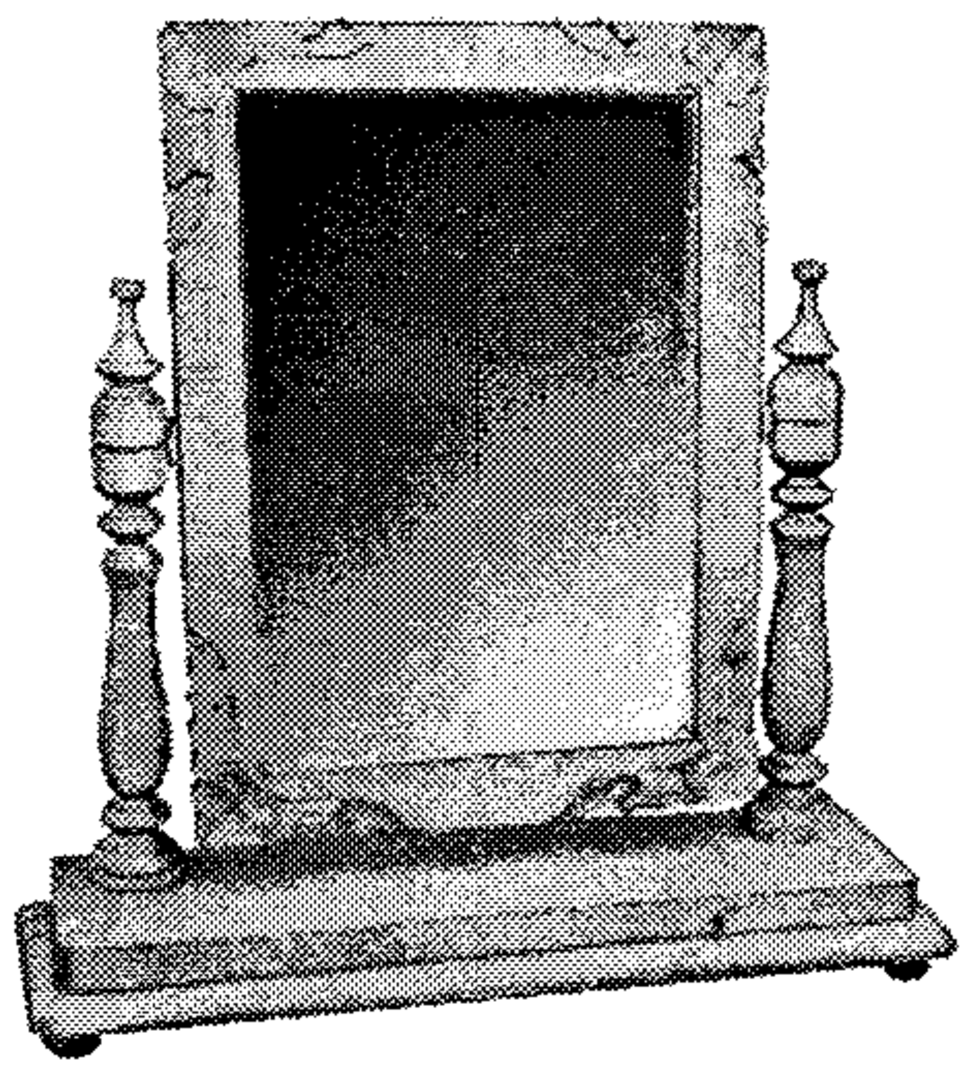
CONSTRUCCIONES UTILIZANDO FORMAS RECTANGULARES

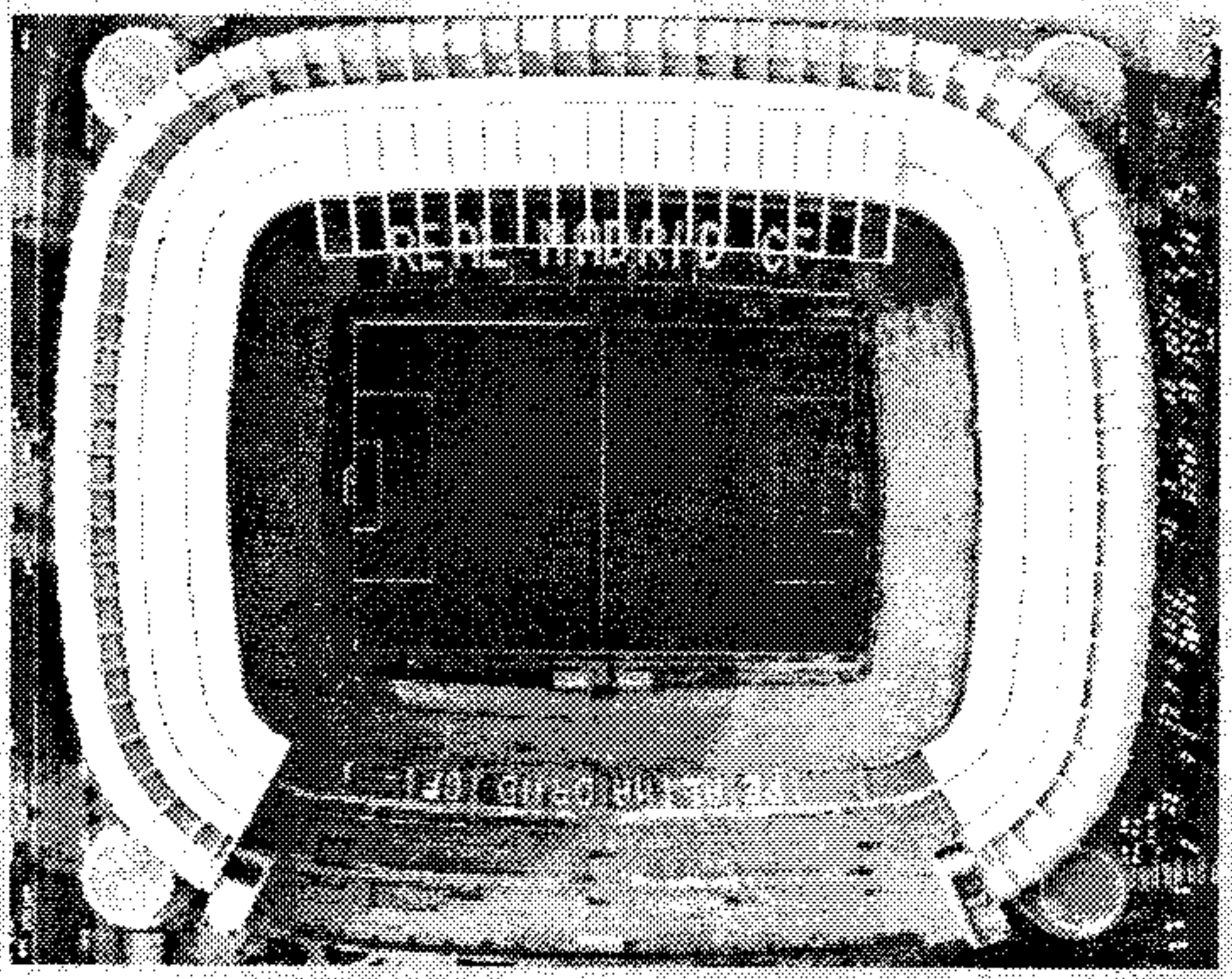
En las construcciones arquitectónicas, ya sean antiguas o modernas, podemos ver básicamente el uso de formas cuadriláteras (en especial las rectangulares y cuadradas); por ejemplo, mencionamos al misterioso y sorprendente arte egipcio, que fue inspiración de su religión. Ellos levantaron templos para sus dioses y sepulcros a sus faraones, porque vivían con la idea del más allá y de la eternidad. Como consideraban a la casa como un lugar de paso y la tumba como una mansión eterna, construyeron las pirámides de los faraones de la cuarta dinastía de Keops, Kefren y Micerino, todas ellas de base cuadrada. Se cree que la base podría atribuirse a la orientación sobre los puntos cardinales, además que debían aprovechar los espacios al máximo.

Los griegos tomaron como ejemplo a los egipcios, y también construyeron templos; en la época arcaica del orden dórico, la planta del templo es de forma rectangular. Sus columnas eran estriadas y adosadas directamente al suelo sin necesidad de base. El capitel constaba de una pieza de sección circular que se llama equino y de un dado cuadrado, el cual es conocido como ábaco. Las principales construcciones que nos han dejado son el templo de Atenea, en Egira; el de Zeus en la ciudad de Siracusa; en la isla de Sicilia; y el de Poseidón, en Paestum.

En la zona oriental del mundo helénico, predominó mucho más el orden jónico. Sus columnas son más delgadas que las del dórico y van montadas sobre la base o pedestal cuadrado. Podemos citar un ejemplo que es el Partenón de Atenas, el cual tiene en la parte superior forma rectangular dorada.

En la actualidad, las puertas o ventanas tienen formas rectangulares, inclusive las paredes.





Las construcciones rectangulares son sin duda una de las más empleadas por el hombre, las apreciamos en: las mesas, ventanas, marcos de los espejos, el la forma de un estadio de fútbol, etc.

B I O G R A F Í A

BRAHMAGUPTA (598 - 670)

El libro de Banaras, V. Kashi trata sobre la historia de la cultura de la India en la que considera a Brahmagupta como uno de sus sabios más emblemáticos.

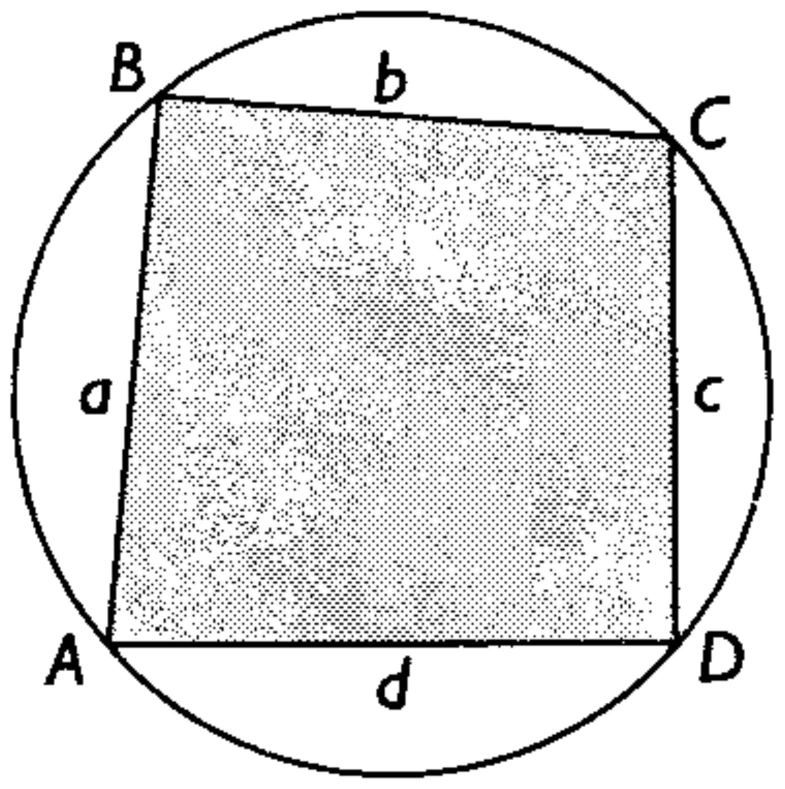
Brahmagupta fue un astrónomo y matemático que vivió, probablemente, la mayoría de su vida en Bhillamala (hoy es la ciudad de Bhinmal) en el imperio de Harsha. Escribió *Brahma Sphuta Siddhanta* (que significa *abriendo el universo*) en el año 628, es decir, cuando tenía 33 años. Dicho nombre era porque pretendía revivir un viejo trabajo astronómico, cuyo título es *Brahma Siddhanta*. El trabajo de Brahmagupta consta de 25 capítulos: los cuatro y mitad de algunos capítulos se dedican a las matemáticas puras mientras que su duodécimo capítulo, el Ganita, como el título refleja, se ocupa de la aritmética, de progresiones, y de un poco de geometría; el decimoctavo capítulo se llama Kuttaka, que significa *pulverizer*. Ancianos generalmente el trabajo de Kuttaka, el método de Aryabhata para solucionar el hecho indeterminado de la ecuación, mas aquí Kuttaka significa *Álgebra*. *Brahmagupta* fue el inventor del concepto cero, del método de solucionar ecuaciones indeterminadas de segundo grado, y las reglas para solucionar ecuaciones cuadráticas simples de varios tipos.

Aquí mencionaremos algunas contribuciones hechas en la astronomía:

- Método para los cálculos de los movimientos y de los lugares de varios planetas.
- Levantamiento de fijas, de las conjunciones y de los cálculos de los eclipses del Sol y de la Luna.

Además de escribir la opinión de Puranio, que decía que la Tierra era plana o hueca como un tazón de fuente, observó que la Tierra y el cielo estaban alrededor, por lo que creyó que la Tierra no se movía.

También escribió otro trabajo en matemáticas y astronomía, Khand Khadyak, en el año 665. Después de 5 años muere.



Sea $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

$$\mathbb{A}_{ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

TEOREMA DE BRAHMAGUPTA. *Sin duda el teorema más importante de Brahmagupta es el que permite calcular el área de un cuadrilátero inscrito conociendo las longitudes de sus lados.*

Problema 1

Un triángulo acutángulo ABC se encuentra inscrito en una circunferencia de centro O, cuyo radio mide 15. Luego, se trazan las alturas $\overline{AF}$ y $\overline{CE}$. Si $BA = 3(BF)$ y $AC = 24$, calcule el área de la región cuadrangular $OEBF$.

A) 45 B) 37,5 C) 60
D) 75 E) 90

Resolución

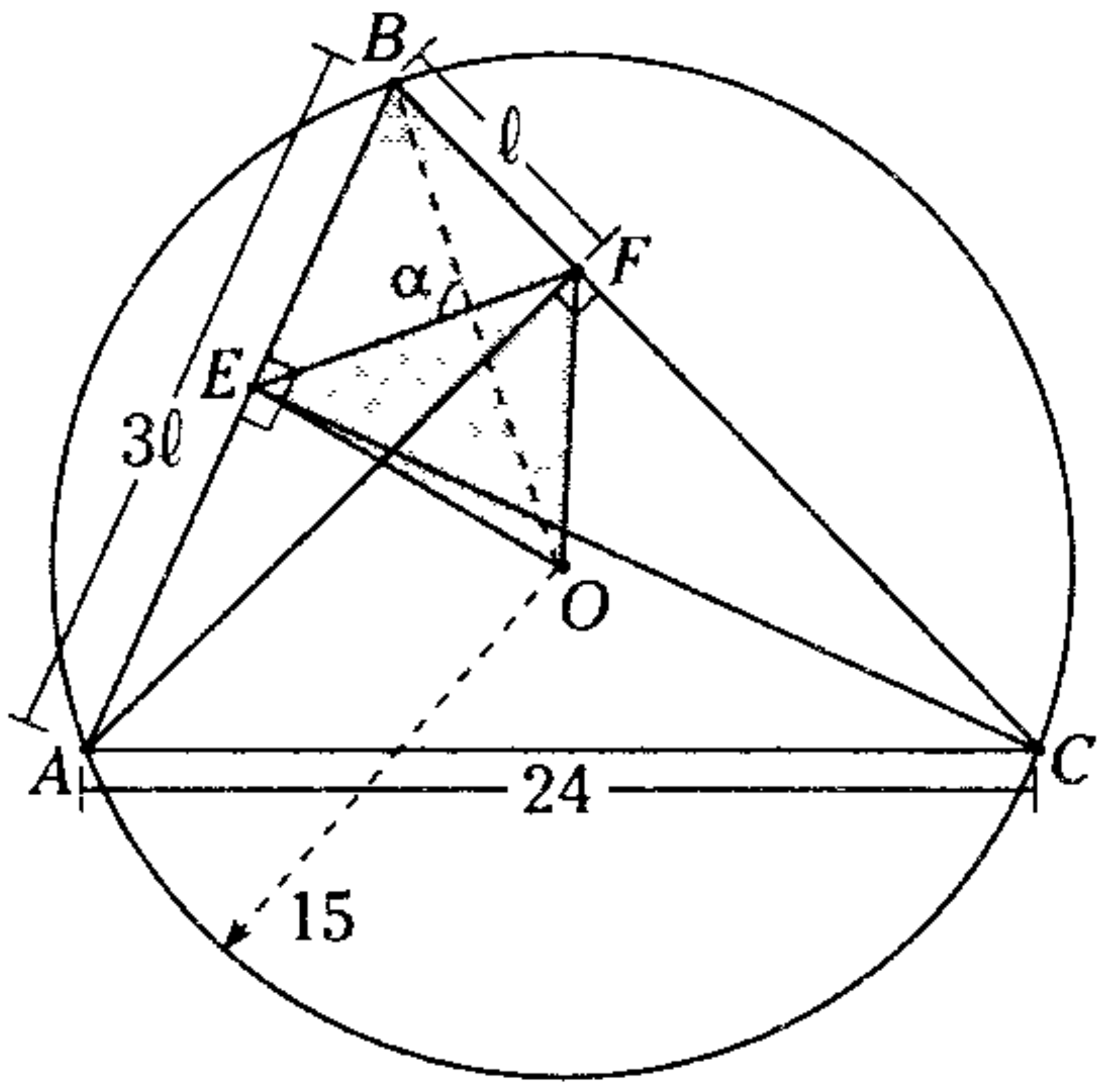


Figura 18.97

Piden $\mathbb{A}_{\blacksquare OEBF}$

$$\mathbb{A}_{\blacksquare OEBF} = \frac{(BO)(EF)}{2}\ \text{sen}\alpha \qquad \text{(I)}$$

Del dato, en la figura $BO = 15$

Se sabe $\triangle EBF \sim \triangle CBA$ (A.A.A)

$$\frac{EF}{24} = \frac{\ell}{3\ell} \rightarrow EF = 8$$

Por el teorema de Nagel: $\alpha = 90°$

reemplazando en (I)

$$\mathbb{A}_{\blacksquare OEBF} = \frac{(15)(8)}{2}\ \text{sen}90°$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacksquare OEBF} = 60$$

CLAVE C

Problema 2

Dado un trapecio rectángulo $ABCD$, recto en A y B, tal que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, se ubican los puntos medios M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. Si $BC = 9$ y $AD = 16$, determine el área de la región cuadrangular $AMCN$.

A) 74 B) 75 C) 39
D) 77 E) 38

Resolución

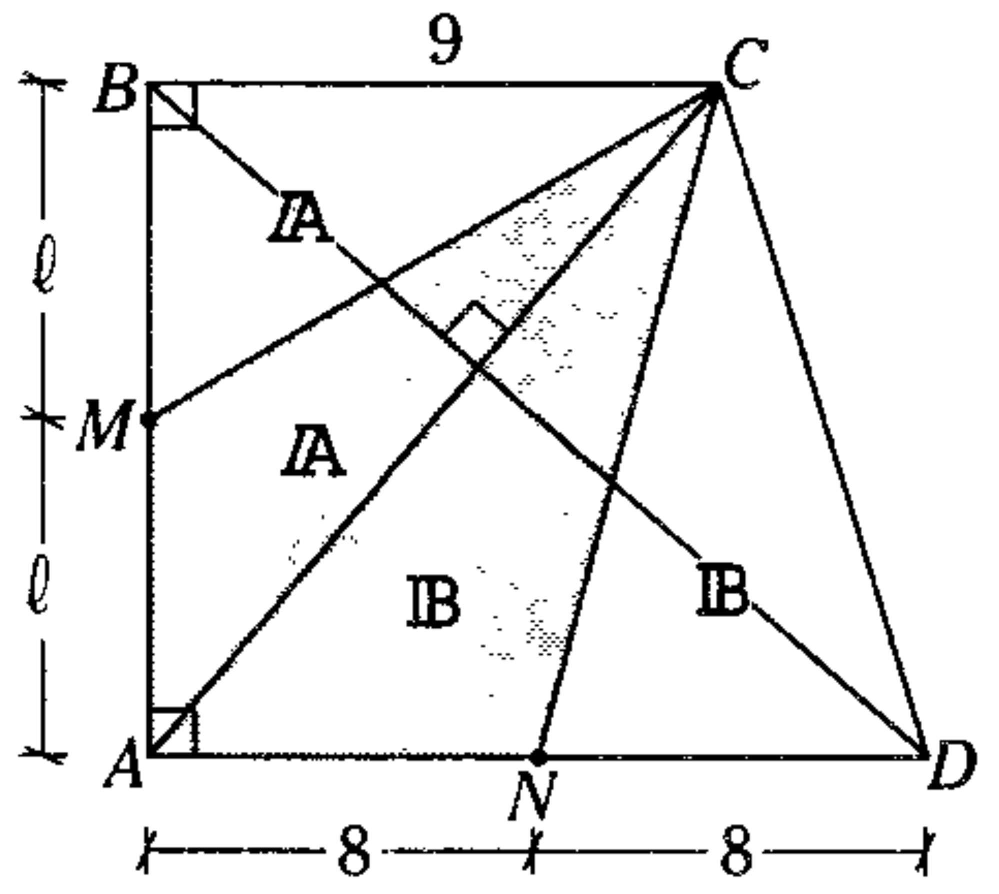


Figura 18.98

Piden $\mathbb{A}_{\blacksquare AMCN}$

$BM = MA \rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle BCM} = \mathbb{A}_{\blacktriangle ACM} = \mathbb{A}$

$AN = ND \rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle ACN} = \mathbb{A}_{\blacktriangle DCN} = \mathbb{B}$

$\mathbb{A}_{\blacksquare AMCN} = \mathbb{A} + \mathbb{B}$ (I)

Pero $\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = 2(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \left(\frac{16+9}{2}\right)2\ell$ (II)

$\triangle ABC \sim \triangle DAB$ (A.A.A.)

$$\frac{2\ell}{16} = \frac{9}{2\ell} \rightarrow \ell = 6$$

Reemplazando en (II)

$$2(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \left(\frac{25}{2}\right)(2)(6) \Rightarrow \mathbb{A}+\mathbb{B} = 75$$

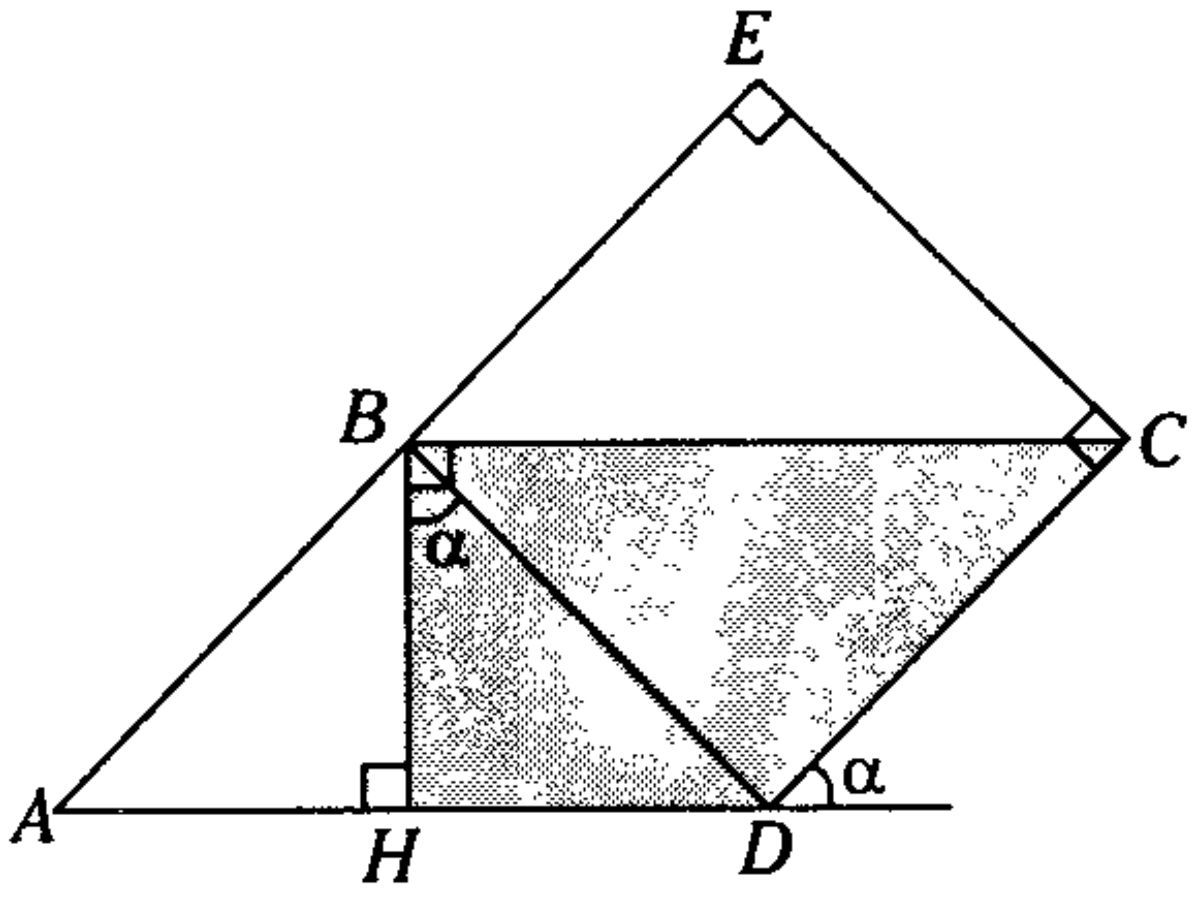
Reemplazando en (I)

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacksquare AMCN} = 75$$

CLAVE B

PROBLEMA 3

De la figura, $(BD)(BE) = 20\ u^2$ y $2(AH) = 3(HD)$. Señale el área de la región $BCDH$.



A) $10\ u^2$ B) $12\ u^2$ C) $14\ u^2$
D) $16\ u^2$ E) $18\ u^2$

Resolución

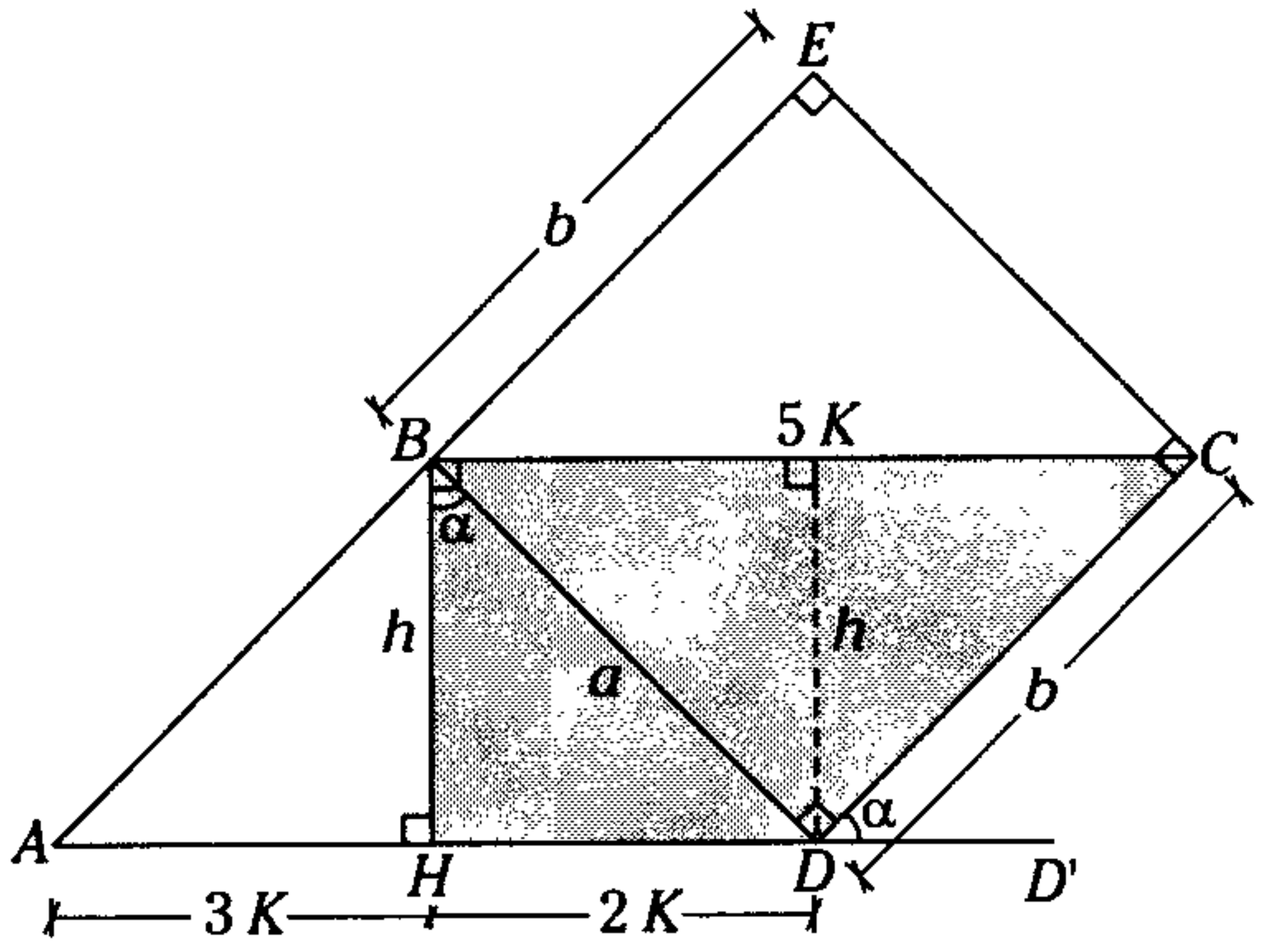


Figura 18.99

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle BCDH}$

Del dato $2(AH) = 3(HD) \rightarrow AH = 3K, HD = 2K$

$(BD)(BE) = 20 \rightarrow ab = 20$

En el ◺BHD

$m\sphericalangle BDD' = 90° + \alpha \rightarrow m\sphericalangle BDC = 90°$

Se observa

▱$BECD$: rectángulo $\rightarrow DC = BE = b$

▱$ABCD$: paralelogramo $\rightarrow BC = AD = 5K$

$\mathbb{A}_{\blacktriangle BCDH}: \left(\dfrac{5K+2K}{2}\right)h$ (I)

Pero ◺BDC: relaciones métricas

$a.b = 5K(h) = 20 \rightarrow Kh = 4$

En (I)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle BCDH} = \frac{7(4)}{2}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle BCDH} = 14\ u^2$$

CLAVE C

Problema 4

Exteriormente a la hipotenusa AC del triángulo rectángulo ABC, se traza el cuadrado $ACPQ$. Luego, se trazan $\overline{PM}$ y $\overline{QN}$ perpendiculares a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente ($M \in \overleftrightarrow{AB}$ y $N \in \overline{BC}$). Si $AB = a$ y $BC = b$, calcule el área de la región cuadrangular $PQMN$.

A) $\dfrac{(a+b)^2}{4}$ B) $\dfrac{(a+b)^2}{3}$

C) $\dfrac{(a+b)^2}{6}$

D) $\dfrac{(a+b)^2}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}\,(a+b)^2}{4}$

Resolución

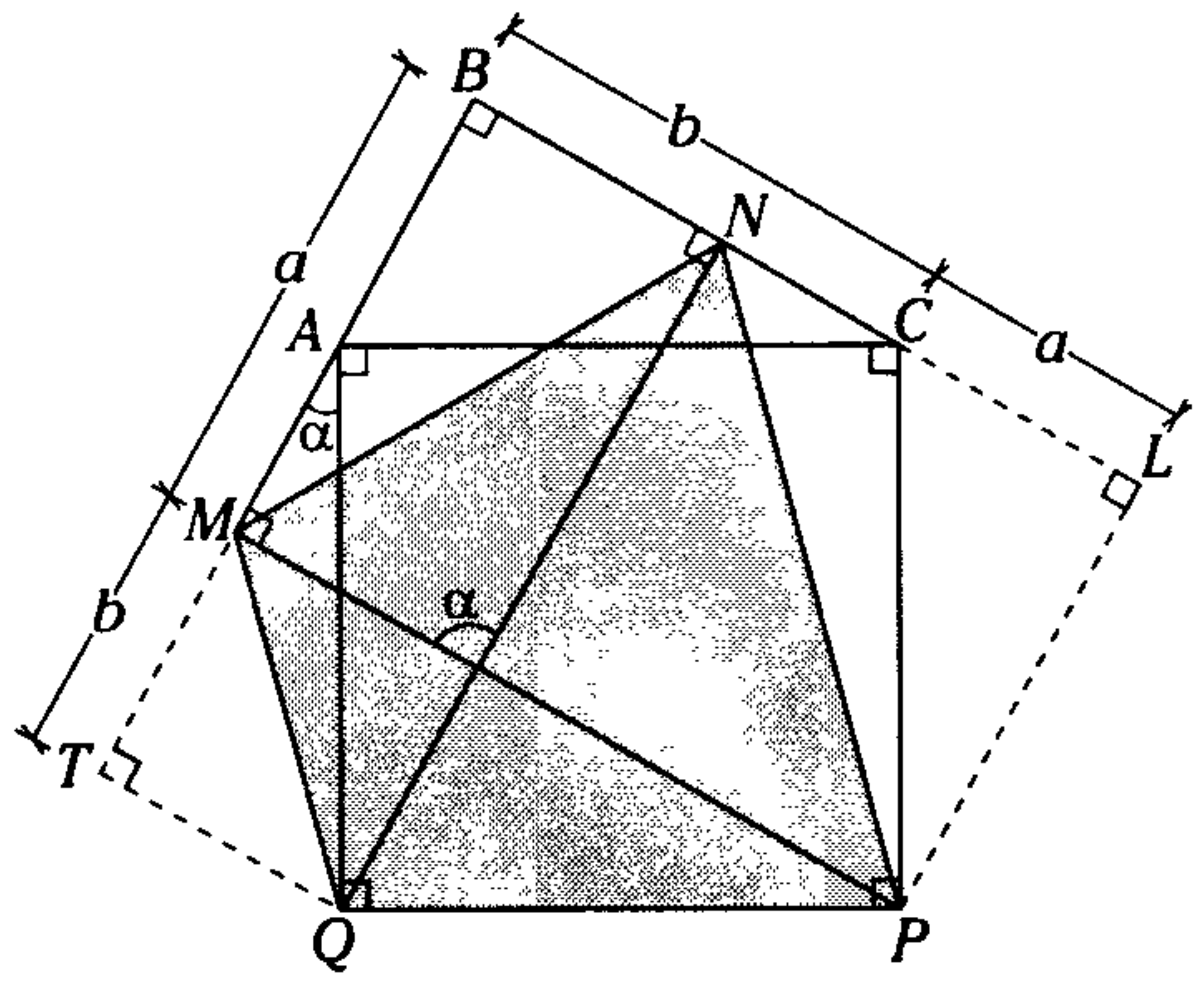


Figura 18.100

Piden $\mathbb{A}_{PQMN}$

$$\mathbb{A}_{PQMN}=\frac{(QN)(MP)}{2}\operatorname{sen}\alpha \qquad \text{(I)}$$

De la figura $\alpha = 90°$

$\triangle ABC \cong \triangle QTA$ (A.L.A.) $\rightarrow$ $TA = b$

$\triangle ABC \cong \triangle CLP$ (A.L.A.) $\rightarrow$ $CL = a$

En (I)

$$\mathbb{A}_{PQMN}=\frac{(a+b)(b+a)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{PQMN}=\frac{(a+b)^2}{2}$$

CLAVE D

Problema 5

En un trapecio *ABCD* ($\overline{BC}//\overline{AD}$), se trazan las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, luego se ubica el punto medio *O* de $\overline{BD}$. Si el área de la región triangular *ADC* es $\mathbb{X}_1$ y el área de la región trapecial *ABCD* es $\mathbb{X}_2$, calcule el área de la región triangular *ACO*.

A) $4\mathbb{X}_1-\mathbb{X}_2$ B) $\frac{2\mathbb{X}_1-\mathbb{X}_2}{4}$ C) $\frac{2\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2}{4}$

D) $\frac{2\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2}{2}$ E) $\frac{2\mathbb{X}_1-\mathbb{X}_2}{2}$

Resolución

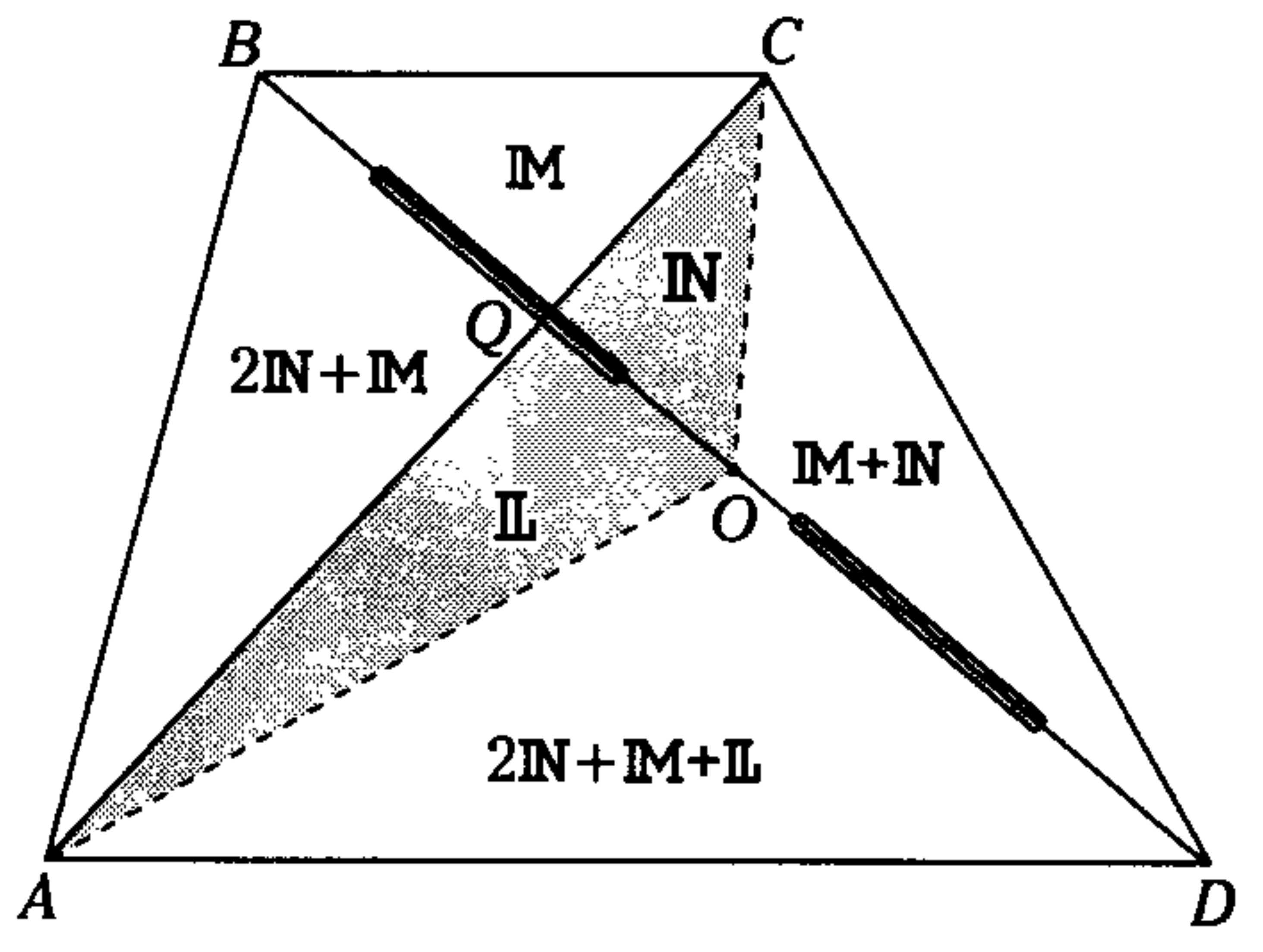


Figura 18.101

Piden $\mathbb{A}_{\triangle ACO}$

Sabemos $\mathbb{A}_{\triangle BCO}=\mathbb{A}_{\triangle COD}=\mathbb{M}+\mathbb{N}$

Por propiedad de áreas

$$\mathbb{A}_{\triangle BQA}=\mathbb{A}_{\triangle CQD}=2\mathbb{N}+\mathbb{M}$$

también

$$\mathbb{A}_{\triangle AOD}=\mathbb{A}_{\triangle ABO}=2\mathbb{N}+\mathbb{M}+\mathbb{L}$$

datos

$$\mathbb{A}_{\triangle ADC}=\mathbb{X}_1$$

$$4\mathbb{N}+2\mathbb{M}+2\mathbb{L}=\mathbb{X}_1 \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A}_{ABCD}=\mathbb{X}_2$$

$$2\mathbb{M}+3\mathbb{N}+\mathbb{L}=\frac{\mathbb{X}_2}{2} \qquad \text{(II)}$$

Restando (I) y (II)

$$\mathbb{N}+\mathbb{L}=\mathbb{X}_1-\frac{\mathbb{X}_2}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{\triangle ACO}=\frac{2\mathbb{X}_1-\mathbb{X}_2}{2}$$

Otro método de resolver, por el teorema 1.

$$\mathbb{A}_{\triangle ACO}=\frac{\mathbb{A}_{\triangle ADC}-\mathbb{A}_{\triangle ABC}}{2}$$

pero

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC}=\mathbb{A}_{ABCD}-\mathbb{A}_{\triangle ADC}=\mathbb{X}_2-\mathbb{X}_1$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{\triangle ACO}=\frac{\mathbb{X}_1-(\mathbb{X}_2-\mathbb{X}_1)}{2}=\frac{2\mathbb{X}_1-\mathbb{X}_2}{2}$$

CLAVE E

Problema 6

En un trapecio, las bases miden 6 y 8, y la altura mide 4. Si un segmento paralelo a las bases, limitado por los otros dos lados no paralelos, determina dos regiones equivalentes, calcule la altura de uno de los trapecios, donde una base mide 8.

A) $8-4\sqrt{2}$ B) $2(8-3\sqrt{2})$ C) $2(8-5\sqrt{2})$

D) $8-5\sqrt{2}$ E) $5-3\sqrt{2}$

Resolución

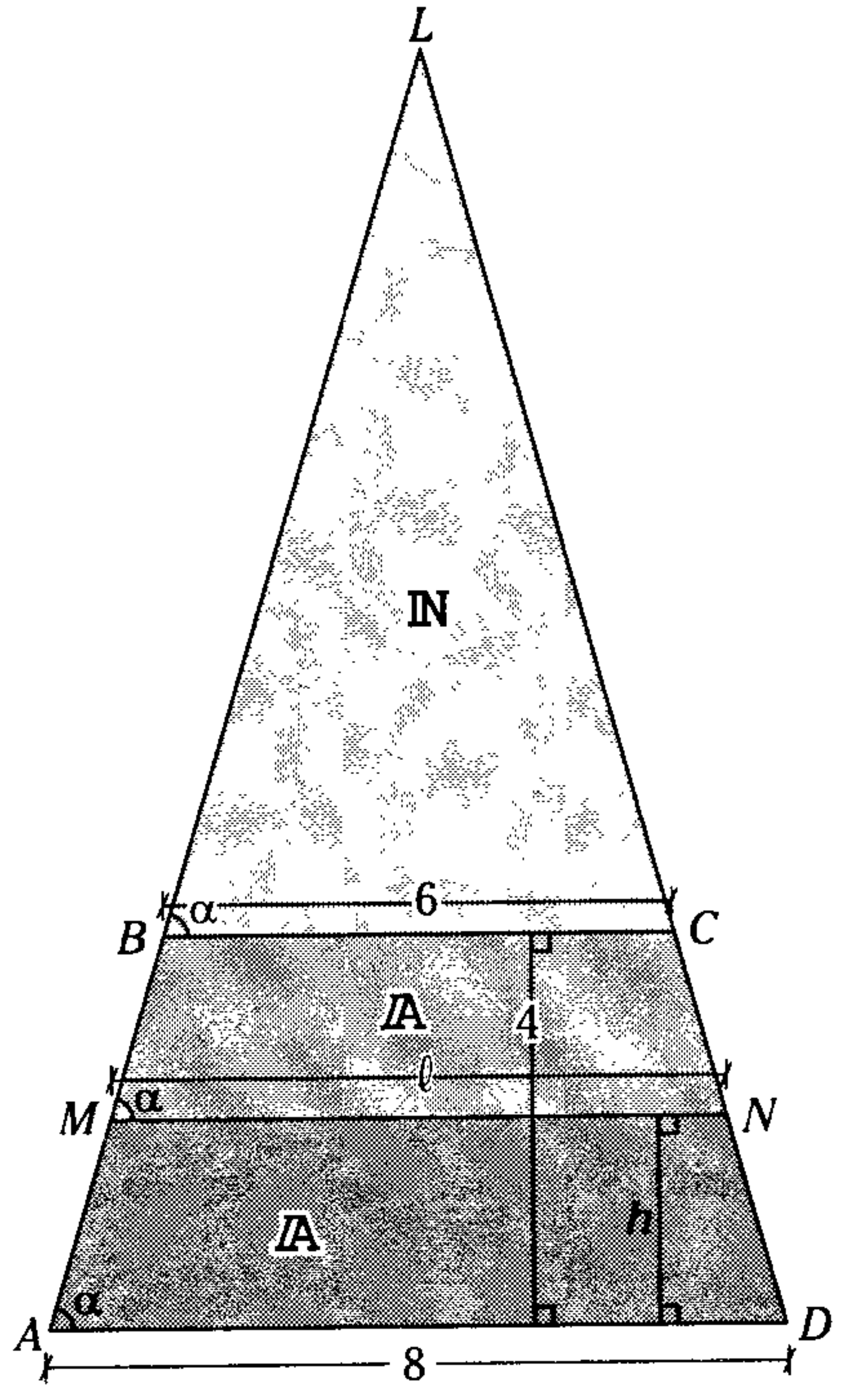


Figura 18.102

Piden h

por dato, las regiones $MBCN$ y $AMND$ son equivalentes.

$$\rightarrow \mathbb{A}_{MBCN} = \mathbb{A}_{AMND} = \mathbb{A}$$

Se prolongan $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, tal que se intersecan en L. Aplicando relación de áreas (regiones triangulares)

$$\frac{\mathbb{N}}{6^2}=\frac{\mathbb{N}+2\mathbb{A}}{8^2} \rightarrow \frac{\mathbb{N}}{9}=\frac{\mathbb{N}+2\mathbb{A}}{16} \rightarrow \frac{\mathbb{N}}{\mathbb{A}}=\frac{18}{7}$$

También

$$\frac{\mathbb{N}}{6^2}=\frac{\mathbb{N}+\mathbb{A}}{\ell^2} \rightarrow \frac{\left(\frac{18}{7}\right)\mathbb{A}}{36}=\frac{\left(\frac{18}{7}\right)\mathbb{A}+\mathbb{A}}{\ell^2}$$

Despejando $\ell=5\sqrt{2}$

De los datos, para el trapecio $ABCD$; se puede calcular el área de su región.

$$\mathbb{A}_{ABCD} = 2\mathbb{A} = \left(\frac{6+8}{2}\right)4 \rightarrow \mathbb{A} = 14$$

En el trapecio $AMND$

$$\mathbb{A} = \left(\frac{8+\ell}{2}\right)h$$

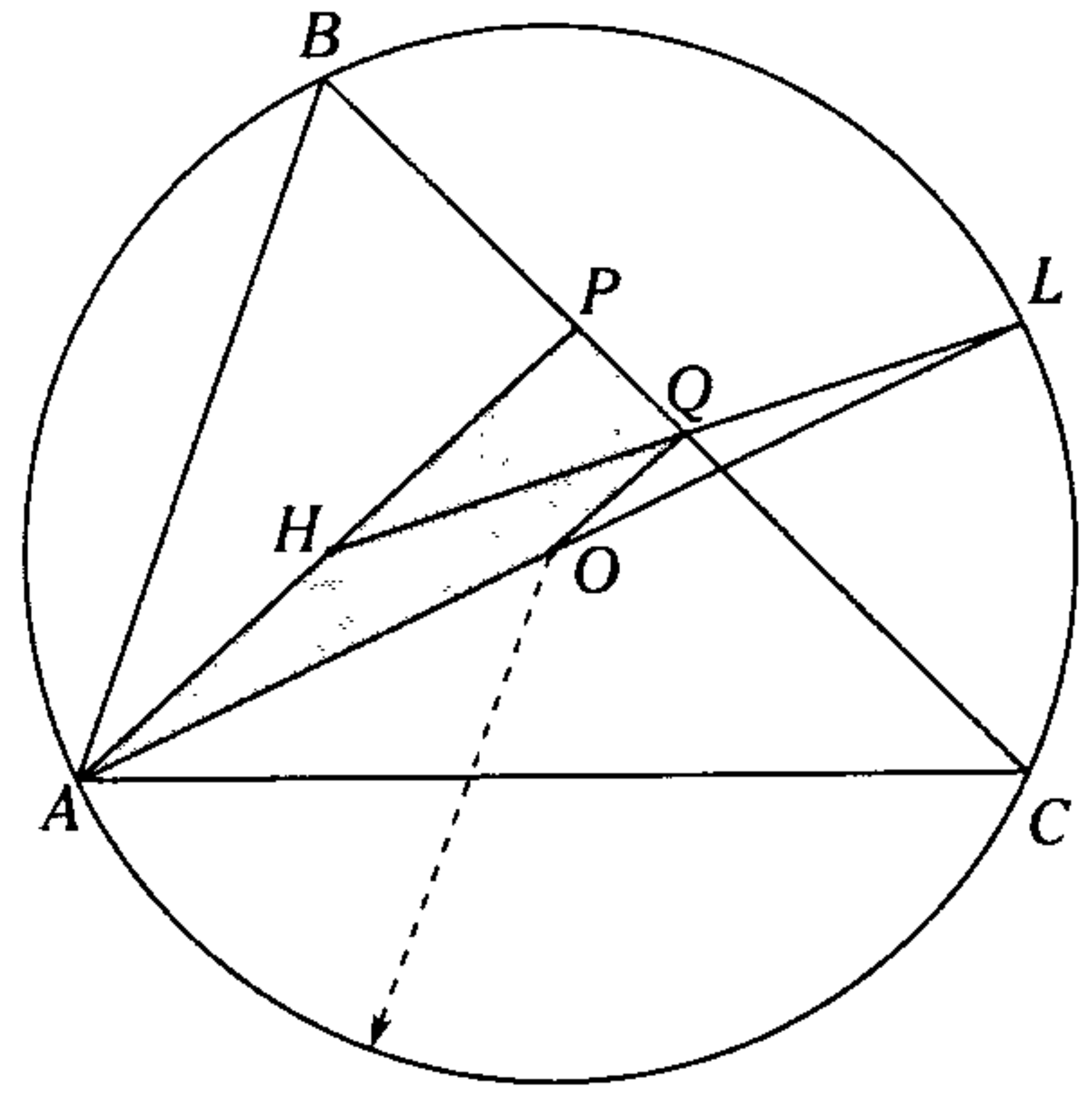
$$14 = \left(\frac{8+5\sqrt{2}}{2}\right)h$$

$$\therefore\ h = 2\left(8-5\sqrt{2}\right)$$

CLAVE C

Problema 7

En la figura, calcule el área de la región sombreada, si $2(OQ) = 2(PQ) = HP = 4\,u$ y H es el ortocentro del triángulo ABC.



A) $14\ u^2$ B) $12\ u^2$ C) $10\ u^2$

D) $9\ u^2$ E) $8\ u^2$

Resolución

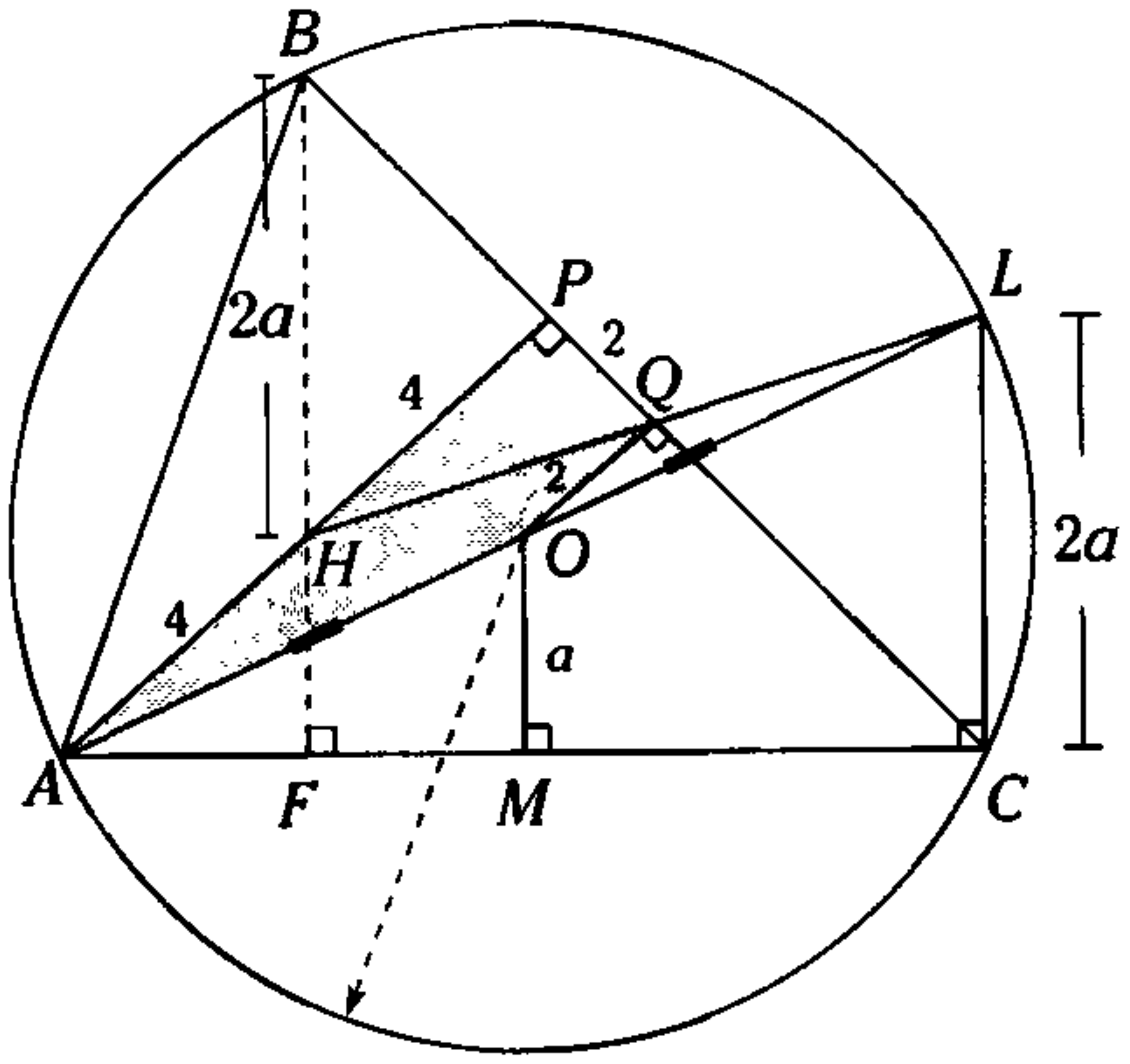


Figura 18.103

Piden $\mathbb{A}_{\blacksquare APQO}$

Se trazan la altura $\overline{BF}$ y $\overline{OM} \perp \overline{AC}$

por propiedad

$BH = 2(OM) = 2a$

En $\triangle ACL$: por base media, $LC = 2a$

$\triangle BHQ \cong \triangle CLQ$ (A.L.A.)

$\rightarrow HQ = QL, BQ = QC$

Por lo cual $OQ \perp \overline{BC}$

Por propiedad $AH = 2(OQ)$

$AH = 4$

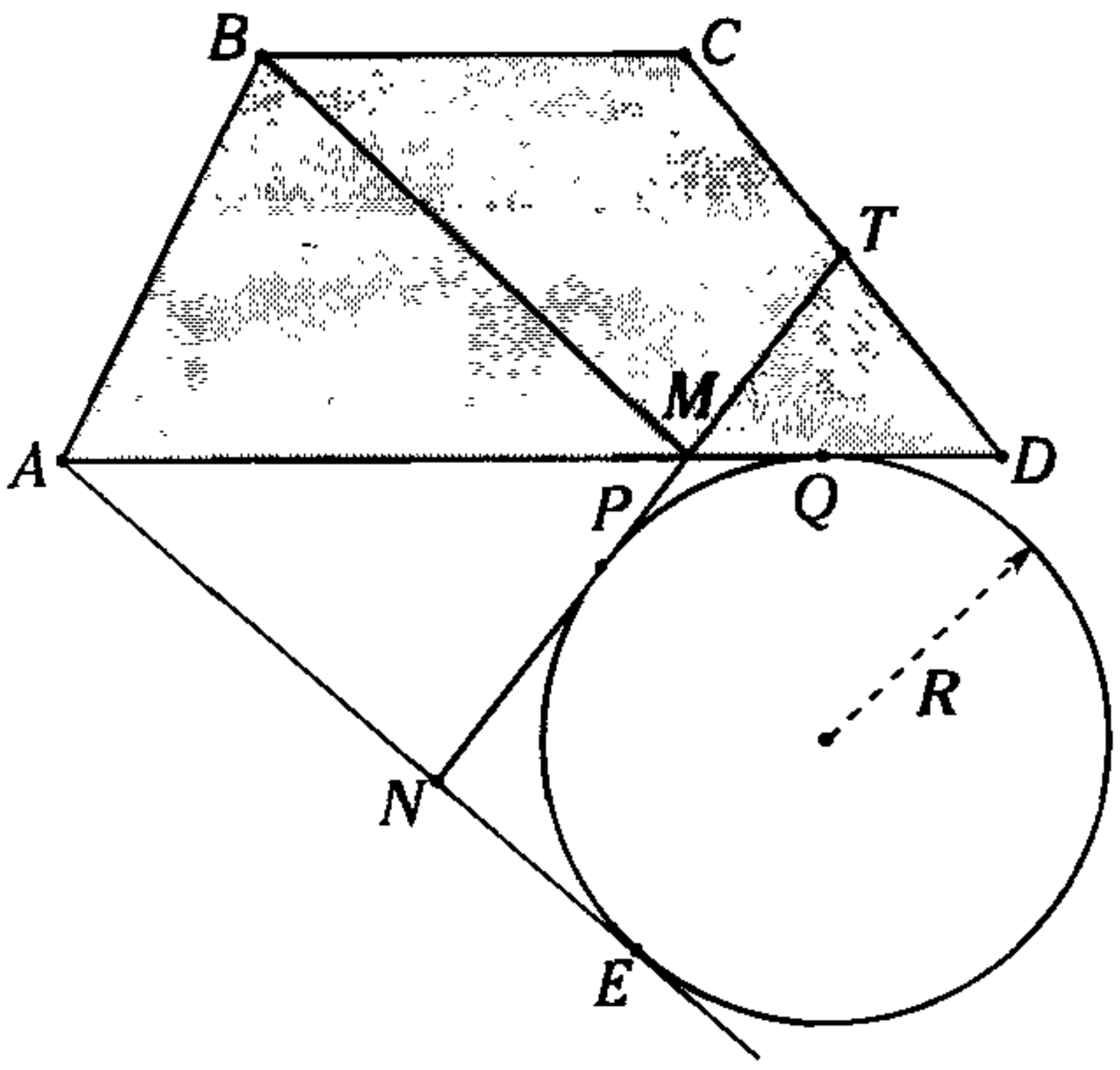
Podemos notar que $APQO$: es un trapecio

$$\therefore \ \mathbb{A}_{\blacksquare APQO} = \left(\frac{2+8}{2}\right).2 = 10 \text{ u}^2$$

CLAVE C

Problema 8

En la figura, $\overline{BC} // \overline{AD}$ y $ABMN$ es un paralelogramo. Si $CT = TD$, $AQ - MN = 4$ y $R = 2$, indique el área de la región sombreada.



A) 12 B) 16 C) 14
D) 20 E) 18

Resolución

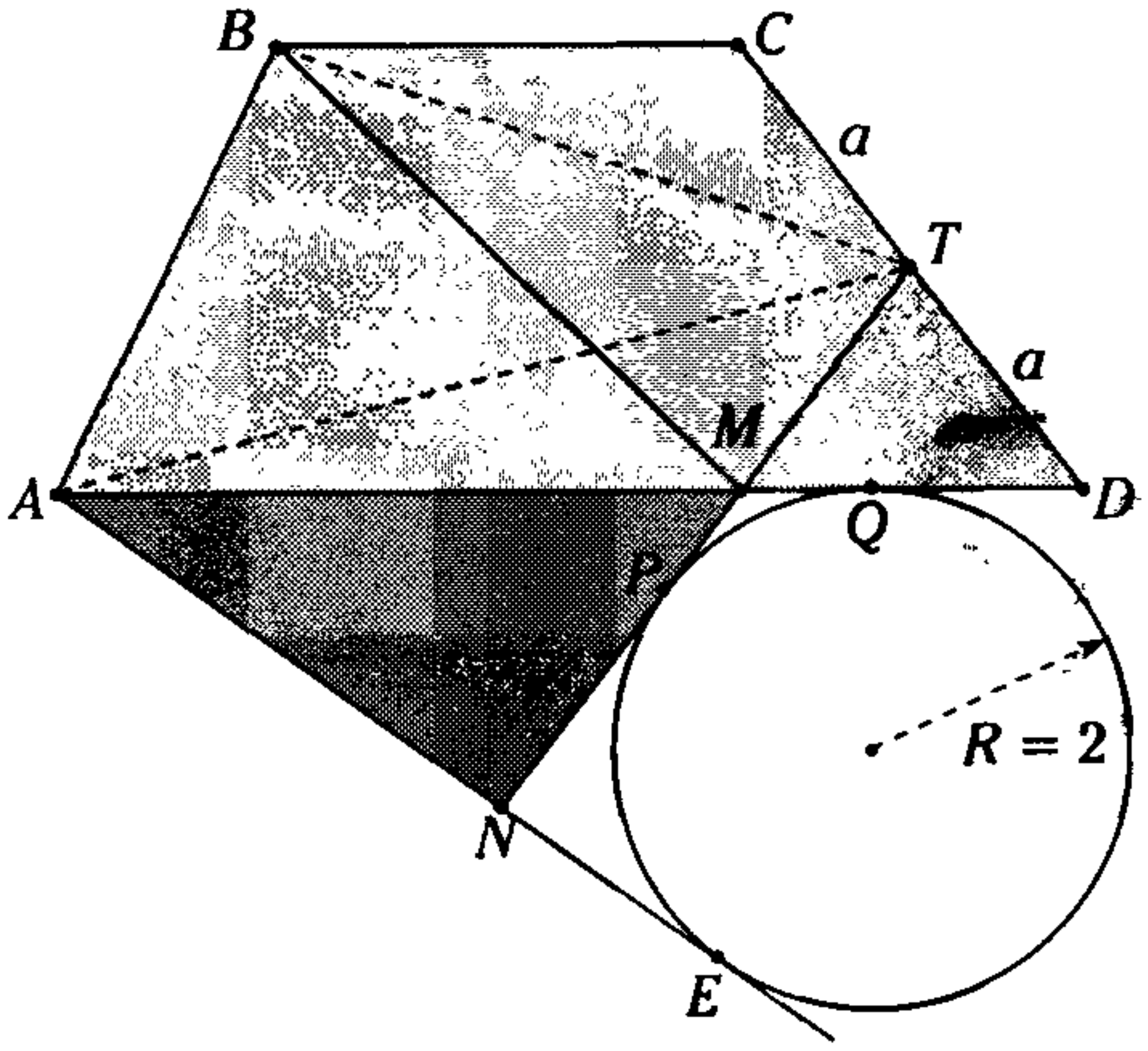


Figura 18.104

Piden $\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}$

De la figura $\mathbb{A}_{\blacktriangle AMN} = (p_{\blacktriangle AMN} - MN)R$

$\mathbb{A}_{\blacktriangle AMN} = (AQ - MN)R = 4(2) = 8$

Se sabe $\mathbb{A}_{\blacktriangle AMB} = \mathbb{A}_{\blacktriangle AMN} = 8$

En $ABTM$: propiedad $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABT} = \mathbb{A}_{\blacktriangle AMN}$

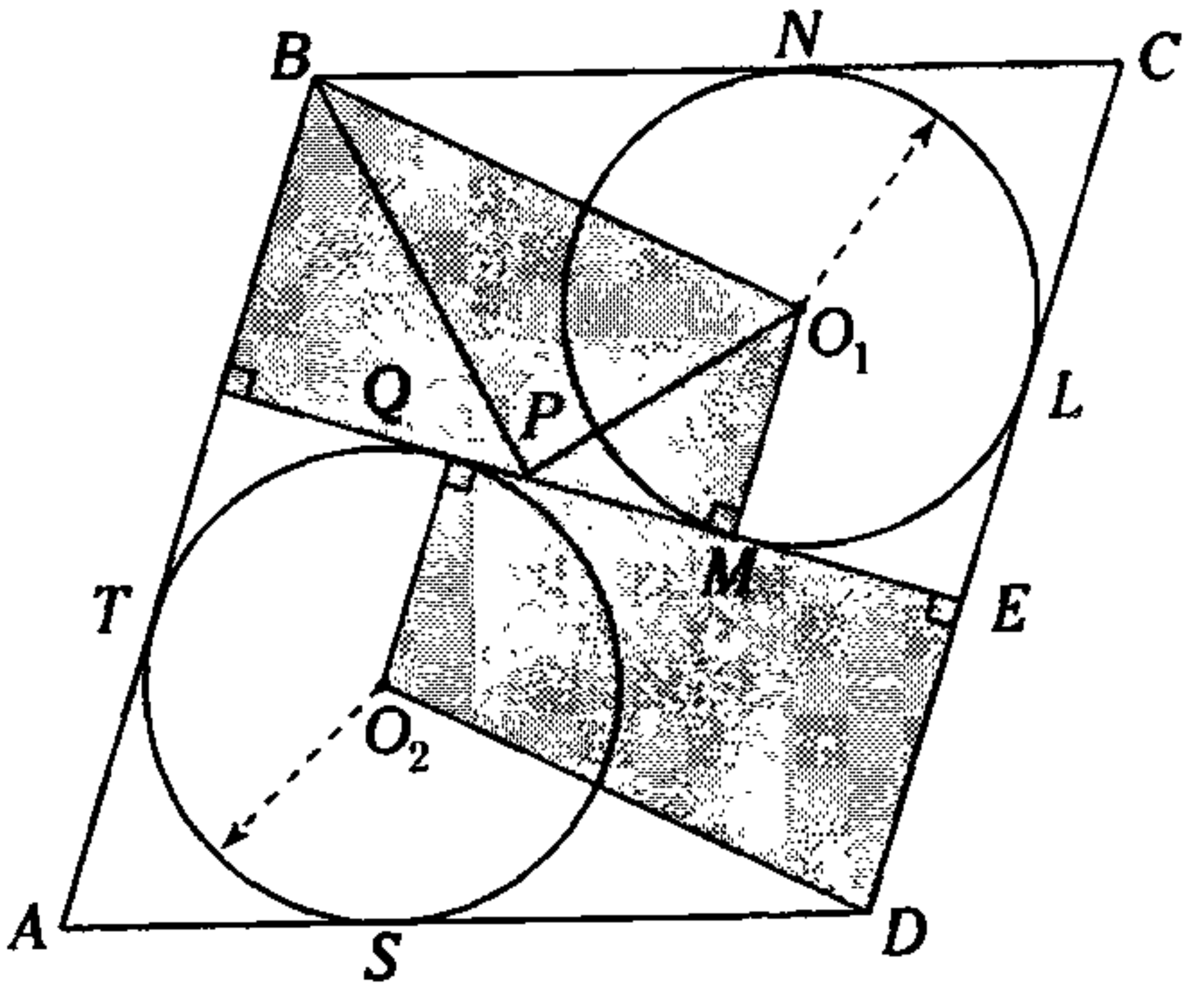
Por propiedad: $\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = 2(\mathbb{A}_{\blacktriangle ABT})$

$\therefore \ \mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = 2(8) = 16$

CLAVE B

Problema 9

En la figura, $ABCD$ es un paralelogramo y las circunferencias son congruentes. Si $EP=2(EL)+PQ$ y el área de la región sombreada es $\mathbb{A}$, calcule el área de la región BPO_1. Además M, N, L, T, S y Q son puntos de tangencia.



A) $\mathbb{A}/2$ B) $\mathbb{A}/3$ C) $\mathbb{A}/4$
D) $\mathbb{A}/5$ E) $\mathbb{A}/6$

Resolución

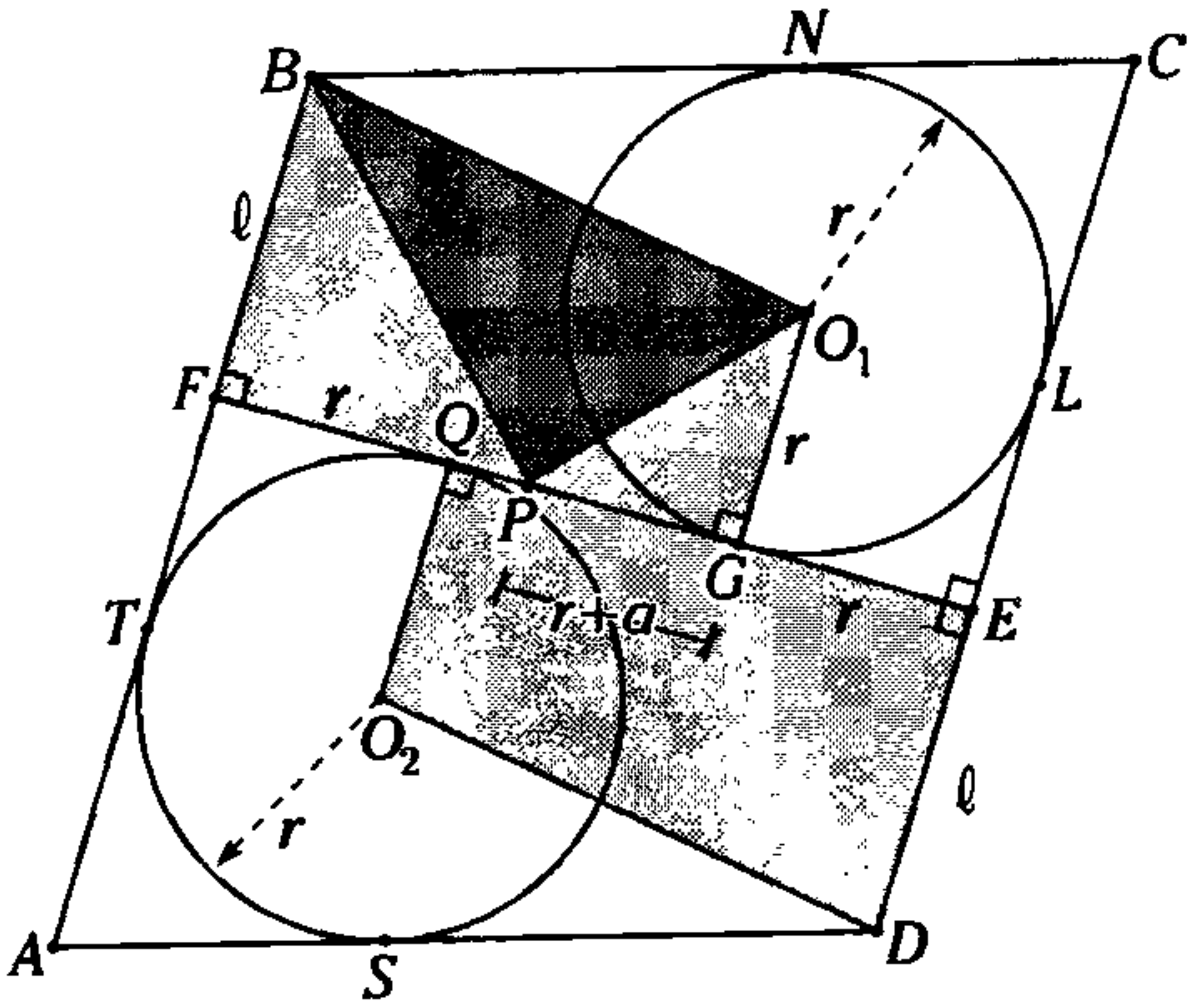


Figura 10.105

Piden $\mathbb{A}_{\triangle BPO_1}$

Del dato: $EP=2(EL)+(PQ)$

Sea $PQ=a$

Se sabe que $EG=EL=TF=FQ=r$

$\rightarrow\ EP=2r+a$ y

$PG=r+a$

Se nota que P es punto medio de $\overline{FG}$, por lo cual podemos aplicar una propiedad.

$$\mathbb{A}_{\triangle PBO_1}=\frac{\mathbb{A}_{\blacksquare FBO_1G}}{2} \qquad \text{(I)}$$

FBO_1G y EDO_2Q: son trapecios congruentes

$\rightarrow\ \mathbb{A}_{\blacksquare FBO_1G}=\mathbb{A}_{\blacksquare EDO_2Q}$

Del dato

$\mathbb{A}_{\blacksquare FBO_1G}+\mathbb{A}_{\blacksquare EDO_2Q}=\mathbb{A}$

$\rightarrow\ \mathbb{A}_{\blacksquare FBO_1G}=\mathbb{A}_{\blacksquare EDO_2Q}=\mathbb{A}/2$

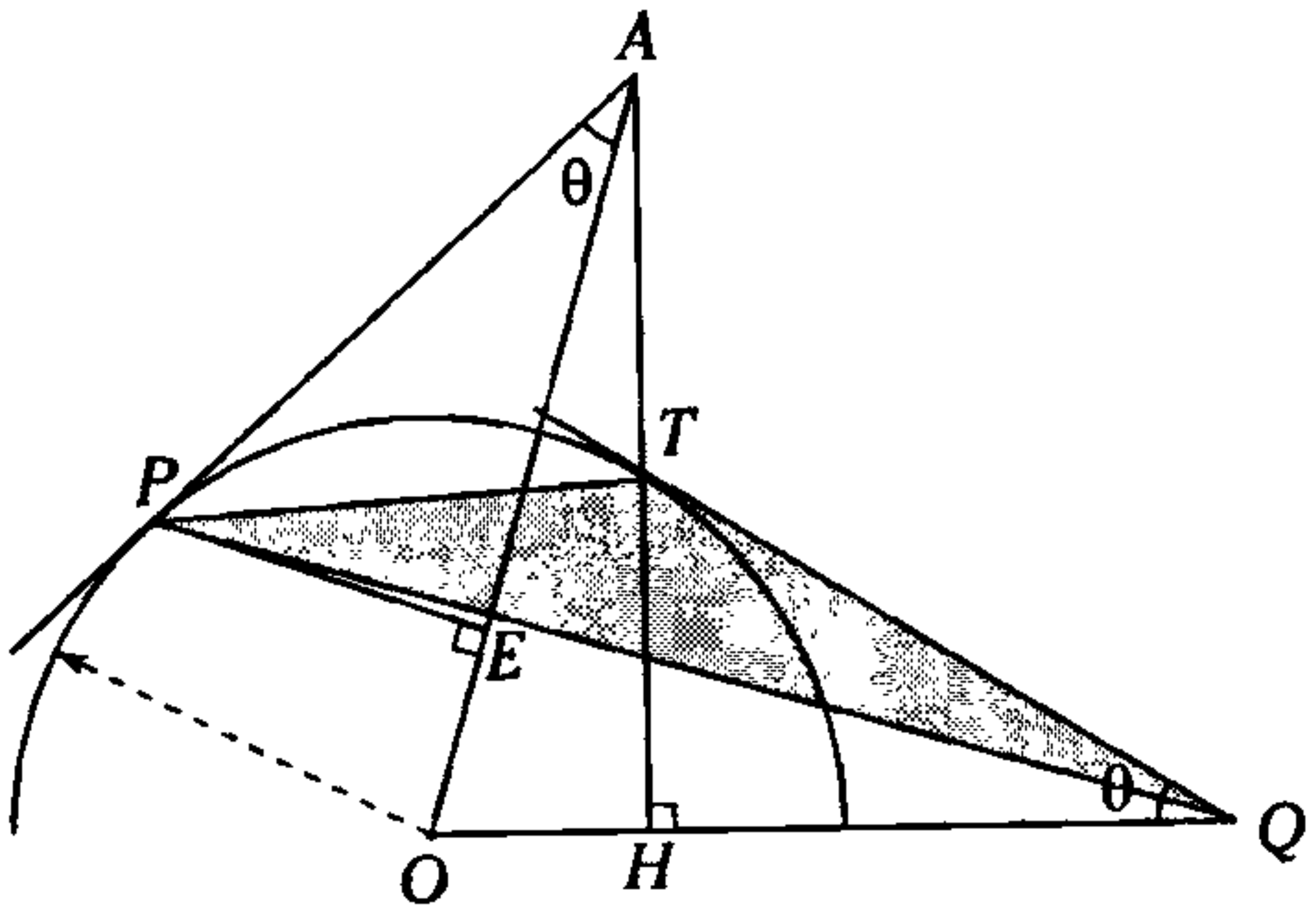
Reemplazando en (I)

$\therefore\ \mathbb{A}_{\triangle PBO_1}=\mathbb{A}/4$

CLAVE C

Problema 10

En la figura, P y T son puntos de tangencia. Si $AP=a$ y $(HQ)(OE)=b^2$, indique el área de la región triangular PTQ.



A) $a\sqrt{a^2-b^2}$ B) $\dfrac{ab}{2}$

C) $b\sqrt{a^2-b^2}$

D) $\dfrac{a\sqrt{a^2-b^2}}{2}$ E) $\dfrac{b\sqrt{a^2-b^2}}{2}$

Resolución

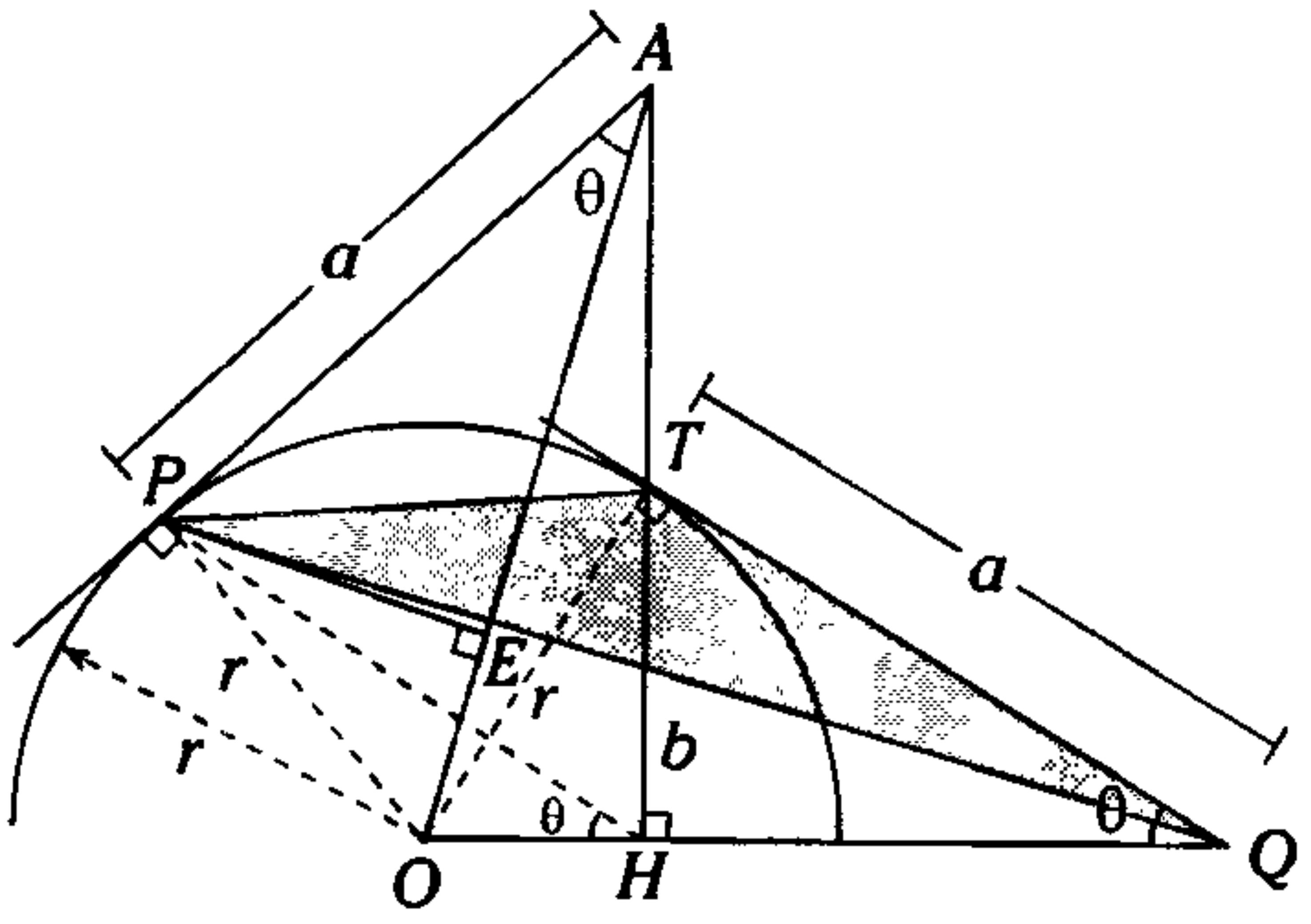


Figura 18.106

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle PTQ}$

Se trazan OP y OT, por propiedad $\overline{OP} \perp \overline{PA}$, $\overline{OT} \perp \overline{TQ}$.

$\triangle APO \cong \triangle QTO$ (A.L.A.)

$\rightarrow AP = TQ = a$

también $OE = OH$ y $EA = HQ$

$\triangle OTQ$: por relaciones métricas

$(TH)^2 = (OH).(HQ)$ o

$(TH)^2 = (OE)(HQ) = b^2 \rightarrow TH = b$

Se observa que el $\square PAHO$: es inscriptible

$\rightarrow m\sphericalangle PHO = m\sphericalangle PAO = \theta$

Se observa que $\overline{HP} \parallel \overline{QT}$

Como $TQHP$ es un trapecio

$\rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle PTQ} = \mathbb{A}_{\blacktriangle THQ}$

$$\therefore \mathbb{A}_{\blacktriangle PTQ} = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{2}$$

CLAVE E

Problema 11

En un cuadrado $ABCD$ inscrito en una circunferencia, se ubica el punto P en el arco $\overset{\frown}{AB}$, tal que $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$ intersecan a $\overline{BA}$ en L y N. Si $BL = 3$ u, $LN = 1$ u. Calcule el área de la región del cuadrilátero $LNDO$ (O: centro del dicho cuadrado).

A) 5 u^2 B) 5,5 u^2 C) 6,5 u^2
D) 7,5 u^2 E) 9 u^2

Resolución

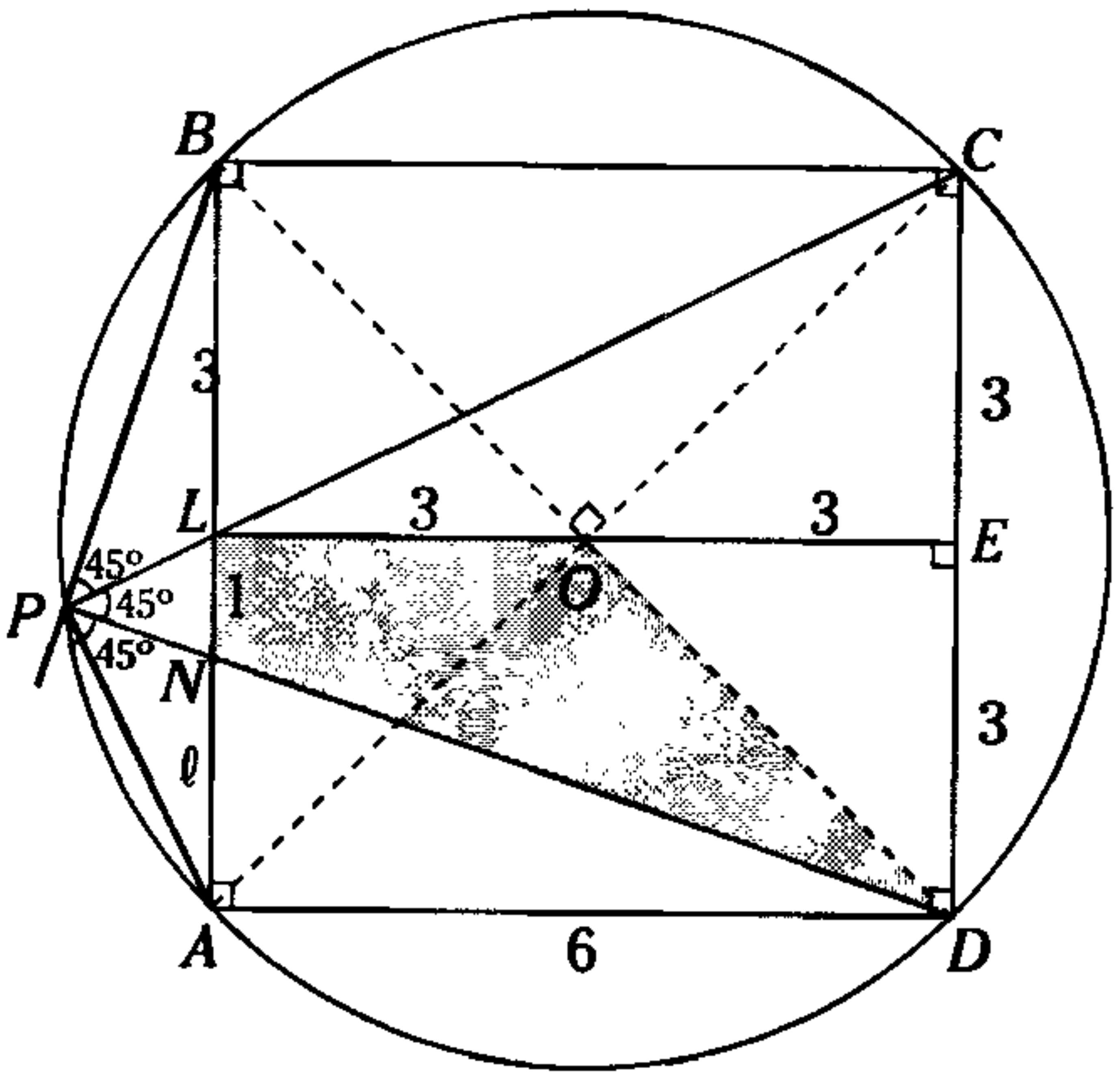


Figura 18.107

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle LNDO}$

Se prolonga $\overline{LO}$ hasta E ($E \in \overline{CD}$)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle LNDO} = \mathbb{A}_{\blacktriangle LNDE} - \mathbb{A}_{\blacktriangle OED} \qquad \text{(I)}$$

como $ABCD$ es un cuadrado

$m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{CD} = m\overset{\frown}{DA} = 90°$

$\rightarrow m\sphericalangle BPC = m\sphericalangle CPD = m\sphericalangle DPA = 45°$

$\triangle BPN$: teorema (B, L, N y A son puntos armónicos)

$$\frac{3}{1} = \frac{4+\ell}{\ell} \rightarrow \ell = 2$$

podemos notar q ue L es punto medio de $\overline{BA}$.

$\rightarrow \overline{LO} \perp \overline{BA}$

Reemplazando en (I)

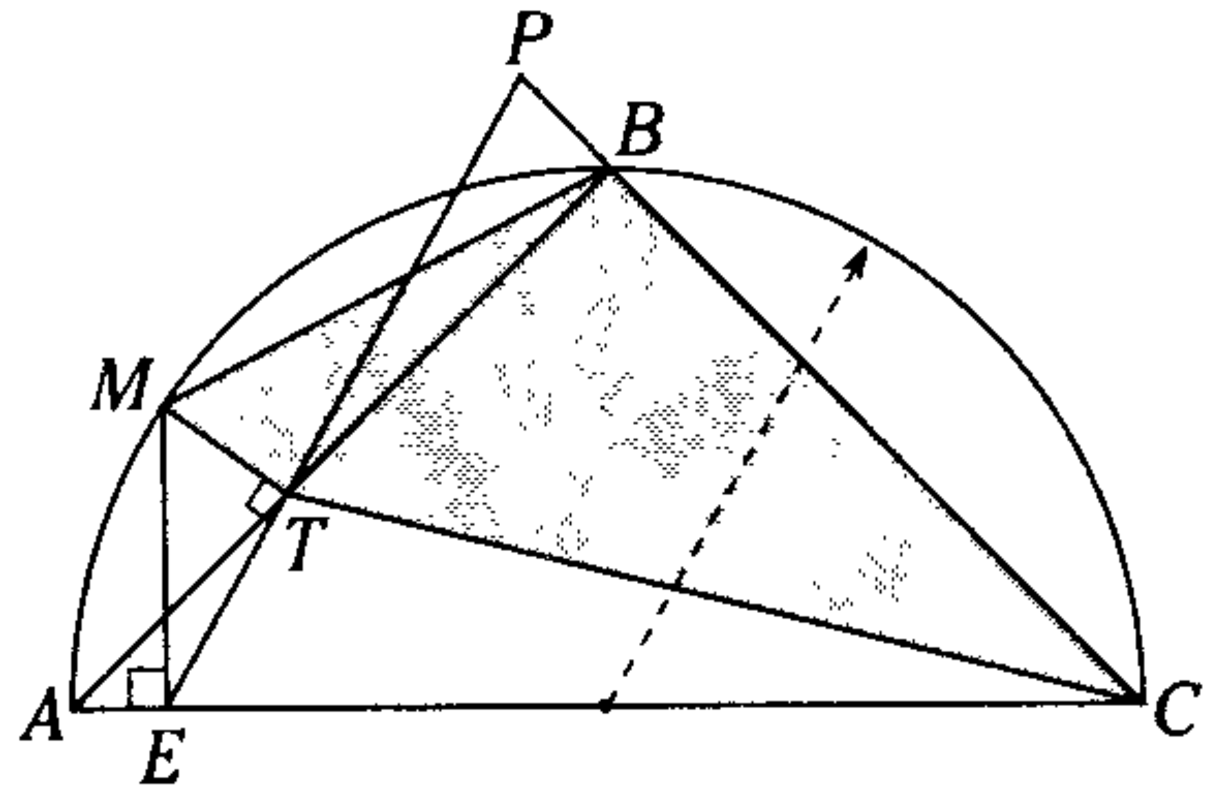
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle LNDO} = \left(\frac{3+1}{2}\right).6 - \frac{(3)(3)}{2}$$

$$\therefore \mathbb{A}_{\blacktriangle LNDO} = 7{,}5 \text{ u}^2$$

CLAVE D

Problema 12

En la figura, $BC=4(PB)=8$ y $m\widehat{AM}=m\widehat{MB}$. Calcule el área de la región sombreada.



A) $6\sqrt{5}$ B) $10\sqrt{10}$ C) $5\sqrt{5}$
D) $10\sqrt{5}$ E) $8\sqrt{5}$

Resolución

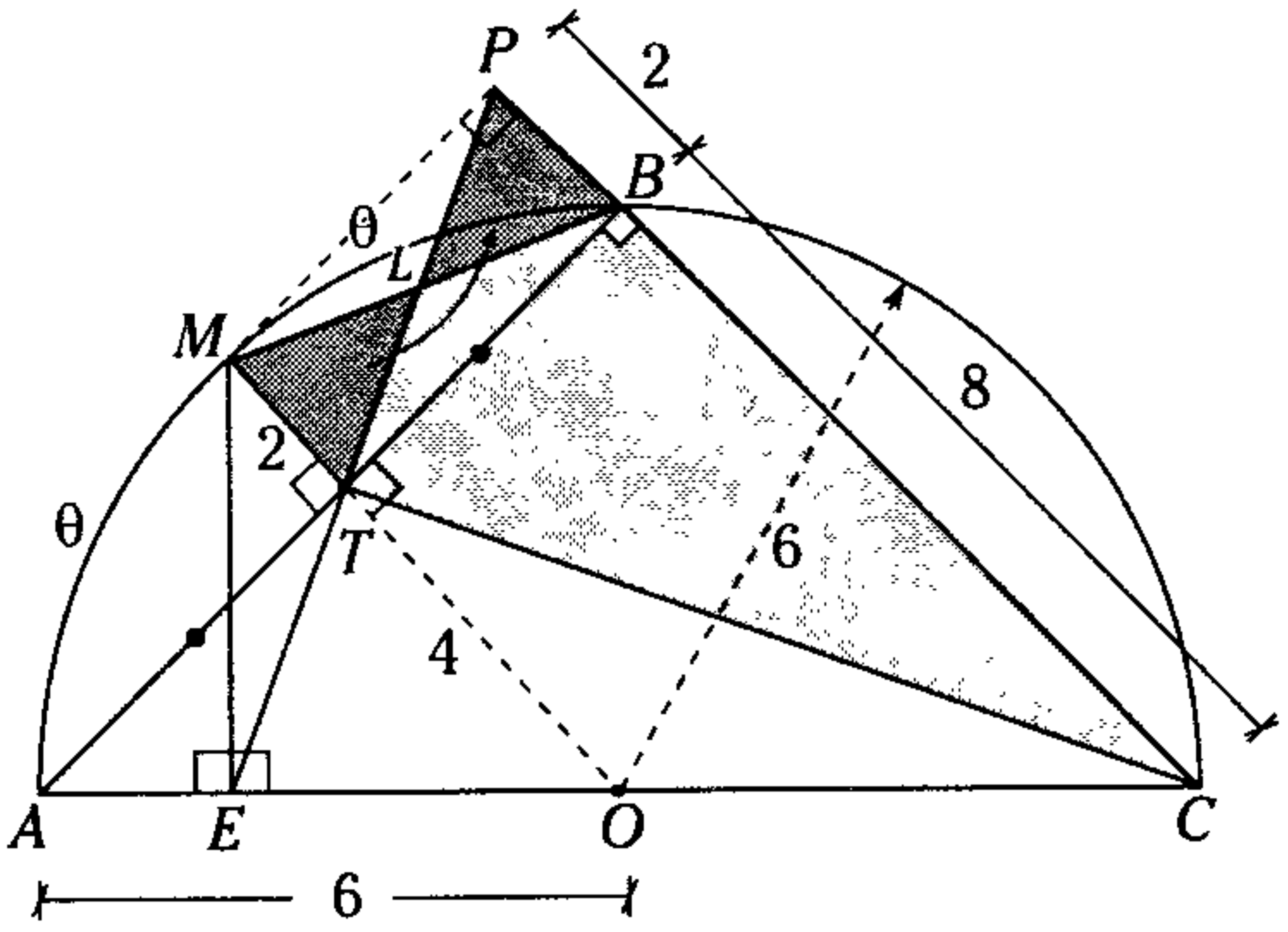


Figura 18.108

Piden $\mathbb{A}_{\blacksquare MBCT}$

De la figura como $\overline{MT} \,//\, \overline{PB}$

$\rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle PLB} = \mathbb{A}_{\blacktriangle MLT}$

Se observa $\mathbb{A}_{\blacksquare MBCT} = \mathbb{A}_{\blacktriangle PTC}$

Por propiedad se sabe que M, T y O son colineales, porque $\overline{MT}$ es flecha.

Para el $\triangle ABC$: la recta PTE es la recta de Simson

$\rightarrow \overline{MP} \perp \overleftrightarrow{BC}$

Como el $\square MPBT$: rectángulo $\rightarrow MT=2$

$\triangle ABC$: por base media $TO=4$

$\triangle ATO$: por teorema de Pitágoras $AT^2=6^2-4^2$

$\rightarrow AT=2\sqrt{5}$

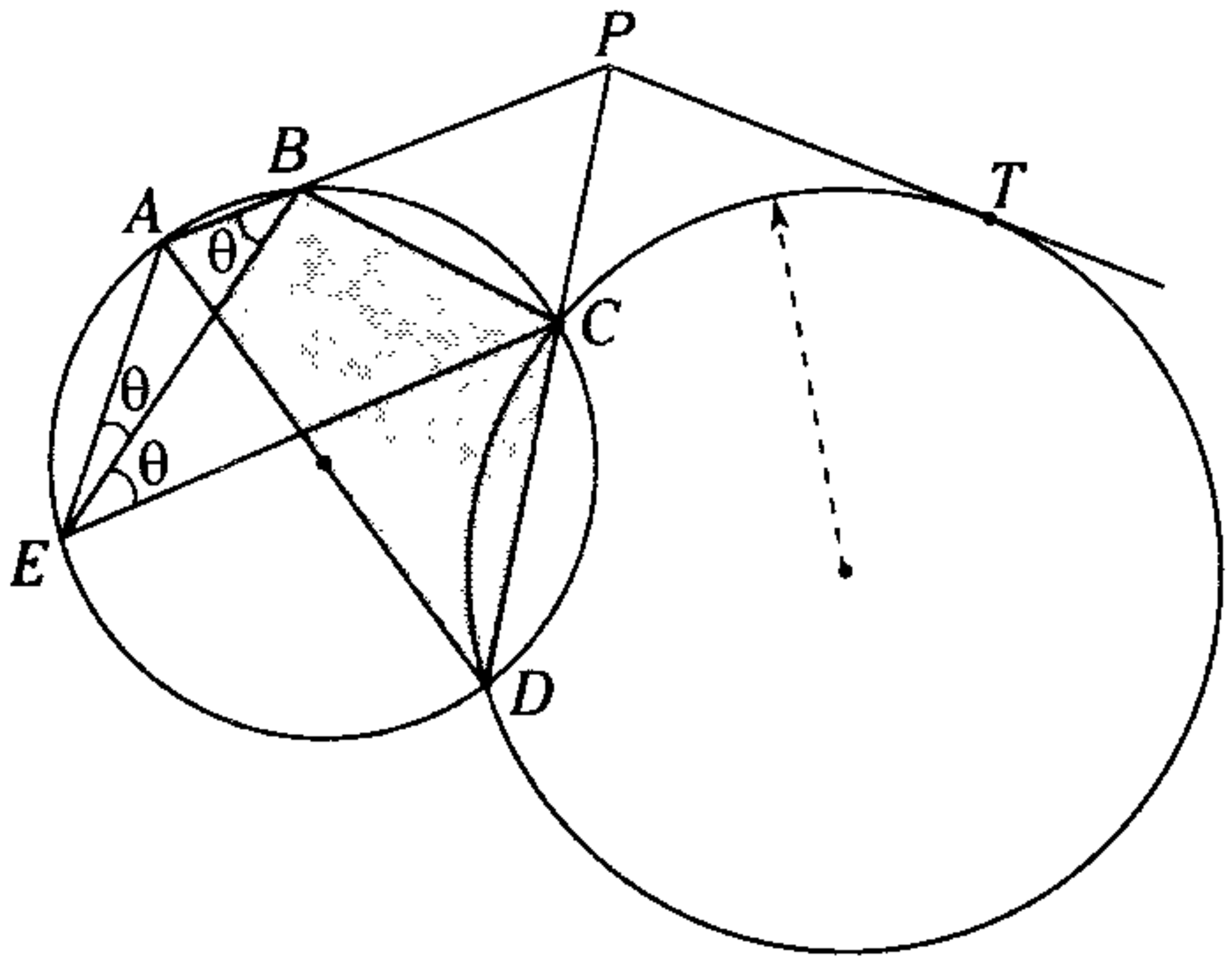
$\mathbb{A}_{\blacktriangle PTC} = \dfrac{(8+2)}{2}\times 2\sqrt{5}$

$\therefore \mathbb{A}_{\blacksquare MBCT} = 10\sqrt{5}$

CLAVE D

Problema 13

Según la figura, T es punto de tangencia. Si $PC=8$ u; $AE=7$ u; $PT=12$ u y $AD=14$ u, calcule el área de la región sombreada.



A) $24\sqrt{5}$ u^2 B) $28\sqrt{5}$ u^2 C) $30\sqrt{5}$ u^2
D) $32\sqrt{5}$ u^2 E) $36\sqrt{5}$ u^2

Resolución

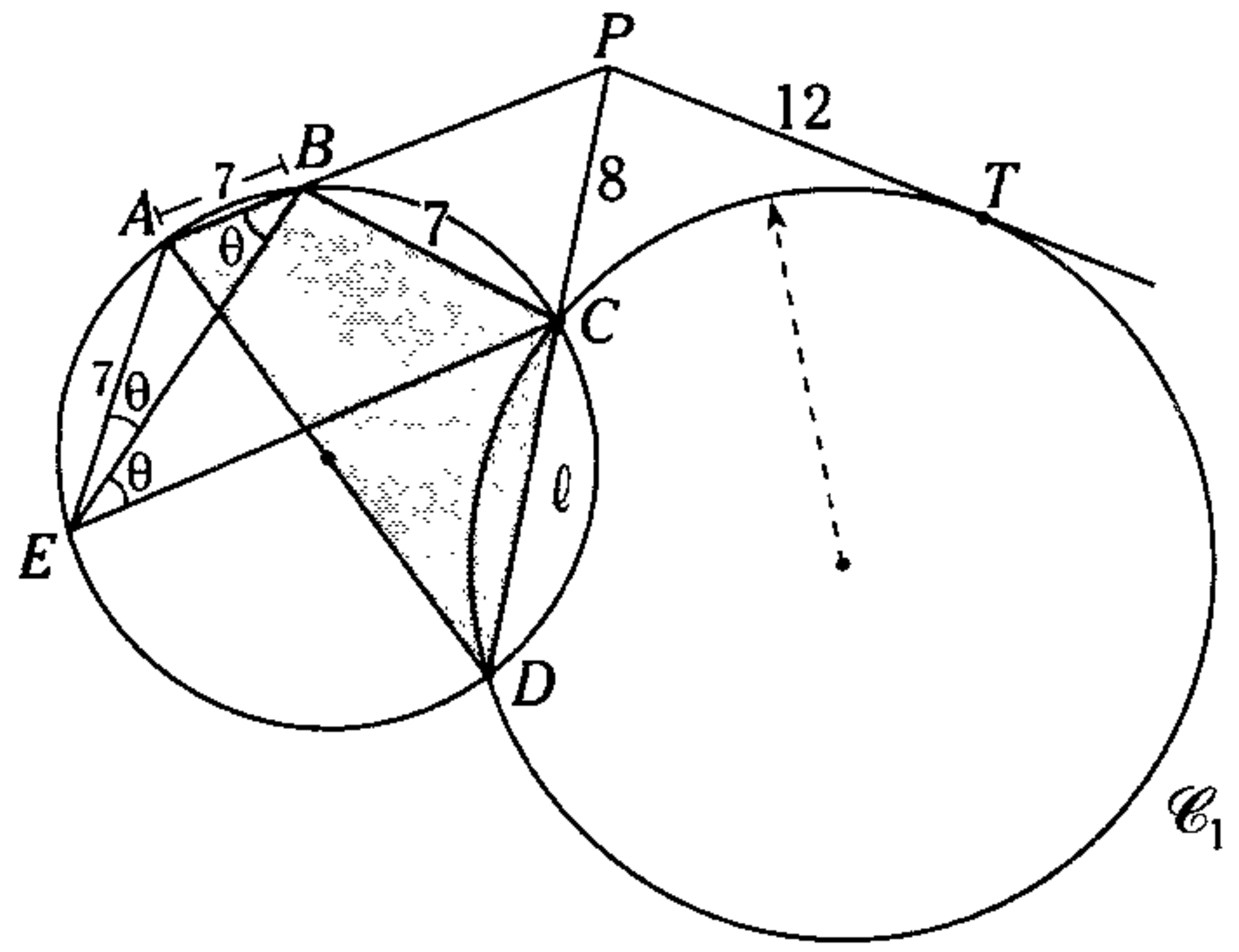


Figura 18.109

Piden $\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}$

Se observa de la figura que $AB = AE = 7$

Como $m\widehat{BC} = m\widehat{AB}$

$\rightarrow\ BC = AB = 7$

Por teorema de la tangente en $\mathscr{C}_1$

$12^2 = (\ell + 8)8 \ \rightarrow\ \ell = 10$

Ahora utilizamos la fórmula de Brahmagupta

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Primero, calcule la longitud del semiperímetro de la región cuadrilátera $ABCD$

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \frac{7+7+10+14}{2} = 19$$

Reemplazando

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \sqrt{(19-7)(19-7)(19-10)(19-14)}$$

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \sqrt{12\times 12\times 9\times 5}$$

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = 36\sqrt{5}\ \text{u}^2$$

CLAVE E

Problema 14

En un cuadrilátero convexo $ABCD$, se cumple que $m\measuredangle ABC = m\measuredangle ADC = 90°$ y $m\measuredangle BCD = 45°$. Si las distancias trazadas desde los vértices A y C a la diagonal BAD miden a y b, respectivamente, Indique el área de la región cuadrangular $ABCD$.

A) $\dfrac{b^2-a^2}{4}$ B) $\dfrac{b^2+a^2}{2}$ C) $\dfrac{b^2-a^2}{8}$

D) $\dfrac{b^2+a^2}{4}$ E) $\dfrac{b^2-a^2}{2}$

Resolución

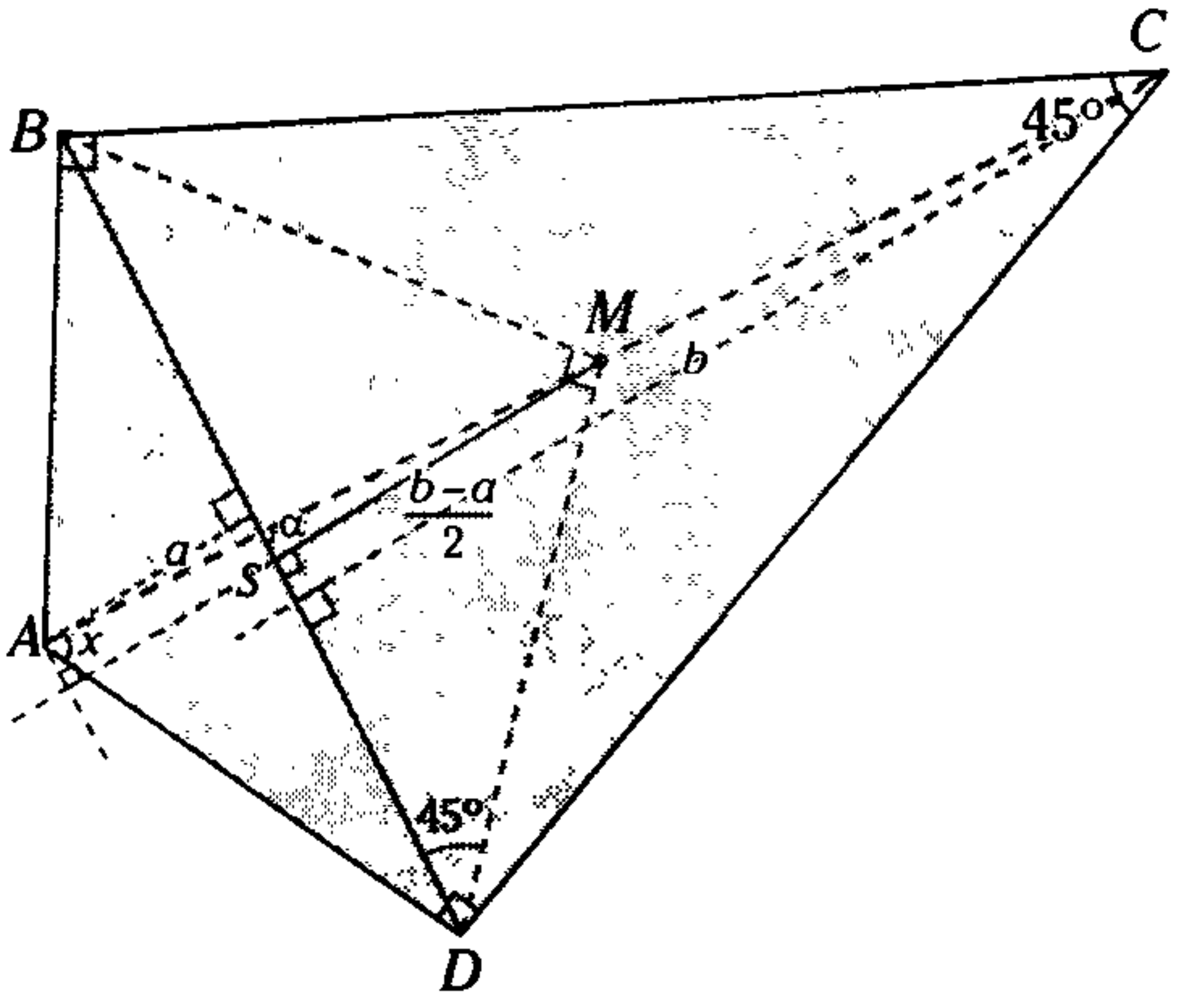


Figura 18.110

Piden $\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}$

se trazan las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, luego se ubica el punto medio M de $\overline{AC}$.

$\rightarrow\ AM = MC = BM = MD$

En el $\triangle$ BMD se traza $\overline{MS} \perp \overline{BD}$

Por propiedad

$$MS = \frac{b-a}{2}$$

Como $m\measuredangle BMD = 90°$

$$\rightarrow\ BD = 2\left(\frac{b-a}{2}\right) = b-a \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \mathbb{A}_{\blacktriangle ABD} + \mathbb{A}_{\blacktriangle BCD}$$

$$\rightarrow\ \mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \frac{(BD).a}{2} + \frac{(BD).b}{2} = BD\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

de (I)

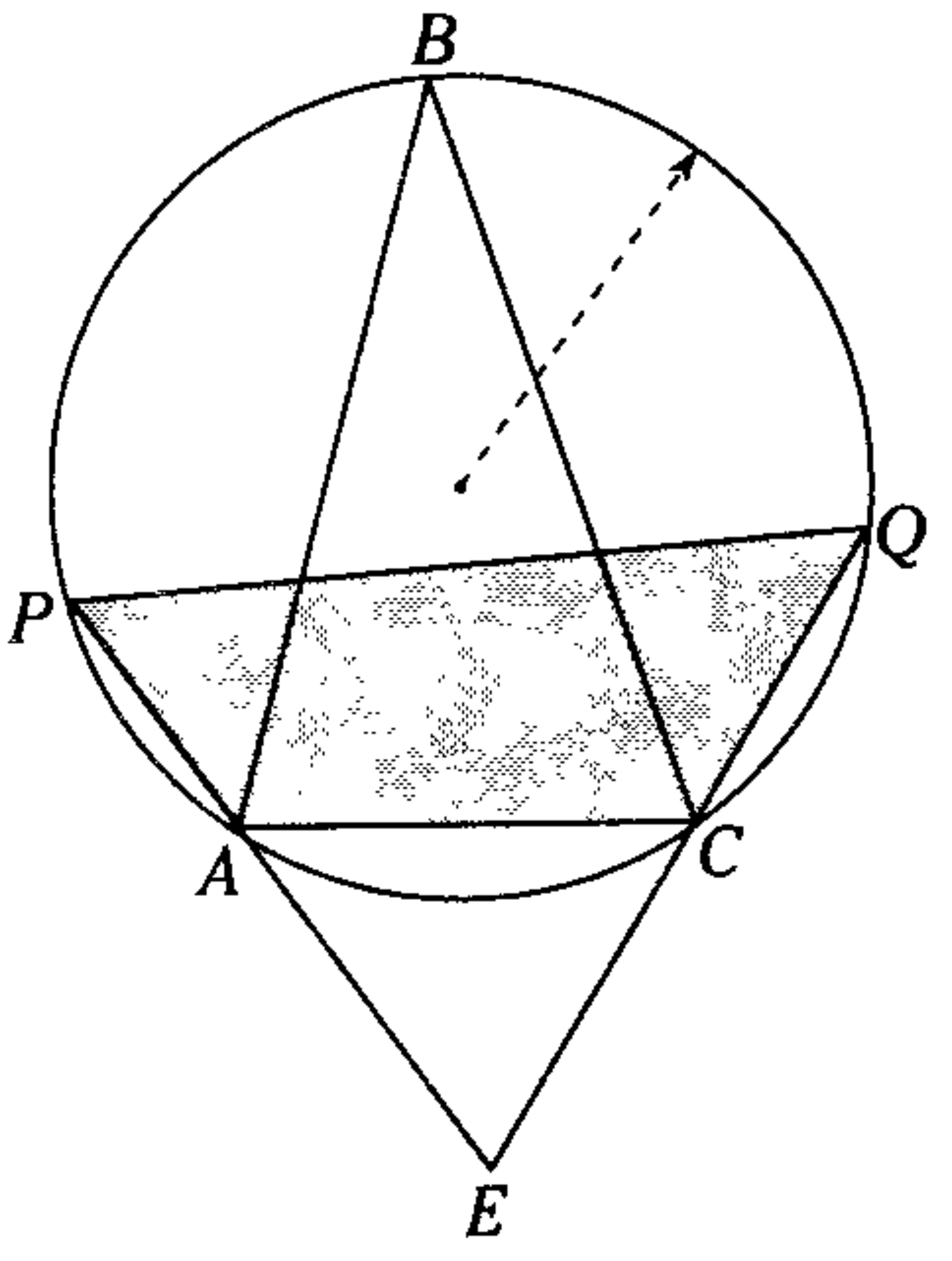
$$\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = (b-a)\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

CLAVE E

Problema 15

En la figura, E es el excentro del triángulo ABC y $m\sphericalangle ABC = 2\beta$. Indique la razón de las áreas de las regiones $APQC$ y PEQ.



A) $\cos 2\beta/\cos\beta$

B) $\text{sen}3\beta/\cos\beta$

C) $\cos 3\beta/\cos\beta$

D) $\text{sen}3\beta/\text{sen}\beta$

E) $\tan\beta$

Resolución

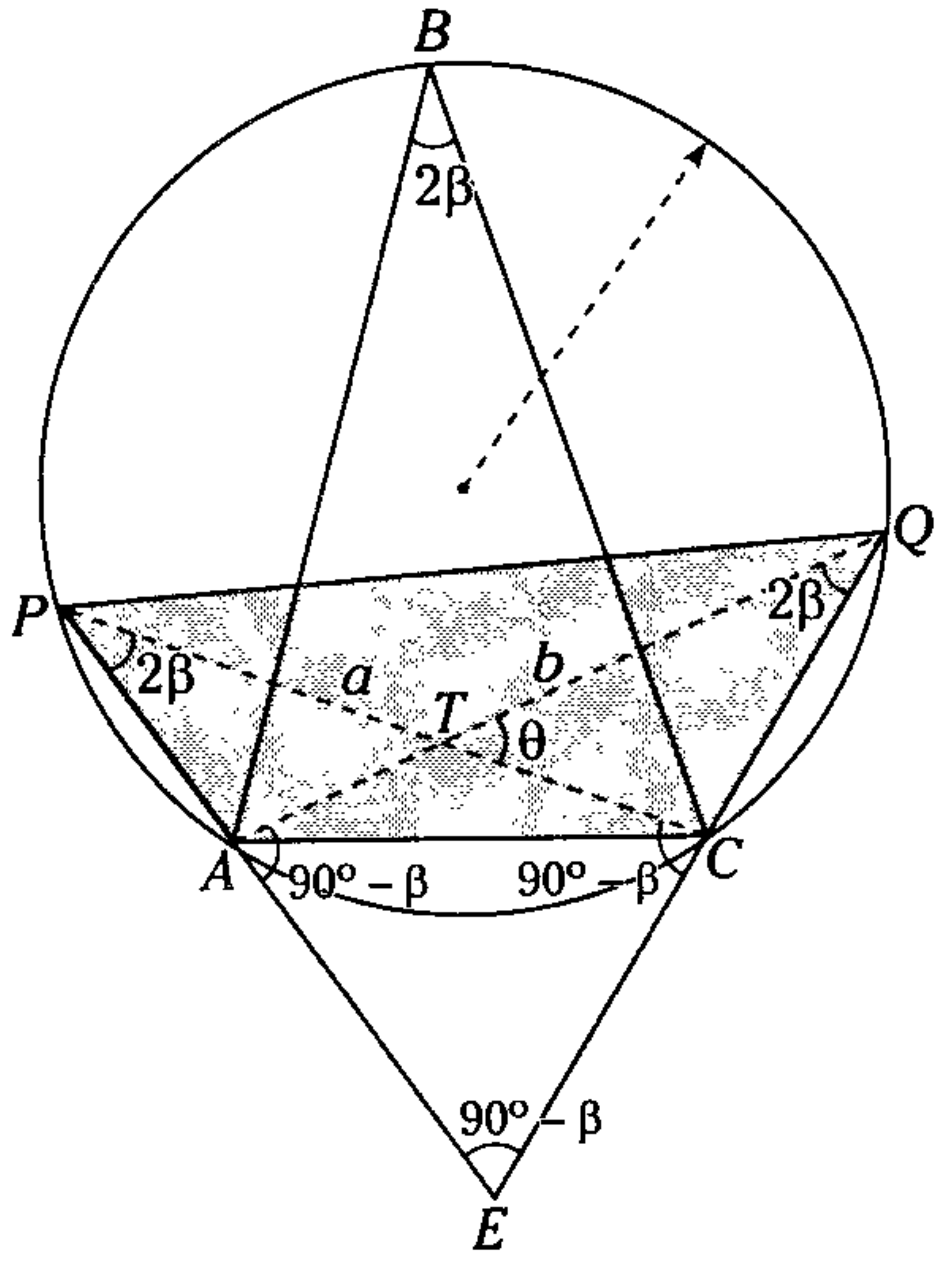


Figura 18.111

Piden $\dfrac{\mathbb{A}_{APQC}}{\mathbb{A}_{PEQ}}$

como E: excentro ABC

$$\rightarrow\ m\sphericalangle AEC = 90^\circ - \frac{2\beta}{2}$$

$$m\sphericalangle AEC = 90^\circ - \beta$$

En la figura se observa que los $\triangle CPE$ y $\triangle AQE$, son isósceles.

$$PC = PE = a \text{ y } QA = QE = b$$

En $\triangle ATCE$

$$180^\circ - \theta + 90^\circ - \beta + 90^\circ - \beta + 90^\circ - \beta = 360^\circ$$

$$\theta = 90^\circ - 3\beta$$

Entonces

$$\frac{\mathbb{A}_{APQC}}{\mathbb{A}_{PEQ}} = \frac{\dfrac{a.b}{2}\text{sen}\,\theta}{\dfrac{a.b}{2}\text{sen}(90^\circ-\beta)} = \frac{\text{sen}(90^\circ-3\beta)}{\text{sen}(90^\circ-\beta)}$$

$$\therefore\ \frac{\mathbb{A}_{APQC}}{\mathbb{A}_{PEQ}} = \frac{\cos 3\beta}{\cos\beta}$$

CLAVE C

Problema 16

Se tiene un triángulo ABC, en el cual se traza exteriormente los triángulos ABD y BCD, tal que $AE = 5$ u. Calcule el área de la región cuadrangular, cuyos vértices son los puntos medios de los lados DB, BE, BC y BD.

A) $\frac{21}{8}\sqrt{3}\ \text{u}^2$

B) $\frac{23}{8}\sqrt{3}\ \text{u}^2$

C) $\frac{27}{8}\sqrt{3}\ \text{u}^2$

D) $\frac{19}{8}\sqrt{3}\ \text{u}^2$

E) $\frac{25}{16}\sqrt{3}\ \text{u}^2$

Resolución

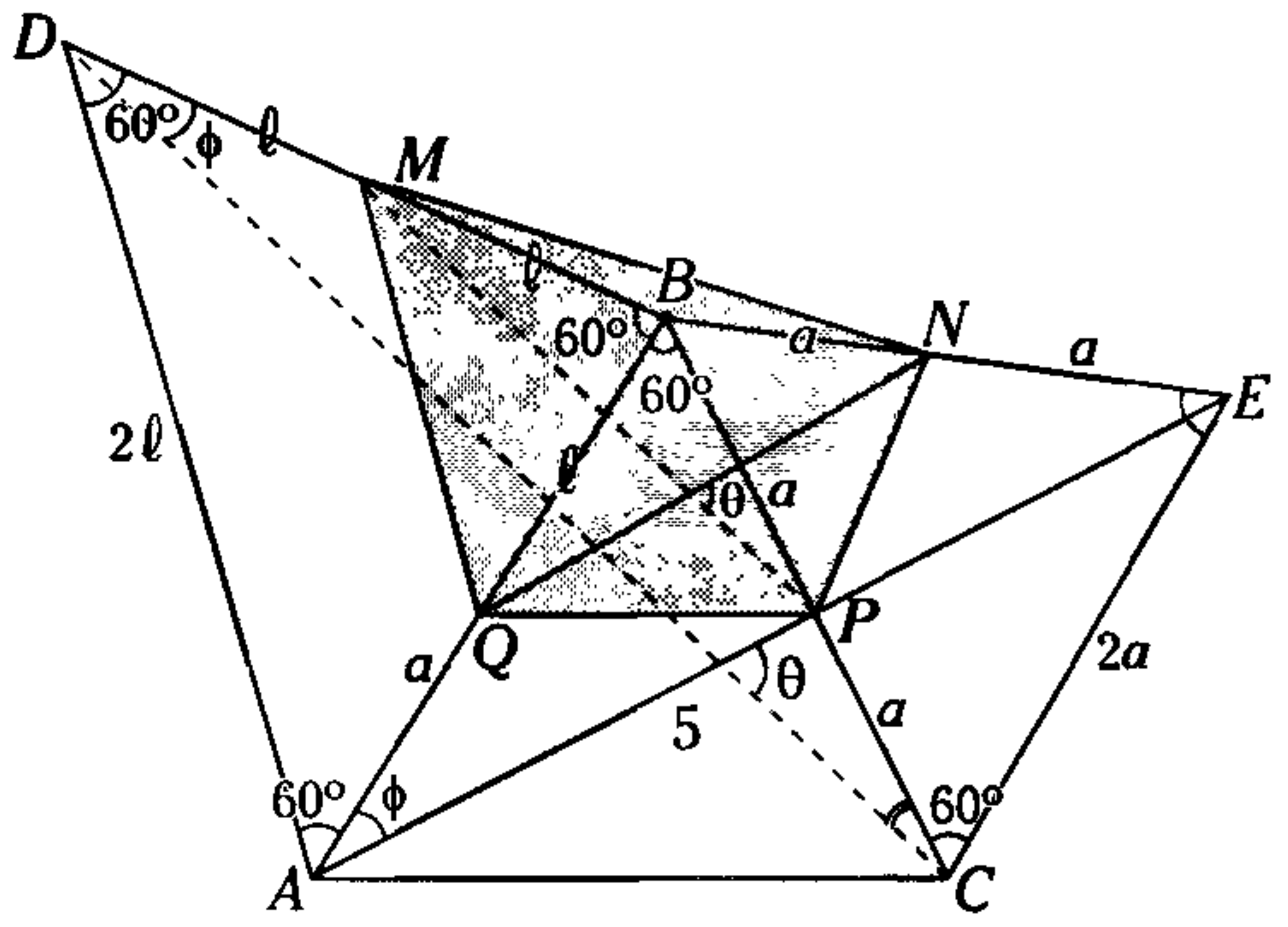


Figura 18.112

Piden $\mathbb{A}_{\blacksquare MNPQ}$

$$\mathbb{A}_{\blacksquare MNPQ}=\frac{(MP)(QN)\operatorname{sen}\theta}{2} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle ABE$: por base media $NQ=\dfrac{5}{2}$

$\triangle DBC\cong\triangle ABE$ (L.A.L)

$\rightarrow$ $DC=AE=5$ y $m\measuredangle BDC=m\measuredangle BAE=\phi$

$\triangle DBC$: por base media

$$MP=\frac{5}{2}$$

Por paralelas $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ determinan un ángulo que mide θ.

Por propiedad $\measuredangle DBAF$

$$\phi+60°=\phi+\theta \rightarrow \theta=60°$$

Reemplazando en (I)

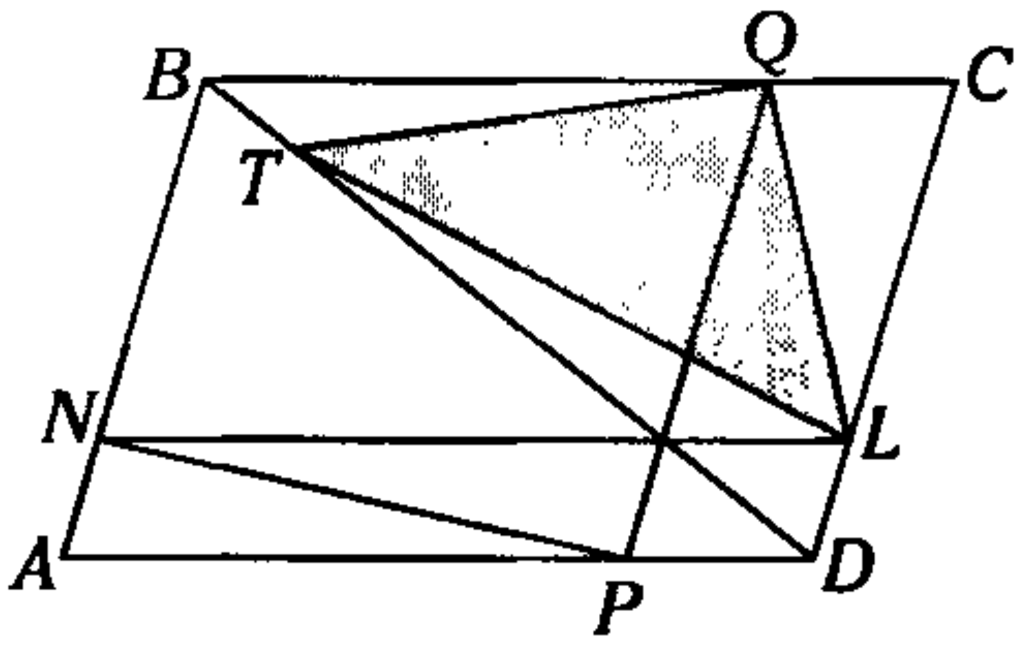
$$\mathbb{A}_{\blacksquare MNPQ}=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}{2}\operatorname{sen}60°$$

$$\mathbb{A}_{\blacksquare MNPQ}=\frac{25\sqrt{3}}{16}\,u^2$$

CLAVE E

Problema 17

En la figura, $ABCD$ es un romboide. Si $\overline{NL}\,//\,\overline{AD}$, $\overline{PQ}//\overline{CD}$; $2(NP)=3(QL)=6$ y el área de la región TQL es $6\ u^2$; determine la distancia de T a NP.



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

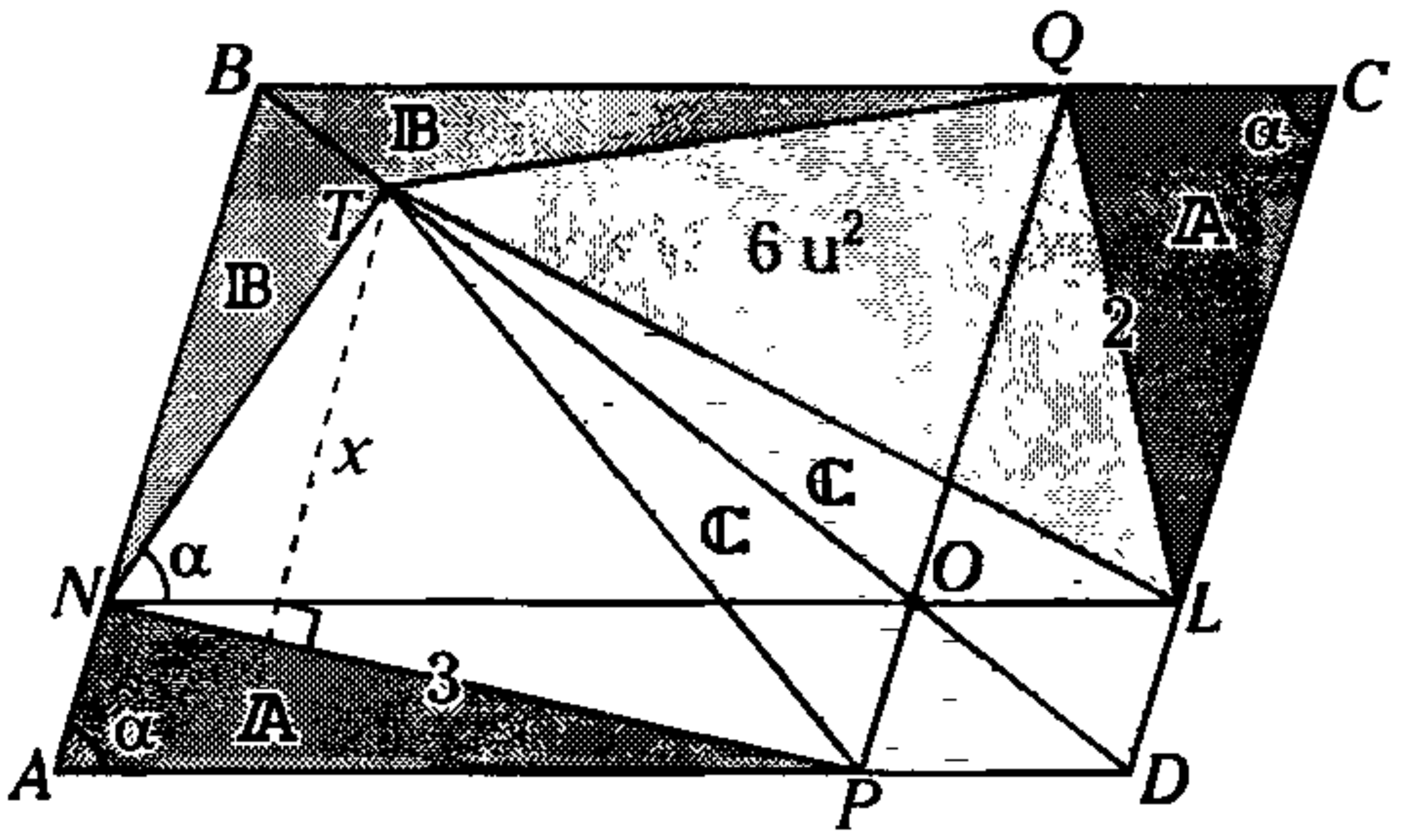


Figura 18.113

Piden x

Del dato $NP=3$ y $QL=2$

Por propiedad: $\mathbb{A}_{\blacksquare PONA}=\mathbb{A}_{\blacksquare QCLO}$

$\rightarrow$ $\mathbb{A}_{\blacktriangle ANP}=\mathbb{A}_{\blacktriangle QCL}=\mathbb{A}$

Nota

Si $ABCD$: romboide

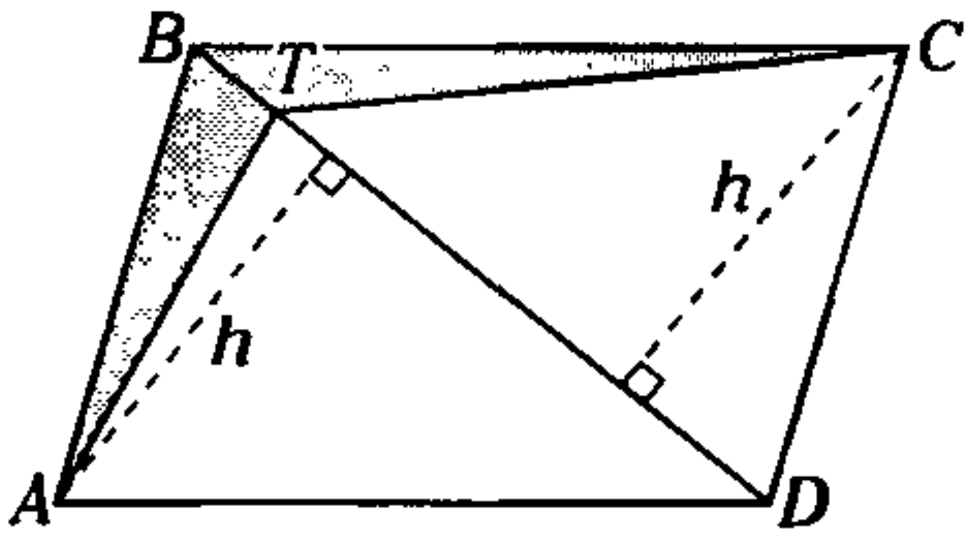


Figura 18.114

$\mathbb{A}_{\blacktriangle ATD}=\mathbb{A}_{\blacktriangle CTD}$ y $\mathbb{A}_{\blacktriangle BTA}=\mathbb{A}_{\blacktriangle BCT}$

En nuestro problema, aplicando la propiedad anterior

$\mathbb{A}_{\blacktriangle NBT}=\mathbb{A}_{\blacktriangle QDT}=\mathbb{B}$

$\mathbb{A}_{\blacktriangle PTD}=\mathbb{A}_{\blacktriangle LTD}=\mathbb{C}$

Del romboide $ABCD$

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} + \mathbb{A}_{\blacktriangle NTP} + \mathbb{C} = \mathbb{A} + \mathbb{B} + 6 + \mathbb{C}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle NTP} = 6$$

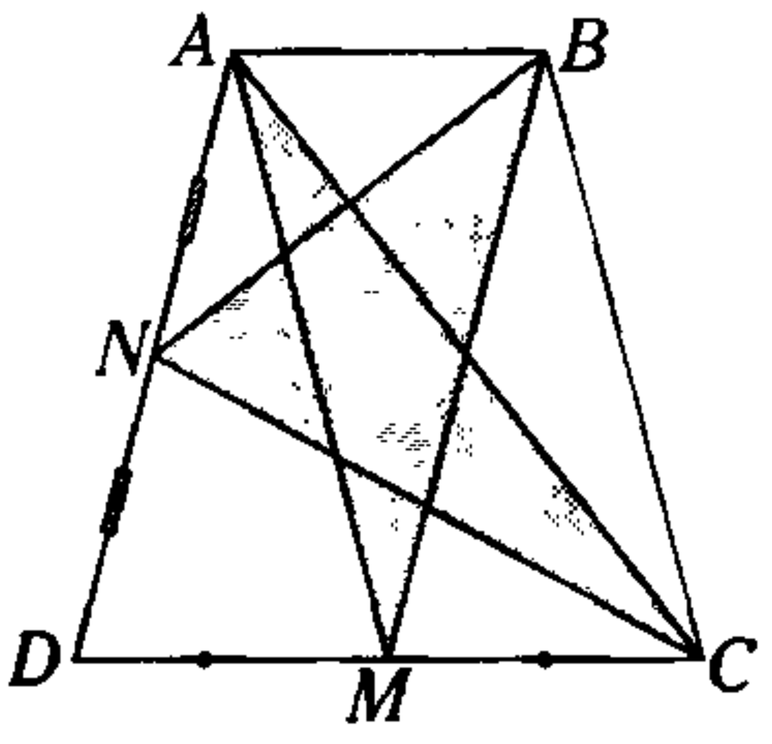
$$\frac{3(x)}{2} = 6$$

$$\therefore\ x = 4$$

CLAVE C

Problema 18

En la figura, $\overline{AB}//\overline{CD}$; $CD=2(AB)$ y el área de la región ABC es $\mathbb{A}$. Señale el área de la región sombreada.



A) $5\mathbb{A}/4$ B) $8\mathbb{A}/7$ C) $9\mathbb{A}/8$
D) $7\mathbb{A}/6$ E) $6\mathbb{A}/5$

Resolución

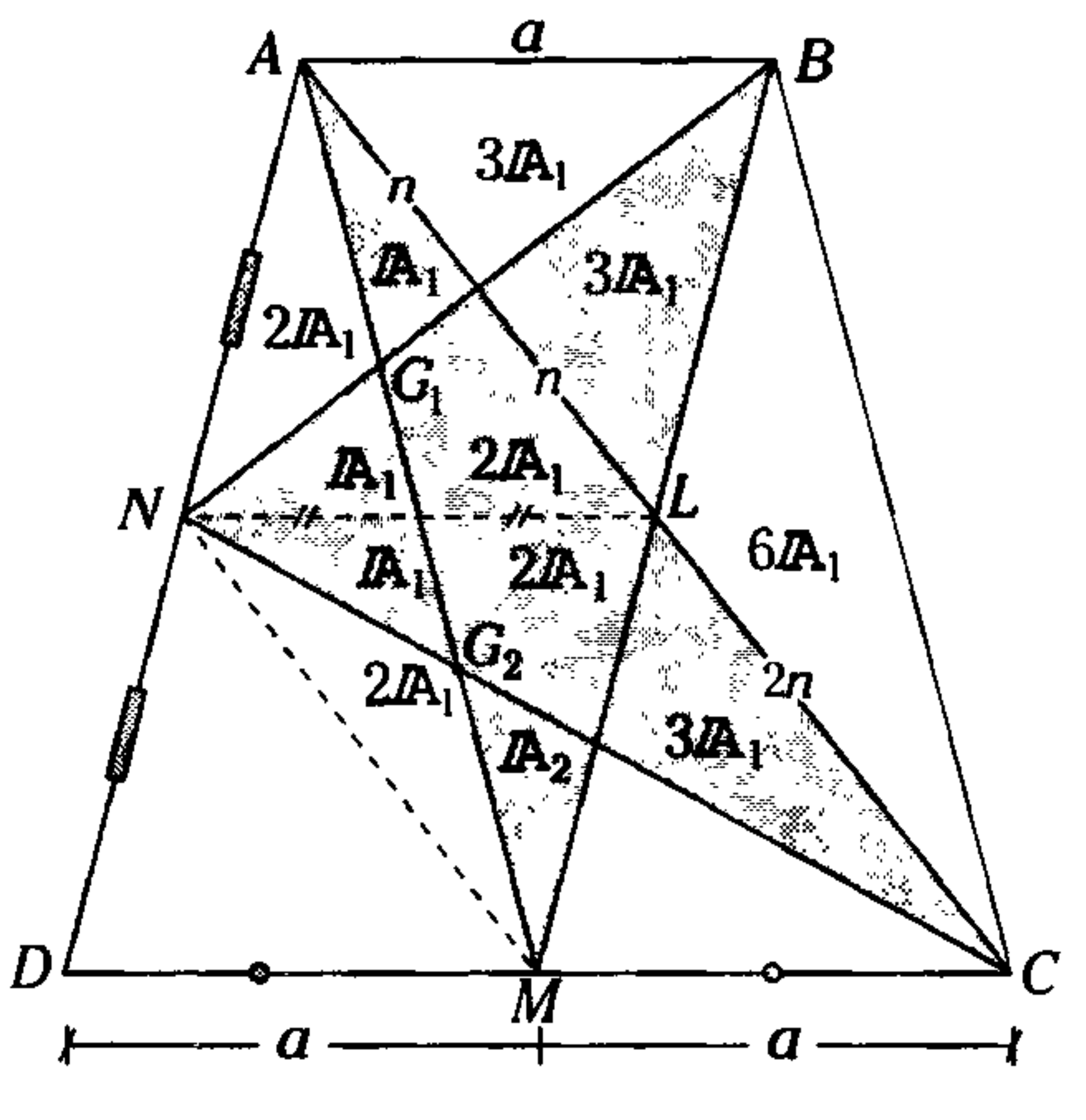


Figura 18.115

Piden $\mathbb{A}_{\text{reg.sombr.}} = \mathbb{A}_x$

Dato $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} = \mathbb{A}$

En la figura se observa que $ABCM$ es un romboide

$$\rightarrow\ BL = LM, AL = LC$$

También $ABMD$ es un romboide

$$\rightarrow\ NL = AB$$

Luego, se tiene que $\overline{AM}$ biseca a $\overline{NL}$.

Ahora, G_1 y G_2 son baricentros de los triángulos ANL y MLN.

Del dato y la figura

$$\mathbb{A} = 12\mathbb{A}_1 \ \rightarrow\ \mathbb{A}_1 = \frac{\mathbb{A}}{12}$$

Sumando las áreas de las regiones parciales de lo que piden

$$\mathbb{A}_x = \mathbb{A}_1 + 6\mathbb{A}_1 + 6\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_1$$

$$\mathbb{A}_x = 14\mathbb{A}_1$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_x = \frac{7}{6}\mathbb{A}$$

CLAVE D

Problema 19

En un romboide $ABCD$, se ubican los puntos M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, tal que $\overline{MD}\cap\overline{NC}=\{T\}$, $AM=2(MB)$ y $AN=3(ND)$. Luego, se ubica E en $\overline{NC}$, así $NC = 3(EC)$ y el área de la región romboidal es $\mathbb{A}$. Calcule la suma de las áreas de las regiones AMN y ETD.

A) $\frac{35}{168}\mathbb{A}$ B) $\frac{55}{168}\mathbb{A}$ C) $\frac{25}{84}\mathbb{A}$

D) $\frac{53}{84}\mathbb{A}$ E) $\frac{53}{168}\mathbb{A}$

Resolución

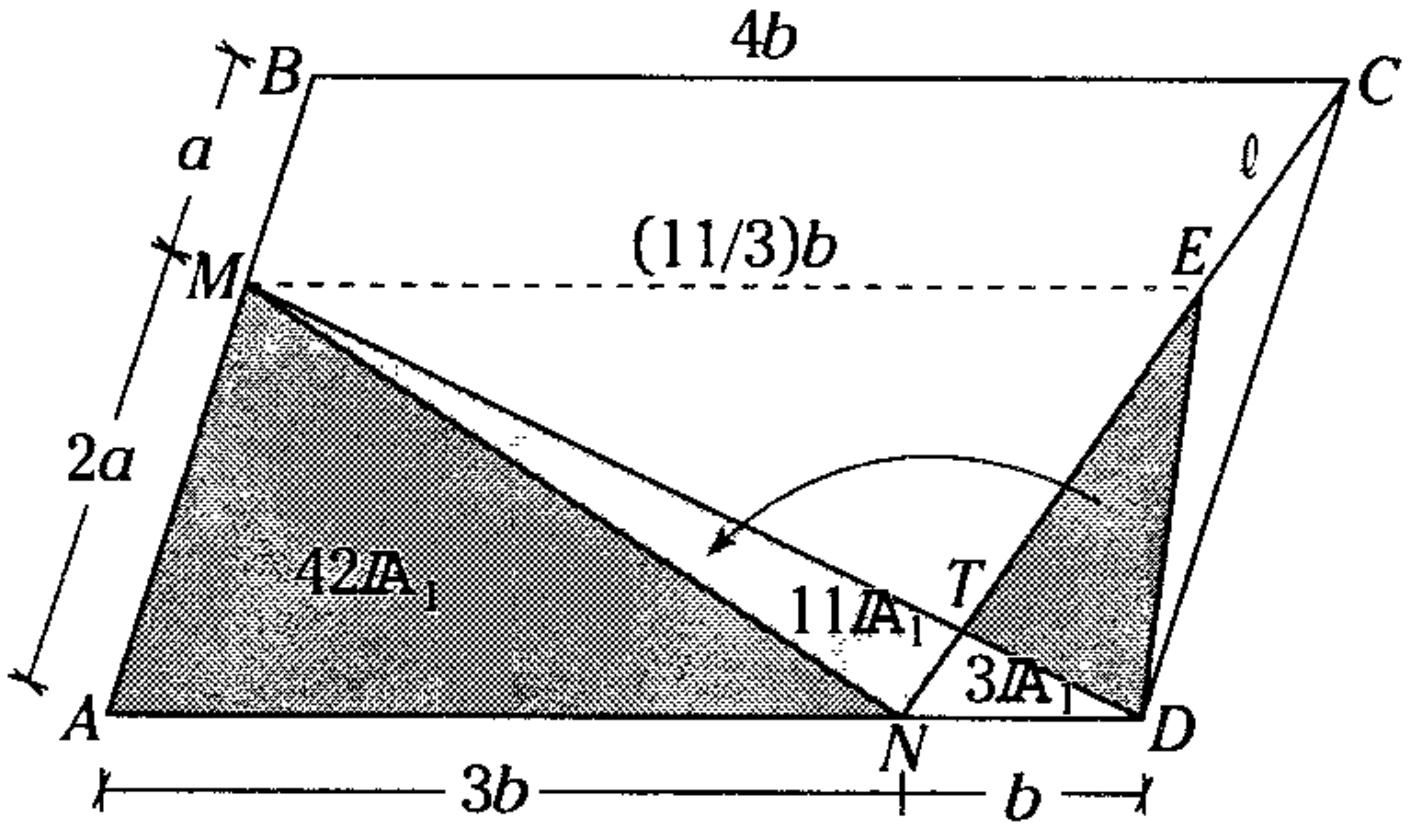


Figura 18.116

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle AMN} + \mathbb{A}_{\blacktriangle ETD}$

De los datos, $AM = 2(MB)$, si $MB = a \rightarrow AM = 2a$

$AN = 3(ND)$, si $ND = b \rightarrow AN = 3b$

$NC = 3(EC)$, si $EC = \ell \rightarrow NC = 3\ell$ y

$EN = 2\ell$

Como

$$\frac{AM}{MB} = \frac{NE}{EC} \rightarrow \overline{ME} \,//\, \overline{AN} \text{ y } \mathbb{A}_{\blacktriangle ETD} = \mathbb{A}_{\blacktriangle MTN}$$

Por propiedad de la semejanza de triángulos

$$ME = \frac{3b(a) + 4b(2a)}{a + 2a} = \frac{11}{3}b$$

Por semejanza de los triángulos MTE y DTN

$$\frac{MT}{TD} = \frac{\left(\frac{11}{3}\right)b}{b} = \frac{11}{3}$$

$\rightarrow$ Si $\mathbb{A}_{\blacktriangle NTD} = 3\mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle MTN} = 11\mathbb{A}_1$

y $\mathbb{A}_{\blacktriangle AMN} = 42\mathbb{A}_1$

De lo que piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle AMN} + \mathbb{A}_{\blacktriangle MTN} = 53\mathbb{A}_1$ (I)

Del romboide $ABCD$

$2(\mathbb{A}_{\blacktriangle AMD} + \mathbb{A}_{\blacktriangle BMD}) = \mathbb{A}$

Pero $\mathbb{A}_{\blacktriangle AMD} = 56\,\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_{\blacktriangle BMD} = 28\,\mathbb{A}_1$

$\rightarrow 2(56\,\mathbb{A}_1 + 28\,\mathbb{A}_1) = \mathbb{A}$

$168 = \mathbb{A}_1$

Reemplazando en (I)

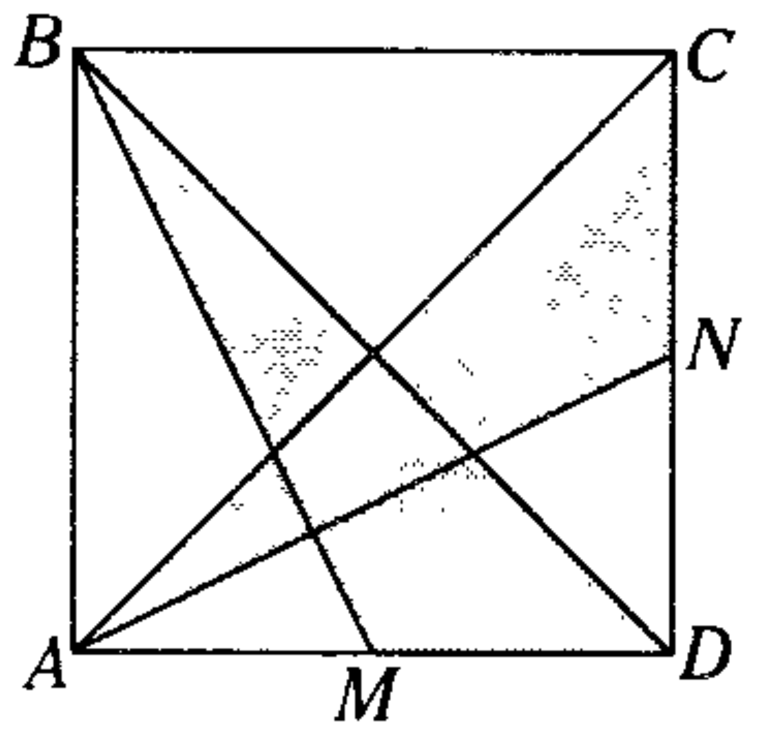
$\mathbb{A}_{\blacktriangle AMN} + \mathbb{A}_{\blacktriangle MTN} = 53\,\mathbb{A}/168$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle AMN} + \mathbb{A}_{\blacktriangle ETD} = \frac{53}{168}\mathbb{A}$$

CLAVE E

Problema 20

$ABCD$ es un cuadrado, cuya área de su región es $\mathbb{B}$. Si $AM = MD$ y $CN = ND$, determine el área de la región sombreada.



A) $7\mathbb{B}/20$ B) $9\mathbb{B}/20$ C) $\mathbb{B}/2$

D) $3\mathbb{B}/7$ E) $5\mathbb{B}/7$

Resolución

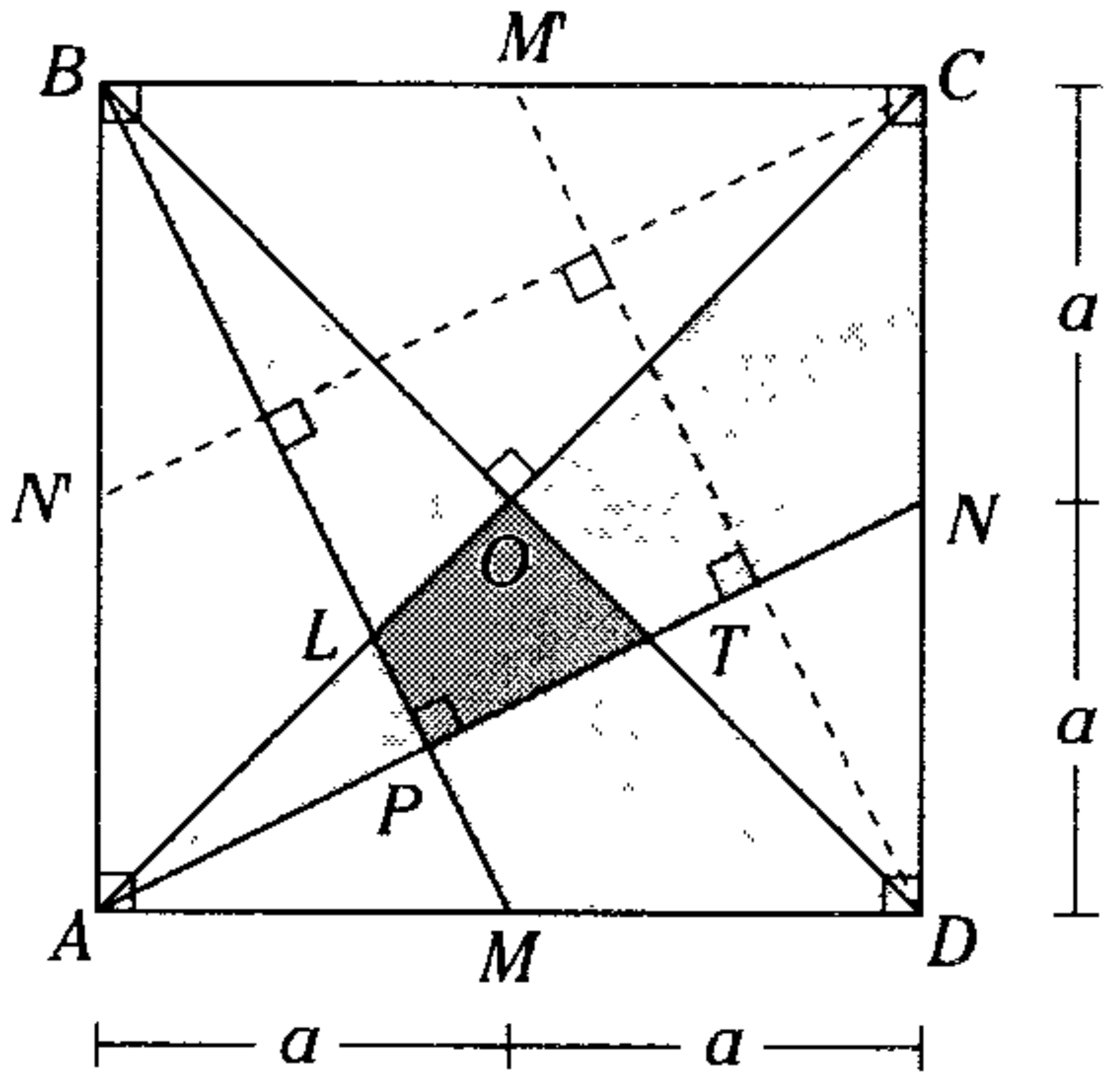


Figura 18.117

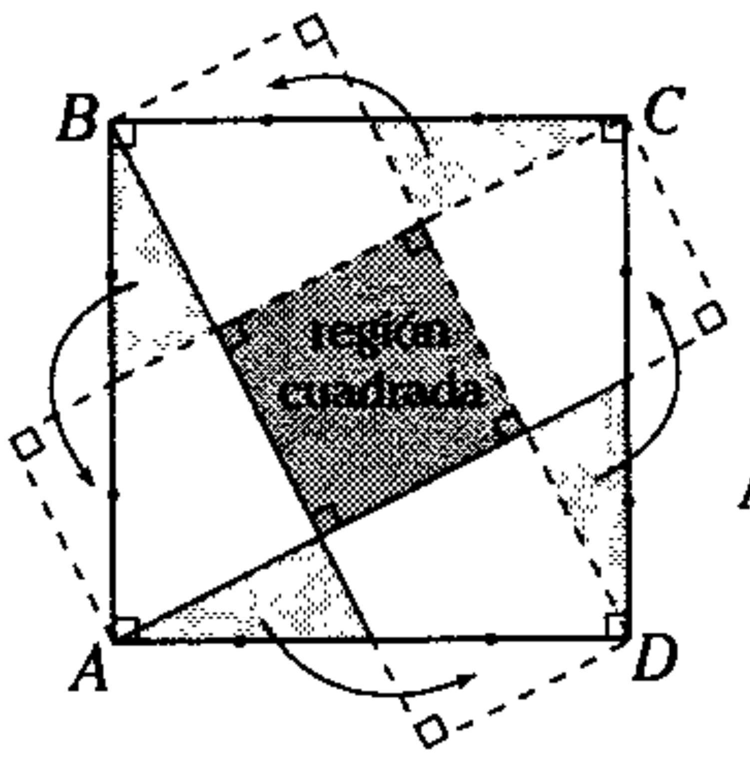
Piden $\mathbb{A}_{\text{reg.sombr.}} = \mathbb{A}_x$

Dato $\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD} = \mathbb{B}$

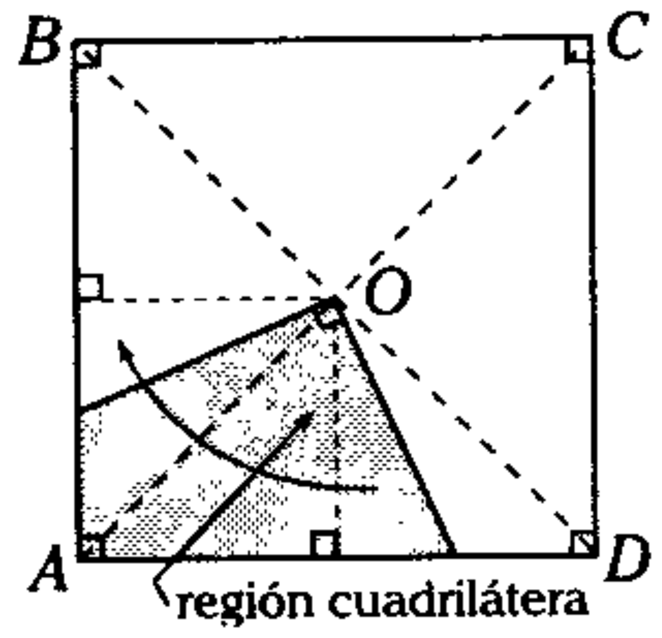
De la figura

$$\mathbb{A}_x = \underbrace{\mathbb{A}_{\blacktriangle BMD} + \mathbb{A}_{\blacktriangle ANC}}_{\mathbb{B}/2} - \mathbb{A}_{\blacksquare LOTP} \qquad \text{(I)}$$

Observación



$$\text{Área}_{\substack{\text{región}\\ \text{cuadrada}}} = \frac{\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}}{5}$$



$$\text{Área}_{\substack{\text{región}\\ \text{cuadrada}}} = \frac{\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}}{4}$$

Cálculo del área de la región *LOTP*.

Para nuestro problema, se trazan $\overline{CN'} \perp \overline{DM'}$ (donde N' y M' son puntos medios de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ respectivamente).

Aplicando las propiedades anteriores

$$\mathbb{A}_{\blacksquare LOTP} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}\right) \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

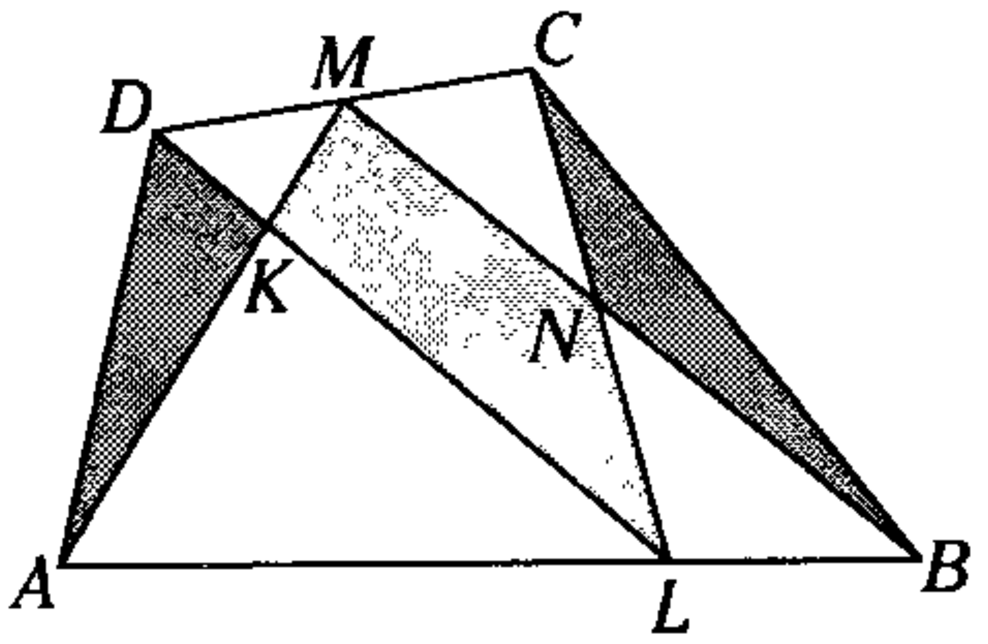
$$\mathbb{A}_x = \frac{\mathbb{B}}{2} - \frac{\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}}{20}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_x = \frac{9\mathbb{B}}{20}$$

CLAVE B

Problema 21

Dado el cuadrilátero convexo *ABCD* y los puntos *L* y *M* en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, de modo que $\frac{DM}{DC} = \frac{BL}{BA}$; demuestre que el área de la región *KLNM* es igual a la suma de las áreas de las regiones *AKD* y *BCN*.



Resolución

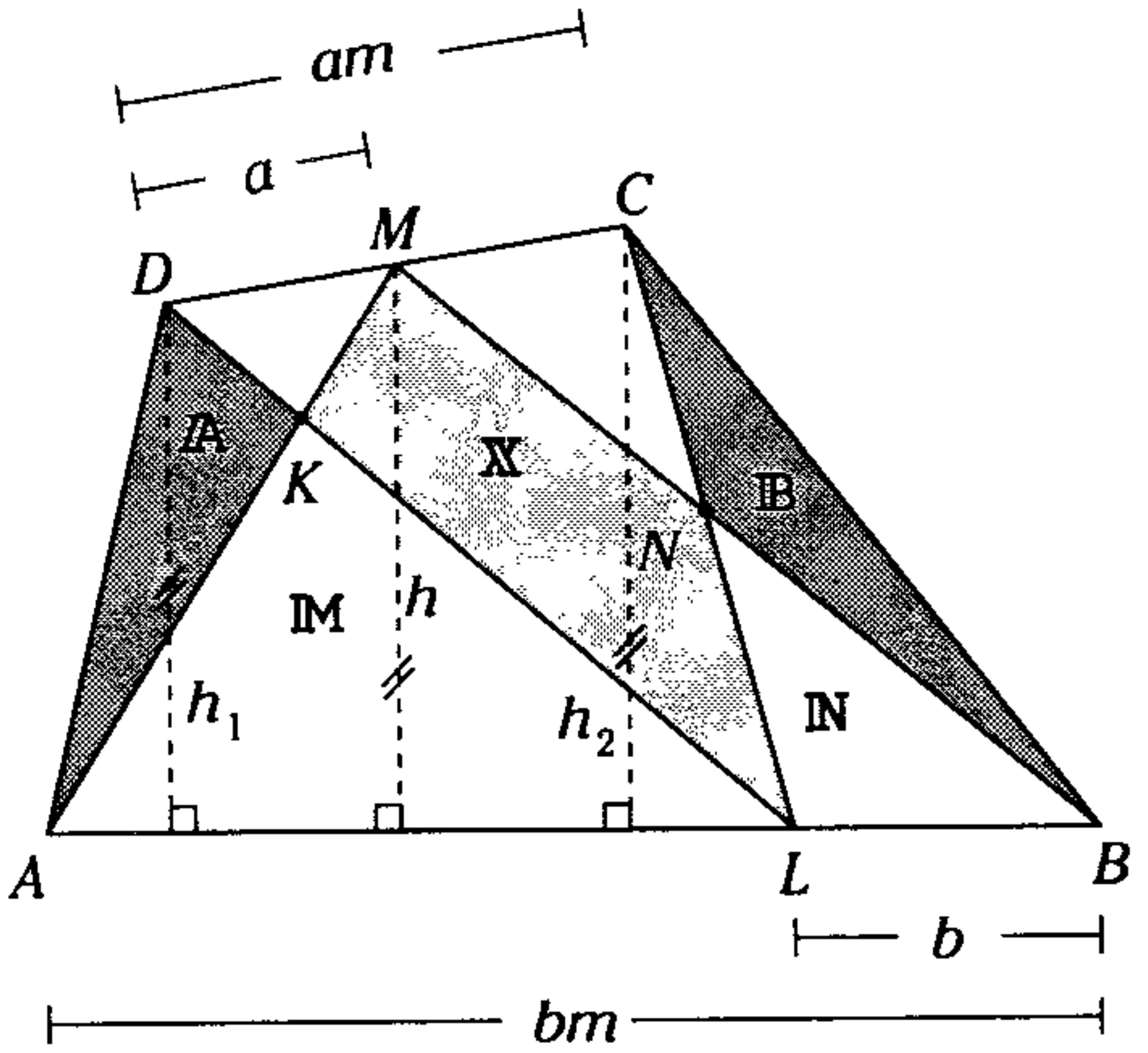


Figura 18.118

Sea $\frac{DM}{DC} = \frac{BL}{BA} = \frac{1}{m}$

$\therefore\ DC = m(DM)$ y

$AB = m(BL)$

En la figura

$$\frac{h - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{a}{am}$$

$$\therefore\ hm = h_2 + h_1(m-1)$$

Sean $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{X}$ las áreas de las regiones sombreadas que se muestra en la figura. entonces

$$\mathbb{A} + \mathbb{M} = \frac{b(m-1).h_1}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{B} + \mathbb{N} = \frac{b.h_2}{2} \qquad \text{(II)}$$

$$\mathbb{X} + \mathbb{M} + \mathbb{N} = \frac{bm.h}{2} \qquad \text{(III)}$$

Ordenando convenientemente las ecuaciones (I), (II) y (III), se tiene

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}\,.\,\frac{b}{2}(m.h)=\mathbb{X}+\frac{b}{2}(h_2+h_2(m-1))$$

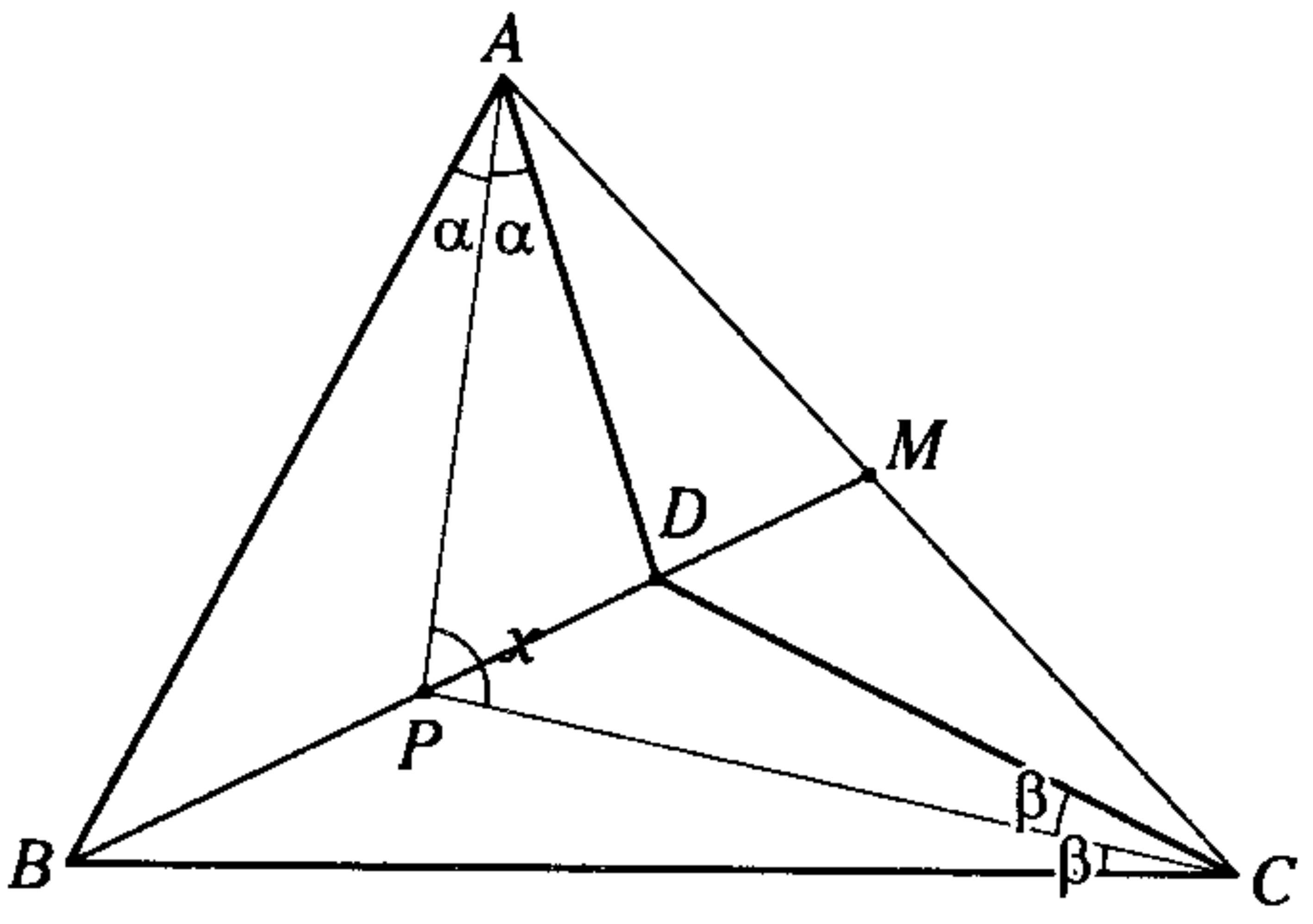
Como $m\,.\,h = h_2 + h_1\,(m-1)$

$\rightarrow\ \mathbb{X}=\mathbb{A}+\mathbb{B}$

$\therefore\ \mathbb{A}_{KLNM}=\mathbb{A}_{\blacktriangle AKD}+\mathbb{A}_{\blacktriangle BCN}$

Problema 22

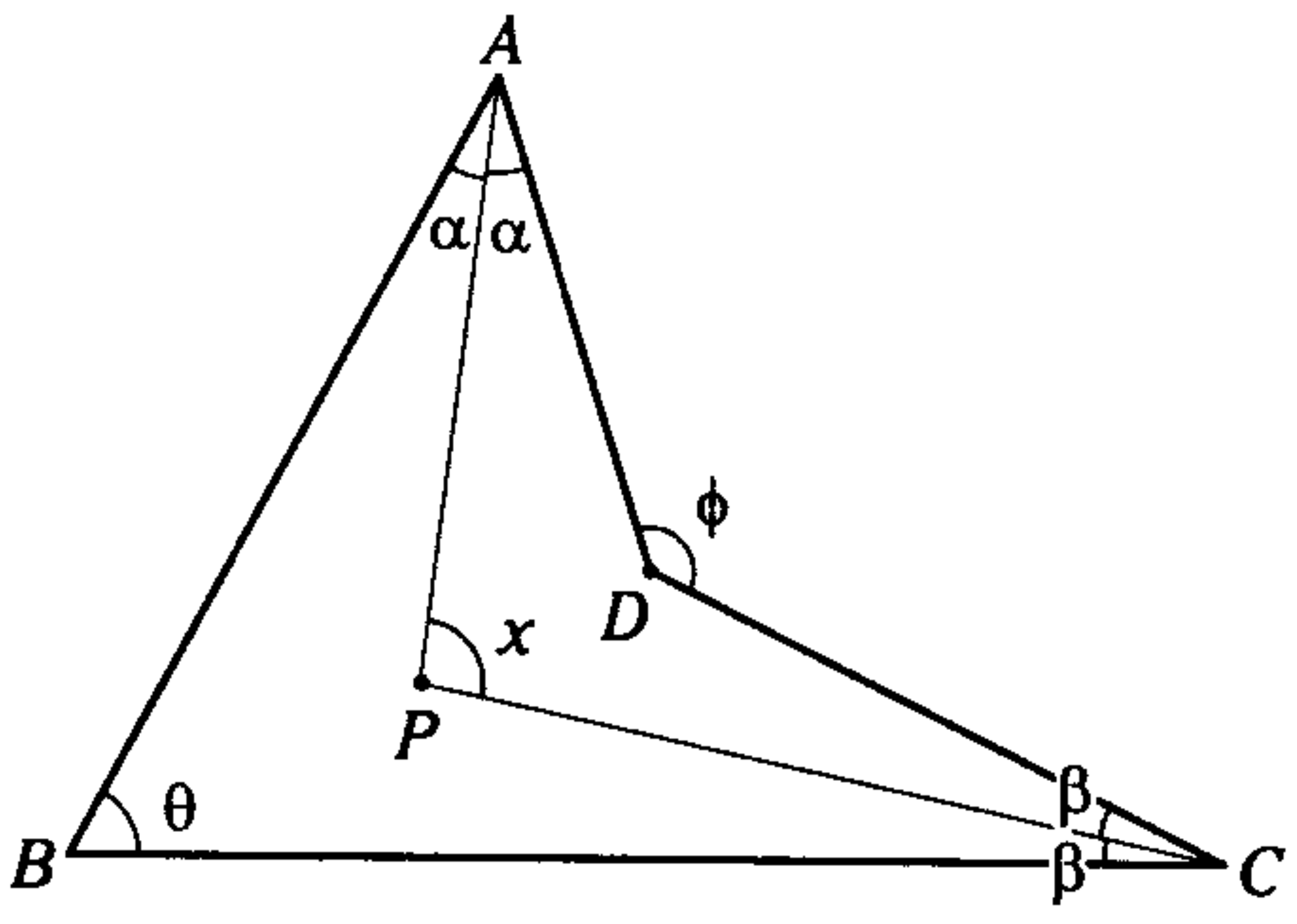
En la figura mostrado, $AM = MC$. Calcule x, si $\alpha\neq\beta$ y $P\in\overline{BD}$.



A) 60° B) 45° C) 75°
D) 90° E) 100°

Resolución

Sabemos que $x=\dfrac{\theta+\varphi}{2}$ (capítulo V)



(a)

Así, en el problema bastará con calcular
$m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle ADC$,
para ello, prolongamos $\overline{DM}$ hasta Q, tal que $MQ = MD$, de manera que $AQCD$ sea un paralelogramo de centro M.

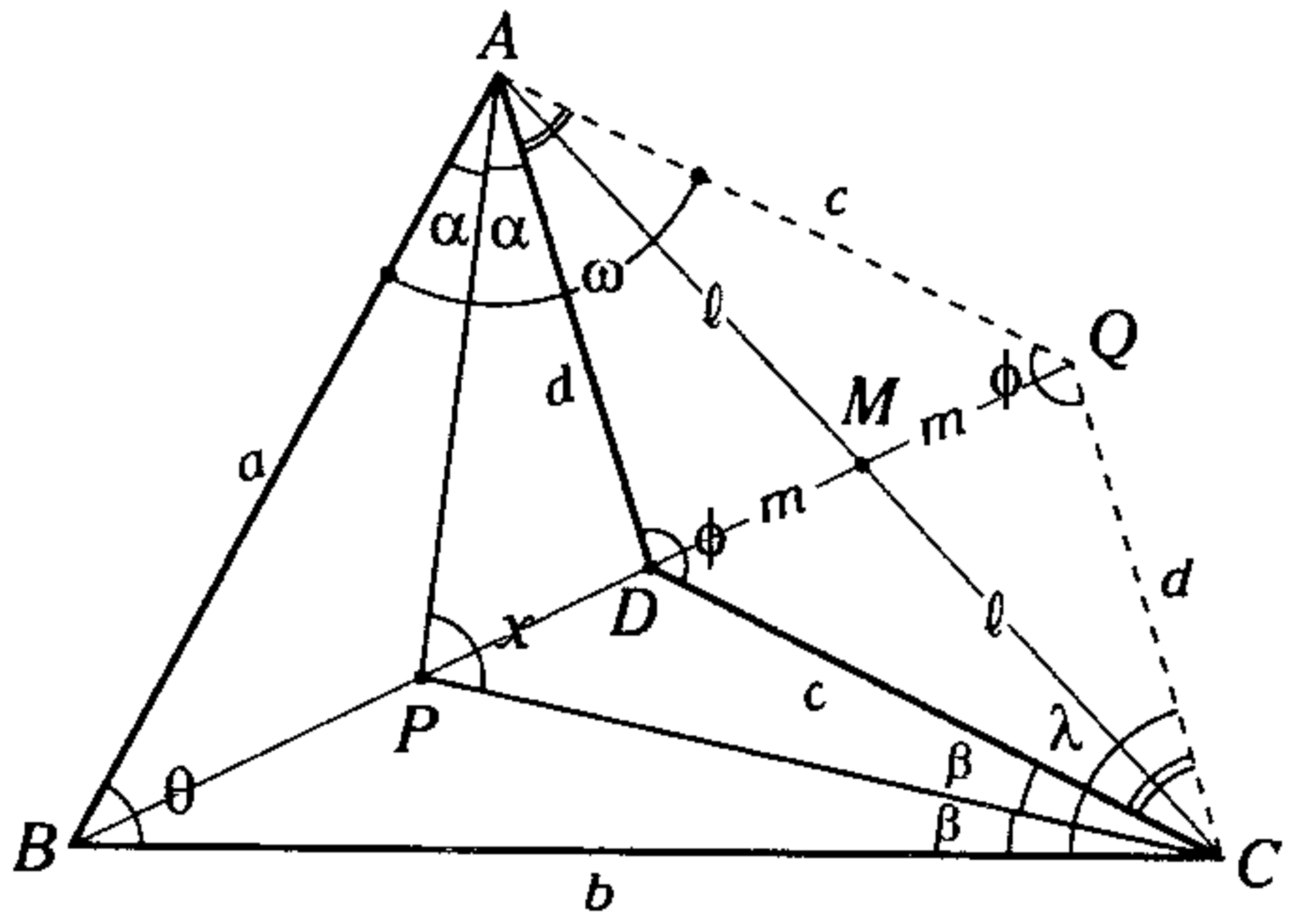


Figura 18.119

Luego $CQ = AD = d$
$AQ = CD = c$
y $m\sphericalangle AQC = \phi$
$\rightarrow$ en $\square ABCQ$: $\theta+\phi+\omega+\lambda=360°$
Como $AM = MC\ \rightarrow\ \mathbb{A}_{\blacktriangle BAQ}=\mathbb{A}_{\blacktriangle BCQ}$

$$\therefore\ \frac{a.c}{2}\operatorname{sen}\omega=\frac{b.d}{2}\operatorname{sen}\lambda \qquad \text{(I)}$$

Por el teorema de la bisectriz interior, se cumple

$\triangle BAD$: $\dfrac{BP}{PD}=\dfrac{a}{d}$

$\triangle BCD$: $\dfrac{BP}{PD}=\dfrac{b}{c}$

$$\rightarrow\ \frac{a}{d}=\frac{b}{c}\quad\therefore\ a.c=b.d \qquad \text{(II)}$$

De (II) en (I)

$\operatorname{sen}\omega=\operatorname{sen}\lambda$

$\rightarrow\ \omega=\lambda$ ó $\omega+\lambda=180°$

- Si $\omega=\lambda\ \rightarrow\ \alpha=\beta$, lo cual niega la condición del problema.
- Si $\omega+\lambda=180°\ \rightarrow\ \theta+\phi=180°$
  $\therefore\ x = 90°$

CLAVE D

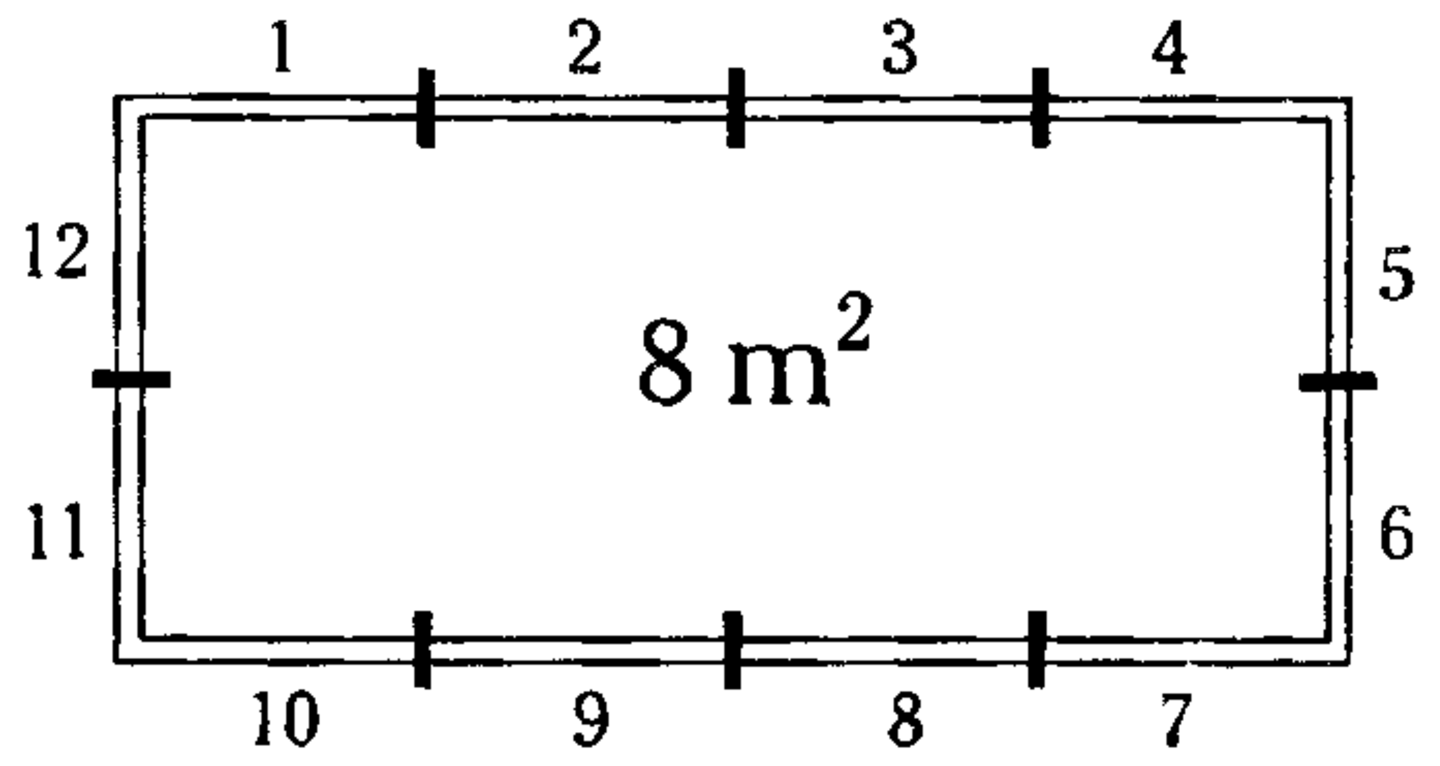
Problemas Recreativos

1. **¡Vaya que valla!**

Con doce vallas de un metro de largo hemos construido un recinto con una superficie de 8 metros cuadrados como indica el dibujo. Cambiando un máximo de 6 vallas de posición, debemos conseguir una figura con los siguientes requisitos:

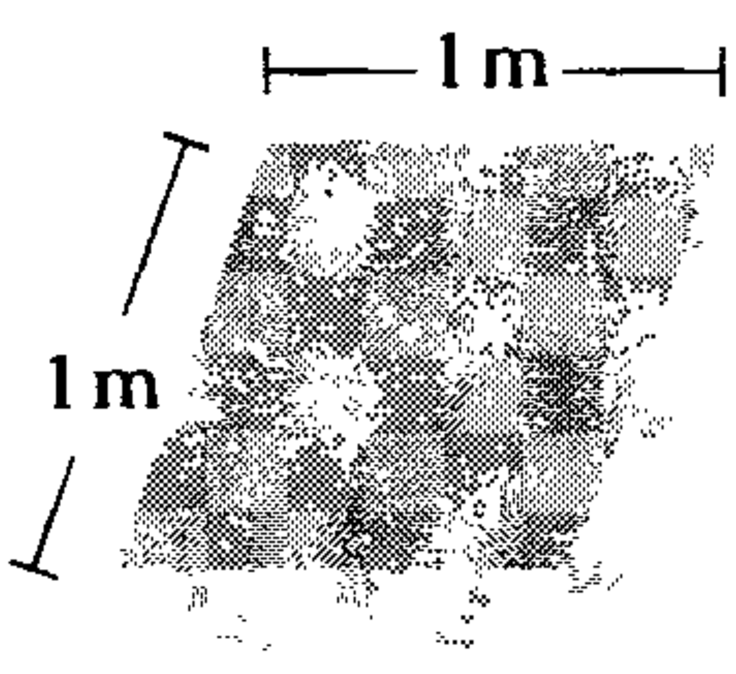
- Que su superficie sea de 6 m^2.
- Que no tenga más de cuatro vértices
- Que la figura quede formada por todas las vallas.

¿Cómo lo haría?



2. **La cuadratura del rectángulo**

Tenemos una cierta cantidad de baldosas cuadradas de un metro de lado y con todas ellas hemos cubierto totalmente una superficie rectangular, cuyos lados miden x metros y $(x + 2)$ metros, respectivamente (x es un número entero).



¿Cuál es el número mínimo de baldosas que debemos añadir a las que ya tenemos para cubrir una superficie perfectamente cuadrada usándolas todas?

3. **Tejemanejes**

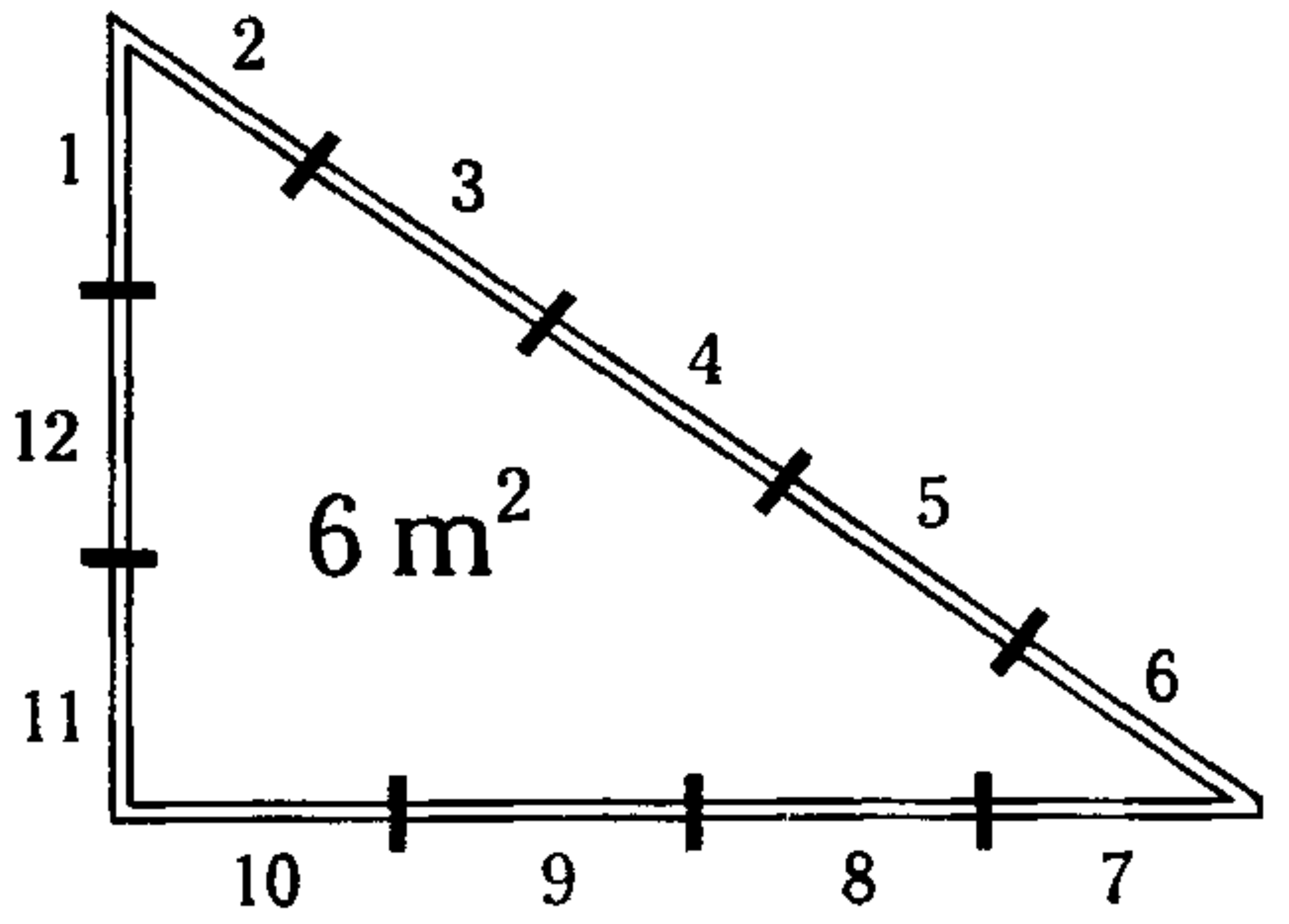
Hace mucho tiempo vivía un rey, Rumanidin, cuya hija, de nombre Shimeradin, tenía un pañuelo tan lindo que sus tres hermanas menores lo deseaban. Como no quería preferir a ninguna sobre la otra, hizo que el brujo del castillo lanzara un hechizo sobre la prenda que extendida, formaba un cuadrado perfecto. La brujería consistía en que, si era cortado en la forma correcta, se reconstruiría en tres cuadrados iguales y perfectos. (El dibujo que tenía estampado también reaparecería mágicamente en cada trozo). La condición es hacer cinco cortes, ni uno mas ni uno menos, de tal modo que los seis segmentos resultantes formen tres cuadrados más pequeños e idénticos: uno para cada hermana. Los cortes no podrían cruzarse entre sí.

¿Cómo se podría hacer los cortes al pañuelo de Shimeradin?

Resolución 1

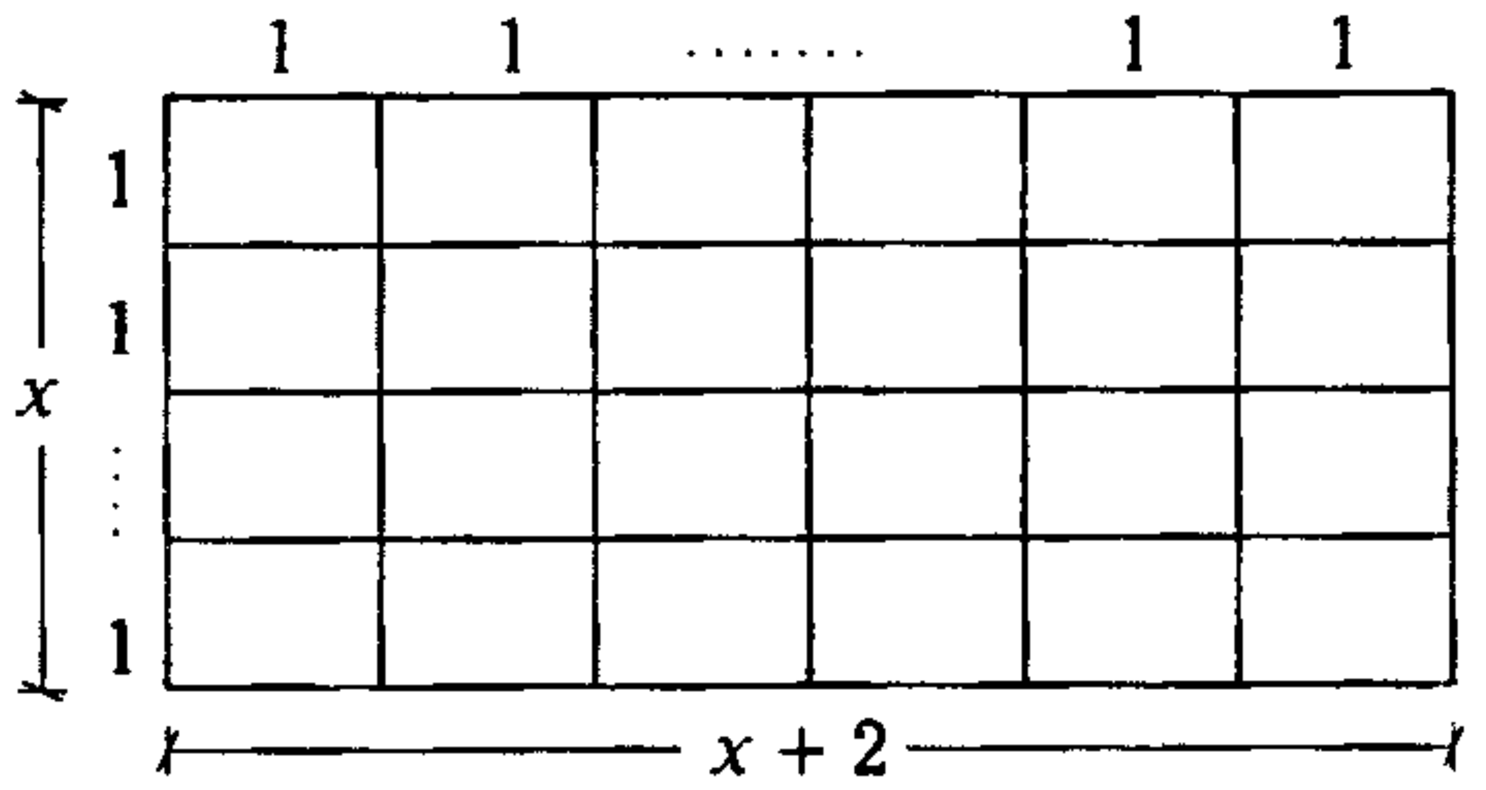
¡Vaya que Valla!

La solución consiste en colocar las vallas 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 y 6 de la forma que se muestra en la figura.



Resolución 2

Cuadratura del rectángulo



Una región rectangular de $(x) + (x + 2)$ tiene un área de $x^2 + 2x$. Para que las baldosas cubran una superficie perfectamente cuadrada, la expresión $x^2 + 2x + N$ debe ser el desarrollo de un binomio cuadrado perfecto.

Como $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

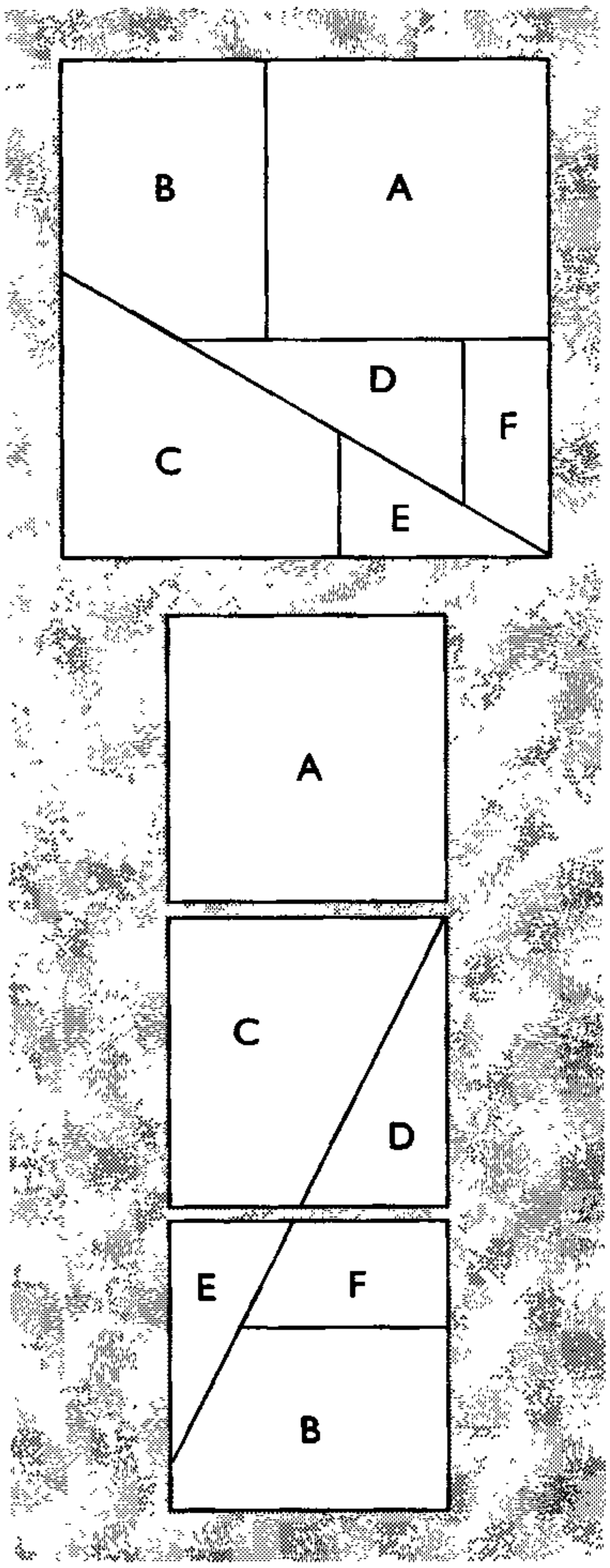
$\therefore\ N = 1$

Es decir, el número mínimo de baldosas que debemos añadir es 1.

Resolución 3

Tejemanejes

El cuadrado de arriba muestra una manera de hacer los cinco cortes: *A* es un cuadrado; *D* sobre *C* forman el segundo; *E* debajo de *B*, con *F* a la izquierda, el tercero. ¿Puede encontrar otra forma de cortar el pañuelo?



ÁREA DE UNA REGIÓN CIRCULAR Y DE SUS PARTES NOTABLES

CÍRCULO

El círculo es una región del plano cuyo contorno o borde es una circunferencia.

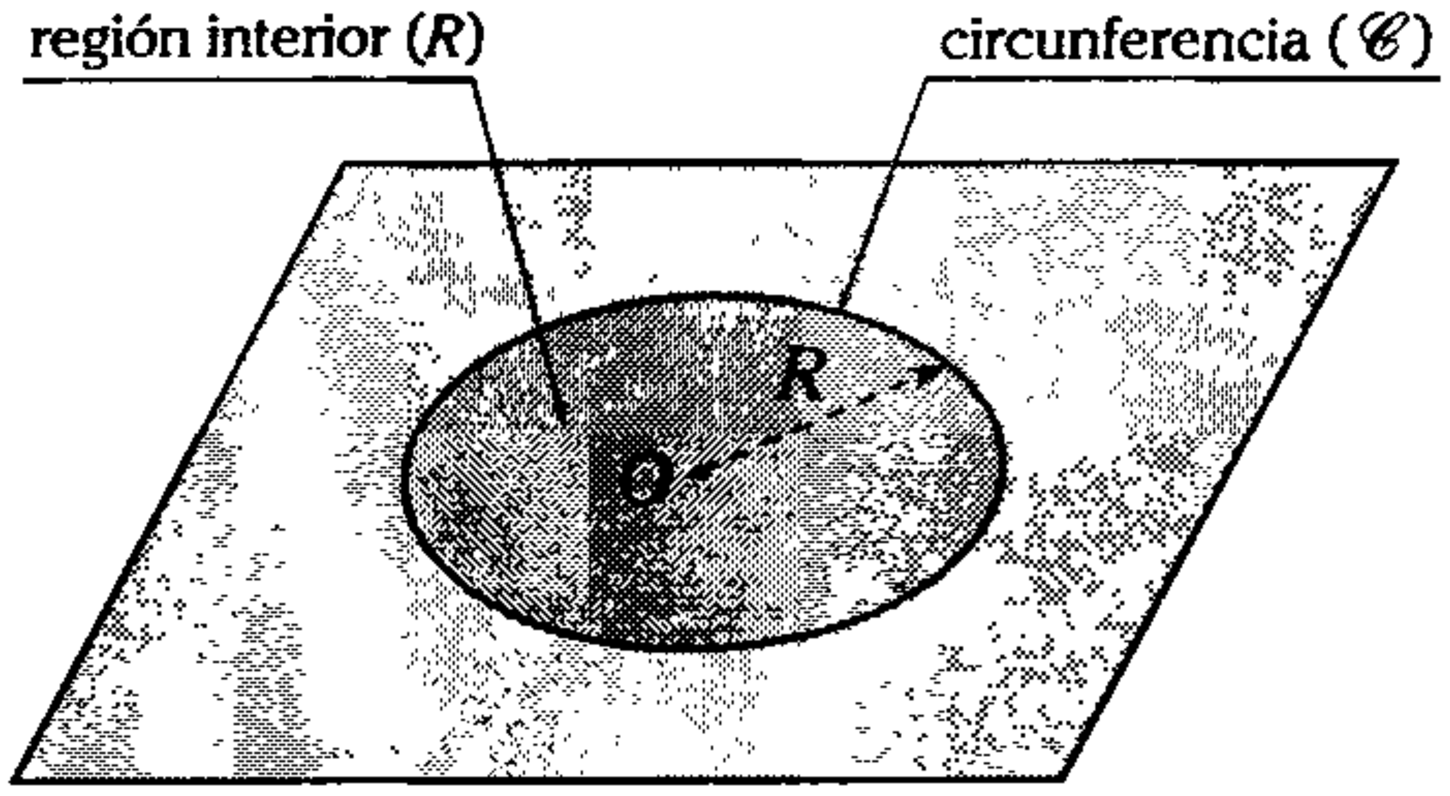


Figura 18.120

Teorema

El área de un círculo es igual al producto del número pi (π) con el cuadrado del radio de dicho círculo.

Esto es

$$\mathbb{A}_{\circ}=\pi R^2$$

Donde

R : radio de dicho círculo

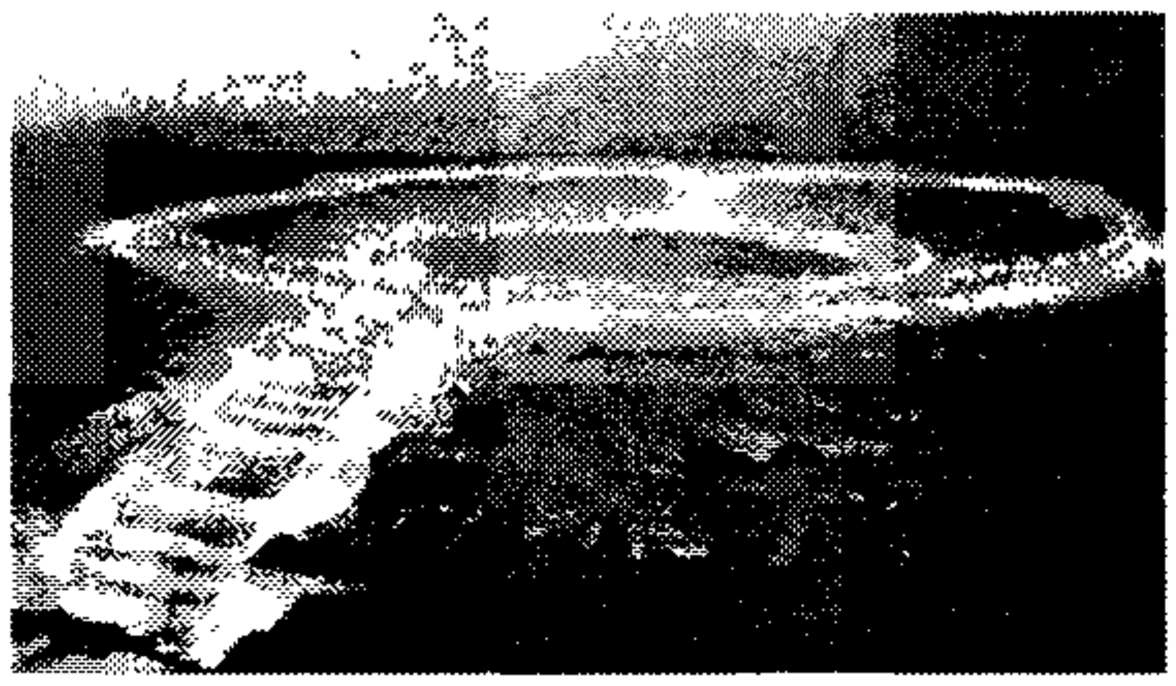
π : 3,141516...

- A continuación, algunos conceptos para la demostración del área del círculo.
- La relación constante entre la longitud de la circunferencia y su diámetro se le denomina π (pi).

Es decir

$$\pi=\frac{C}{2R}$$

C: longitud de la circunferencia



Anfiteatro de Caral tiene una plataforma de forma de corona circular.

RECORDEMOS

Si dos polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes, entonces la relación de sus lados homólogos es constante. La razón de sus perímetros es también constante.

Es decir

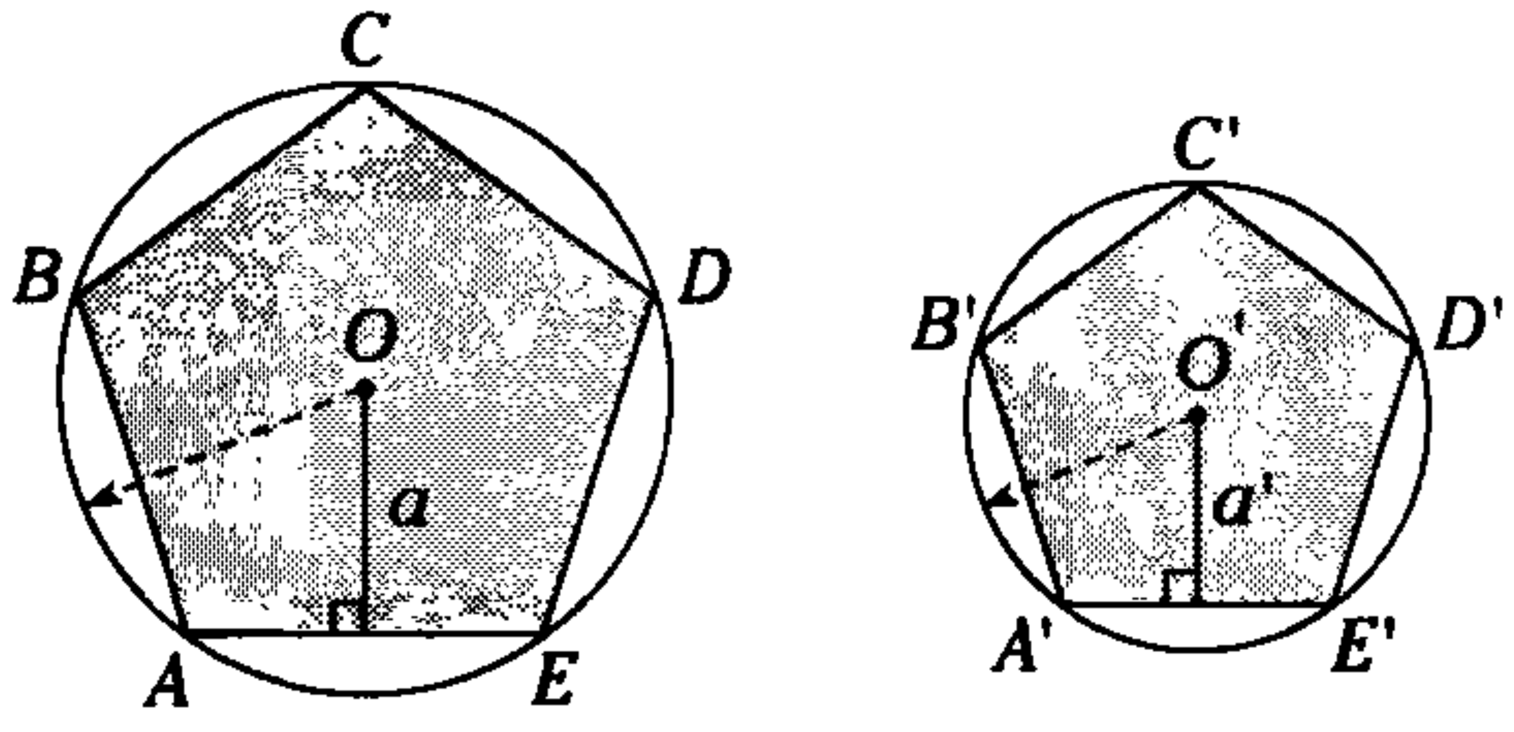


Figura 18.121

Si ⬠$ABCDE$ ~ ⬠$A'B'C'D'E'$, entonces

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}=\frac{a}{a'}$$

Apoyándonos en el tema de proporciones, tenemos:

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'}=\frac{a}{a'}$$

$$\rightarrow \frac{p}{p'}=\frac{a}{a'}$$

p y p': son perímetros de las regiones poligonales regulares.

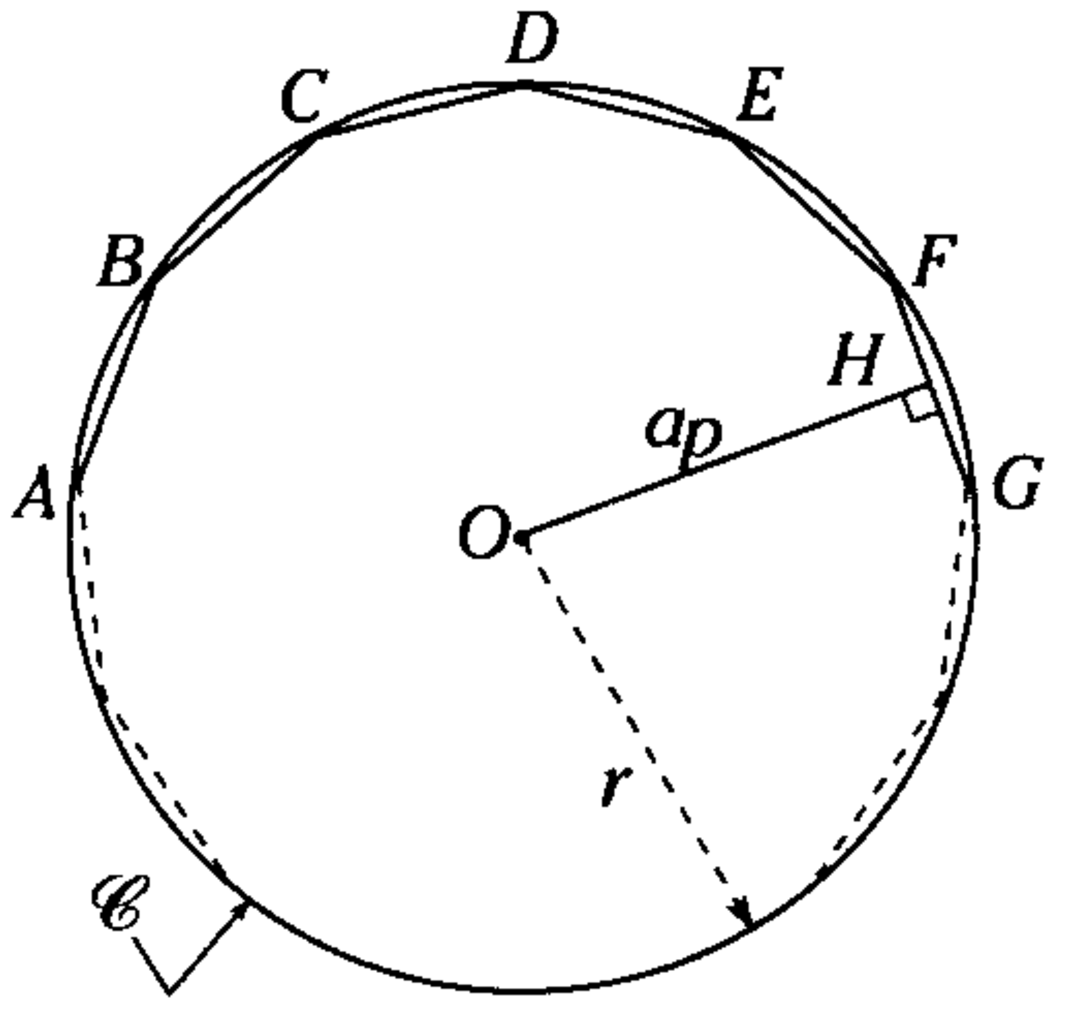
a y a': apotemas homólogos.

Nota

Lo que se ha demostrado es un caso particular, pero es sencillo darse cuenta de que se cumplirá para polígonos regulares de n lados ($n \geq 3$).

Teorema

Si el número de lados de un polígono regular inscrito en una circunferencia se aumenta indefinidamente, el apotema tiende hacer el radio, mientras que el perímetro va a coincidir con la circunferencia.



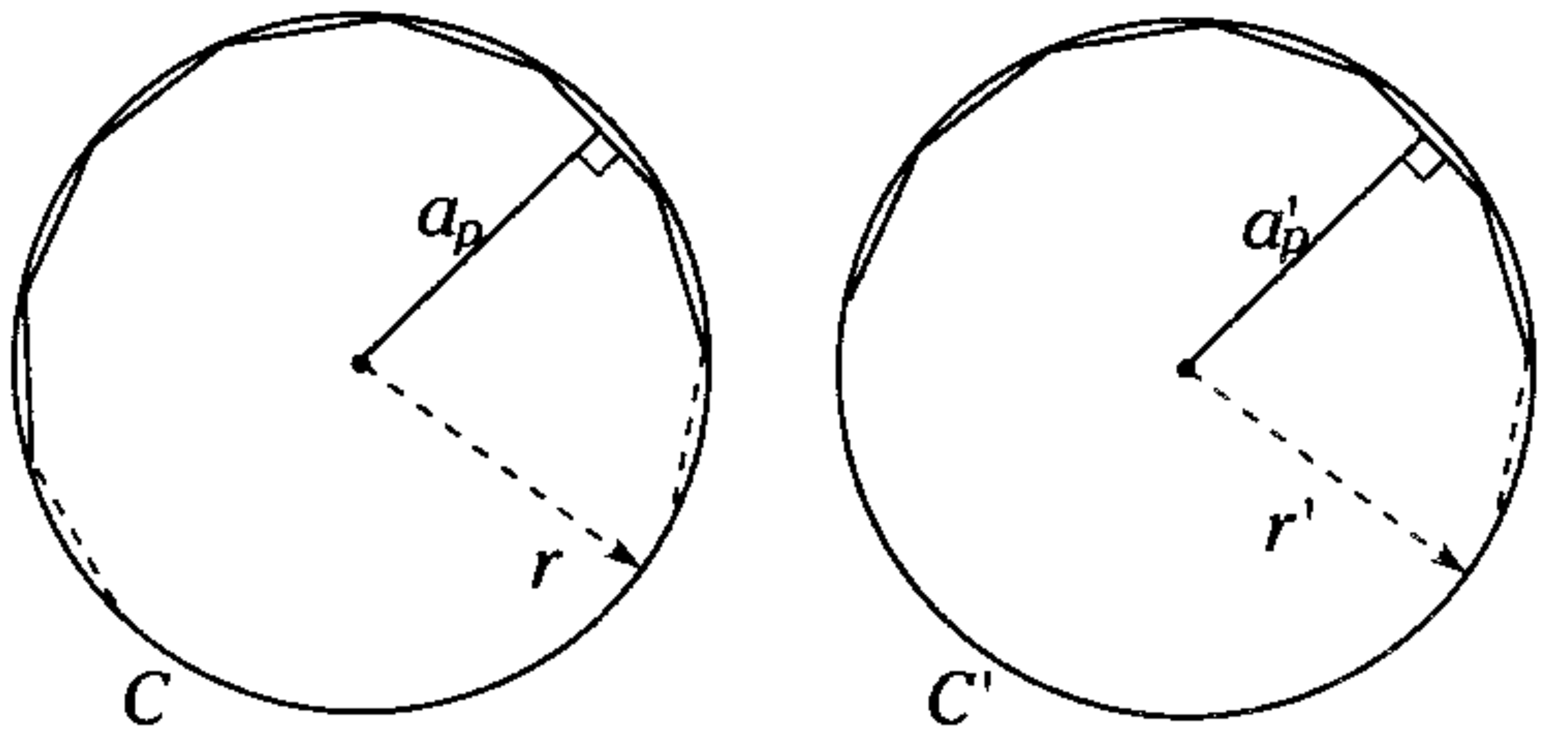
(a)

$\bigcirc ABCD...$: polígono regular de n lados.

$\overline{OH}$: apotema del polígono regular (a_p).

Si m tiende al ∞, entonces OH tiende a ser el radio r y $\bigcirc ABCD...$ tiende a coincidir con la circunferencia $\mathscr{C}$.

En dos polígonos regulares semejantes.



(b)

Figura 18.122

Estos dos polígonos regulares tienen números de lados iguales a n.

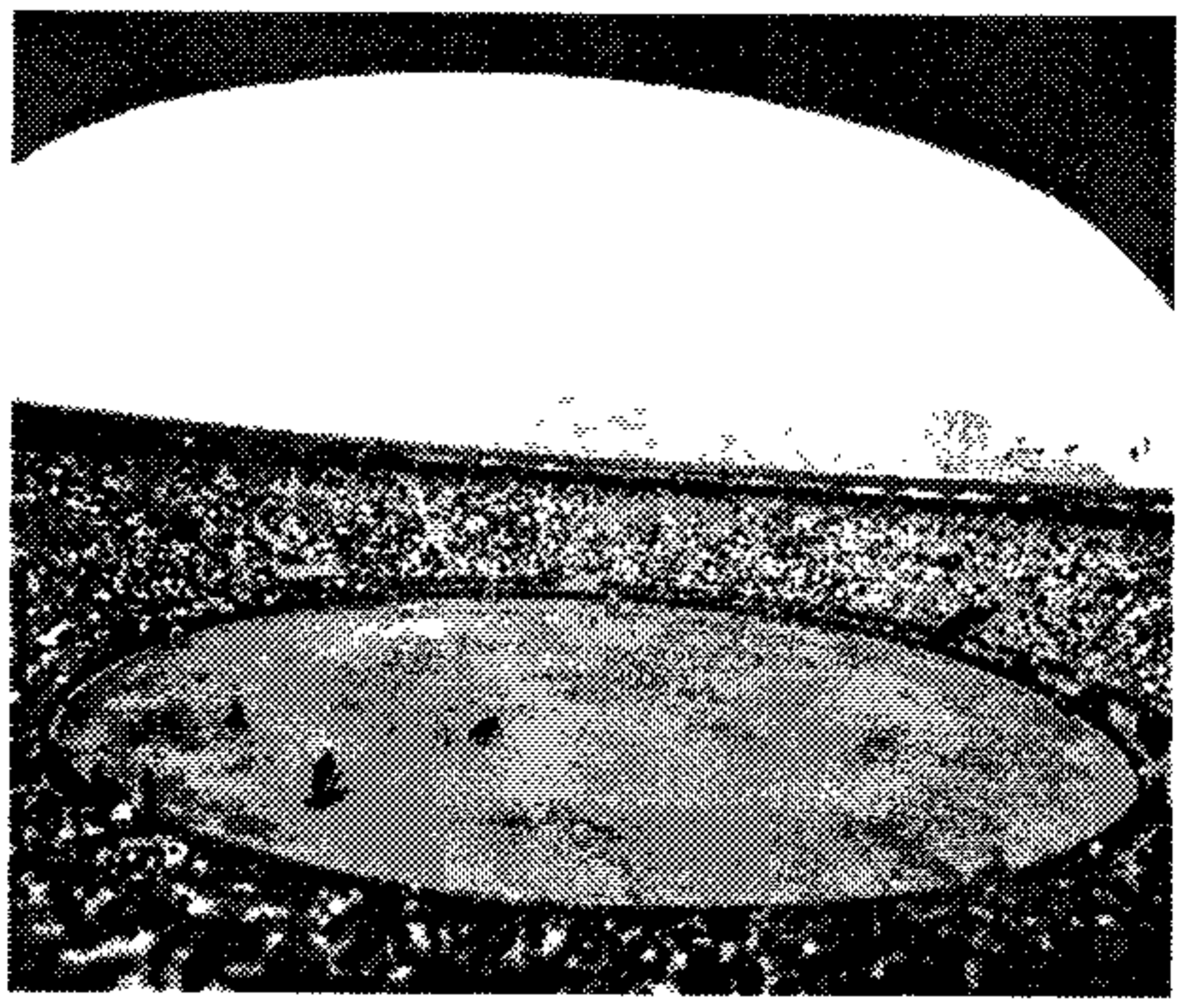
Consideraciones

p y p' : perímetros de las regiones circulares

C y C': longitudes de las circunferencias

a_p y a'_p : apotemas de las circunferencias

r y r' : radios de las circunferencias



El tendido de la Plaza de Toros (Acho - Perú) es un círculo de arena, donde se realizan las faenas taurinas.

Según la condición del teorema

Si n tiende al ∞, entonces

p y p' tienden a C y C', respectivamente.

a y a' tienden a r y r', respectivamente.

Luego, de un teorema anterior $\frac{C}{C'}=\frac{r}{r'}$

así $\frac{C}{2r}=\frac{C'}{2r'}$ (I)

La expresión (I) es el resultado de la comparación de dos polígonos regulares semejantes del mismo número de lados; en general, esto significa que

$$\frac{C}{2r} = \text{cte.}$$

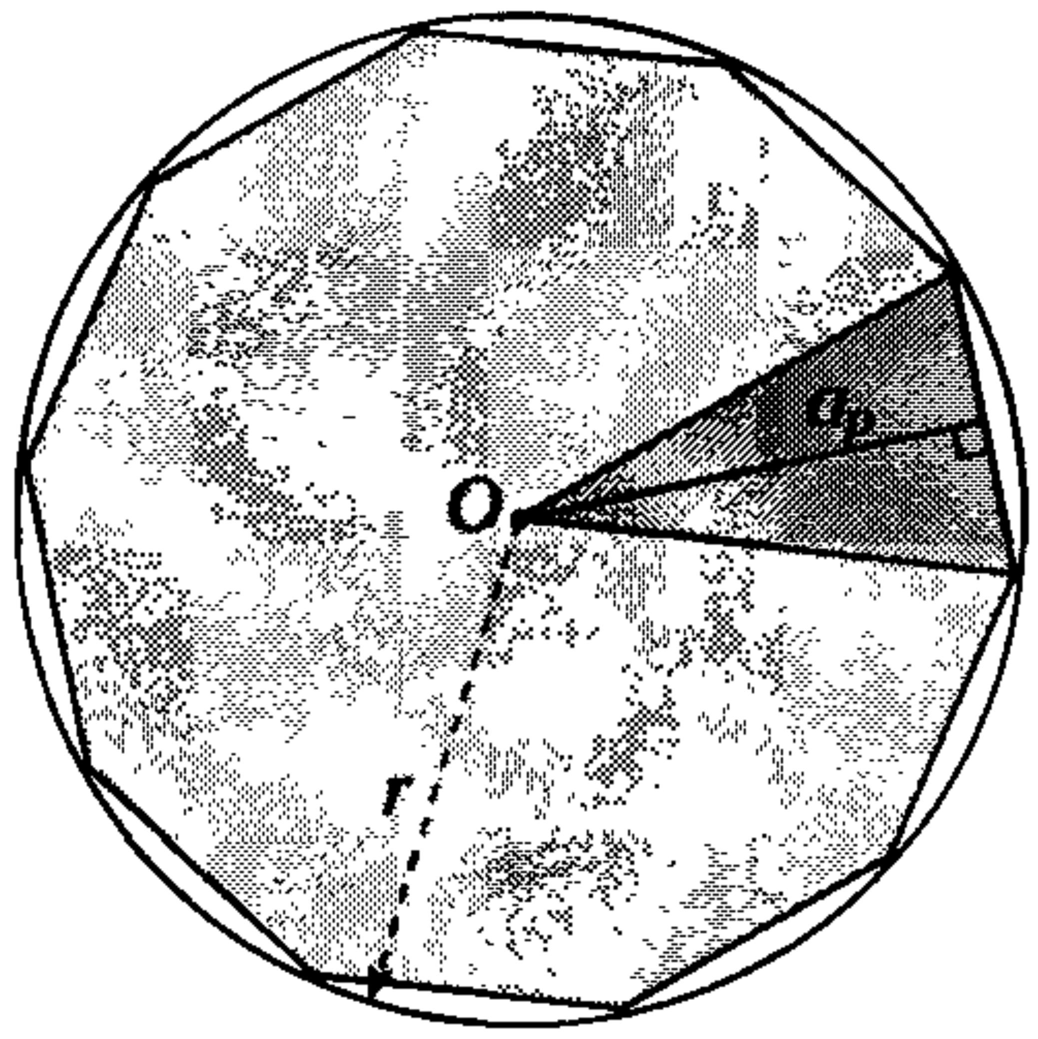
Posteriormente, $C = 2r$ (cte.)

Sea la constante igual al valor del número pi (π).

$$\therefore\ C = 2r(\pi)$$

Teorema

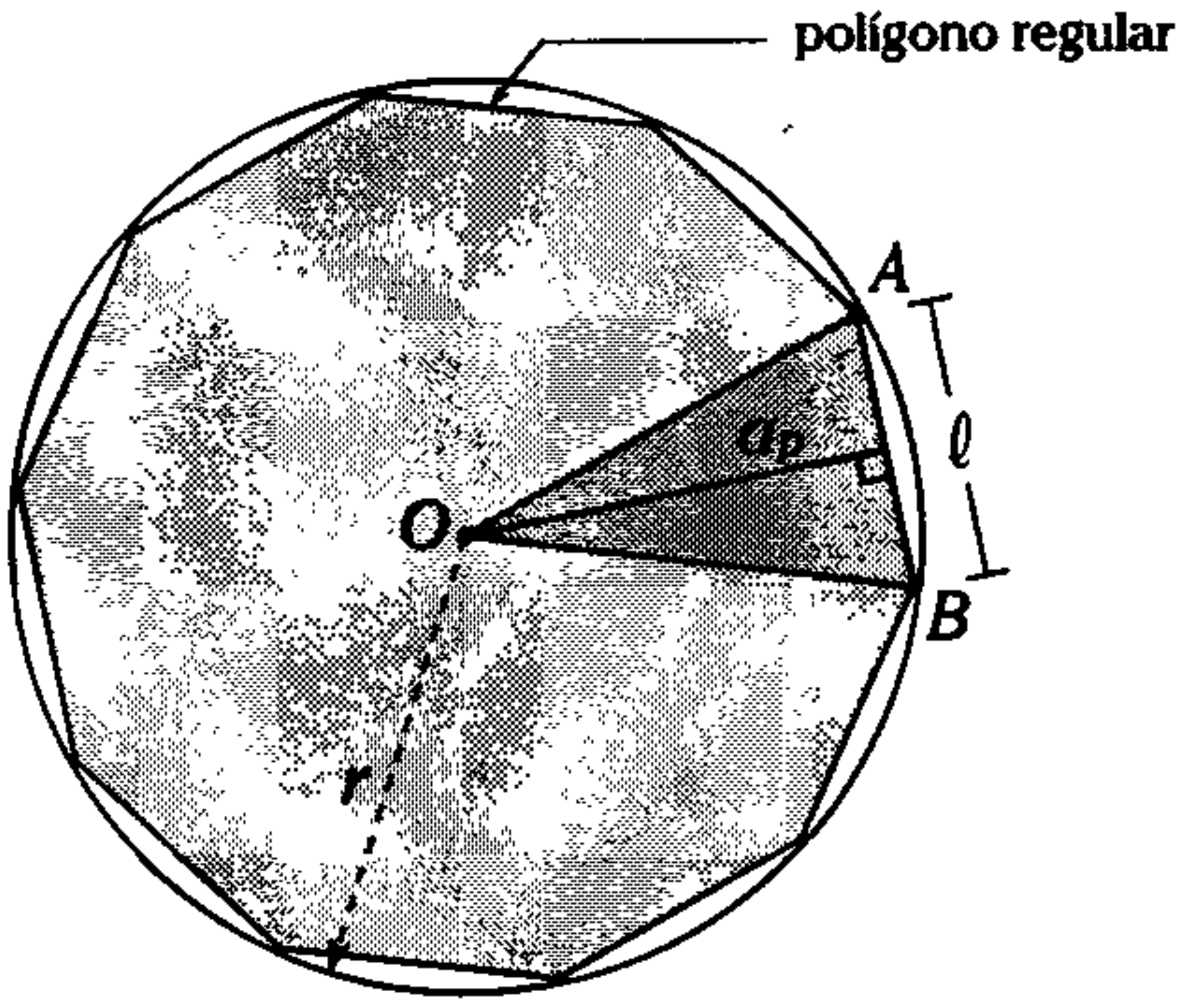
El área de una región poligonal regular es igual al semiproducto del apotema y el perímetro.



(a)

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{reg.}\\ \text{poligonal}}} = \frac{a_p \cdot 2p_{(\text{reg. pol.})}}{2}$$

Demostración



(b)

Figura 18.123

Sea n: número de lados del polígono regular

ℓ : longitud de un lado del polígono regular

Se observa la figura 18.123(a)

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{reg.}\\ \text{poligonal}}} = n(\mathbb{A}_{\triangle AOB})$$

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{reg.}\\ \text{poligonal}}} = \left(\frac{a_p \cdot \ell}{2}\right)n \qquad \text{(I)}$$

y como se sabe

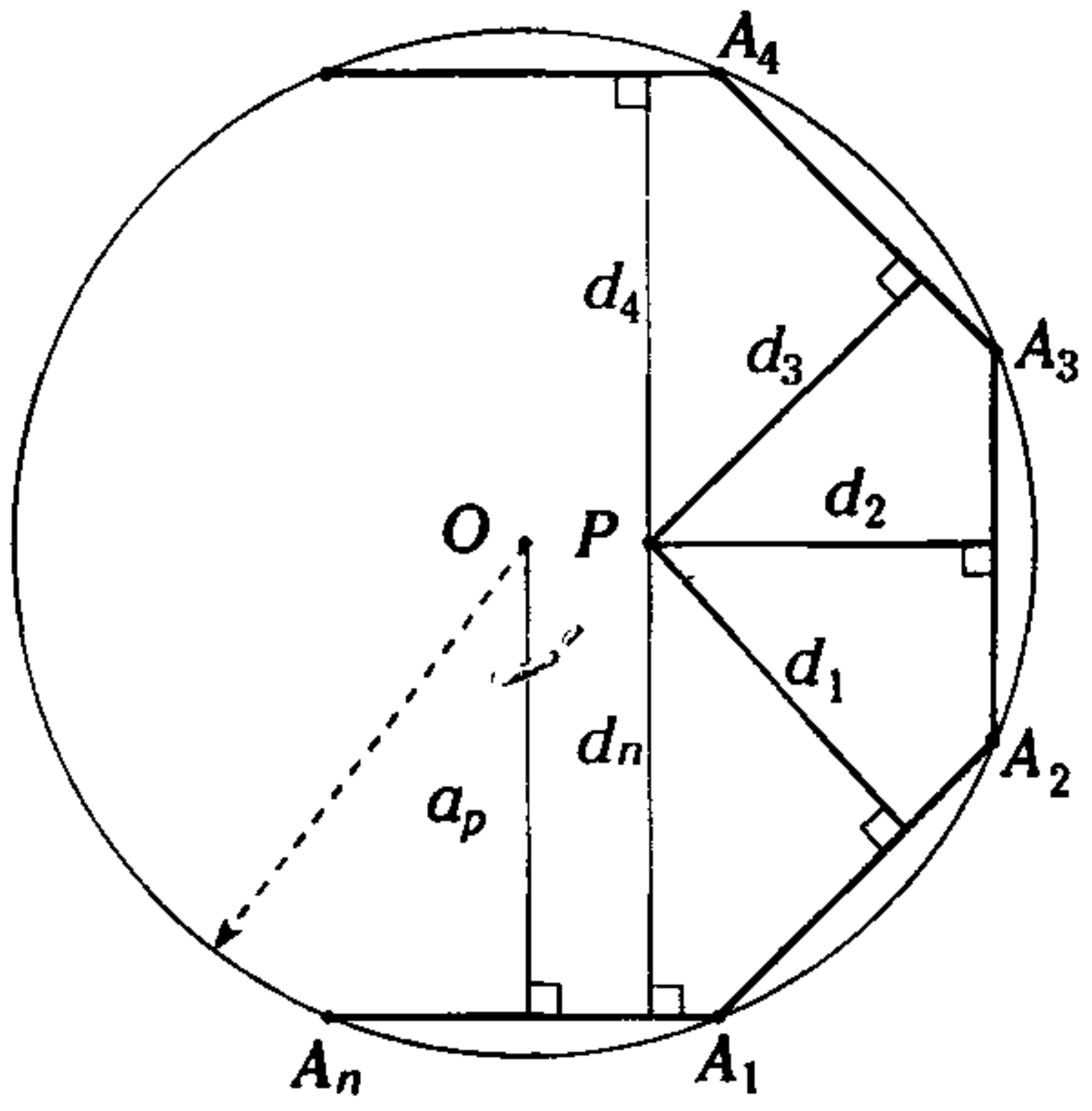
$$\ell \cdot n = 2p \text{ (región poligonal)}$$

Reemplazando en (I) obtenemos

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{reg.}\\ \text{poligonal}}} = a_p \cdot p(\text{reg. poligonal})$$

TEOREMA DE VIVIANI

Si desde un punto cualquiera de la región interior de un polígono regular de n lados, se trazan perpendiculares a sus lados, la suma de las longitudes de estas perpendiculares es igual a n veces el apotema del polígono.



(a)

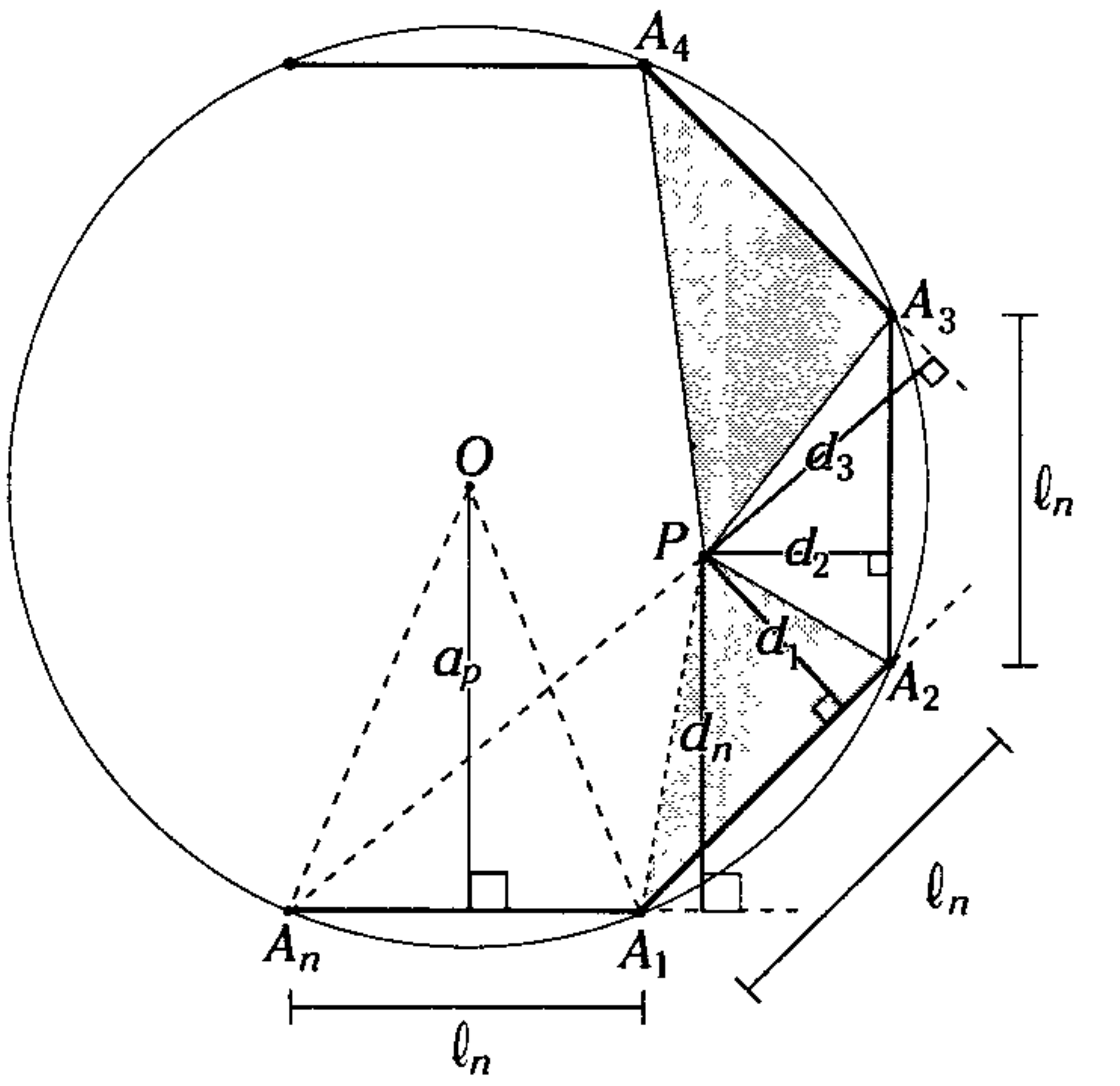
Sea $A_1A_2A_3...A_n$ un polígono regular de n lados y apotema a_p.

P : punto cualquiera de la región interior

d_i : distancia de P al lado $\overline{A_iA_{i+1}}$

$$\rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} d_i = n \cdot a_p}$$

Demostración



(*b*)

Figura 18.124

El área de la región poligonal es

$$n \cdot (\mathbb{A}_{\triangle A_1OA_n}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{A}_{\triangle A_iPA_{i+1}}$$

$$n\left(\frac{\ell_n \cdot a_p}{2}\right) = \frac{\ell_n \cdot d_1}{2} + \frac{\ell_n \cdot d_2}{2} + \ldots + \frac{\ell_n \cdot d_n}{2}$$

$$\therefore\ n \cdot a_p = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} di = n \cdot a_p$$

Nota

Viviani nació en Florencia en 1622 y falleció en 1703, fue discípulo de Galileo Galilei (1564 - 1642) y de Torricelli (1608 - 1647).

Teorema

Si el número de lados aumenta indefinidamente, entonces el área de la región poligonal regular tiende al área del círculo.

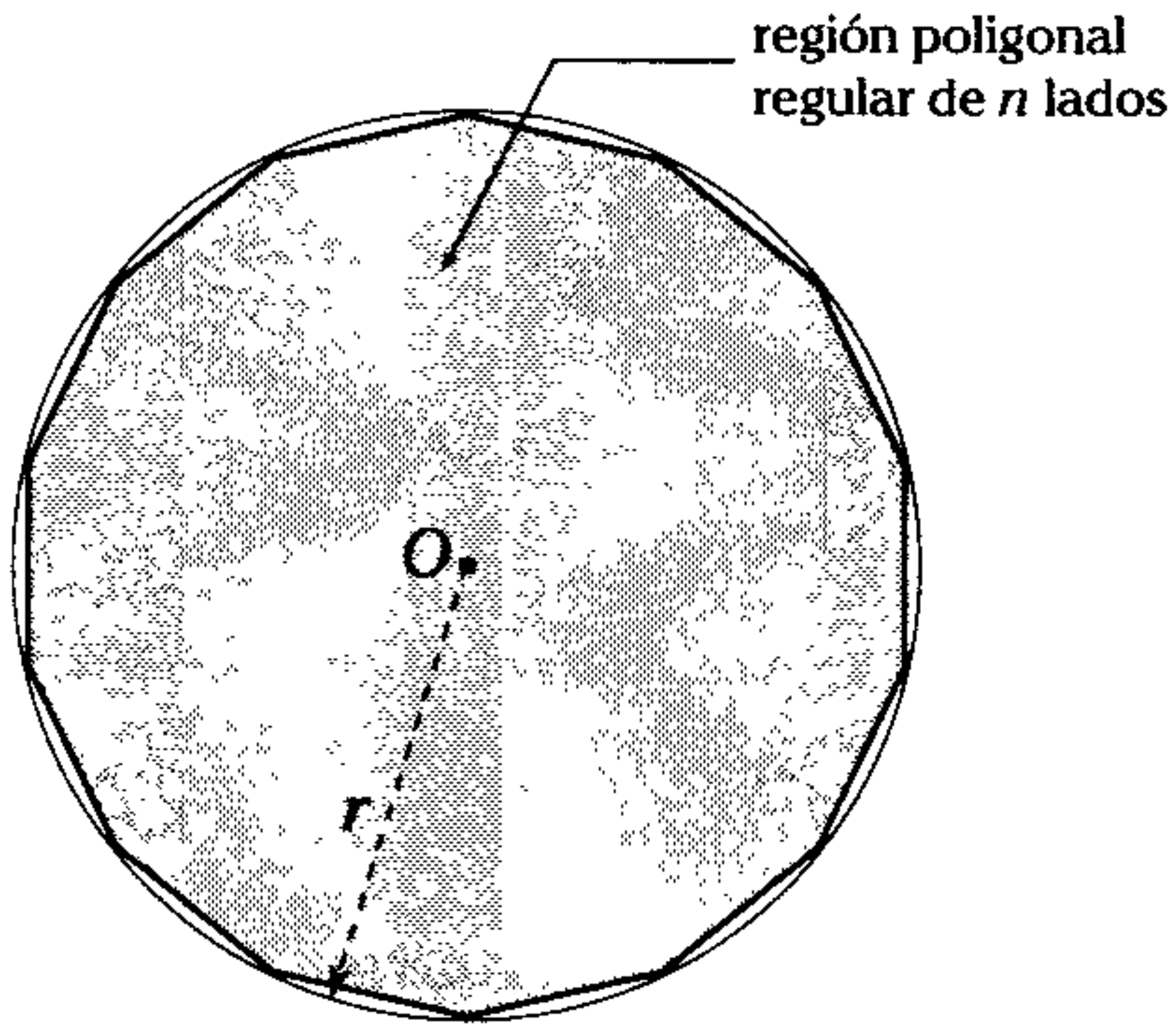


Figura 18.125

De lo anterior, el área de la región poligonal regular es

$$\mathbb{A} = a_p \cdot p \qquad \text{(I)}$$

Como n tiende al infinito

Entonces

a_p tiende a r

$2p$ tiende a C

La región poligonal tiende a ser el círculo, es decir, $\mathbb{A}$ es el área del círculo

Reemplazando (I)

$$\mathbb{A} = \frac{r(C)}{2}$$

Como

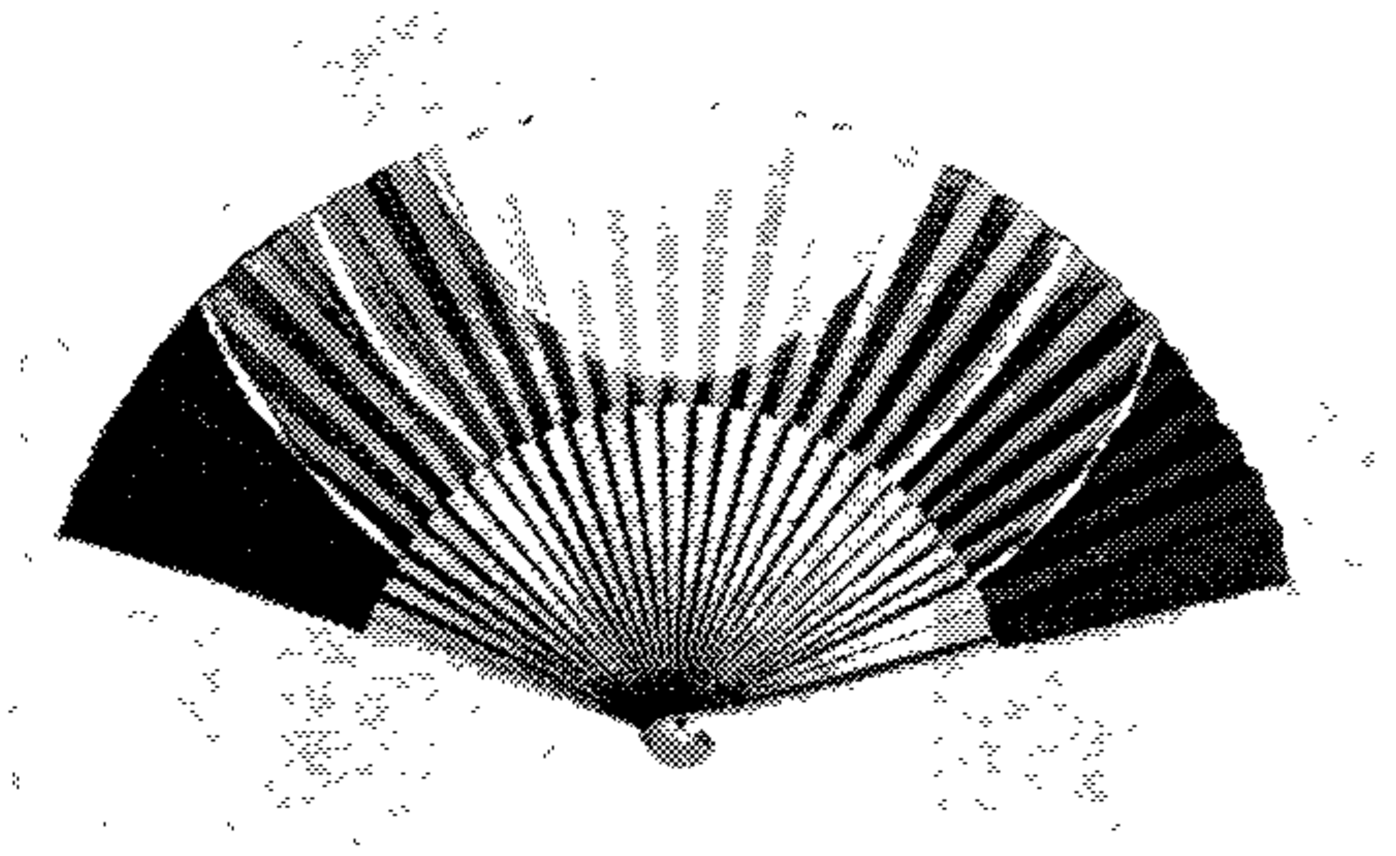
$$C = 2\pi r$$

$$\mathbb{A} = \frac{r(2\pi r)}{2} \rightarrow \mathbb{A} = \pi r^2$$

$$\therefore\ \boxed{\mathbb{A}_{\text{círculo}} = \pi r^2}$$

SECTOR CIRCULAR

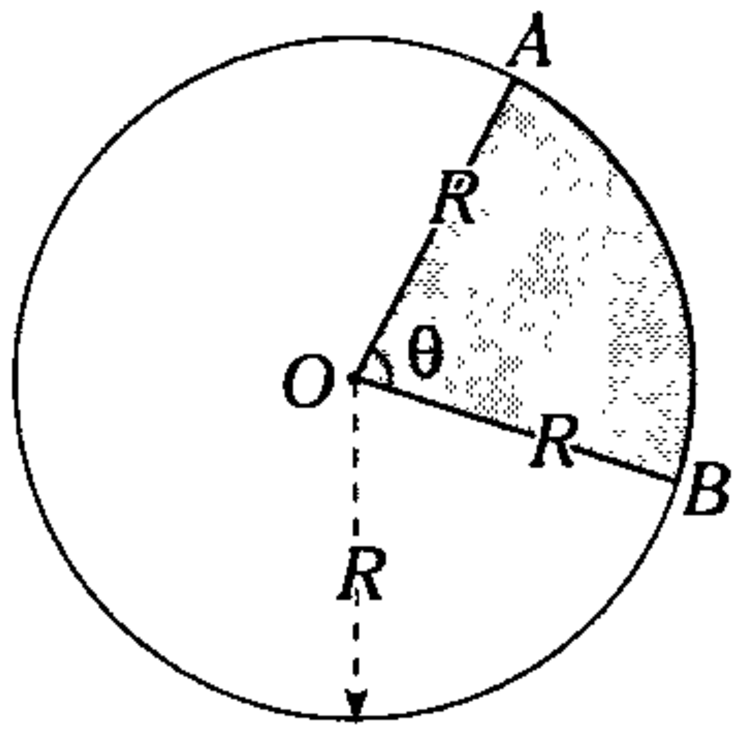
Es aquella porción del círculo, comprendido por un ángulo central y el arco correspondiente.



Al extender el abanico, realizamos un proceso similar, al del radio, cuando genera un sector circular.

Teorema

El área de un sector circular es igual al semiproducto de la longitud del arco del sector y el radio de ella.

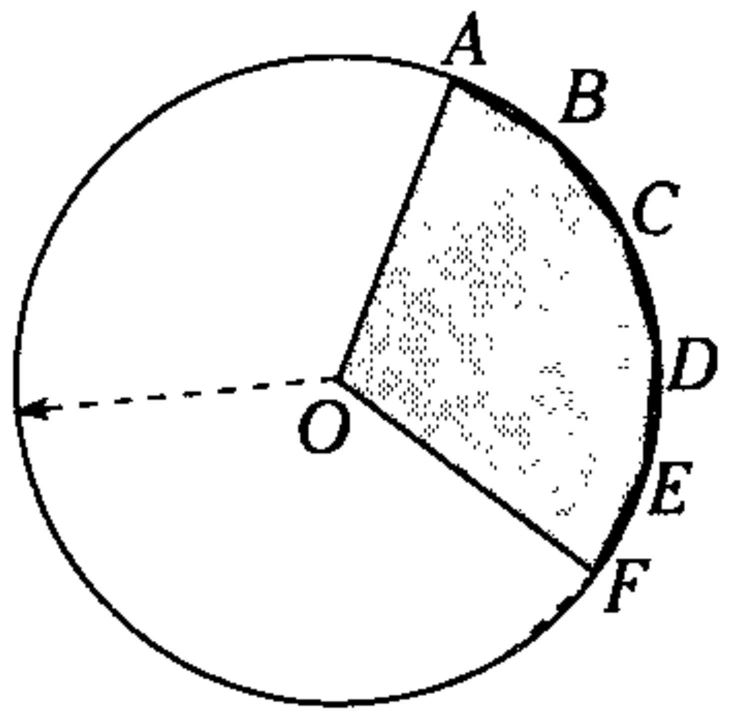


(a)

$L_{\overset{\frown}{AB}}$:longitud del arco AB.

$$\mathbb{A}_{\triangleleft AOB} = \frac{L_{\overset{\frown}{AB}} . R}{2}$$

Demostración



(b)

Figura 18.126

Sea $\lozenge OABCDEF$ sector poligonal regular

Si el número de lados de este sector aumenta indefinidamente ($n \to \infty$), entonces

$\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DE} \cup \overline{EF} ... \to$ a ser el arco AF.

$L_{\overset{\frown}{ABC..F}} \to L_{\text{longitud del arco } AF}$

$\mathbb{A}_{\lozenge OABCDEF} \to \mathbb{A}_{\triangleleft AOF}$

$$\to \mathbb{A}_{\triangleleft AOF} = \frac{L_{\overset{\frown}{AF}} . R}{2}$$

También se cumple

$$\mathbb{A}_{\triangleleft AOB} = \frac{\pi R^2 \theta}{360°}$$

Donde

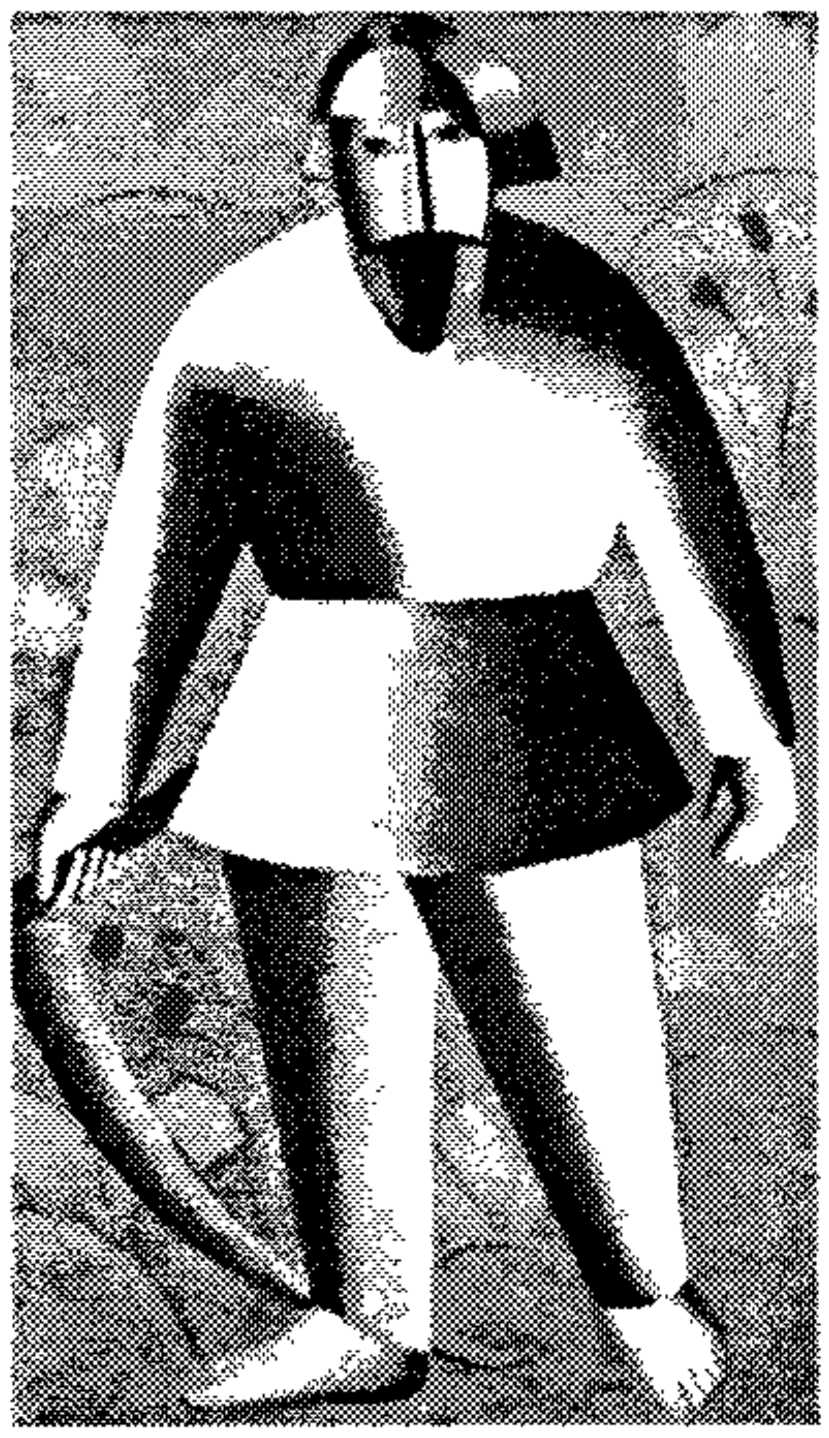
θ : medida del $\measuredangle AOB$

Demostración

Como $L_{\overset{\frown}{AF}} = \frac{\pi\theta}{180°} \cdot R$

$$\mathbb{A}_{\triangleleft AOF} = \frac{\pi\theta . R . (R)}{180°(2)}$$

$$\therefore \ \mathbb{A}_{\triangleleft AOF} = \frac{\pi\theta}{360°} R^2$$



Kasimir Malevich (1878 -1935) pionero del arte de la geometría abstracta, en su obra Reaper on red Background (1912-13) utiliza las regiones circulares en su grabado.

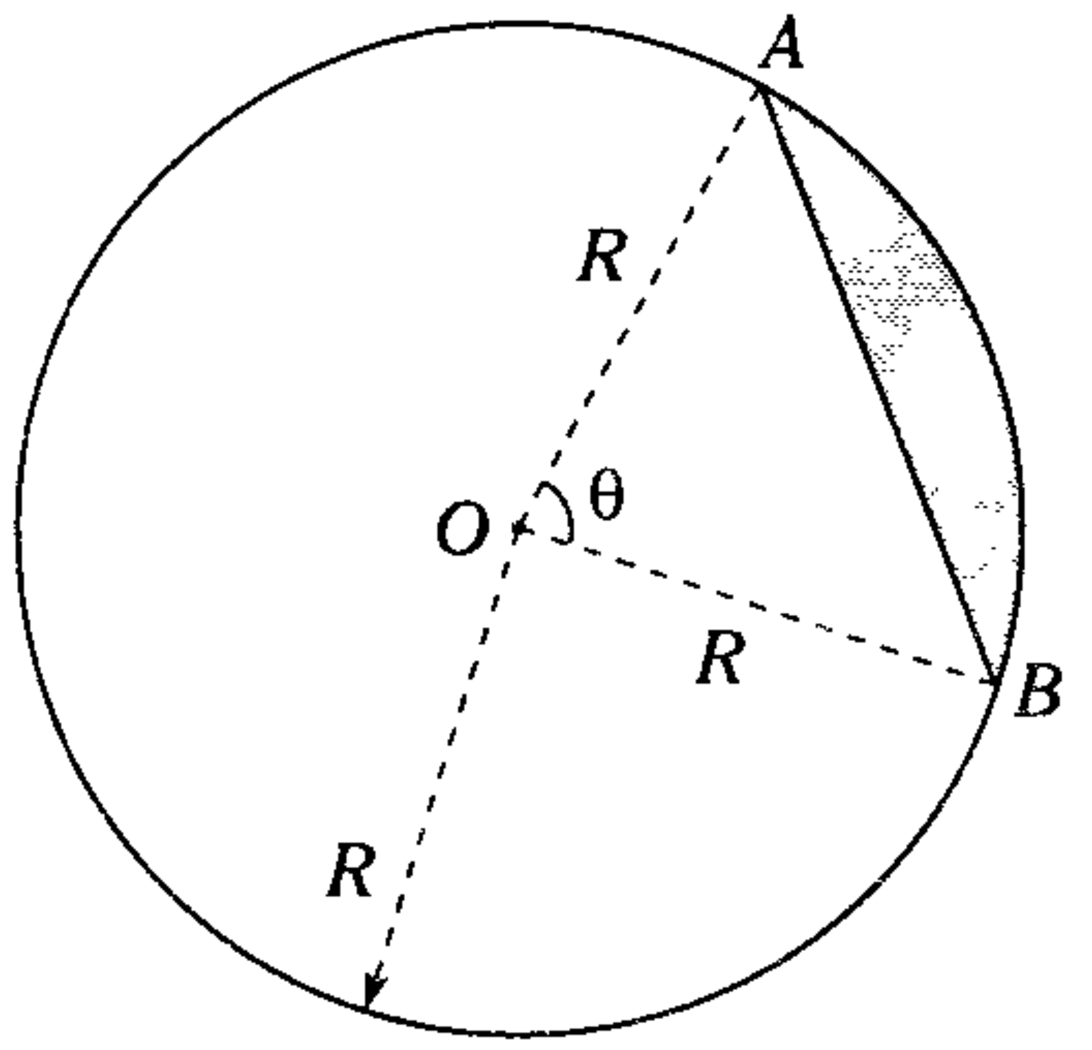
SEGMENTO CIRCULAR

Es aquella porción del círculo limitado por una cuerda y su correspondiente arco.

Propiedad

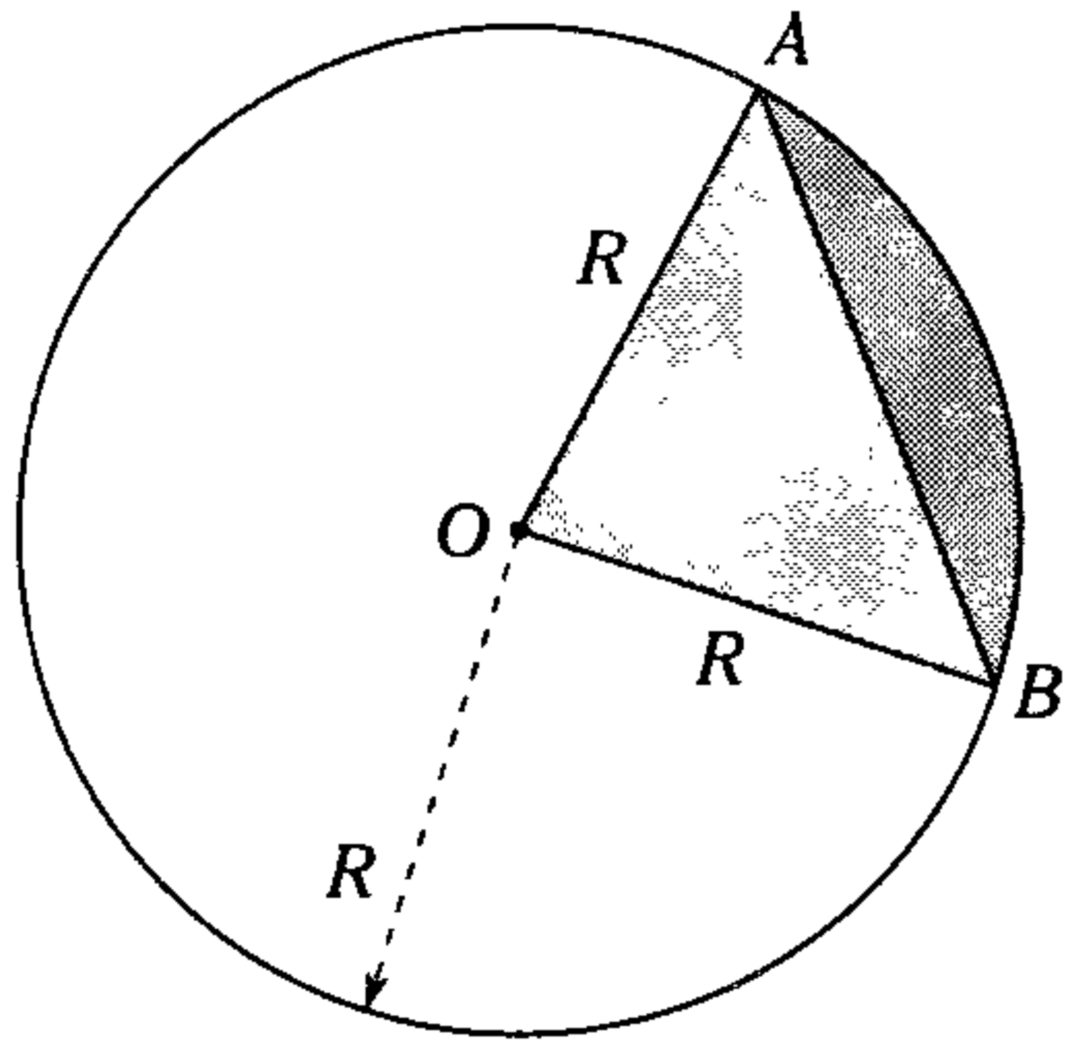
El área de todo segmento circular es igual a

$$\mathbb{A}_{\text{▲}AB} = \frac{\theta\pi R^2}{360°} - \frac{R^2 \operatorname{sen}\theta}{2} \qquad \theta < 180°$$



(a)

Demostración



(b)

Figura 18.127

Se observa

$$\mathbb{A}_{\text{▲}AB} = \mathbb{A}_{\text{◀}AOB} - \mathbb{A}_{\triangle AOB}$$

$$\mathbb{A}_{\text{▲}AB} = \frac{\theta\pi R^2}{360°} - \frac{R^2 \operatorname{sen}\theta}{2}$$

El teatro de Epidauro tiene forma semicircular y era centro religioso del peloponeso. Toda ciudad griega por pequeña que fuese, tenía su propio teatro, instrumento de formación cultural y artística.

CORONA CIRCULAR

Es aquella porción de círculo, limitada por dos circunferencias concéntricas.

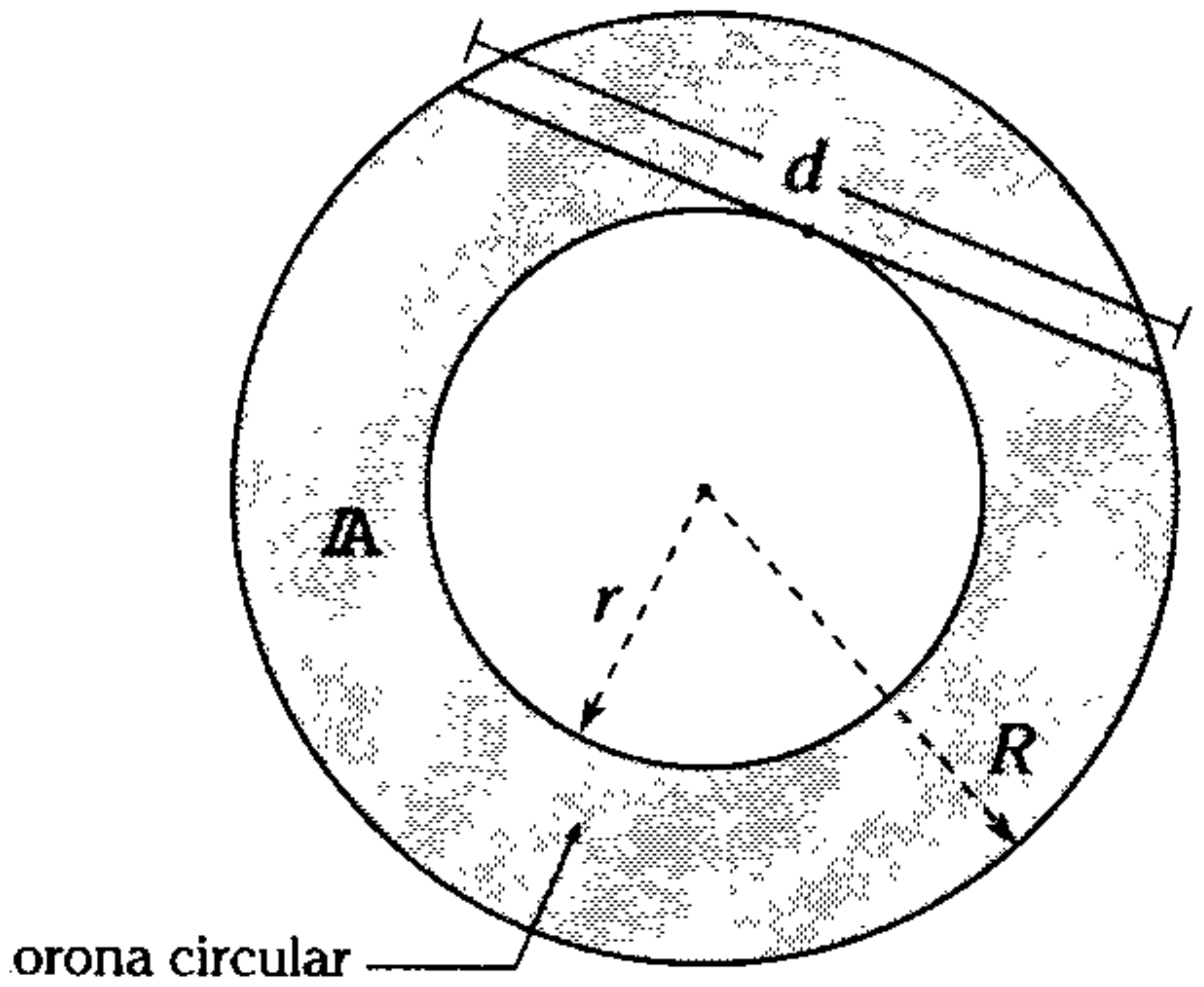
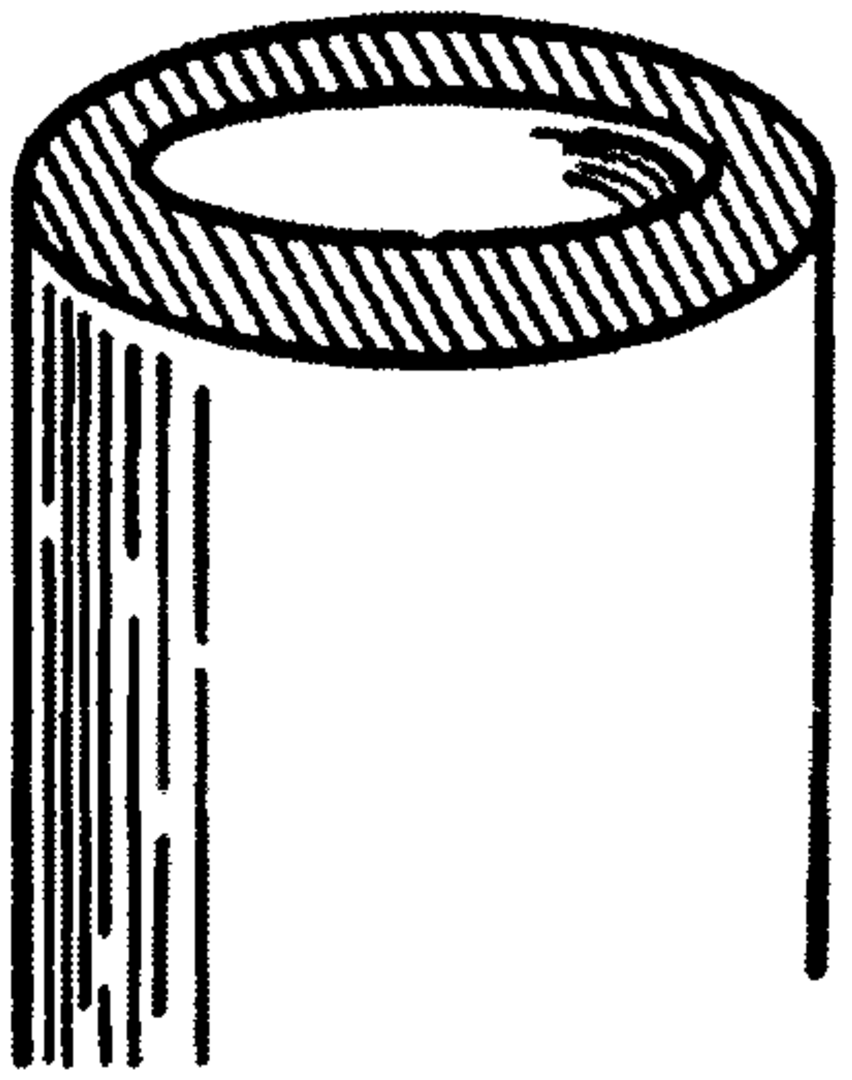


Figura 18.128

Propiedades

$$\mathbb{A} = \pi(R^2 - r^2)$$

$$\mathbb{A} = \frac{\pi d^2}{4}$$



Al hacer un corte axial a una tubería, notamos la presencia de la corona circular.

TRAPECIO CIRCULAR

Es aquella parte de una corona circular limitada por dos segmentos de radio de dichas circunferencias concéntricas y dos arcos.

Propiedad

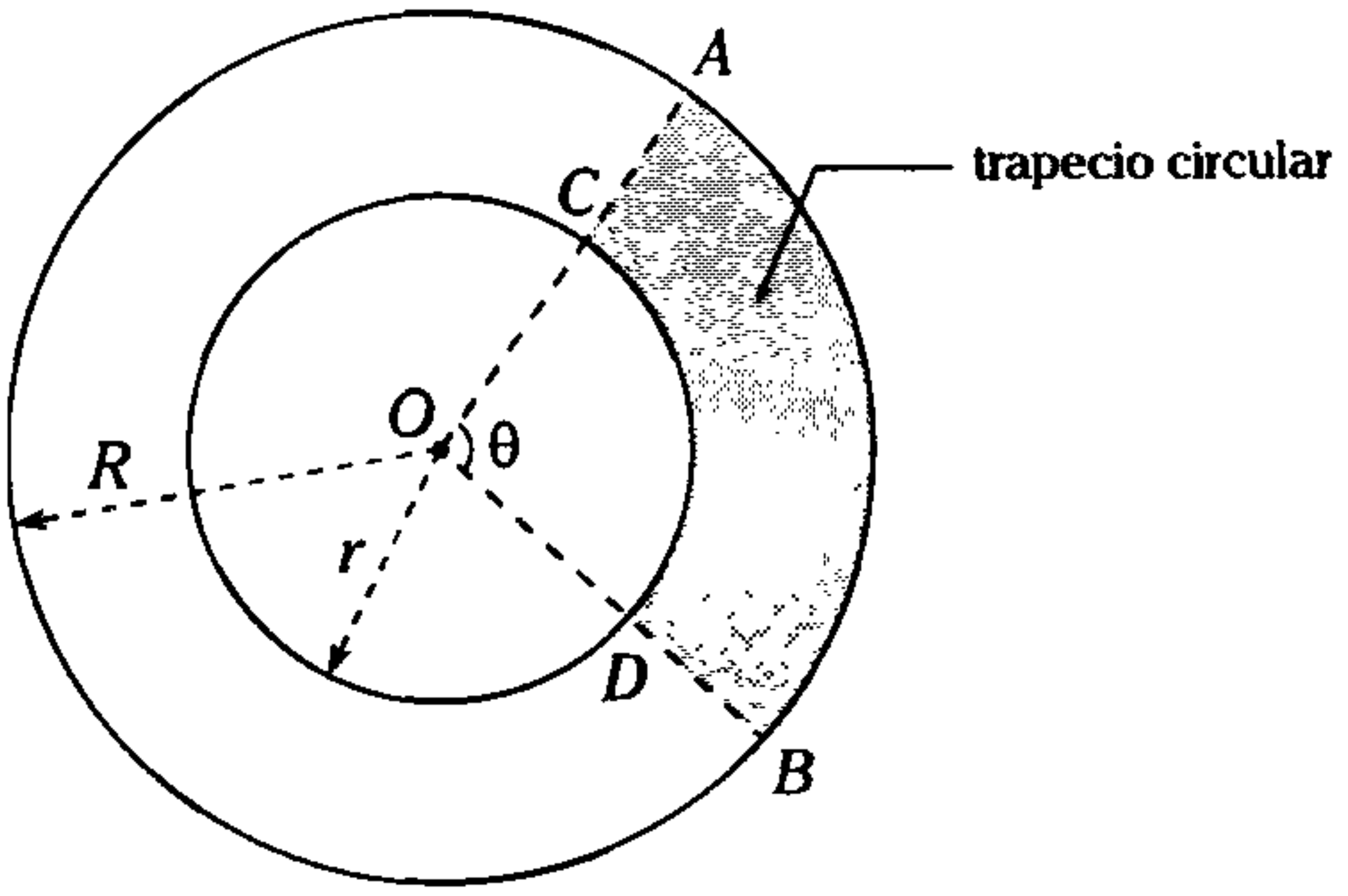


Figura 18.129

$$\mathbb{A}_{\nabla}=\frac{\theta}{360^{\circ}}\,\pi(R^2-r^2)$$

Demostración

Se observa

$$\mathbb{A}_{\nabla}=\mathbb{A}_{\blacktriangleleft AOB}-\mathbb{A}_{\blacktriangle COD}$$

$$\mathbb{A}_{\nabla}=\frac{\theta}{360^{\circ}}\,.\,\pi R^2-\frac{\theta}{360^{\circ}}\,.\,\pi r^2$$

$$\mathbb{A}_{\nabla}=\frac{\theta}{360^{\circ}}\,.\,\pi(R^2-r^2)$$

FAJA CIRCULAR

Es aquella porción de círculo limitada por dos cuerdas paralelas y los arcos entre dichas cuerdas.

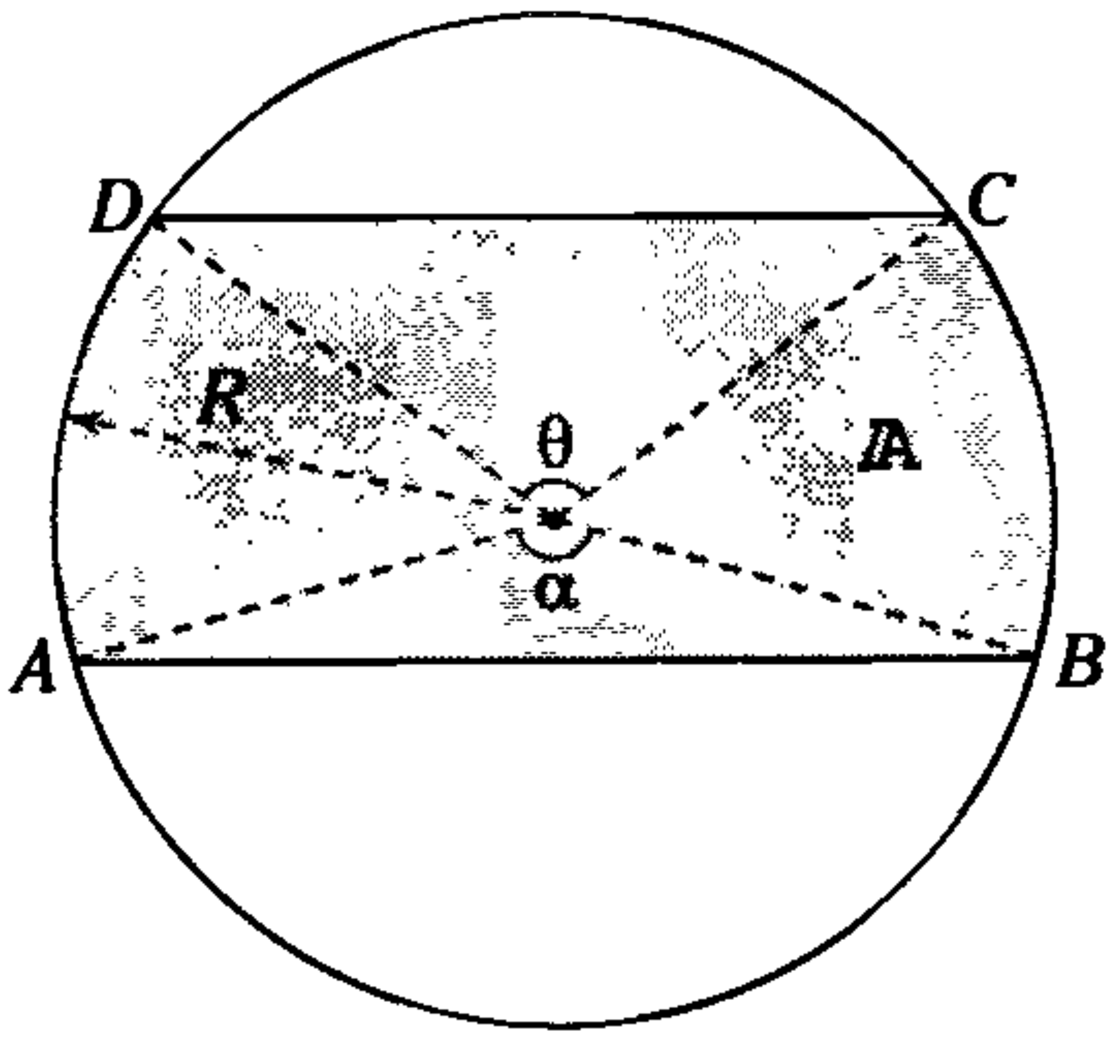


Figura 18.130

Según la figura, $\overline{DC}\,//\,\overline{AB}$

Propiedad

$$\mathbb{A}=\mathbb{A}_{\bullet}-\mathbb{A}_{\frown CD}-\mathbb{A}_{\frown AB}$$

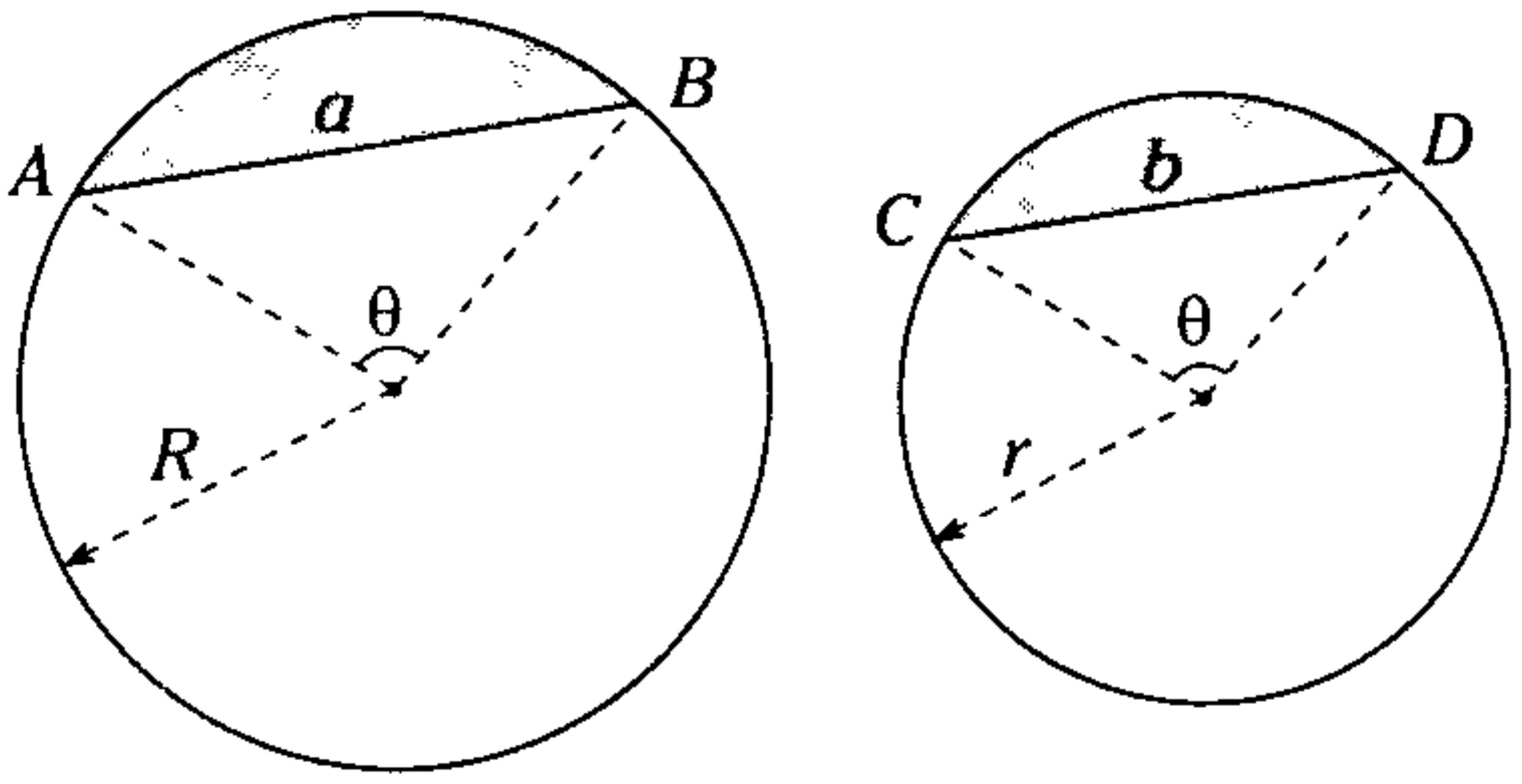
$$\rightarrow\ \mathbb{A}=\pi R^2-\left[\left(\frac{\theta}{360^{\circ}}\pi R^2-\frac{R^2}{2}\operatorname{sen}\theta\right)+\left(\frac{\alpha}{360^{\circ}}\pi R^2-\frac{R^2}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)\right]$$

Como

$$\therefore\quad A=R^2\left[\pi-\frac{\pi}{360^{\circ}}(\theta+\alpha)+\frac{1}{2}(\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\alpha)\right]$$

Teorema

Si en dos segmentos circulares de diferentes círculos, los ángulos centrales tienen la misma medida; entonces la razón de sus áreas es proporcional a los cuadrados de las longitudes de sus elementos homólogos.

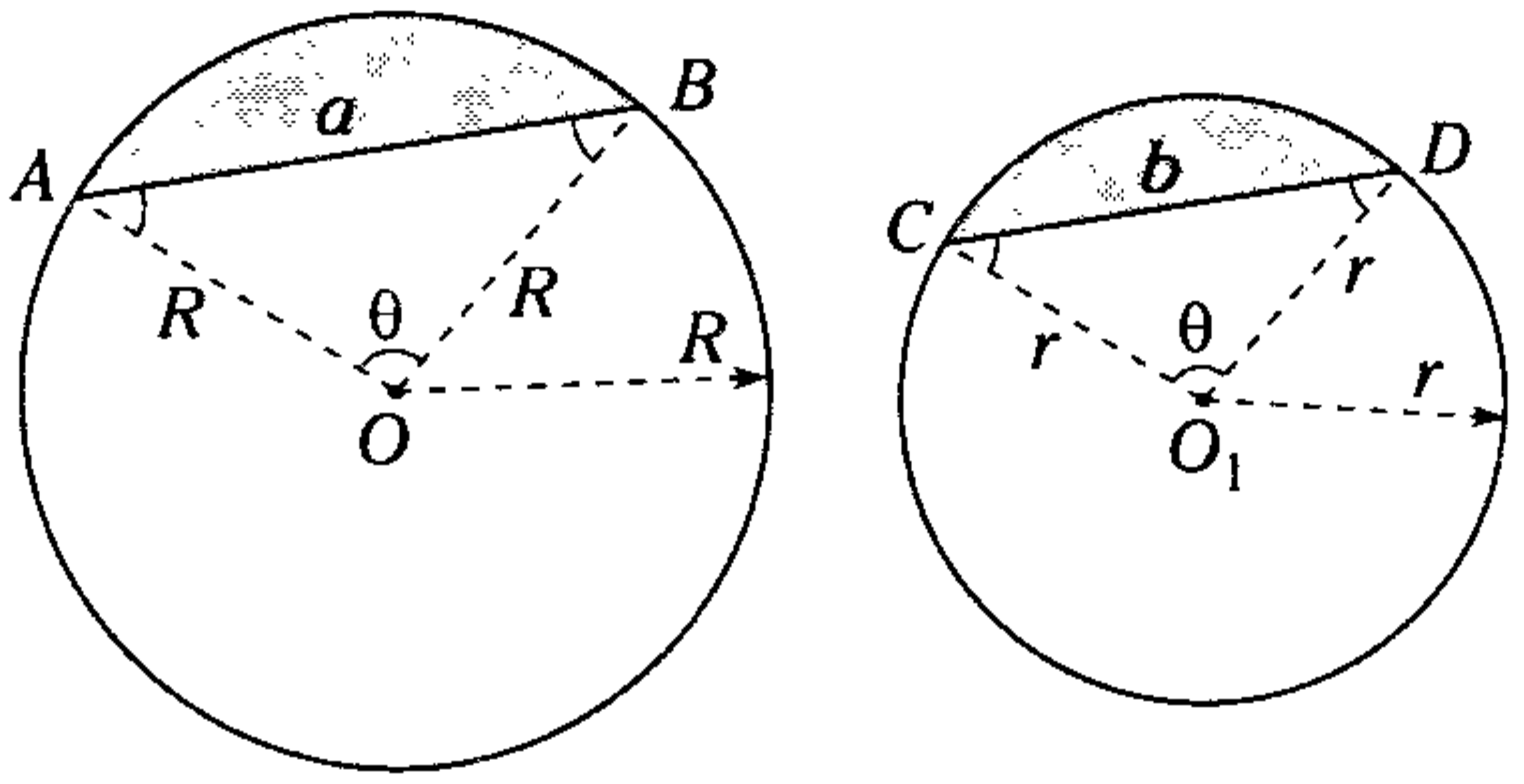


(a)

$$\frac{\mathbb{A}_{\frown AB}}{\mathbb{A}_{\frown CD}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \ldots = k^2$$

$k > 0$

Demostración



(b)

Figura 18.131

Se observa $\triangle AOB \sim \triangle CO_1D$ (A.A.A)

Luego, $\sphericalangle AOB \sim \sphericalangle CO_1D$

Entonces

$$\frac{R}{r} = \frac{a}{b} = \ldots = k$$

Sabemos

$$\mathbb{A}_{\frown AB} = \left(\frac{\theta}{360^\circ}\pi - \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}\right)R^2$$

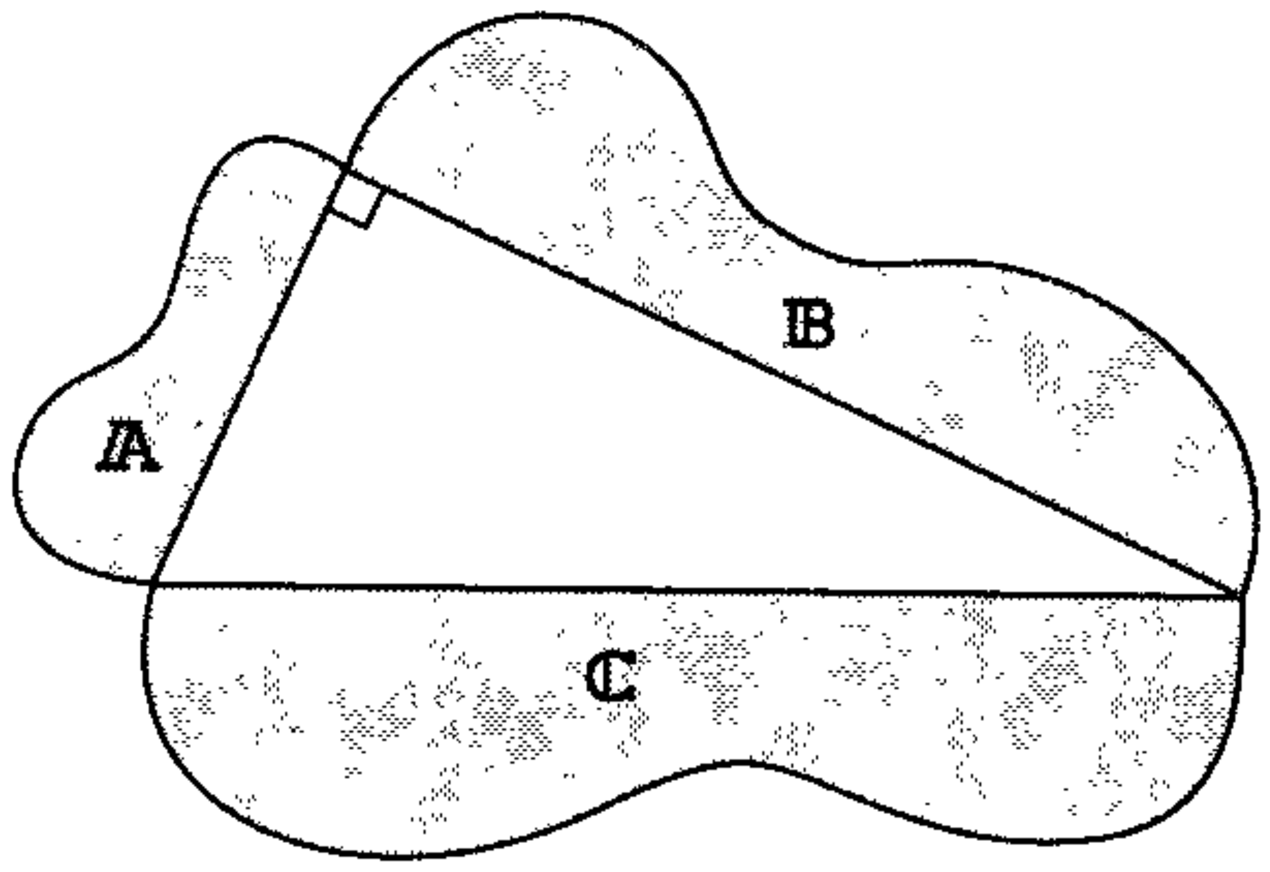
Posteriormente,

$$\frac{\mathbb{A}_{\frown AB}}{\mathbb{A}_{\frown CD}} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \ldots = k^2$$

Elegante y estilizado cubismo de Fernand Léger en su composición, Los discos (1919).

Teorema

La suma de áreas de las regiones semejantes, que tienen como elemento homólogo los catetos de un triángulo rectángulo, es igual al área de la región semejante cuyo elemento homólogo es la hipotenusa.



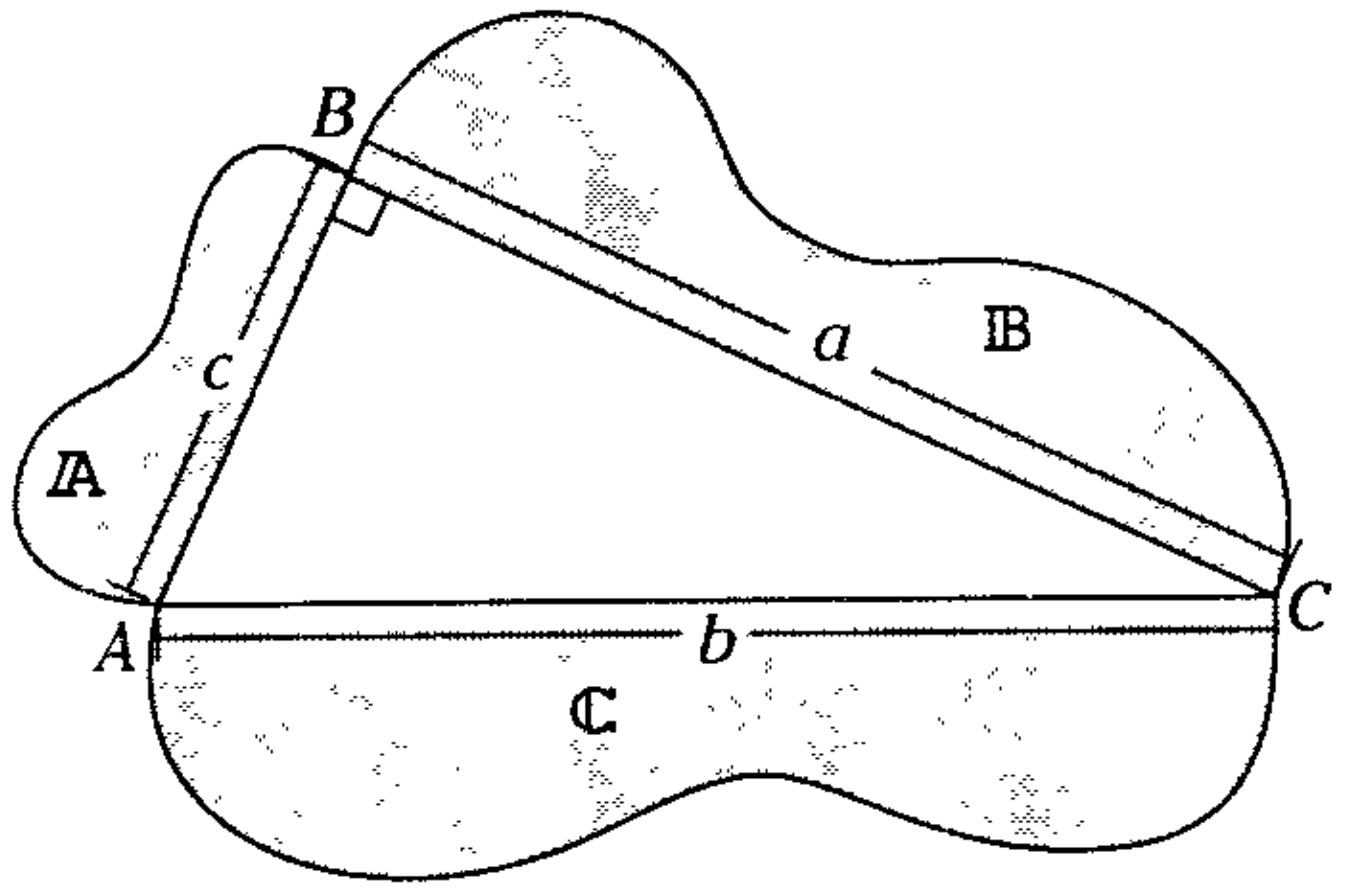
(a)

Según la figura 18.132 (a),

𝔸, 𝔹 y ℂ son las áreas de las regiones semejantes.

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} + \mathbb{B}$$

Demostración



(b)

Figura 18.132

Si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ son áreas de las regiones semejantes; entonces $\frac{\mathbb{A}}{c^2}=\frac{\mathbb{B}}{a^2}=\frac{\mathbb{C}}{b^2}$, por propiedad de proporciones.

$$\frac{\mathbb{A}+\mathbb{B}}{c^2+a^2}=\frac{\mathbb{C}}{b^2} \qquad \text{(I)}$$

Luego en ⊿ABC: $a^2+c^2=b^2$ (II)

(II) en (I)

$$\frac{\mathbb{A}+\mathbb{B}}{\cancel{a^2+c^2}}=\frac{\mathbb{C}}{\cancel{b^2}}$$

$$\therefore \boxed{\mathbb{A}+\mathbb{B}=\mathbb{C}}$$

Propiedad

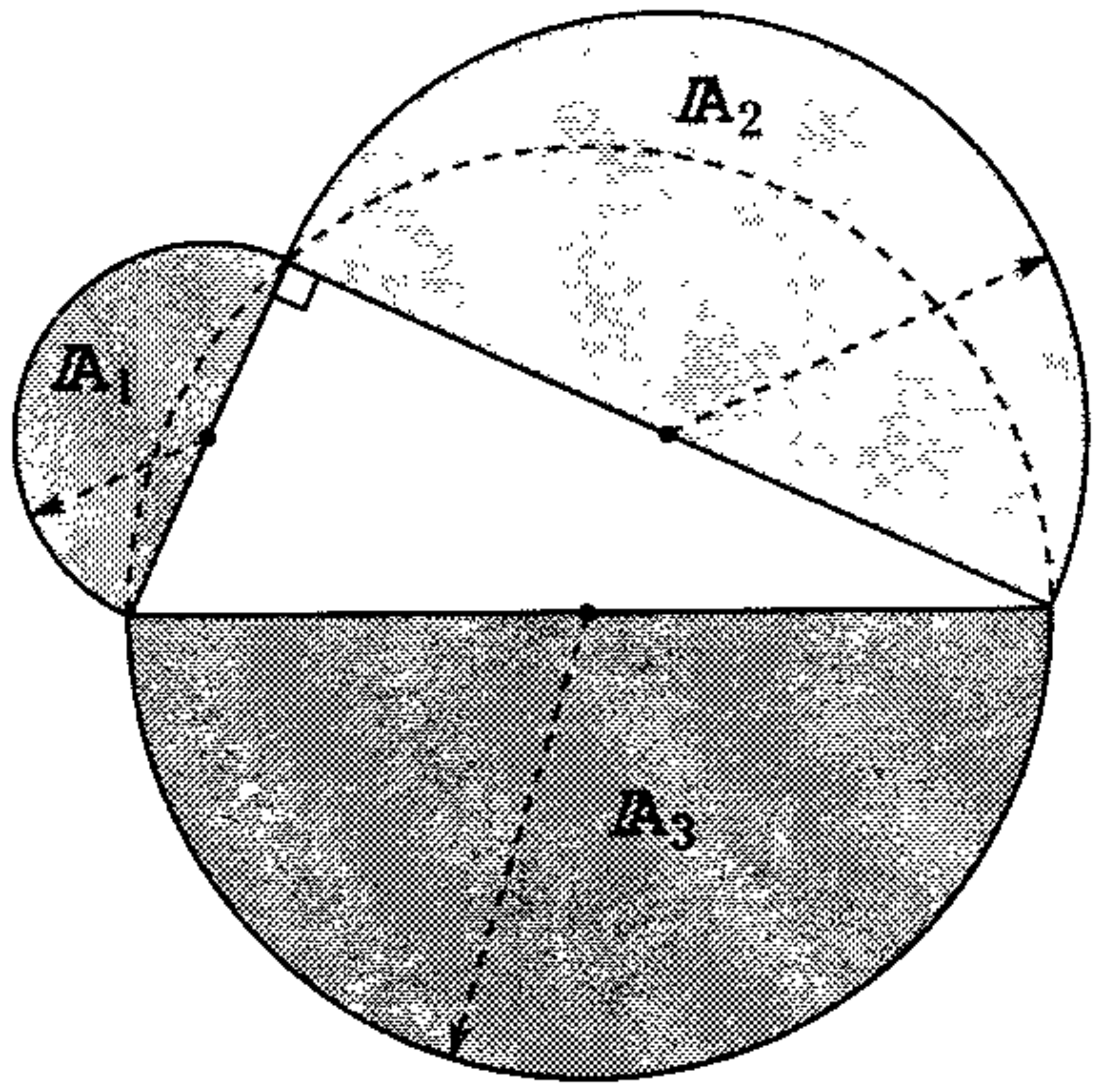


Figura 18.133

Se observa que $\mathbb{A}_1$; $\mathbb{A}_2$ y $\mathbb{A}_3$ son las áreas de las regiones semejantes.

Así

$$\boxed{\mathbb{A}_3=\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2}$$

LÚNULA

Es una región no convexa limitada por dos arcos de circunferererencias secantes de diferente centro.

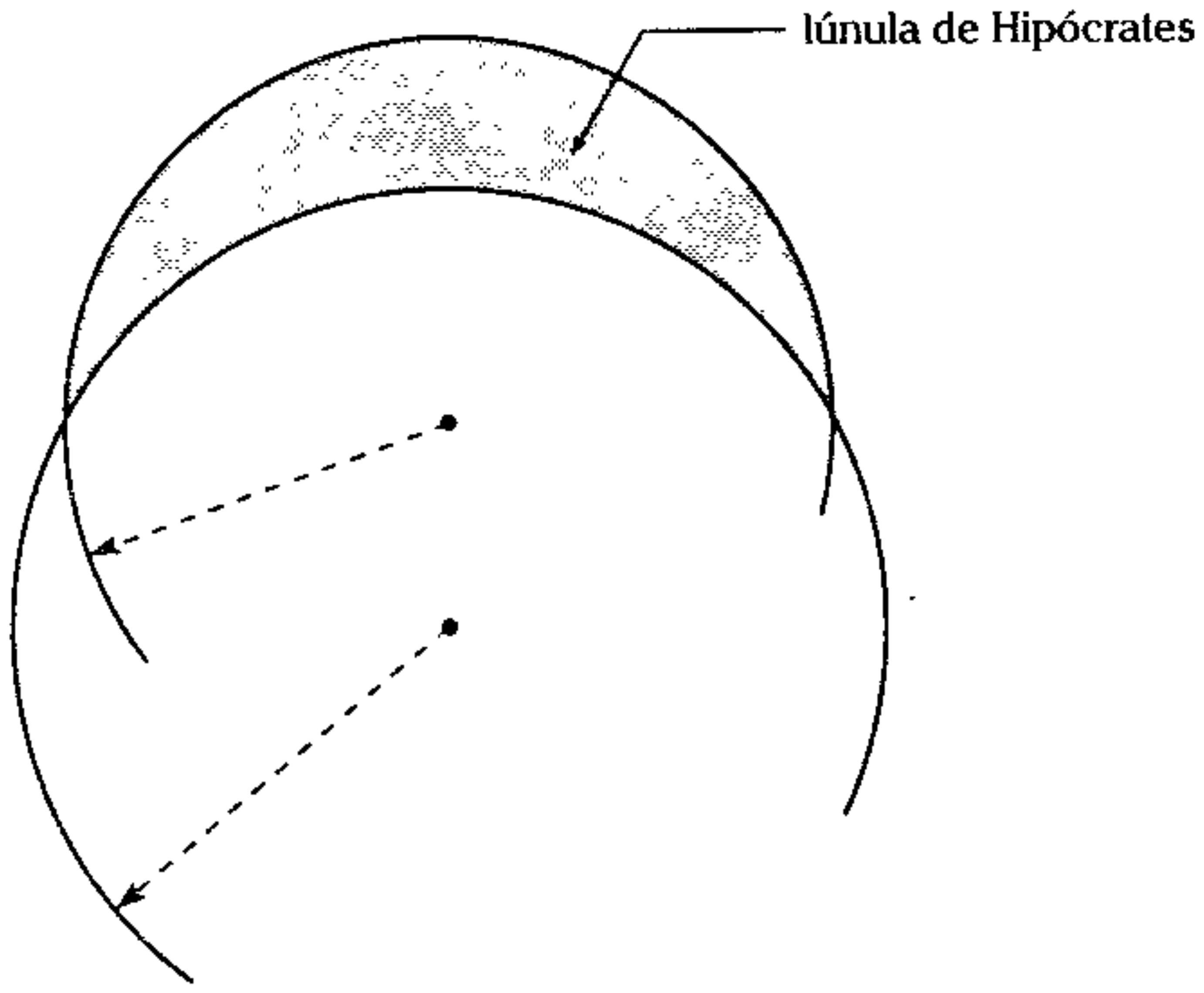
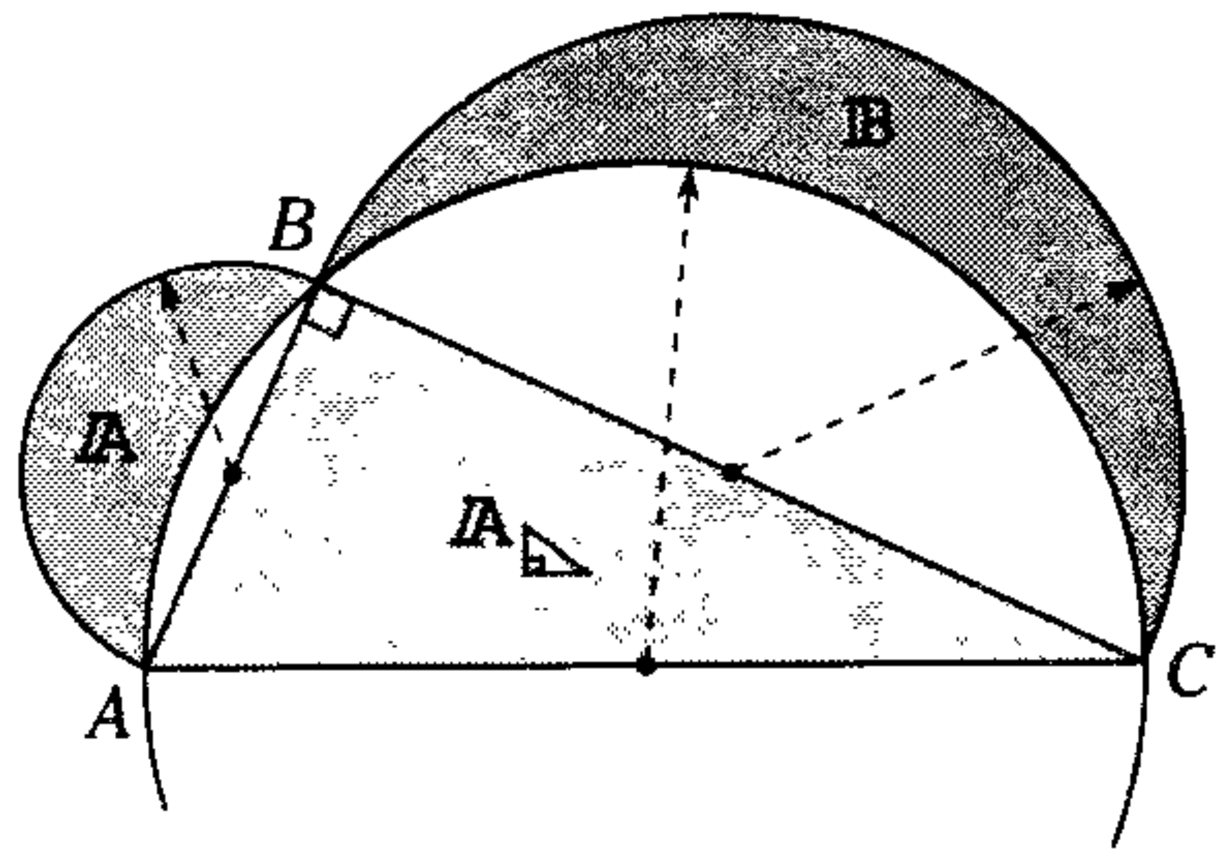


Figura 18.134

Propiedad

(Lúnulas de Hipócrates)



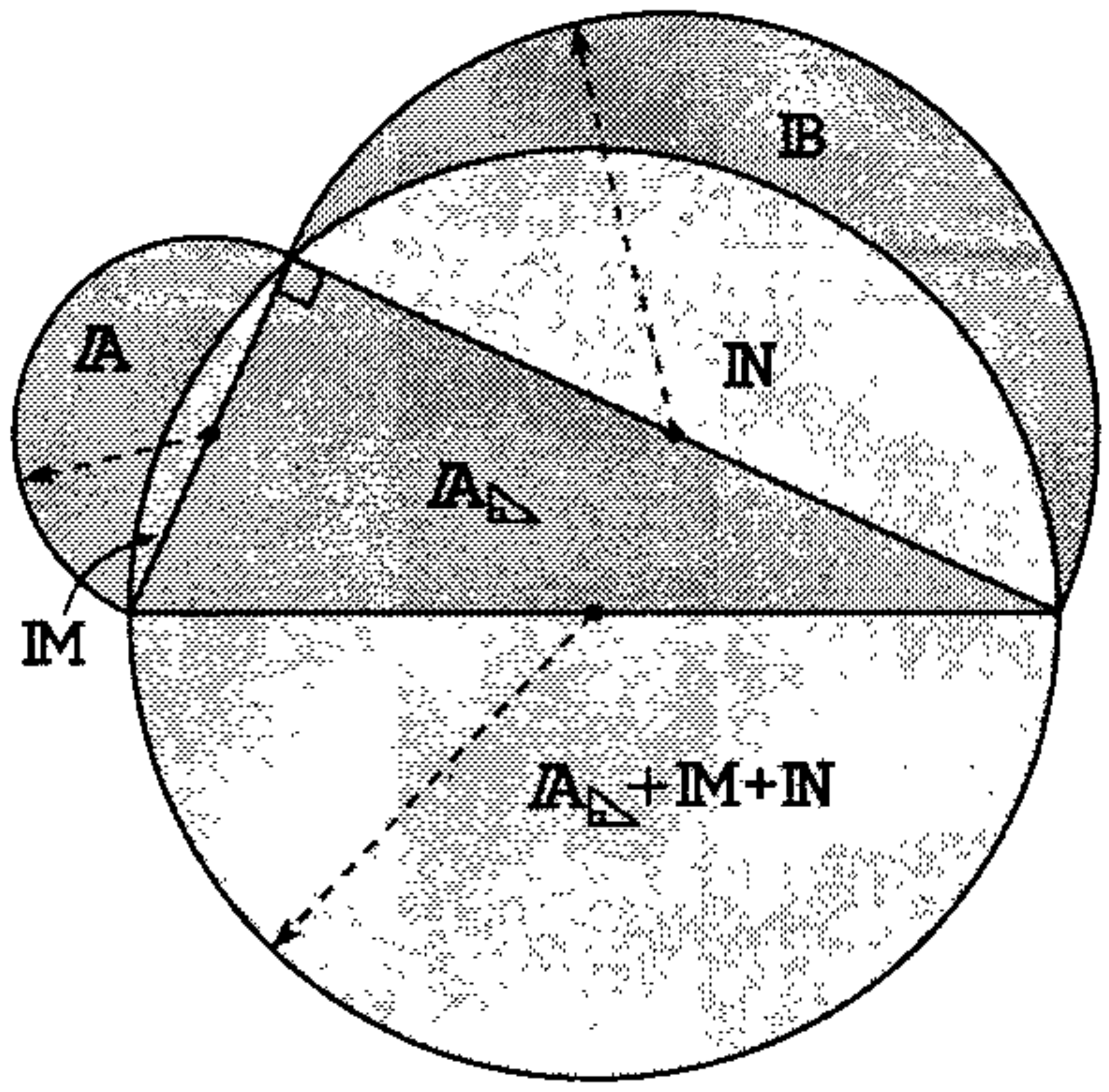
(a)

$\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son áreas de las lúnulas

$\mathbb{A}_{\triangle}$: área de la región triangular ABC.

$$\therefore \boxed{\mathbb{A}_{\triangle}=\mathbb{A}+\mathbb{B}}$$

Demostración



(b)

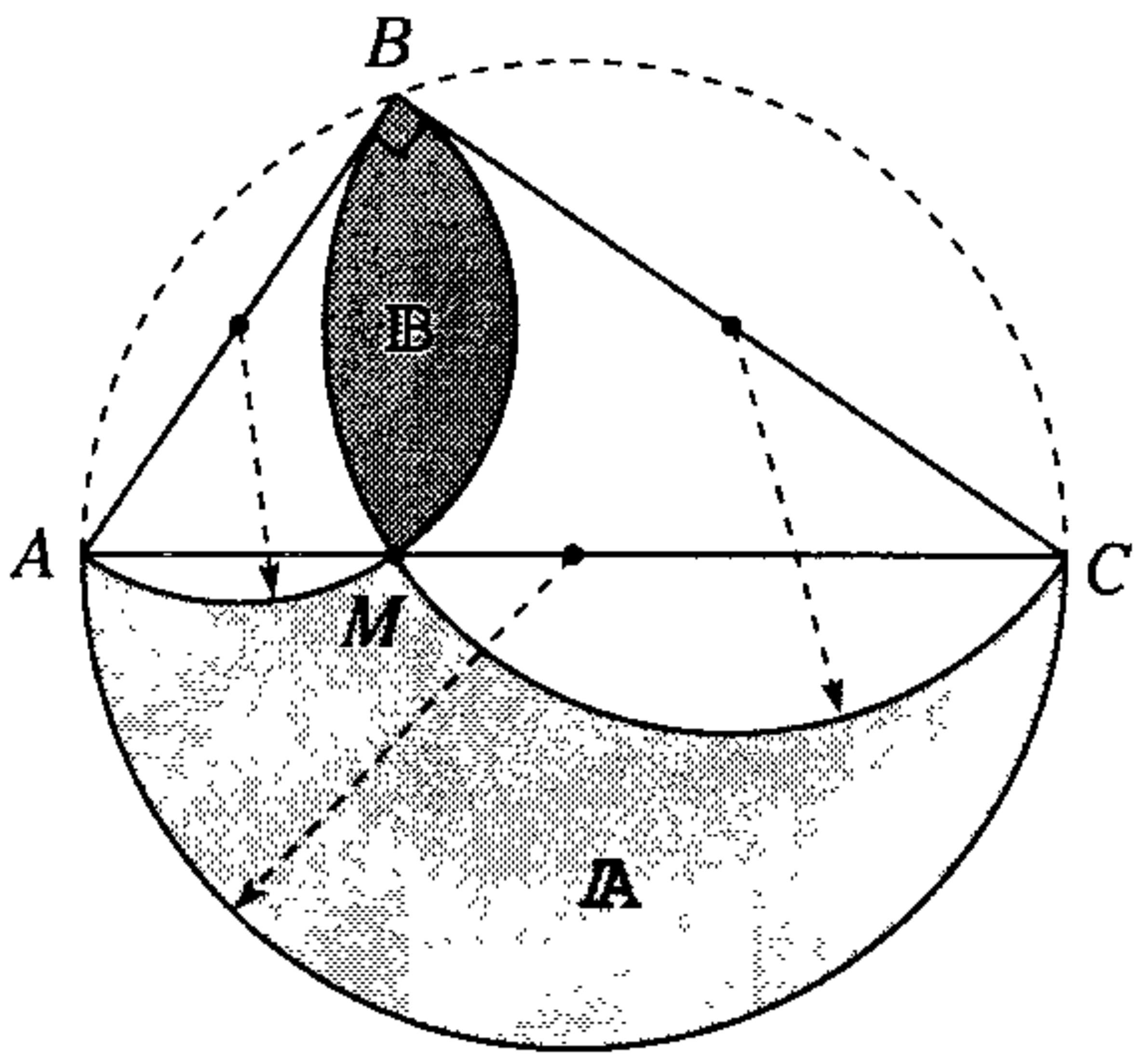
Figura 18.135

Como los semicírculos son semejantes, aplicando el teorema anterior.

$$\mathbb{A}_{\triangle} + \cancel{\mathbb{M}} + \cancel{\mathbb{N}} = \mathbb{A} + \cancel{\mathbb{M}} + \cancel{\mathbb{N}} + \mathbb{B}$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathbb{A}_{\triangle} = \mathbb{A} + \mathbb{B}}$$

Propiedad



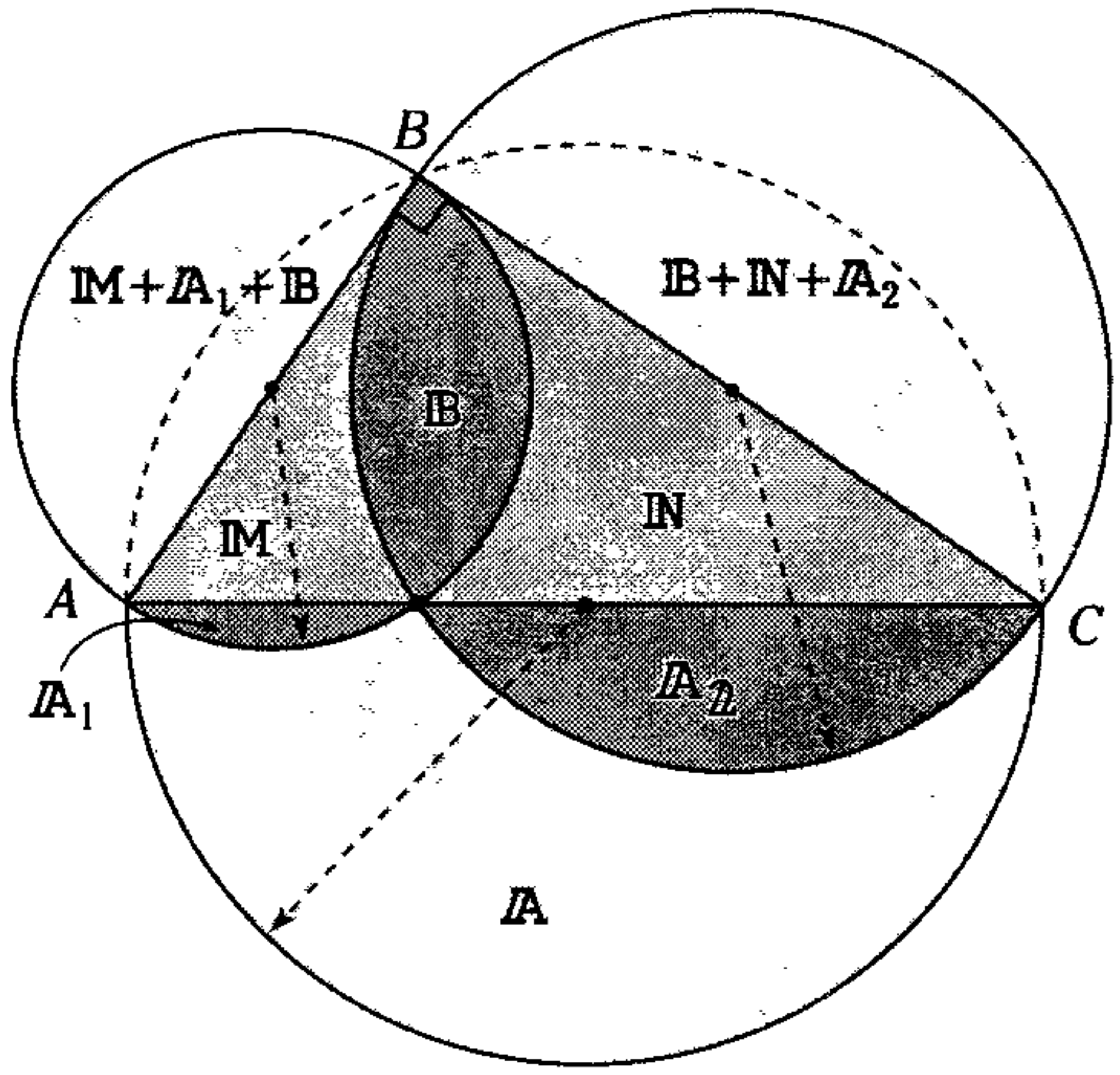
(a)

Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son las áreas de las regiones sombreadas.

$$\boxed{\mathbb{A}_{\triangle ABC} = \mathbb{A} - \mathbb{B}}$$

$$M \in \overline{AC}$$

Demostración



(a)

Figura 18.136

Sean

$\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$ áreas de las regiones indicadas.

Por lo anterior.

$$\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A} = \mathbb{M} + \mathbb{A}_1 + \mathbb{B} + \mathbb{B} + \mathbb{N} + \mathbb{A}_2$$

$$\mathbb{A} - \mathbb{B} = \mathbb{M} + \mathbb{N} + \mathbb{B}$$

Se observa

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = \mathbb{M} + \mathbb{B} + \mathbb{N}$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathbb{A}_{\triangle ABC} = \mathbb{A} - \mathbb{B}}$$

LECTURA

OBSESIÓN POR EL CÍRCULO

El círculo ha sido seguramente uno de los primeros símbolos dibujados por el hombre.

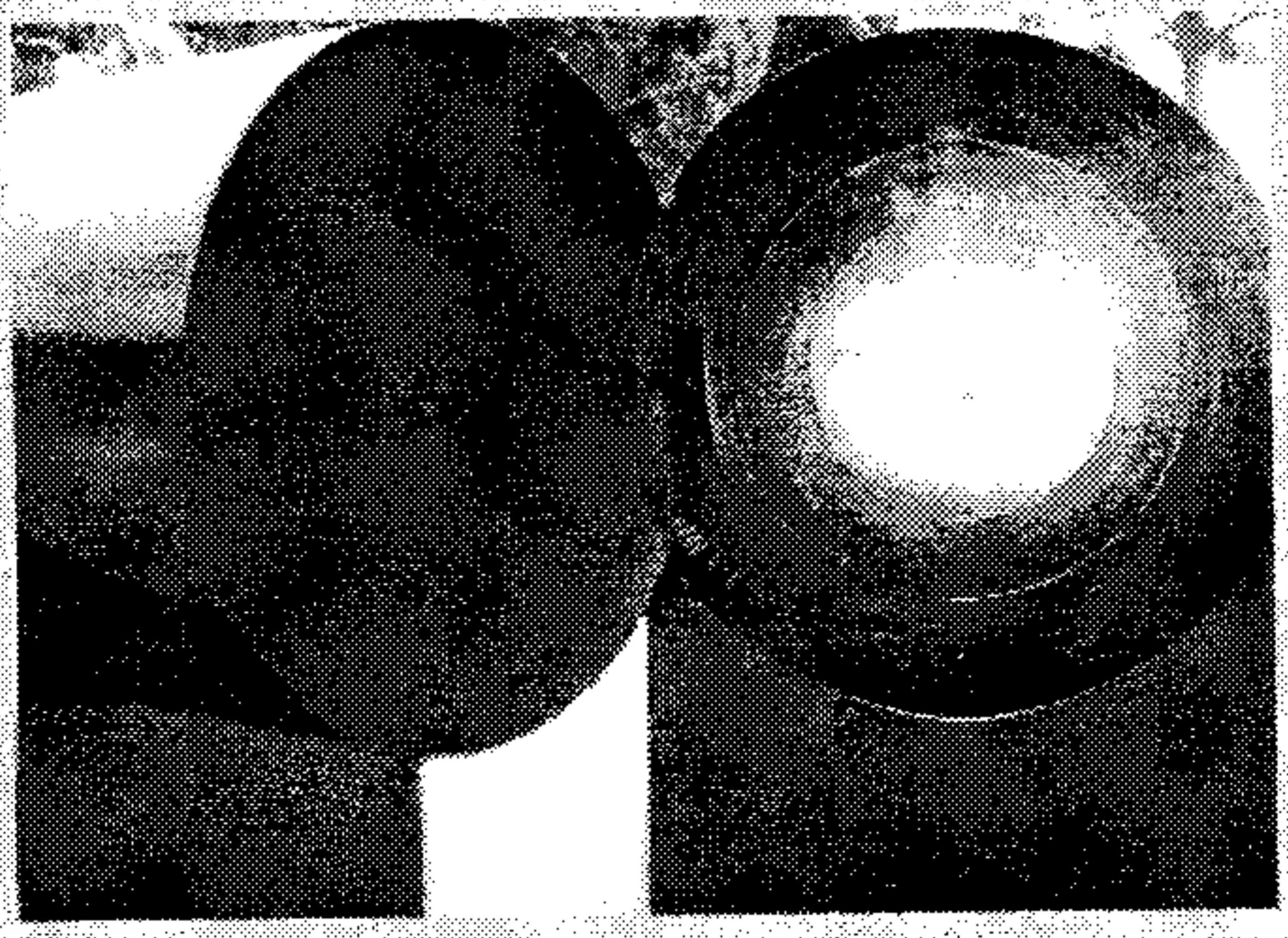
Muchas construcciones antiguas adoptaron la forma circular como los tip americanos y los yurt mongoles. Desde los círculos negolíticos británicos y a través de las formas megalíticas de piedras circulares de los templos, la forma circular ha imitado la redondez del horizonte visible, haciendo de cada construcción un pequeño mundo en sí mismo.

Antiguamente, las trayectorias de los planetas se explicaron por movimientos circulares, y fue tanta la obsesión por el círculo, que se generaron consecuencias nefastas. Se complicaba considerablemente los modelos astronómicos, al explicar las trayectorias muy irregulares de los planetas, se debían utilizar solo círculos. los grandes astrónomos como Eudoxio (hacia 406 - 355 a.n.e); Tolomeo (hacia 100 - 170) e incluso Copérnico (1473 - 1543), se imaginaron círculos auxiliares que giraban sobre círculos principales. Estos sistemas se volvían cada vez más complicados, con decenas de círculos, que formaban una especie de relojería muy compleja.

Se sabe que Kepler (1571 - 1630) creyó que se volvería loco, según sus propias palabras, cuando intentó explicar la trayectoria de Marte con círculos. Posteriormente, debió aceptar lo inconcebible: el planeta Marte describía una elipse alrededor del Sol, es decir, una figura semejante a un círculo levemente aplanado. Esta idea, muy audaz para la época, se impuso, poco a poco, como una evidencia. Los calculos y las observaciones de las leyes de la mecánica celeste llevaron a abandonar el círculo.

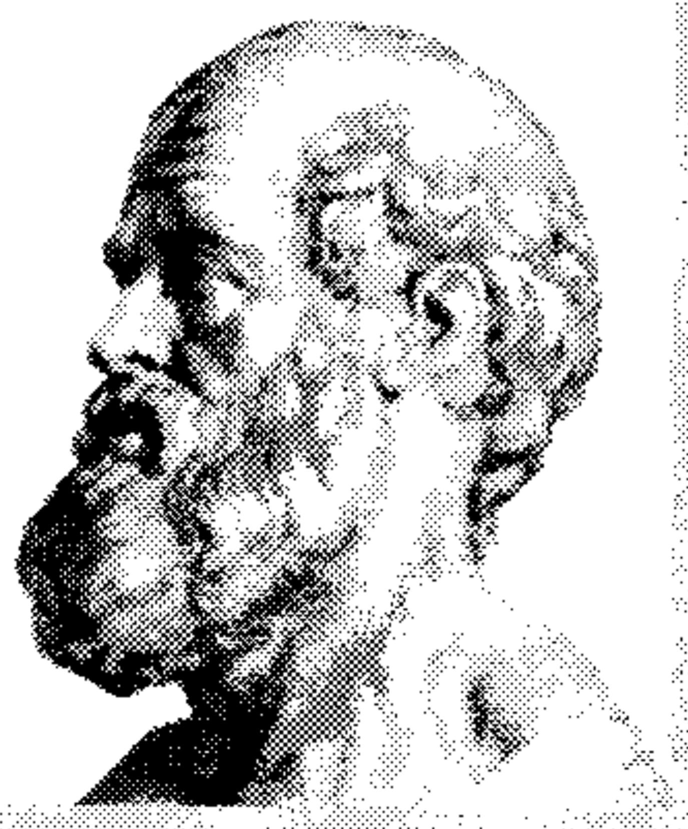
Aunque genial, el gran Galileo (1564 - 1642), que conocía los descubrimientos de Kepler, no quiso admitir que éste último tenía la razón, por ser un ferviente de la perfección del círculo.

En algún momento, nosotros hemos podido observar en la naturaleza formas circulares; en el cielo, los discos del Sol y la Luna; en animales, las manchas de algunos sapos y mariposas, o en las plantas, como la hoja de trébol. Así, también, en el cuerpo humano podemos encontrar formas circulares, como la membrana timpánica del oído, el iris del ojo, etc.



BIOGRAFÍA

HIPÓCRATES DE CHIOS (470 - 410 a.n.e.)



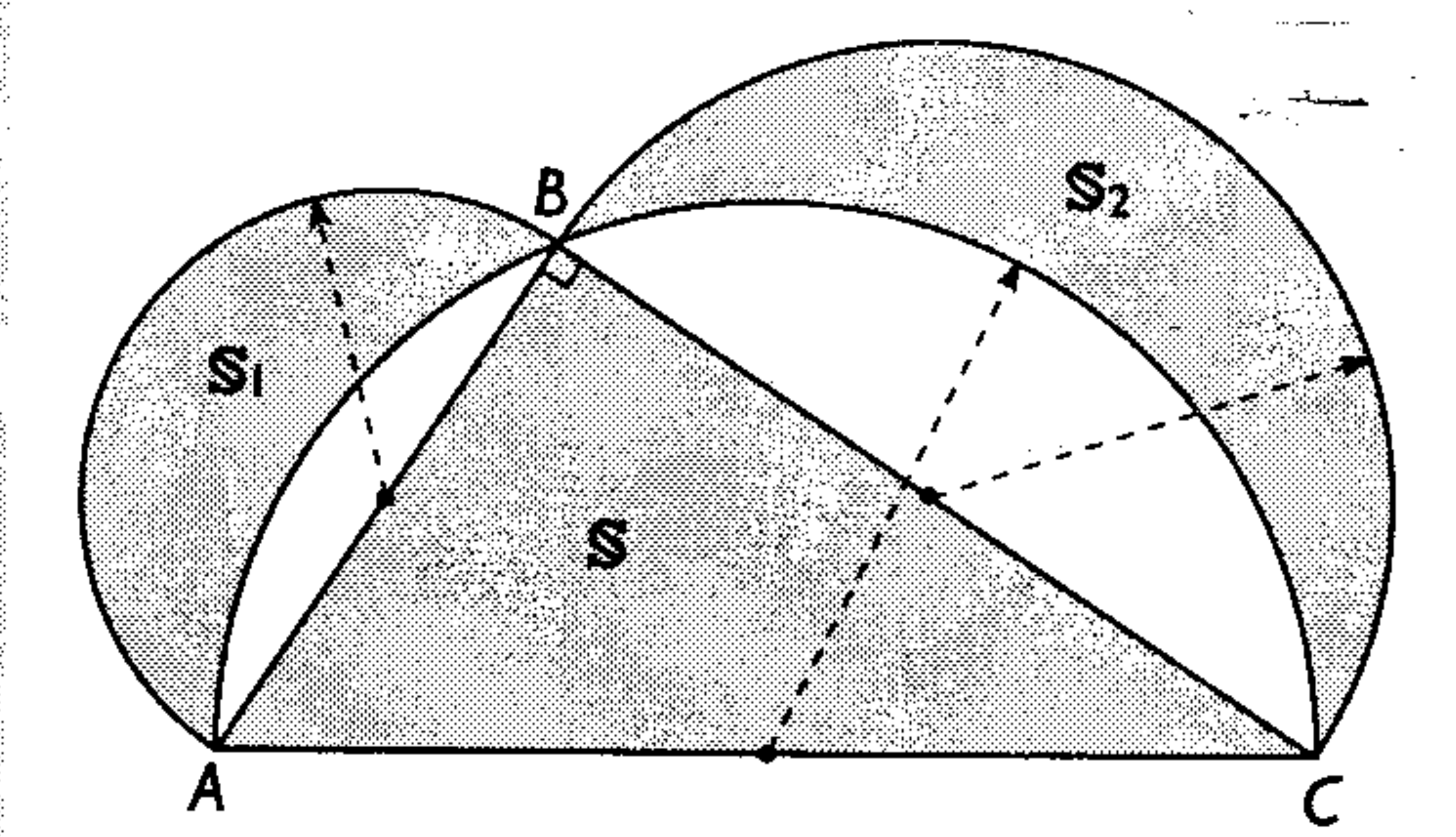
Nació en Chios (ahora Khios), mientras se dedicaba a enseñar en Atenas, trabajó en los problemas clásicos de ajustar el círculo y de duplicar el cubo. Poco se sabe de su vida, pero es reconocido por haber sido un excelente geómetra. Se comenta que en otros aspectos, era notablemente torpe y que carecía de sentido.

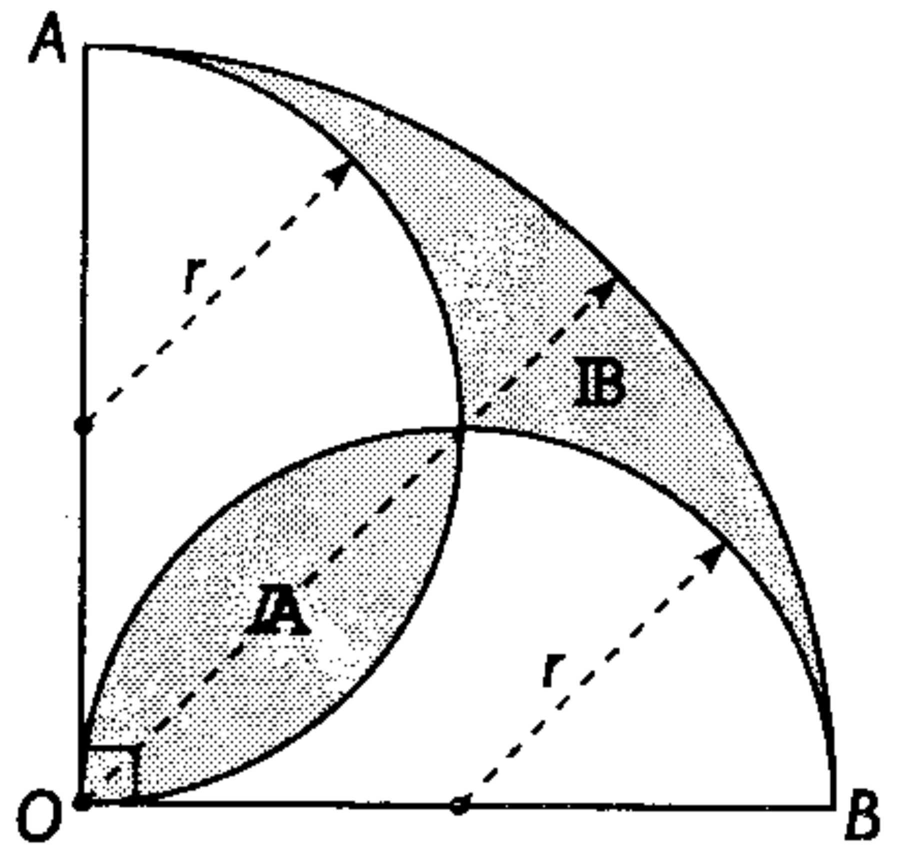
Hipócrates fue el primero que escribió elementos de la geometría y aunque su trabajo se perdió, debe haber contenido gran parte de lo que realizó Euclides.

Proclus, uno de los filósofos griegos más importante que vivió alrededor de 450 a.n.e. escribió: Hipócrates de Chios, era el descubridor de la cuadratura de la lúnula y quien compiló, por primera vez, los "Elementos".

El libro de Hipócrates incluyó soluciones geométricas a las ecuaciones cuadráticas y nociones de integración.

Eudemos de Rhodas (floreció aproxim. siglo IV a.n.e) que era un pupilo de Aristóteles (384 - 322 a.n.e), escribió la historia de la geometría en la cual describió la contribución de Hipócrates sobre la lúnula. Si este trabajo no sobrevivió, Simplicius de Cilicia, logró casi transcribirlo y a excepción de algunos puntos tomados de los elementos de Euclides.





$\mathbb{S}_1$: área de la lúnula (AB).
$\mathbb{S}_2$: área de la lúnula (BC).
$\mathbb{S}$: área de la región triangular ABC.

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$$

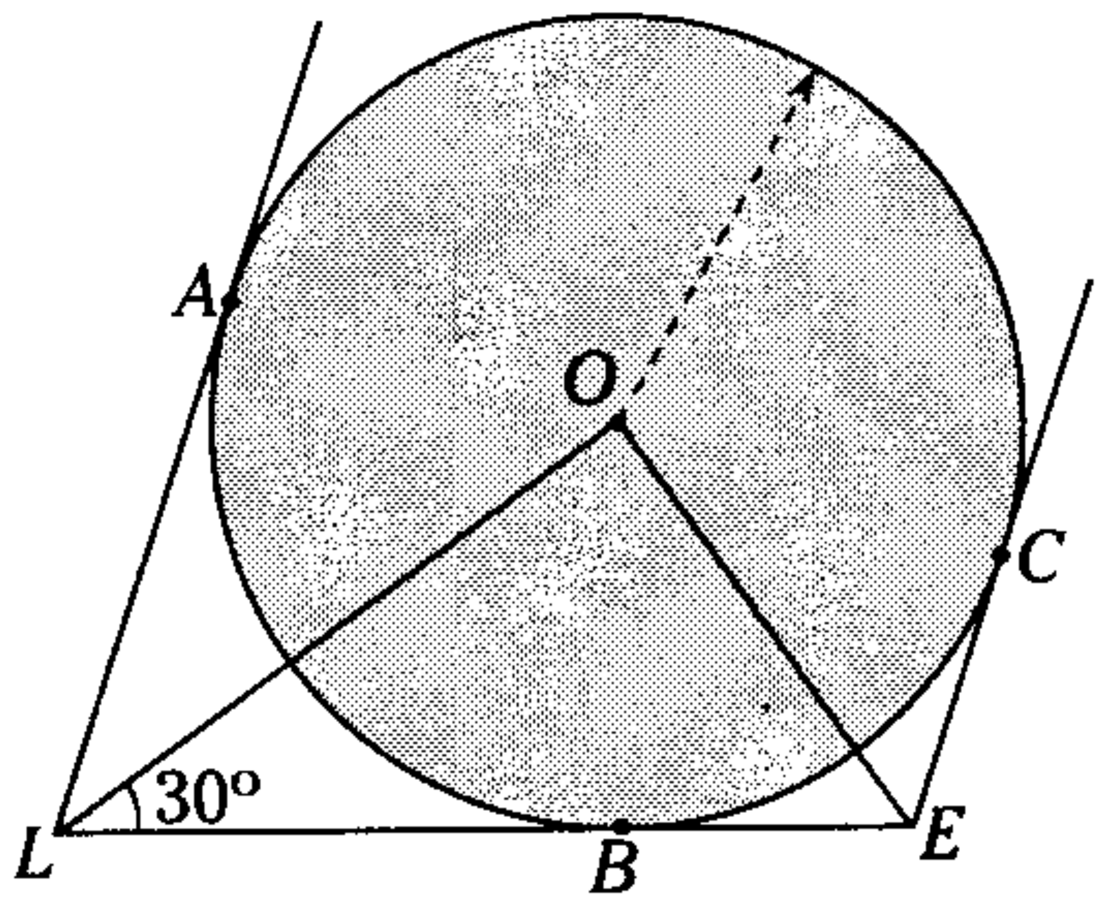
Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son áreas de las regiones sombreadas, se cumple

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}$$

Problemas Resueltos

Problema 1

En la figura, A, B y C son puntos de tangencia, si el área de la región triangular OLE es $\mathbb{A}$ y $\overline{AL} \parallel \overline{CE}$, halle el área del círculo.



A) $2\pi\mathbb{A}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi\mathbb{A}$ C) $\dfrac{\pi}{2}\mathbb{A}$

D) $\sqrt{2}\pi\dfrac{\mathbb{A}}{4}$ E) $3\sqrt{3}\pi\dfrac{\mathbb{A}}{2}$

Resolución

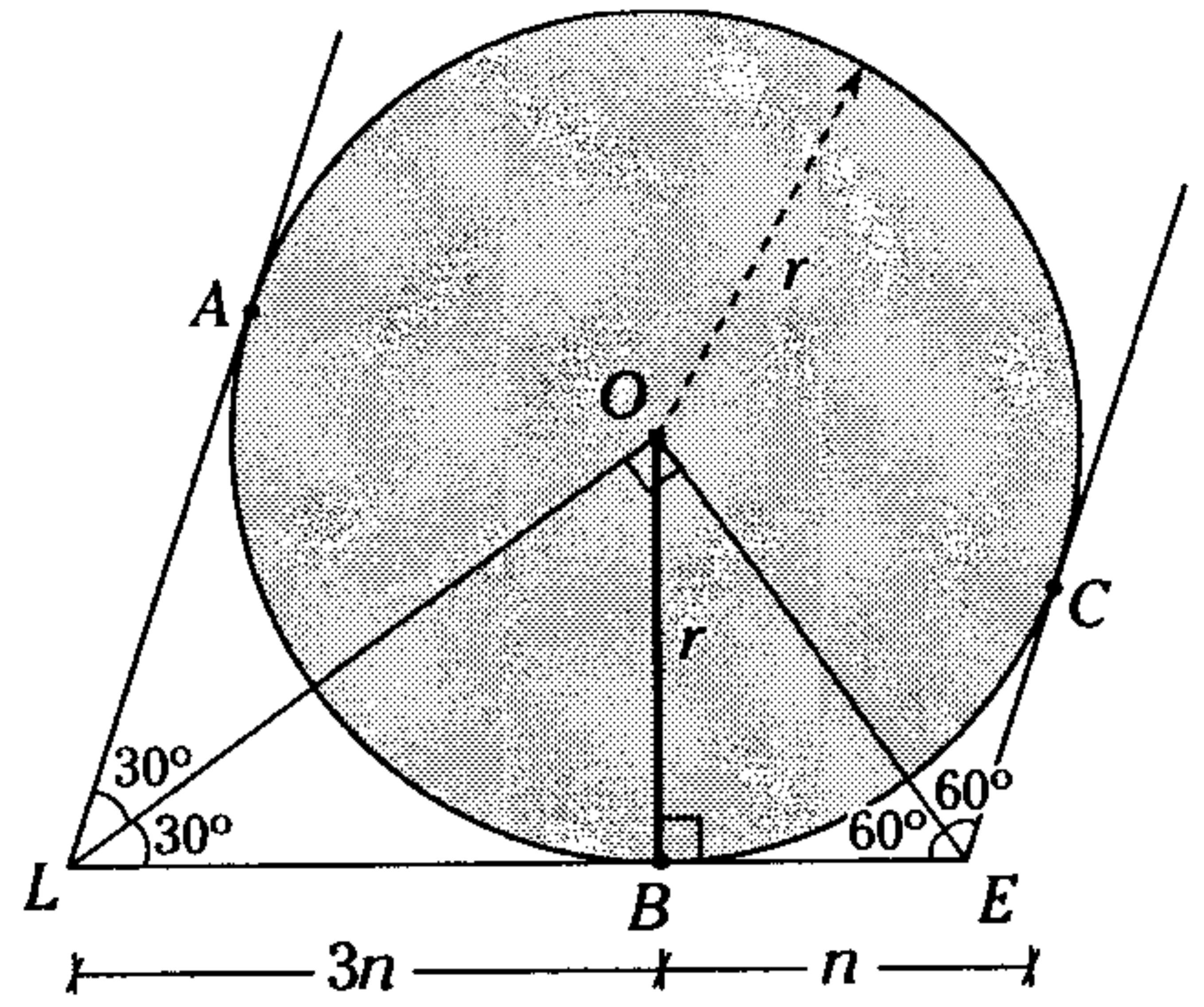


Figura 18.137

Piden $\mathbb{A}_{\bullet}$

$$\mathbb{A}_{\bullet} = \pi r^2 \qquad \text{(I)}$$

Como $\overline{AL} \parallel \overline{CE} \rightarrow m\sphericalangle LOE = 90°$

$\triangle OLE$: not. (30° y 60°)

$BE = n$; $BL = 3n$ y $BO = r = n\sqrt{3}$

En (I): $\mathbb{A}_{\bullet} = 3\pi n^2$ (II)

Pero $\mathbb{A}_{\triangle OLE} = \dfrac{4n \cdot n\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}n^2 = \mathbb{A}$ (III)

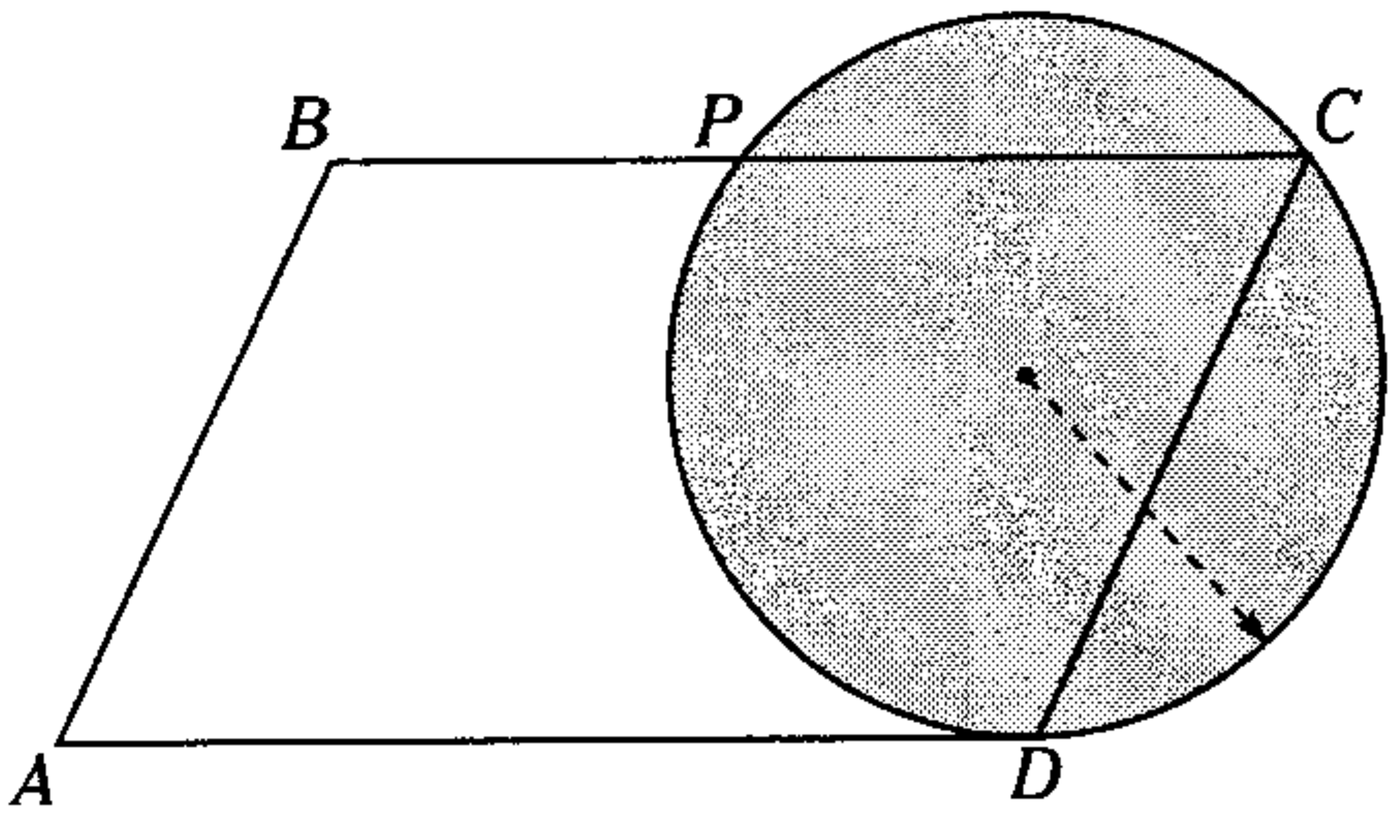
Reemplazando (III) en (II)

$$\mathbb{A}_{\bigcirc} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\mathbb{A}$$

CLAVE B

Problema 2

En la figura mostrada, $ABCD$ es un paralelogramo. Si $AB=PC=6$ y D es punto de tangencia, calcule el área de la región sombreada.



A) 6π B) 3π C) 12π

D) $3\sqrt{3}\pi$ E) $6\sqrt{3}\pi$

Resolución

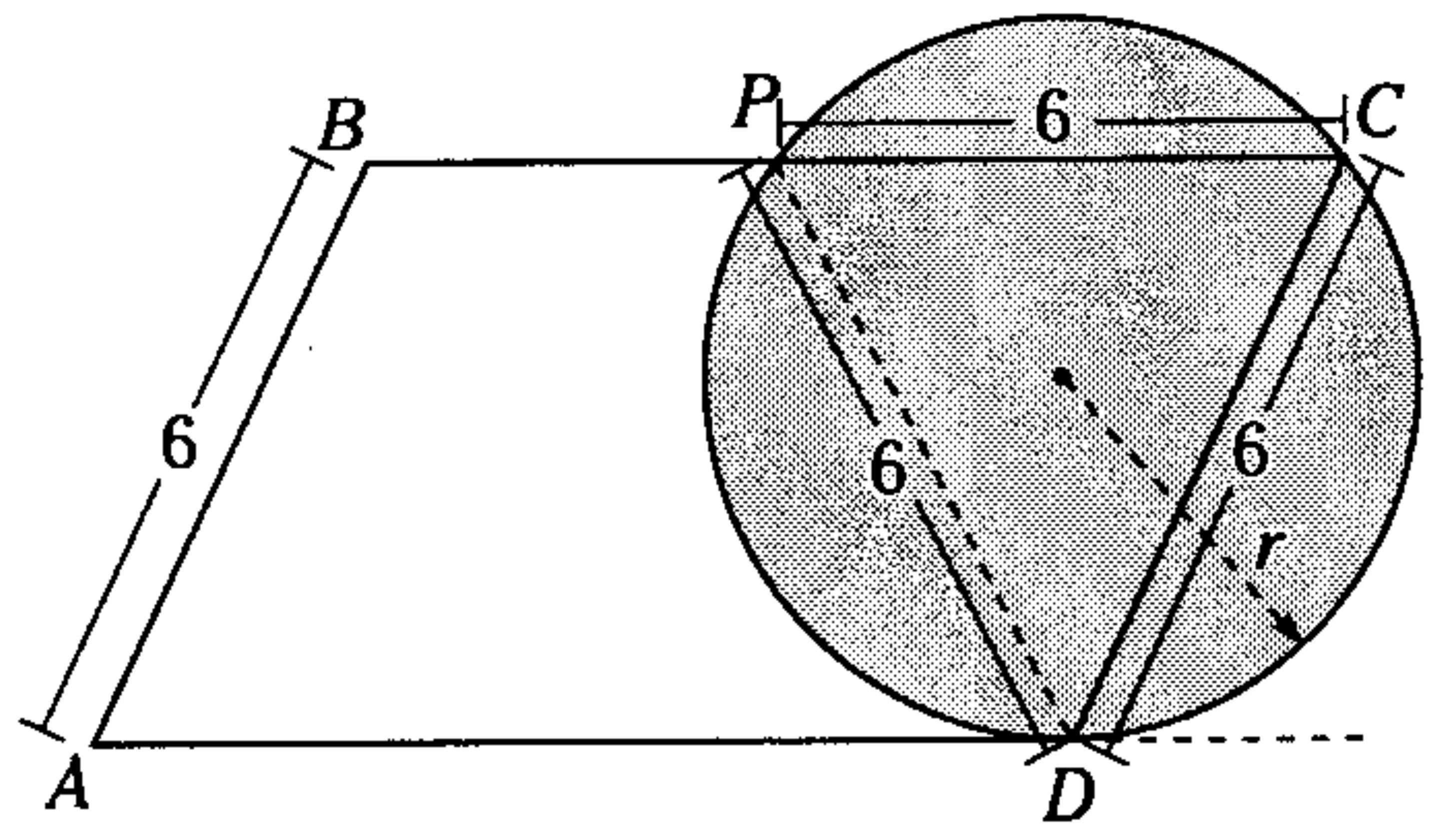


Figura 18.138

Piden $\mathbb{A}_{\bullet} = \pi r^2$ (I)

Como $\overline{PC}//\overleftrightarrow{CD}$ → $m\widehat{PD} = m\widehat{CD}$ y $PD = CD = 6$

De la figura, se observa que PCD: △equilátero

→ $r\sqrt{3} = 6$, $r = 2\sqrt{3}$

Reemplazando en (I)

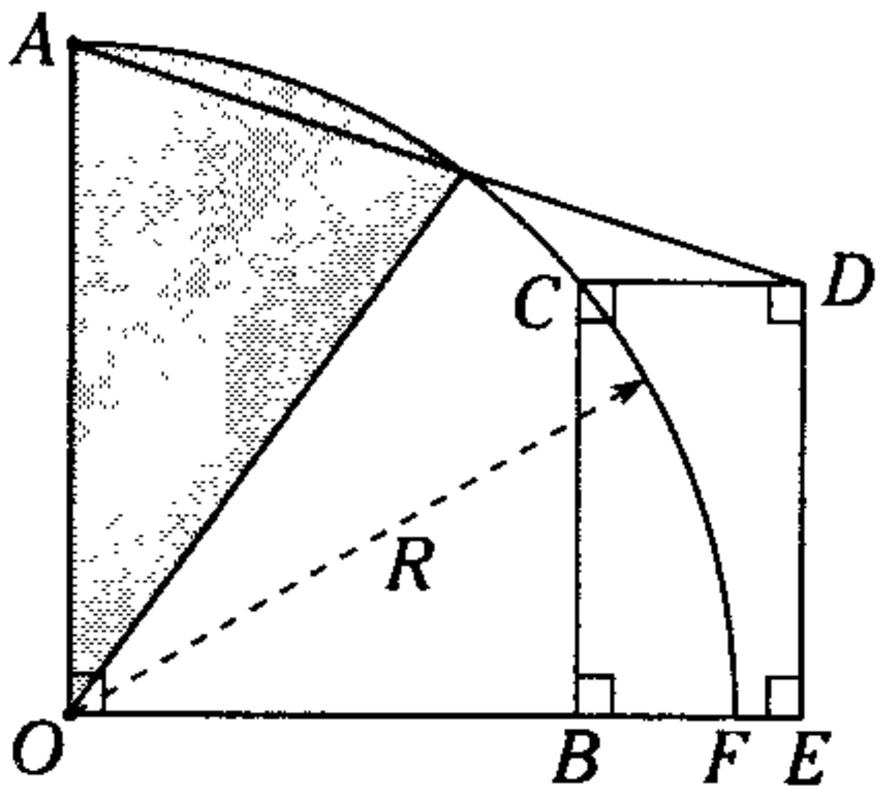
$\mathbb{A}_{\bullet} = \pi(2\sqrt{3})^2$

∴ $\mathbb{A}_{\bullet} = 12\pi$

CLAVE C

Problema 3

De la figura, $5(CD) = 2(AO)$, $R = 6\sqrt{2}$ y $m\widehat{CF} = 37°$. Calcule el área de la región sombreada.



A) 9π B) $37\pi/5$ C) 7π
D) 8π E) $34\pi/5$

Resolución

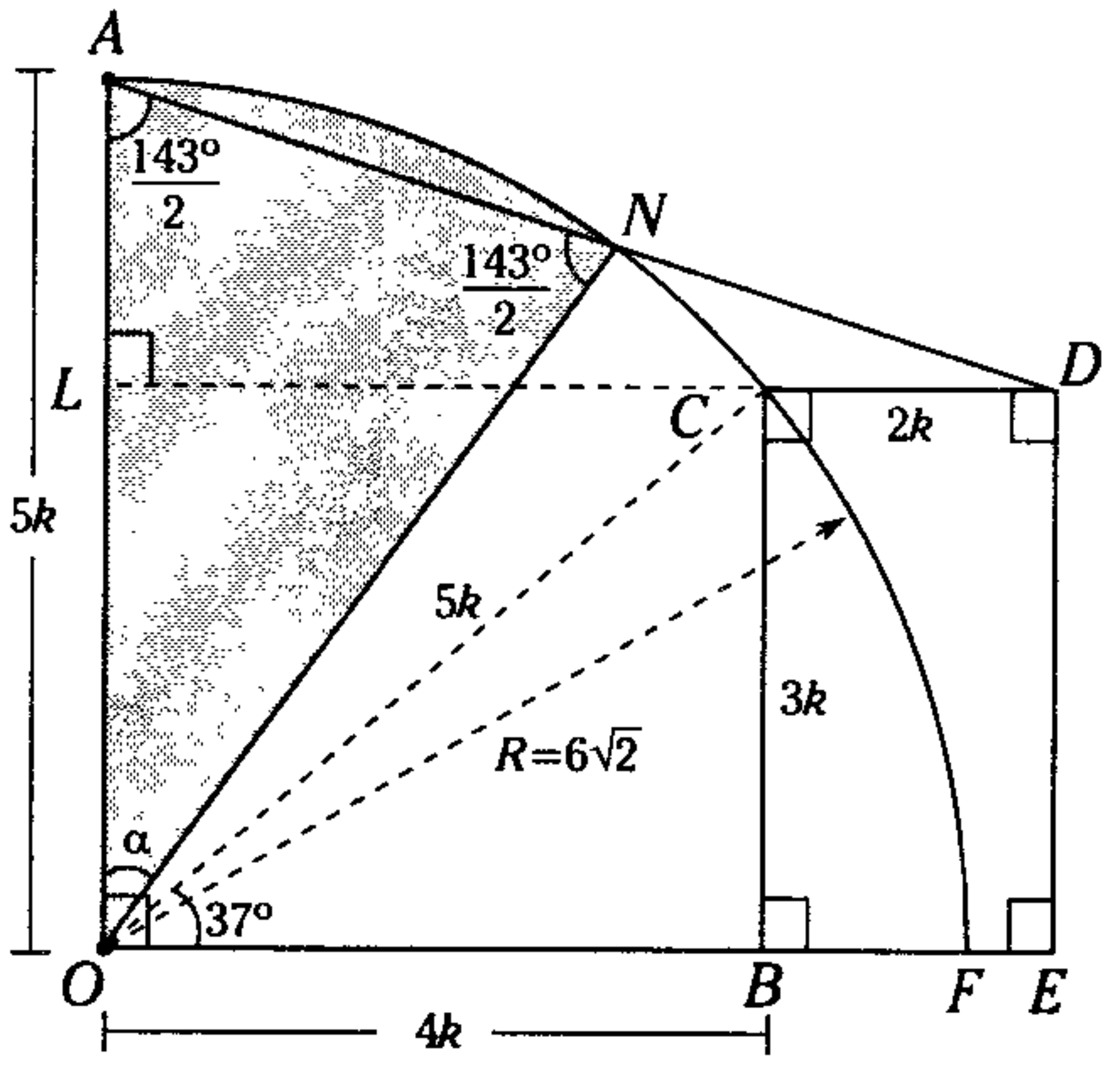


Figura 18.139

Piden $\mathbb{A}_{NOA}$

$$\mathbb{A}_{NOA} = \pi(R)^2\frac{\alpha}{360°} \quad \text{(I)}$$

Del dato $5(CD)=2(AO)$

→ $AO = 5k$ y

$CD = 2k$

Se traza $\overline{CO}$; formando ⊿CBO: notable 37° y 53°

Como $CO = 5k$ → $OB = 4k$, $CB = 3k$

Se prolonga $\overline{DC}$ hasta L

Se nota ⊿ALD: $AL = 2k$, $LD = 6k$

→ $m\measuredangle LDA = 37°/2$, $m\measuredangle LAD = 143°/2$

Del △AON: $m\measuredangle AON = 37° = \alpha$

Reemplazando en (I)

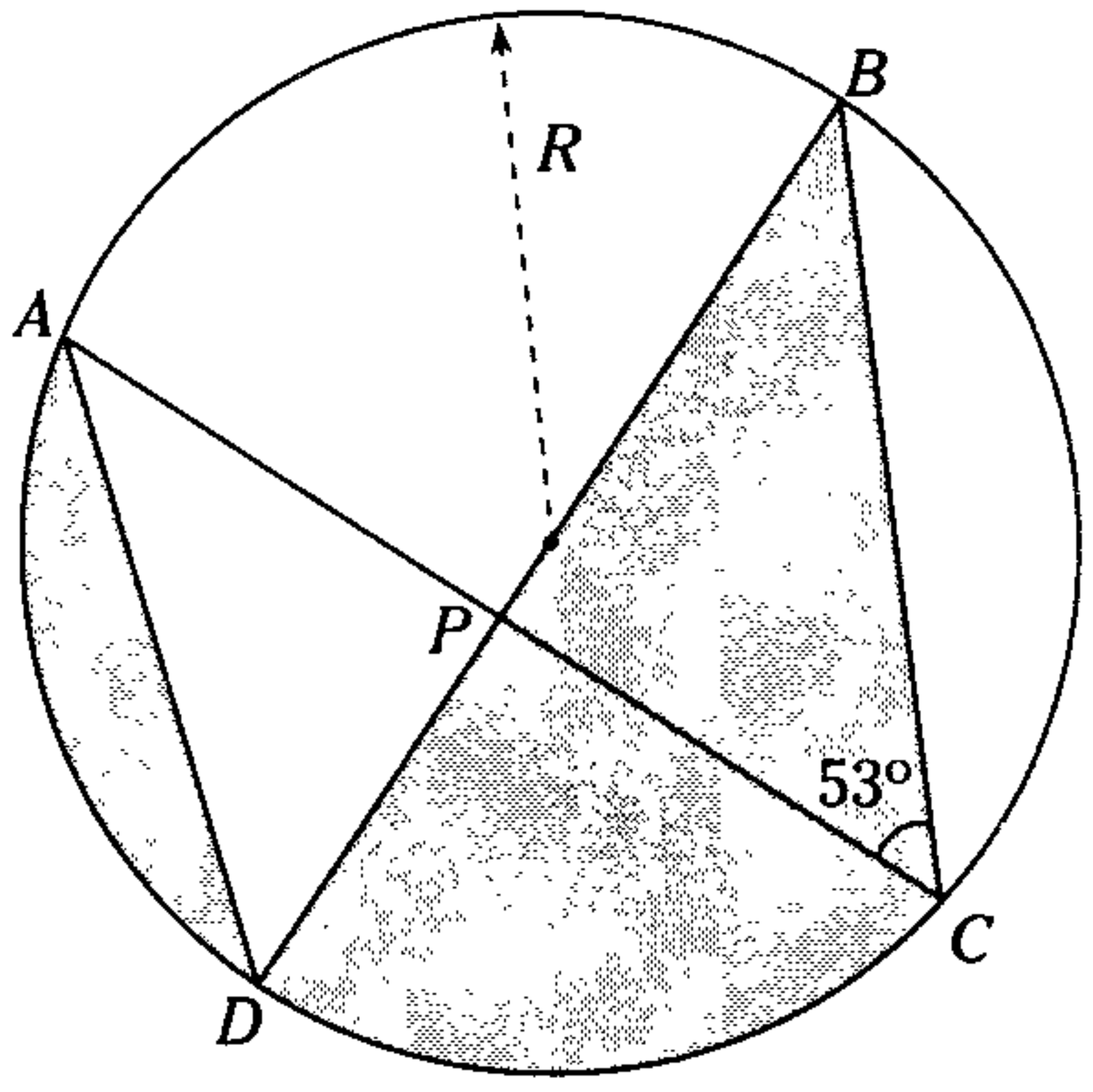
$$\mathbb{A}_{NOA} = \pi(6\sqrt{2})^2\frac{37°}{360°}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{NOA} = \frac{37\pi}{5}$$

CLAVE B

Problema 4

Según la figura, $(BD)(PD) = (AD)^2$ y $R = 3\sqrt{10}$ u Indique el área de la región sombreada.



A) 37π u^2 B) 36π u^2 C) $71{,}5\pi$ u^2
D) 47π u^2 E) 46π u^2

Resolución

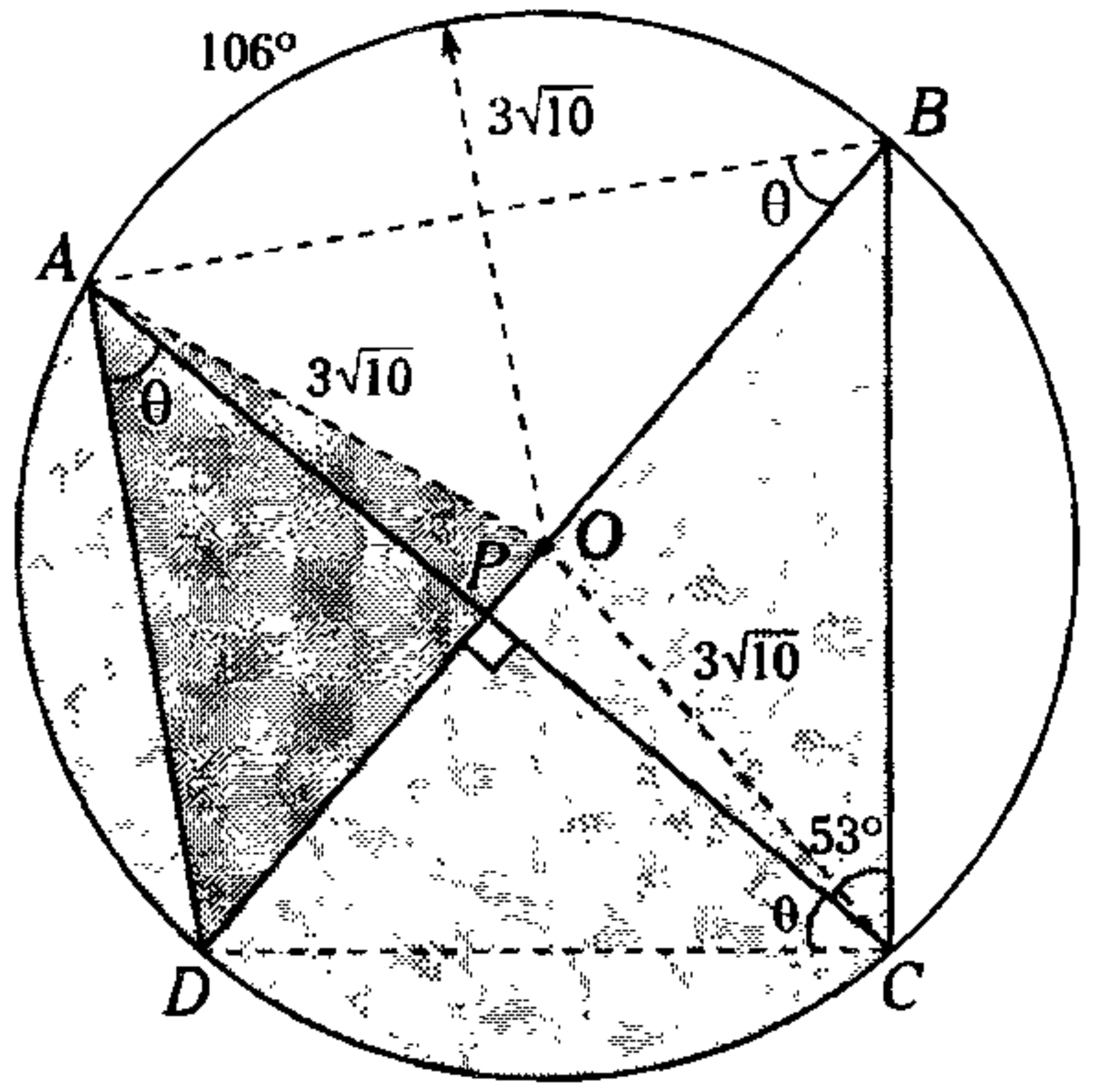


Figura 18.140

Piden $\mathbb{A}_{\text{reg. somb.}}$

Dato

$(AD)^2 = (BD)(PD)$ → Por propiedad

$m\measuredangle DAP = m\measuredangle ABD = \theta$

En el ⏢ABCD inscrito

$m\measuredangle ABD = m\measuredangle ACD = \theta$

Se observa en $\triangle ADC$, $AD = DC$ y $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

$m\overset{\frown}{AD} = m\overset{\frown}{DC} = 74°$, $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{BC} = 106°$

Como $m\measuredangle BOC + m\measuredangle AOD = 180°$

$\rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle BOC} = \mathbb{A}_{\blacktriangle AOD}$

De la figura

$\mathbb{A}_{\text{reg. somb.}} = \mathbb{A}_{\blacktriangleleft AOC}$

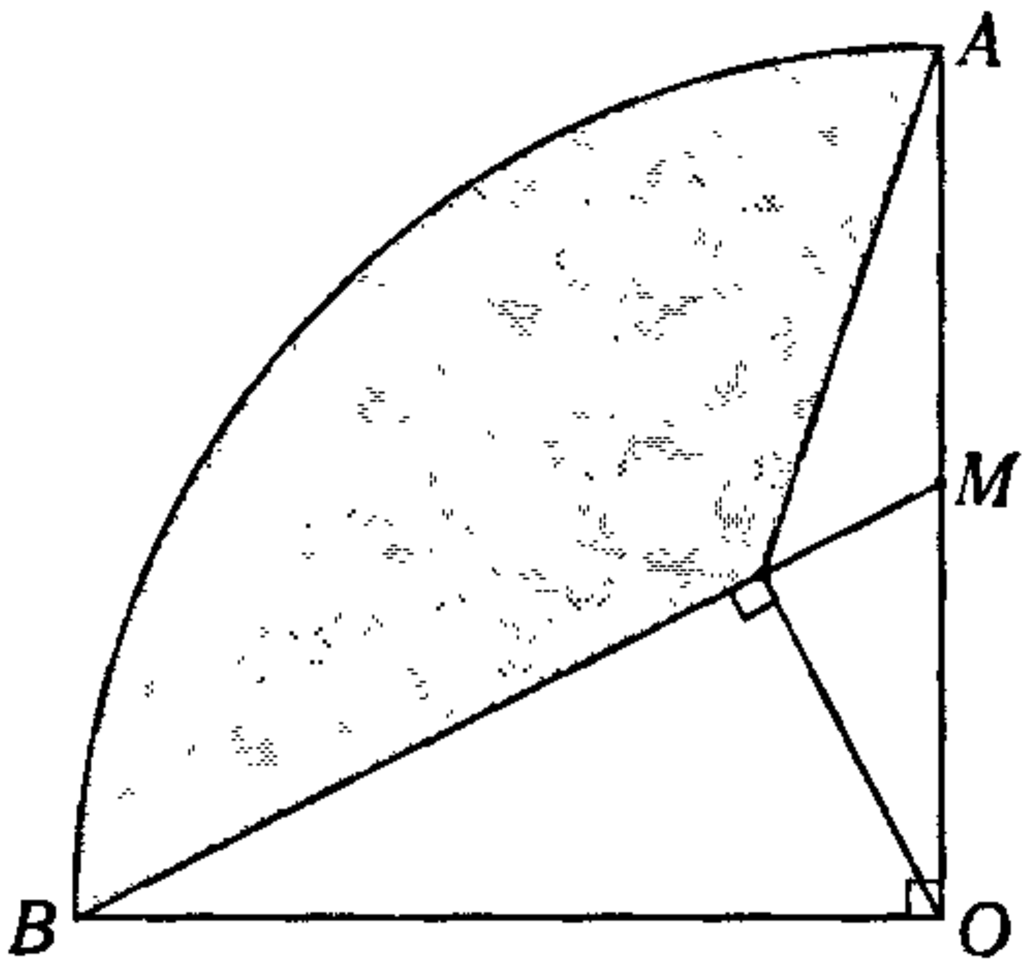
$$\mathbb{A}_{\text{reg. somb.}} = \frac{\pi(3\sqrt{10})^2.(148°)}{360°}$$

$\therefore\ \mathbb{A}_{\text{reg. somb.}} = 37\pi\,u^2$

CLAVE A

Problema 5

De la figura mostrada, $\overset{\frown}{AB}$ es un cuadrante de centro O y radio R. Si $AM = MO$, señale el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{R^2}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{5}\right)$

B) $\dfrac{R^2}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{5}\right)$

C) $\dfrac{R^2}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{5}\right)$

D) $\dfrac{R^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{5}\right)$

E) $\dfrac{R^2}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{5}\right)$

Resolución

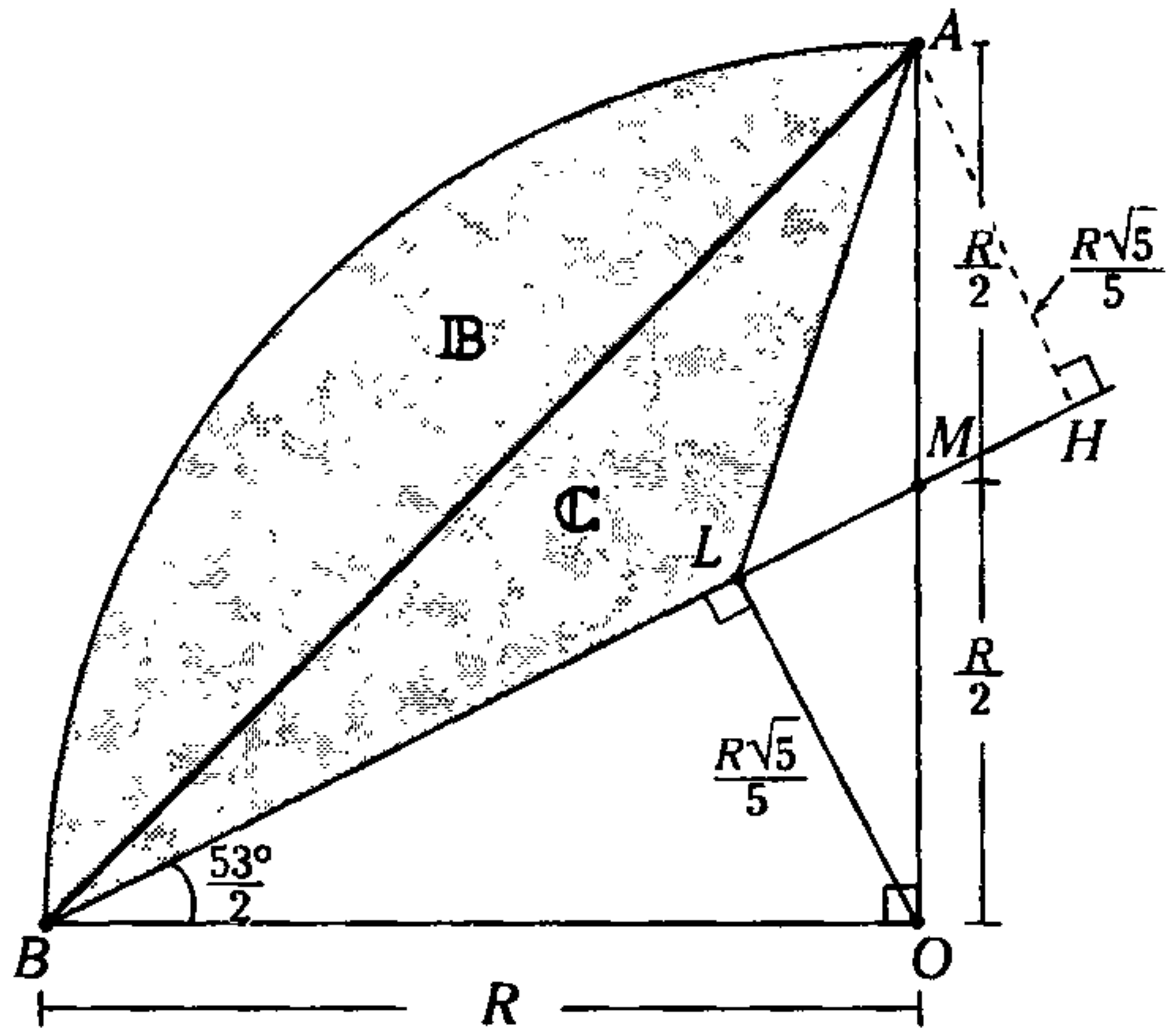


Figura 18.141

Piden $\mathbb{A}_{\text{reg.somb.}} = \mathbb{B} + \mathbb{C}$ (I)

Se sabe

$$\mathbb{B} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} \quad \text{(II)}$$

Se observa de la figura que ⊿BOM es notable 53°/2, 127°/2.

Como

$$BO = R \rightarrow LO = \frac{R}{5}\sqrt{5}, \quad BL = \frac{2\sqrt{5}R}{5}$$

$$\triangle MLO \cong \triangle MHA \text{ (A.L.A)} \rightarrow AH = LO = \frac{R\sqrt{5}}{5}$$

$$\mathbb{C} = \frac{(BL)(AH)}{2} = \left(\frac{2\sqrt{5}R}{5}\right)\left(\frac{R\sqrt{5}}{5}\right)\frac{1}{2} \qquad \text{(III)}$$

$$\mathbb{C} = \frac{R^2}{5}$$

Reemplazando (II) y (III) en (I)

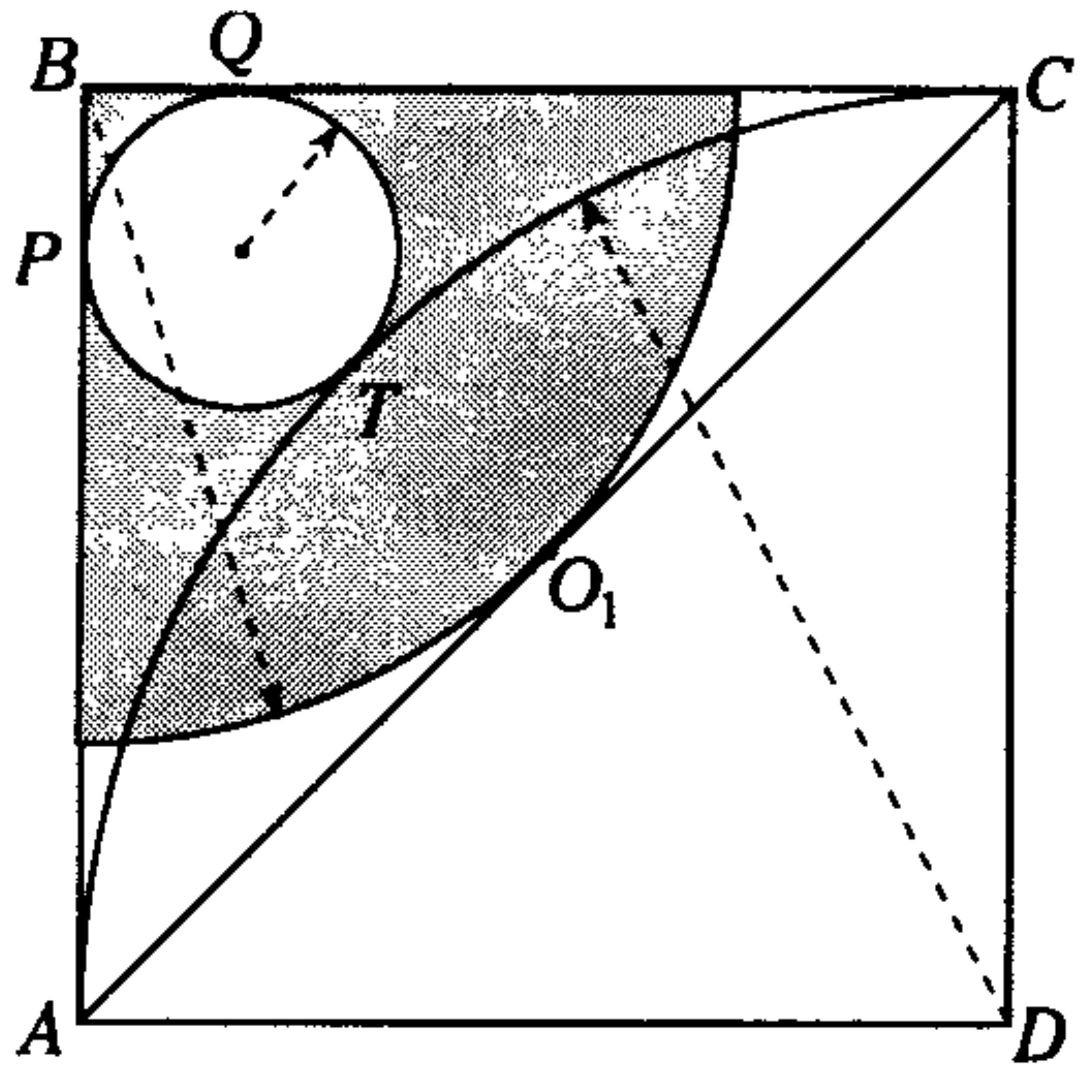
$$\mathbb{A}_{\text{reg. somb.}} = \frac{\pi R^2}{5} - \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{5}$$

$$\therefore \ \mathbb{A}_{\text{reg. somb.}} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{5}\right)$$

CLAVE D

Problema 6

De la figura, P, Q, T y O_1 son puntos de tangencia. Si $CD = 2\sqrt{2}$ y $ABCD$ es un cuadrado, calcule el área de la región sombreada.



A) $3\pi(36\sqrt{2} - 45)$
B) $3\pi(32\sqrt{2} - 45)$
C) $3\pi(30\sqrt{2} - 35)$
D) $3\pi(33\sqrt{2} - 24)$
E) $3\pi(23\sqrt{2} - 22)$

Resolución

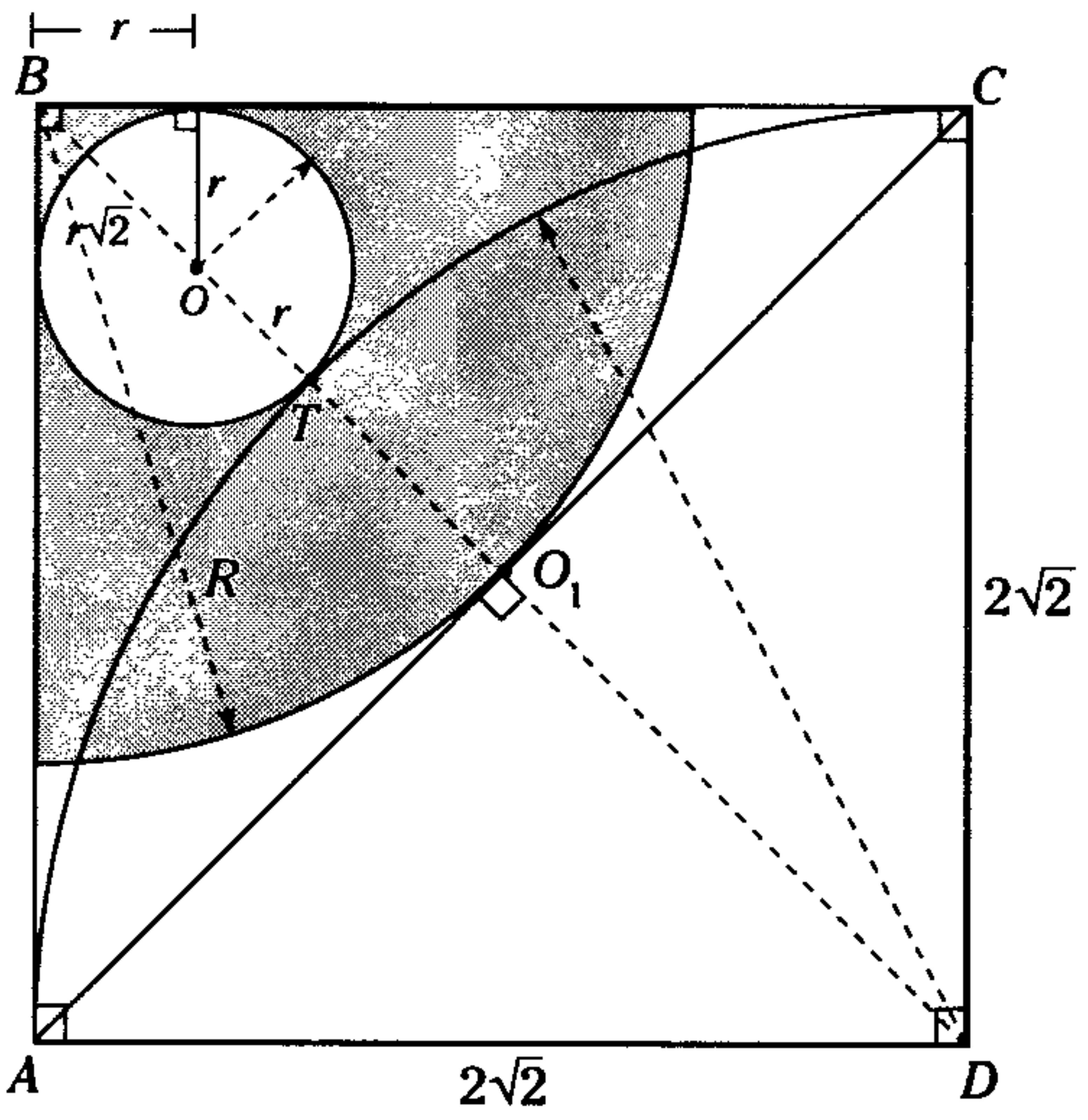


Figura 18.142

Piden $\mathbb{A}_{\text{reg. somb.}} = \mathbb{A}$

Se sabe que B, O, T, O_1 y D son colineales.

De la figura

$$BO + OT + TD = BD$$

$$r\sqrt{2} + r + 2\sqrt{2} = 4$$

Operando y despejando

$$r = 2\sqrt{2}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$$

Se observa $\triangle BO_1A$

$$R = 2$$

De ahí,

$$\mathbb{A} = \frac{\pi R^2}{4} - \pi r^2$$

$$\mathbb{A} = \pi\frac{2^2}{4} - \pi\left(2\sqrt{2}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\right)^2$$

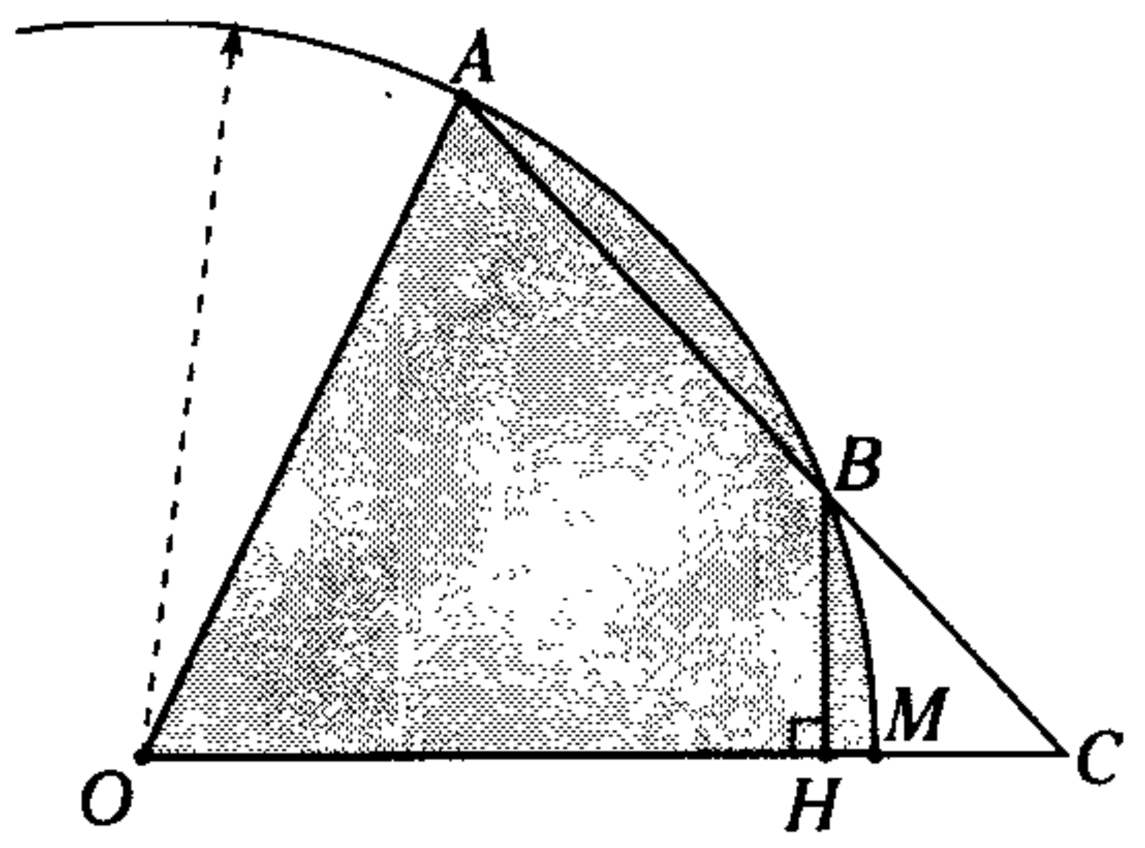
$$\mathbb{A} = \pi - \pi\left(8\left(17 - 12\sqrt{2}\right)\right)$$

$$\therefore \ \mathbb{A} = 3\pi\left(32\sqrt{2} - 45\right)$$

CLAVE B

Problema 7

En la figura, $AC=6$, $OA=2(BH)$, $m\widehat{AB}=m\widehat{BM}$. Indique el área del sector circular AOM.



A) 6π B) 8π C) 5π
D) 4π E) 3π

Resolución

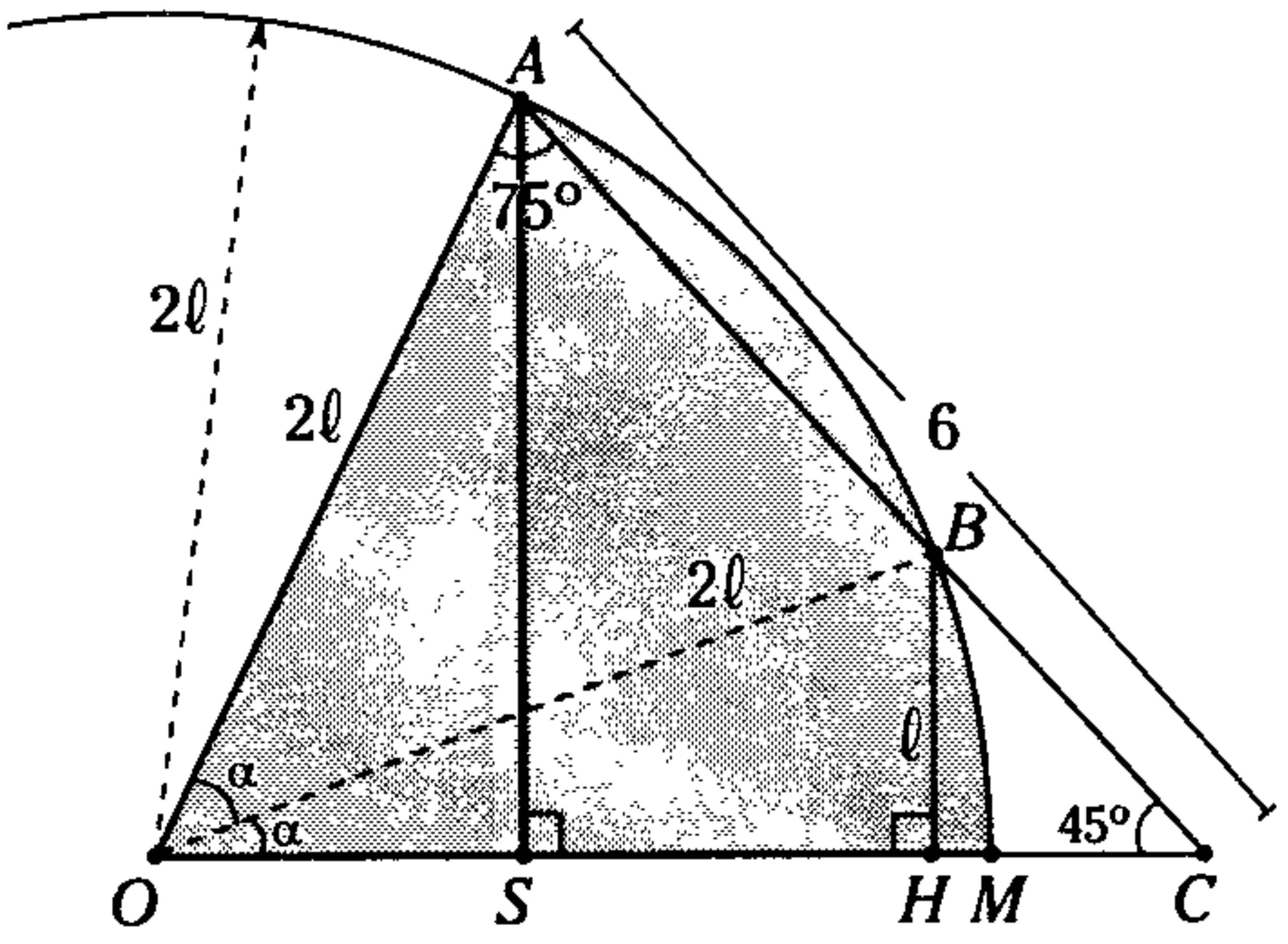


Figura 18.143

Piden $\mathbb{A}_{\blacktriangleleft AOM}$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangleleft AOM}=\pi(AO)^2\cdot\frac{m\measuredangle AOM}{360°} \qquad \text{(I)}$$

Del dato $OA=2(BH)$ $\rightarrow$ Si $BH=\ell$; $AO=2\ell$

$m\widehat{AB}=m\widehat{BM}=\alpha$

Al trazar $\overline{OB}$:

⊾BHO es notable de 30° y 60° $\rightarrow$ $\alpha=30°$

Se traza $\overline{AS}\perp\overline{OC}$:

⊾ASC: es notable de 45° $\rightarrow$ $AS=3\sqrt{2}$

⊾ASO: es notable de 30°, 60°

$$\rightarrow \left(\frac{2\ell}{2}\right)\sqrt{3}=3\sqrt{2}$$

$$(2\ell)=2\sqrt{6}$$

Reemplazando en (I)

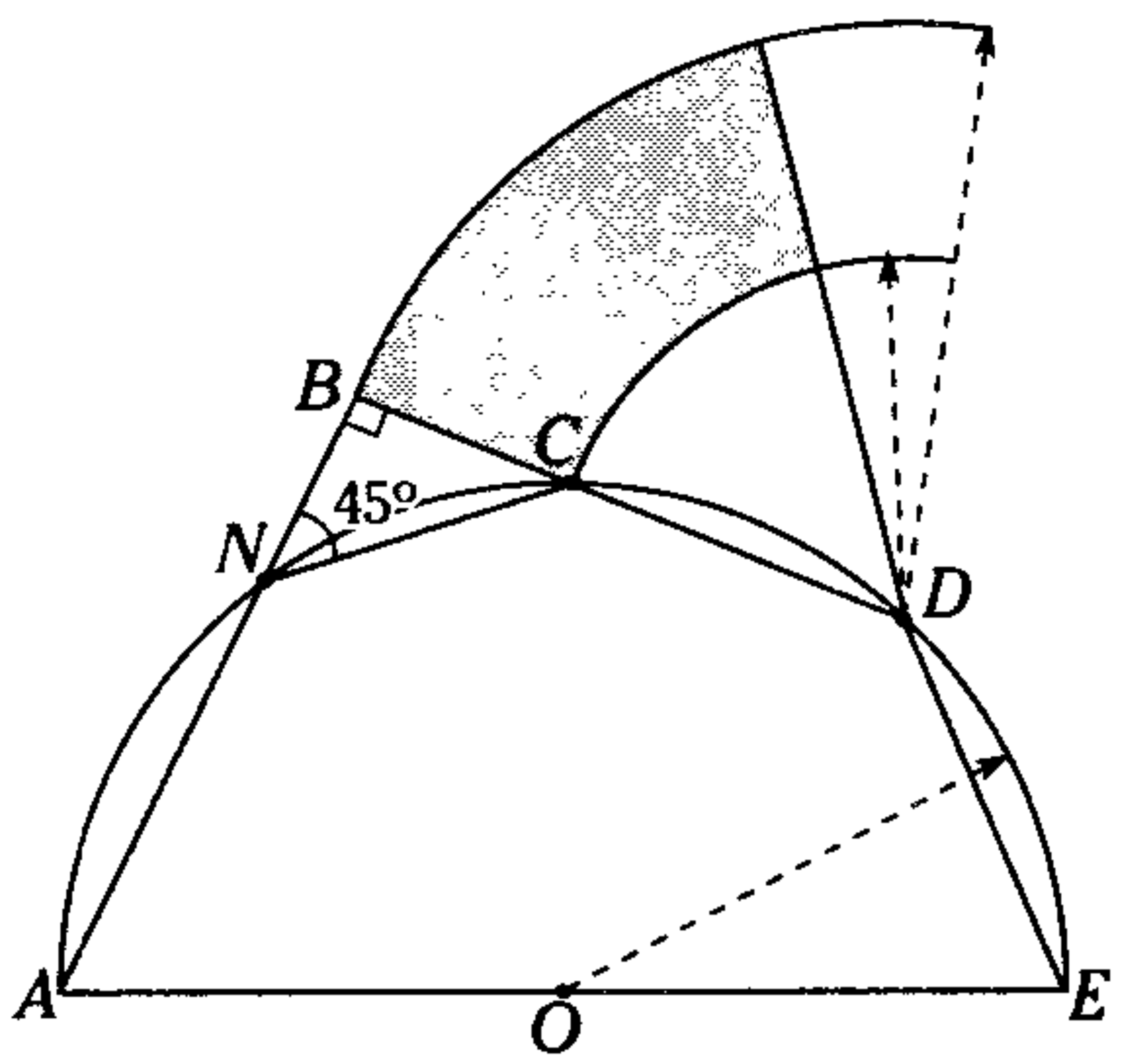
$$\mathbb{A}_{\blacktriangleleft AOM}=\pi\left(2\sqrt{6}\right)2\cdot\frac{60^2}{360°}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangleleft AOM}=4\pi$$

CLAVE D

Problema 8

De la figura, $AB=6\sqrt{10}$ y $(AN)=\sqrt{2}(NC)$. Determine el área de la región sombreada.



A) 25π B) 28π C) 36π
D) 45π E) 50π

Resolución

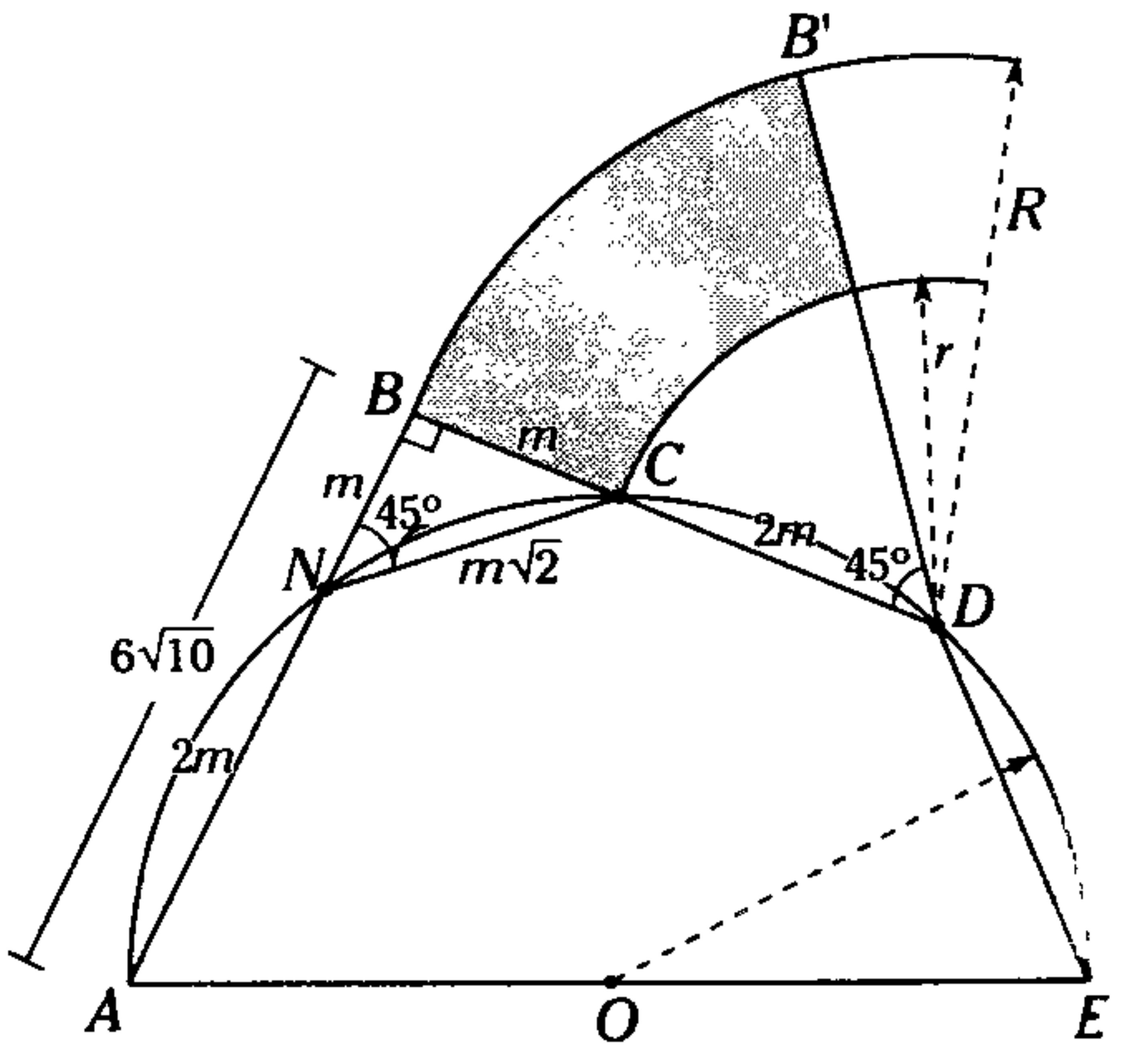


Figura 18.144

Piden $\mathbb{A}_{\text{sector}}$

$$\mathbb{A}_{\text{sector}} = \pi(R^2 - r^2)\cdot\frac{(m\measuredangle BDB')}{360^\circ} \qquad \text{(I)}$$

Como $m\measuredangle BNC = 45^\circ$

Por ángulo exinscrito

$\rightarrow\ m\overset{\frown}{ANC} = 90^\circ$ y $m\measuredangle CDB' = 45^\circ$

El $\triangle NBC$: notable

$\rightarrow\ NB = BC = m$ y $NC = m\sqrt{2}$

Del dato

$AN = \sqrt{2}(NC)\ \rightarrow\ AN = 2m$

De la figura

$3m = 6\sqrt{10}\ \rightarrow\ m = 2\sqrt{10}$

Por teorema de las secantes en la semicircunferencia.

$(AB)(NB) = (BD)(CB)$

$3m(m) = (BD)(m)$

$\rightarrow\ BD = 3m$ y $CD = 2m$

Reemplazando en (I)

$$\mathbb{A}_{\text{sector}} = \pi\left((3m)^2 - (2m)^2\right)\cdot\frac{45^\circ}{360^\circ}$$

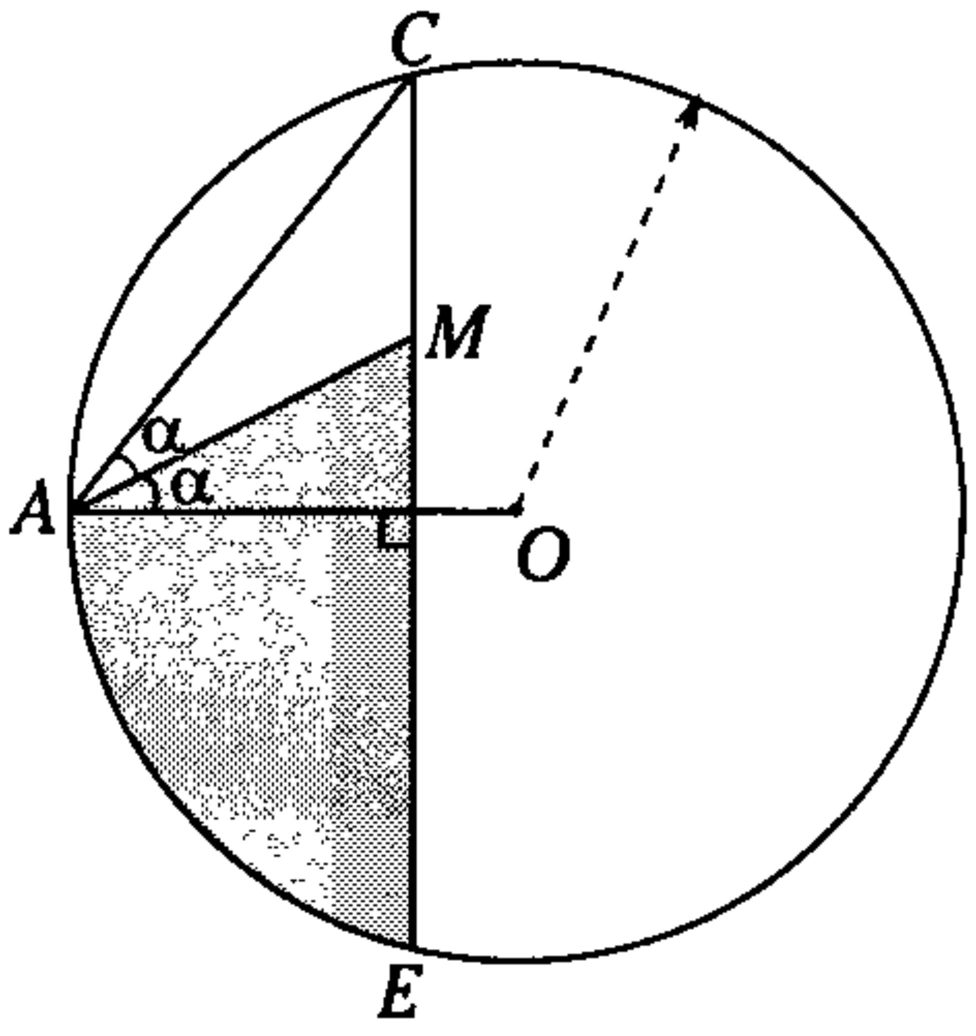
$$\mathbb{A}_{\text{sector}} = \pi(5m^2)\frac{1}{8} = \pi\left(5\left(2\sqrt{10}\right)^2\right)\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\text{sector}} = 25\pi$$

CLAVE A

Problema 9

De la figura, $AC = 30$ y $AO = 25$. Calcule el área de la región sombreada.



A) $12{,}8\pi - 3$

B) $10{,}8\pi - 2$

C) $14{,}8\pi - 5$

D) $15{,}4\pi - 4$

E) $11{,}8\pi - 3$

Resolución

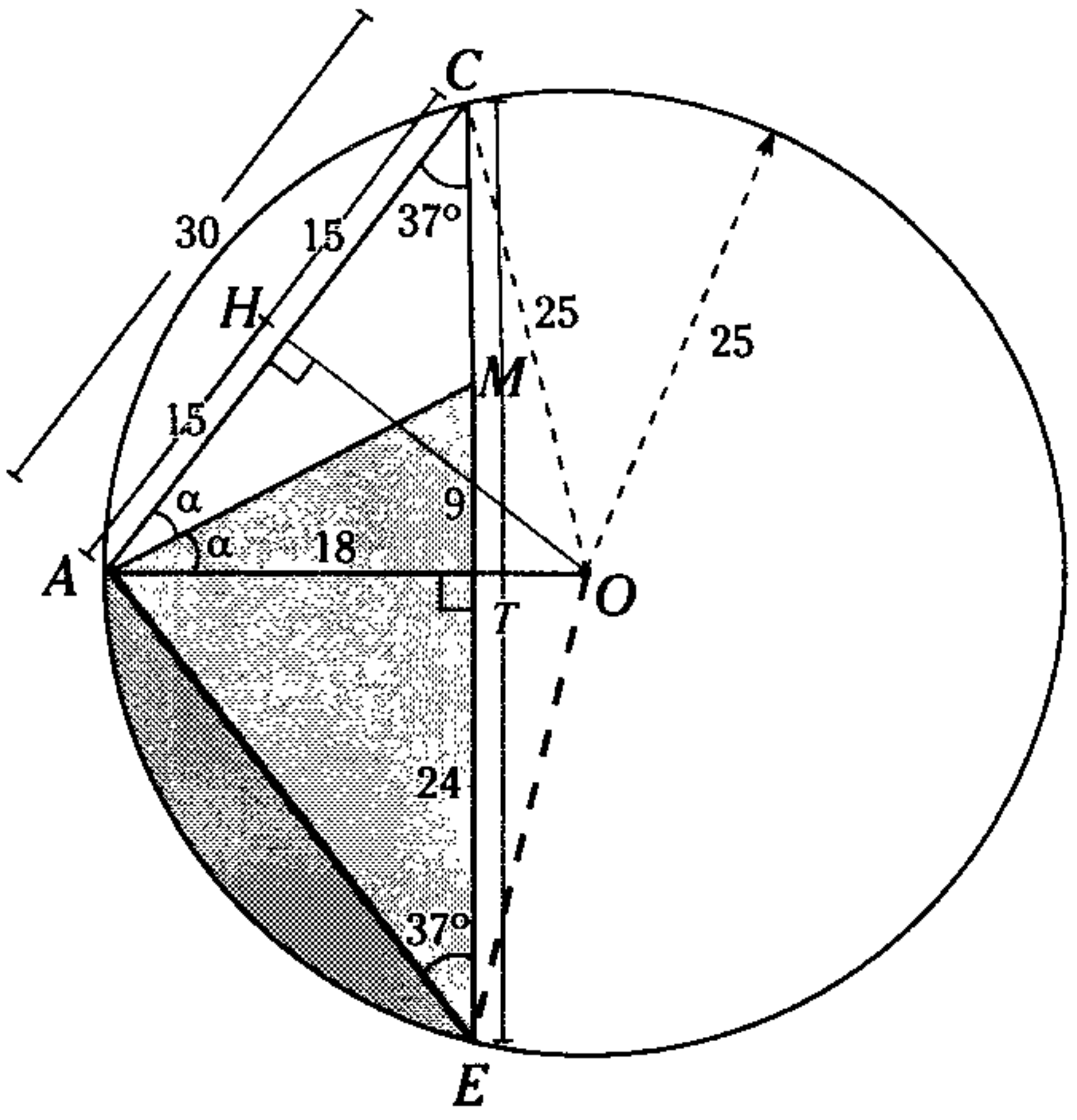


Figura 18.145

Piden $\mathbb{A}_{\substack{\text{reg.mix}\\ AME}}$: área de la región mixtilínea AME

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{reg.mix}\\ AME}} = \mathbb{A}_{\text{segment } AE} + \mathbb{A}_{\triangle AME} \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle AOC$, se traza $\overline{OH} \perp \overline{AC}$

Por teorema de circunferencia

$\rightarrow\ AH = HC = 15$

$\triangle AHO$ es notable de 37° y 53°

$\rightarrow\ m\measuredangle HAO = 53^\circ = 2\alpha$

$\rightarrow\ \alpha = 53^\circ/2$

$\triangle ATM$: notable de 53°/2, 127°/2

$\rightarrow\ TM = 9$

$\triangle ATE$: notable de 37° y 53°

$\rightarrow\ ET = 24$

Reemplazando en (I)

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{reg. mixt.}\\ AME}} = \left(\pi(25)^2\cdot\frac{74^\circ}{360^\circ} - \frac{(25)(24)}{2}\right) + \frac{(33)(18)}{2}$$

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{reg. mixt.}\\ AME}} = \left(\frac{4625}{36}\pi - 300\right) + 297$$

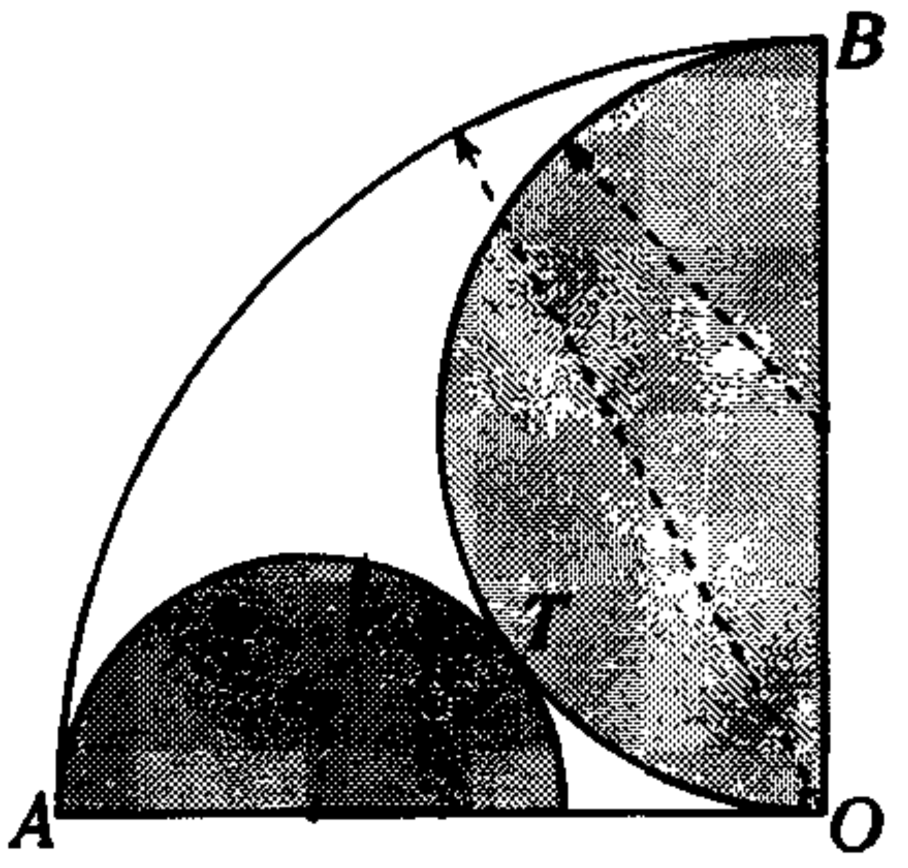
$$\mathbb{A}_{\substack{\text{reg. mixt.}\\ AME}} = \frac{4625\pi}{36} - 3$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\substack{\text{reg.mix}\\ AME}} = 12{,}8\pi - 3$$

CLAVE A

Problema 10

De la figura mostrado, T es punto de tangencia. Calcule la razón de las áreas de los semicírculos mayor y menor.



A) 7/4 B) 7/3 C) 9/4
D) 16/9 E) 25/16

Resolución

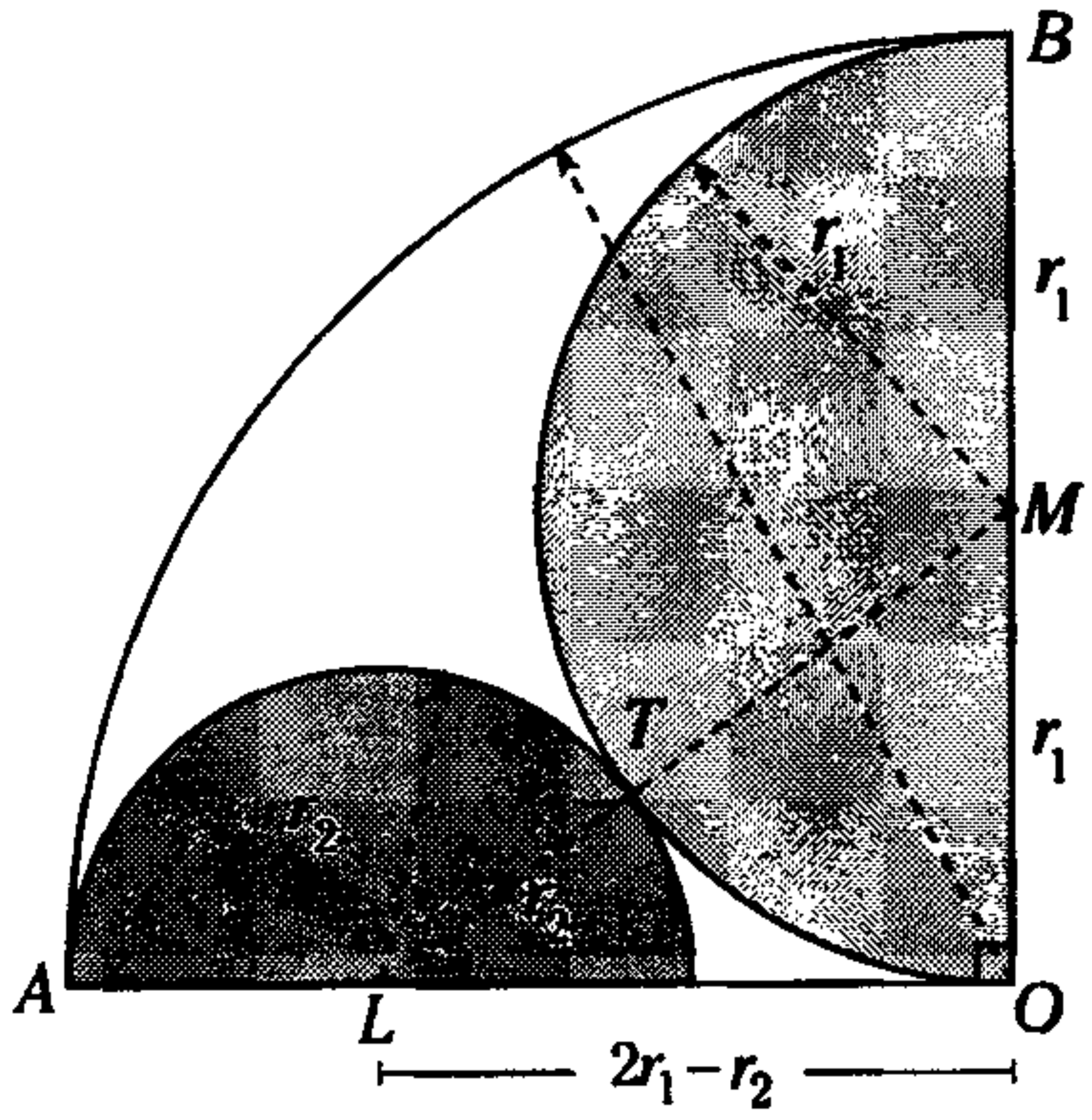


Figura 18.146

Piden

$$\frac{\mathbb{A}_{\text{(mayor)}}}{\mathbb{A}_{\text{(menor)}}}$$

Como T es punto de tangencia

$\rightarrow$ L, T y M son colineales

Del ⊿MOL: Por teorema de Pitágoras

$$r_1^2 + (2r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$$

$$r_1^2 + 4r_1^2 - 4r_1r_2 + r_2^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2$$

$$4r_1 = 6r_2$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2}$$

Al ser dos semicírculos semejantes

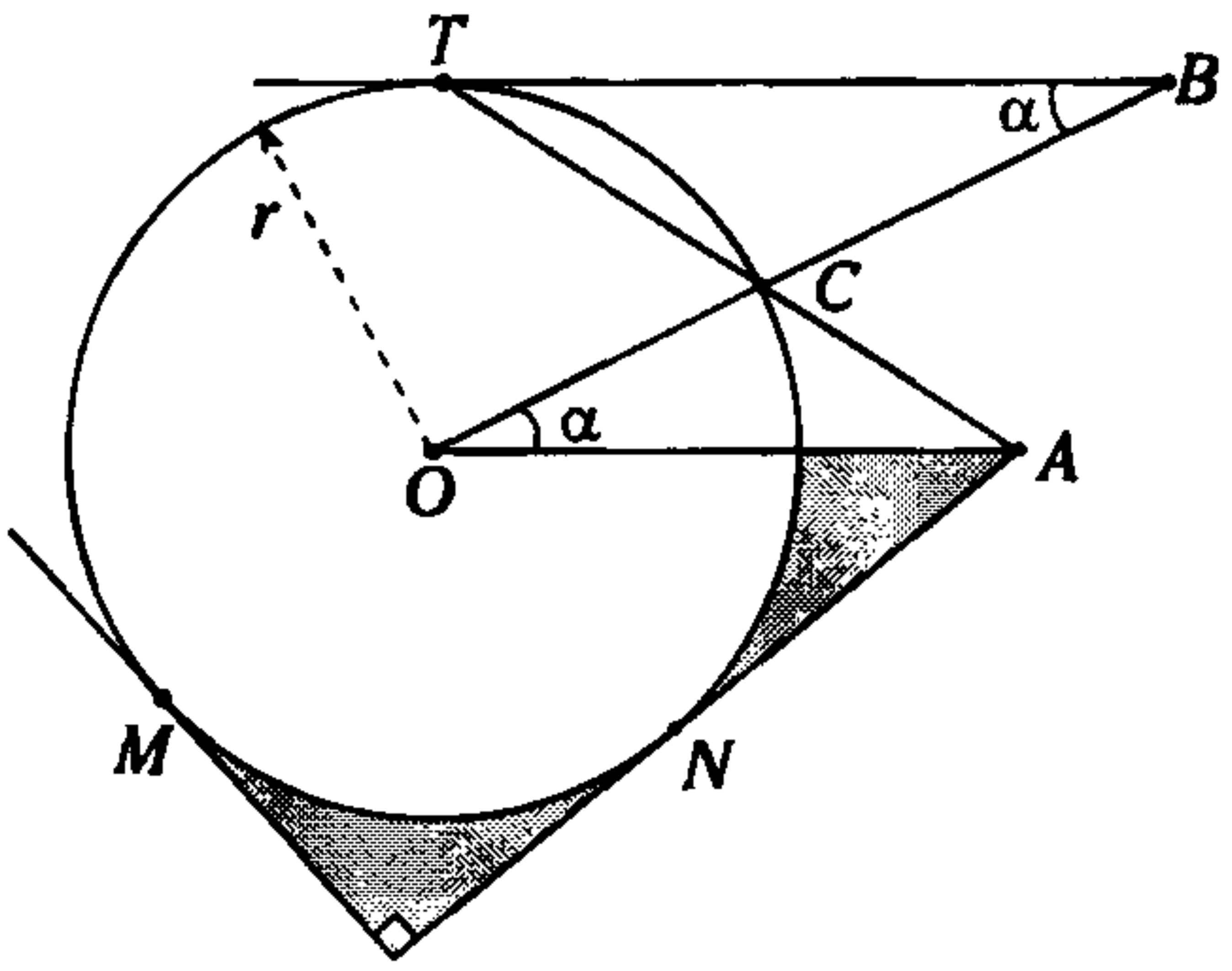
$$\rightarrow\ \frac{\mathbb{A}_{\text{(mayor)}}}{\mathbb{A}_{\text{(menor)}}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\therefore\ \frac{\mathbb{A}_{\text{(mayor)}}}{\mathbb{A}_{\text{(menor)}}} = \frac{9}{4}$$

CLAVE C

Problema 11

Según la figura, M, N y T son puntos de tangencia. Si $\overline{TB} // \overline{OA}$, $5(BC) = 3(BT)$ y $r = 6$, señale el área de la región sombreada.



A) $60 - 12{,}7\pi$ B) $80 - 14{,}1\pi$
C) $60 - 14{,}3\pi$
D) $70 - 12{,}3\pi$ E) $80 - 15\pi$

Resolución

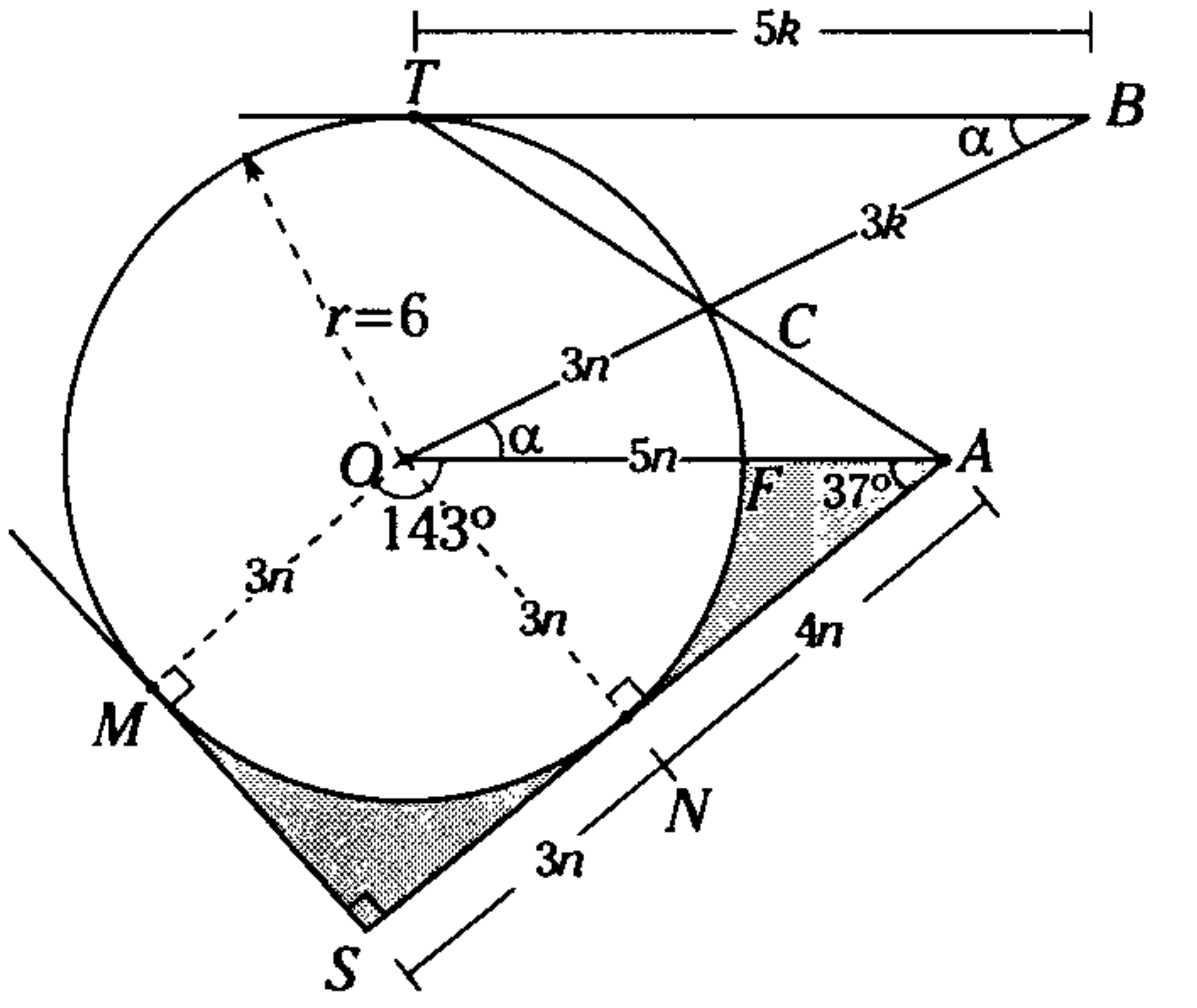


Figura 18.147

Pide $\mathbb{A}_{reg.\ somb.}$

Dato $5(BC) = 3(BT)$,

Si $BC = 3k \rightarrow BT = 5k$

$\triangle OCA \sim \triangle BCT$ (A.A.A.)

$$\frac{CO}{3k} = \frac{OA}{5k}, \rightarrow CO = 3n,\ OA = 5n$$

Se traza $\overline{ON}$ y $\overline{OM}$; $ON = OM = 3n$ (radio)

⊾ ONA: notable 37° y 53° $\rightarrow NA = 4$

Se observa que $3n = 6 \rightarrow n = 2$

Por ángulos conjugados internos ($\overline{OM} // \overline{AS}$)

$\rightarrow$ m∢MOA = 143°

$$\mathbb{A}_{reg.\ somb.} = \mathbb{A}_{SMOA} - \mathbb{A}_{MOF}$$

$$\mathbb{A}_{reg.\ somb.} = \left(\frac{3n+7n}{2}\right)3n - \pi(3n)^2 \cdot \frac{143^\circ}{360^\circ}$$

$$\mathbb{A}_{reg.\ somb.} = 15n^2 - \frac{143\pi n^2}{40}$$

Reemplazando $n=2$

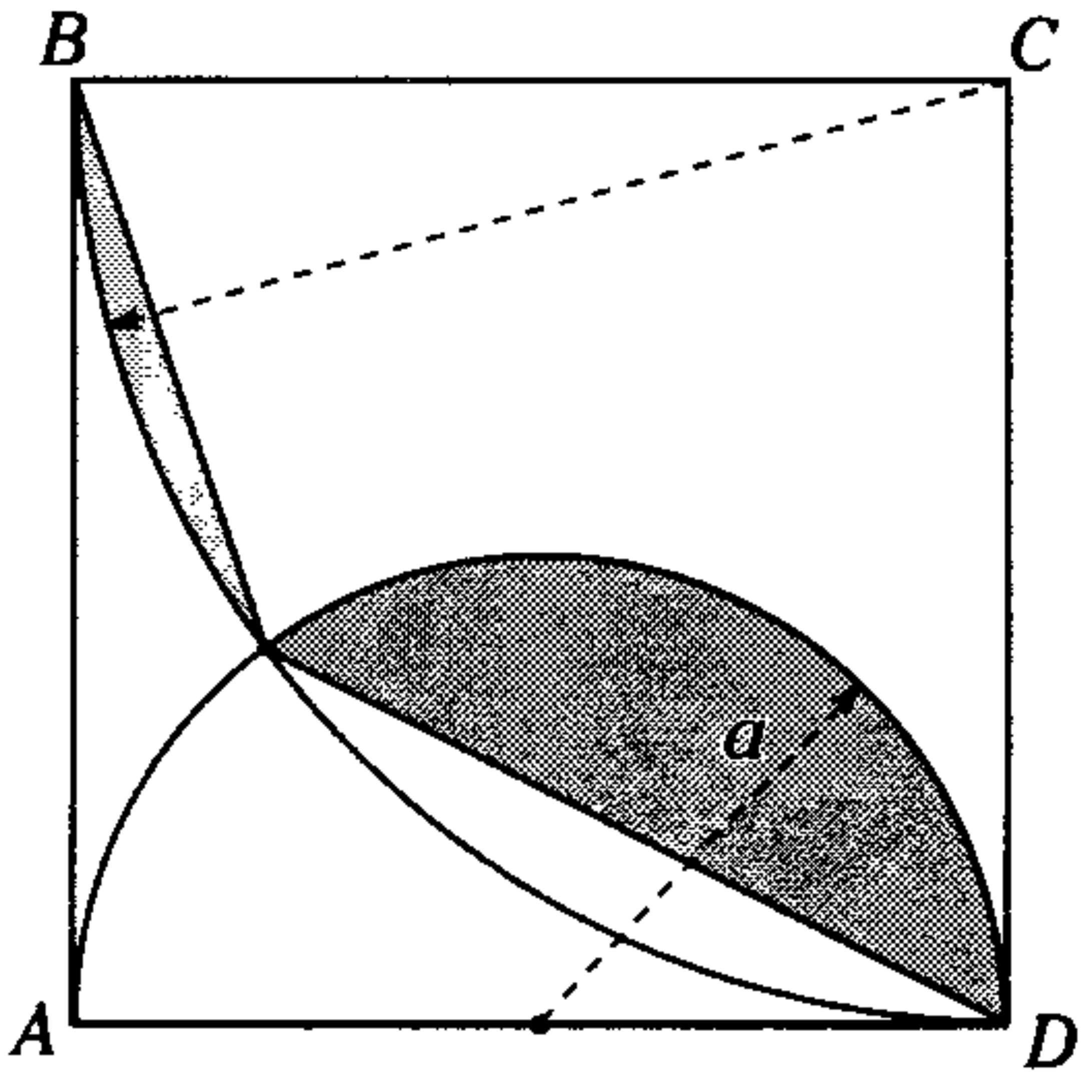
$$\mathbb{A}_{reg.\ somb.} = 4\left(15 - \frac{143\pi}{40}\right)$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{reg.\ somb.} = 60 - 14{,}3\pi$$

CLAVE C

Problema 12

De la figura, $ABCD$ es un cuadrado. Halle la diferencia de las áreas de las regiones sombreadas.



A) $a^2\left(\frac{3}{5} - \frac{7\pi}{120}\right)$ B) $a^2\left(\frac{7}{5} - \frac{\pi}{30}\right)$

C) $a^2\left(\frac{4}{5} - \frac{5\pi}{120}\right)$

D) $a^2\left(\frac{8}{5} - \frac{7\pi}{120}\right)$ E) $a^2\left(\frac{4}{5} - \frac{7\pi}{120}\right)$

Resolución

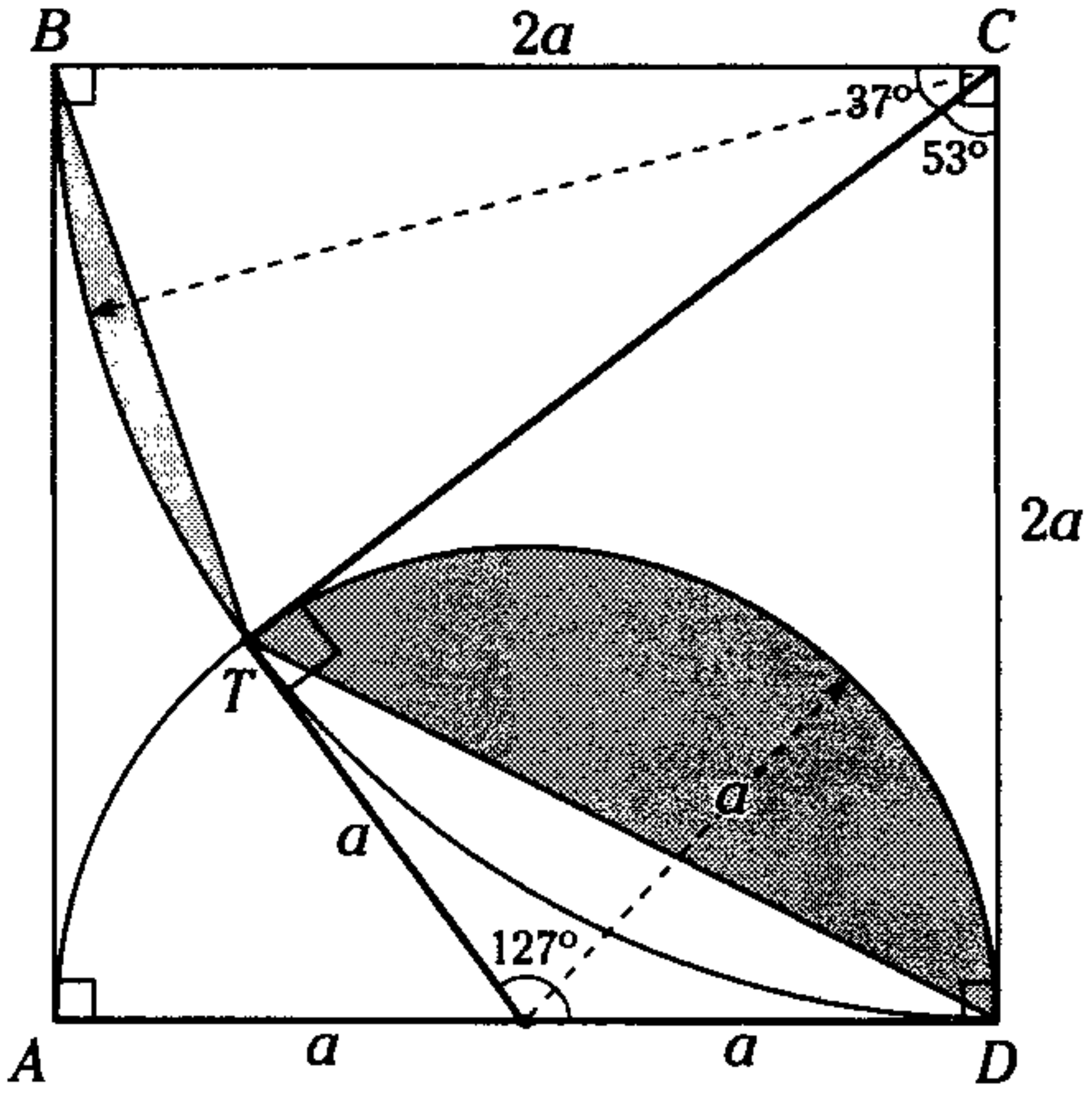


Figura 18.148

Piden Dif. $= \mathbb{A}_{TD} - \mathbb{A}_{BT}$ (I)

Recordando una propiedad realizada

m∢TCD=53°

$$\mathbb{A}_{TD} = \pi a^2 . \frac{127°}{360°} - \frac{a^2}{2}\text{sen}127°$$

$$\mathbb{A}_{TD} = a^2 . \left(\frac{\pi.127°}{360°} - \frac{2}{5}\right) \quad \text{(II)}$$

$$\mathbb{A}_{BT} = \pi^2(2a)^2 . \frac{37°}{360°} - \frac{(2a)^2}{2}\text{sen}37°$$

$$\mathbb{A}_{BT} = a^2\left(\frac{\pi.148°}{360°} - \frac{6}{5}\right) \quad \text{(III)}$$

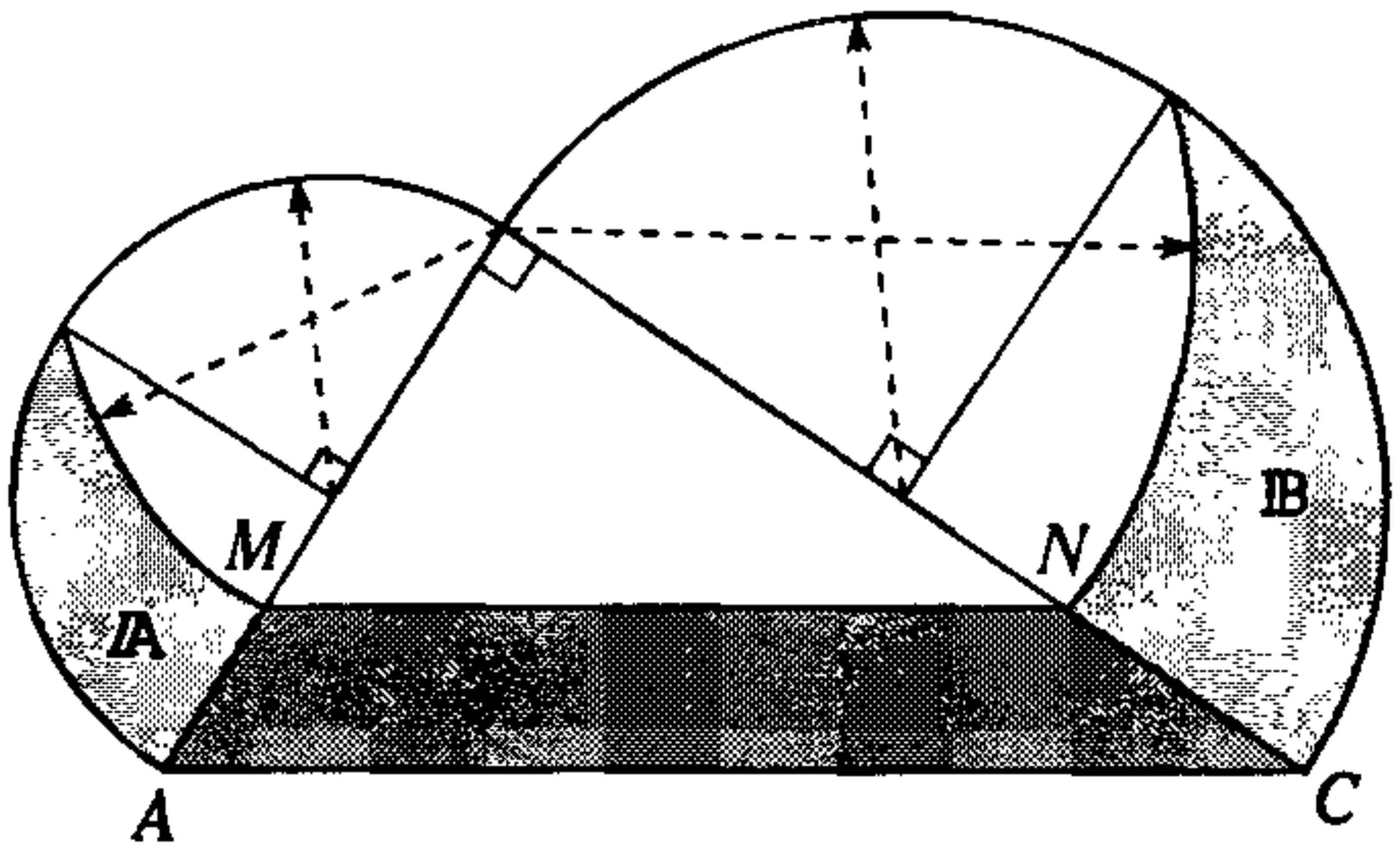
Reemplazando (II) y (III) en (I)

$$\therefore \ \text{Dif} = a^2\left(\frac{4}{5} - \frac{7\pi}{120}\right)$$

CLAVE E

Problema 13

De la figura, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son áreas de la regiones sombreadas. Calcule el área de la región $AMNC$.



A) $\pi\sqrt{\mathbb{A}.\mathbb{B}}$

B) $4\sqrt{\mathbb{A}.\mathbb{B}}$

C) $\frac{\pi}{2}\sqrt{\mathbb{A}.\mathbb{B}}$

D) $2\sqrt{\mathbb{A}.\mathbb{B}}$

E) $\frac{1}{2}(\sqrt{\mathbb{A}}+\sqrt{\mathbb{B}})^2$

Resolución

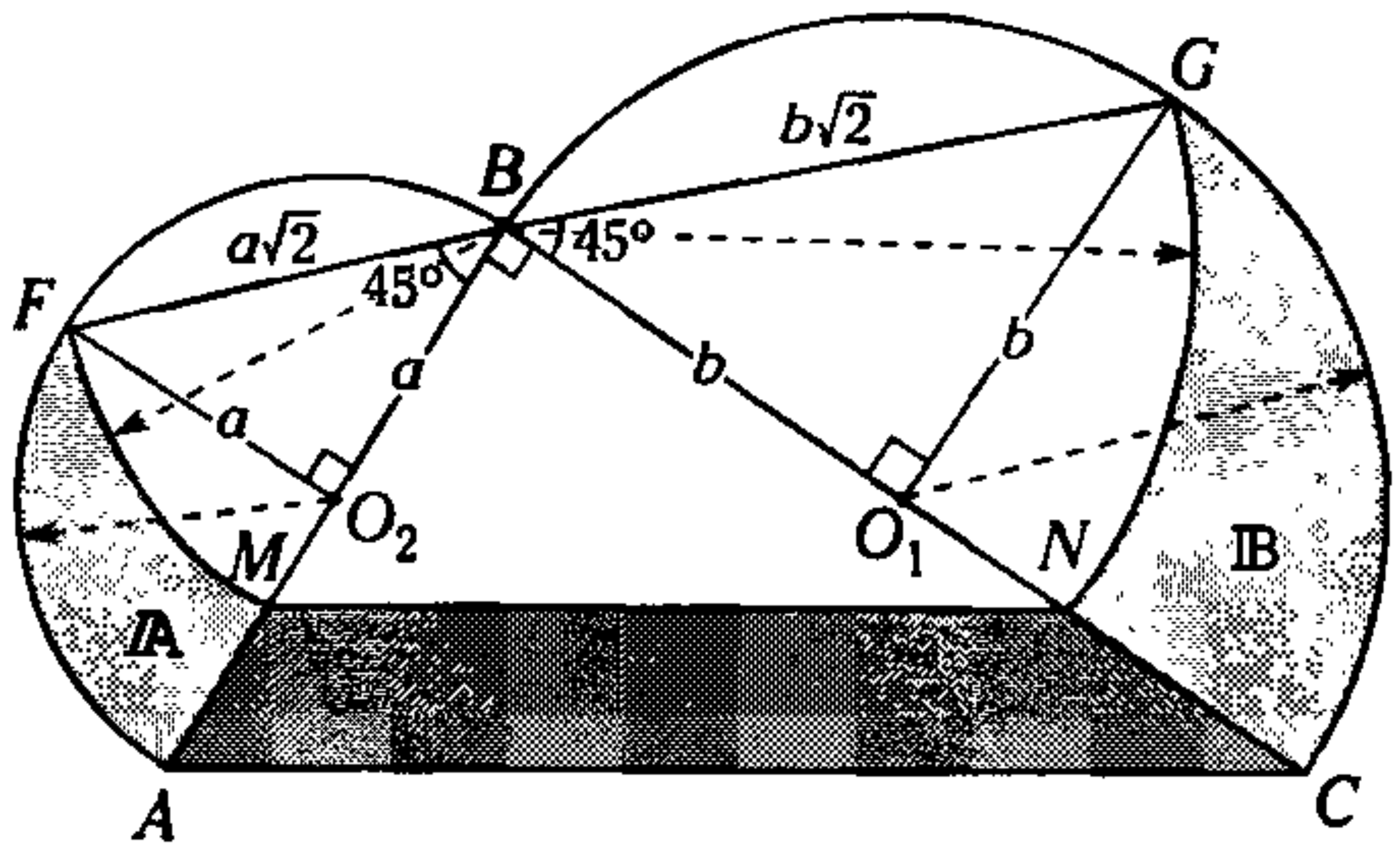


Figura 18.149

Piden $\mathbb{A}_{AMNC}$

$$\mathbb{A}_{AMNC} = \mathbb{A}_{\triangle ABC} - \mathbb{A}_{\triangle MBN}$$

$$\mathbb{A}_{AMNC} = \frac{(2a)(2b)}{2} - \frac{(a\sqrt{2})(b\sqrt{2})}{2}$$

$$\mathbb{A}_{AMNC} = ab$$

De la figura 18.149

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_{AO_2F} + \mathbb{A}_{\blacktriangle FO_2B} - \mathbb{A}_{FBM}$$

$$\mathbb{A} = \left(\frac{\pi a^2}{4}\right) + \left(\frac{a^2}{4}\right) - \left(\pi\left(a\sqrt{2}\right)^2 . \frac{45°}{360°}\right) = \frac{a^2}{2}$$

$$\mathbb{A} = \frac{a^2}{2} \ (\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\blacktriangle FO_2B} \text{ propiedad})$$

Análogamente, $\mathbb{B} = \frac{b^2}{2}$ ($\mathbb{B} = \mathbb{B}_{\triangle GO_1B}$ propiedad)

De las dos relaciones anteriores

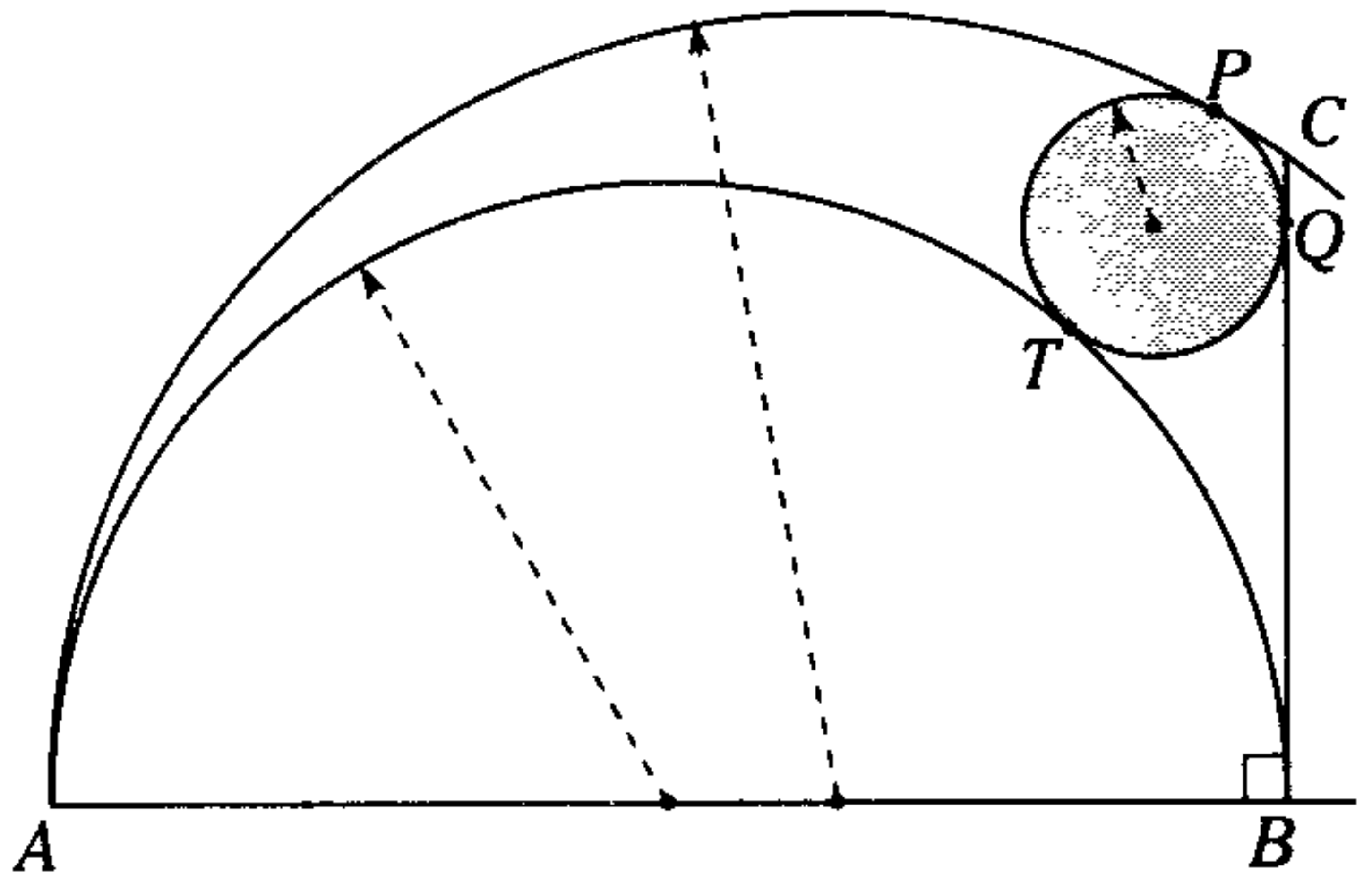
$$\mathbb{A}.\mathbb{B} = \left(\frac{a^2b^2}{2}\right) \rightarrow \sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \frac{ab}{2}$$

$$\therefore \ \mathbb{A}_{AMNC} = 2\sqrt{\mathbb{A}.\mathbb{B}}$$

CLAVE D

Problema 14

Si de la figura, $AB = 40$ y $BC = 20$, calcule el área del círculo. Considere que P, Q y T son puntos de tangencia



A) 14π B) 15π

C) 16π

D) 18π E) 25π

Resolución

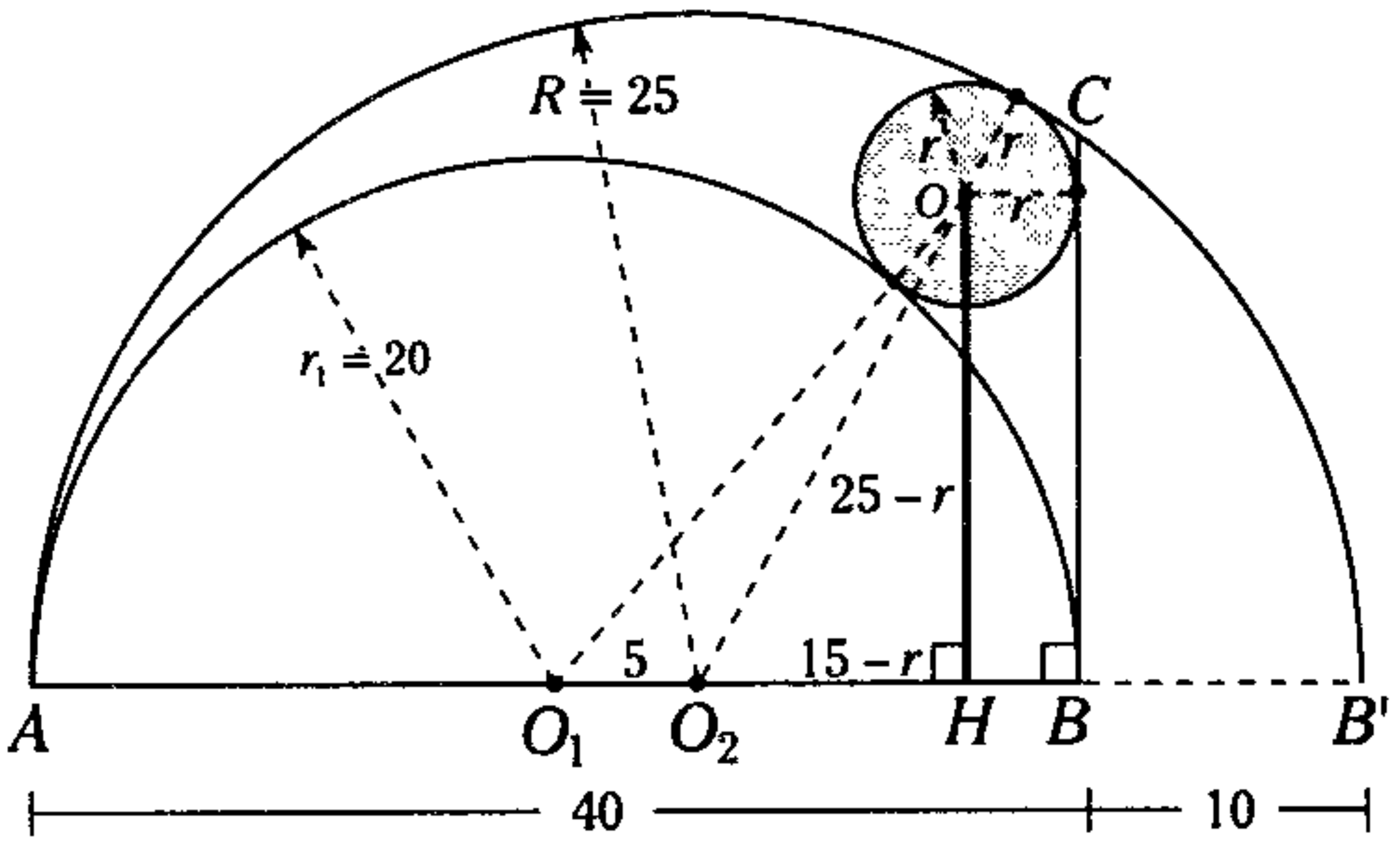


Figura 18.150

Piden $\mathbb{A}_{\bullet}$

En la semicircunferencia mayor se cumple

$$(CB)^2 = (AB)(BB')$$

$$(20)^2 = (40)(BB') \quad \rightarrow \quad BB' = 10$$

Por lo cual

$$R = \frac{50}{2} = 25, \quad r_1 = \frac{40}{2} = 20$$

$\triangle OO_1O_2$: teorema de Euclides

$$(OO_2)^2 = (20 + r)^2 + 5^2 - 2(5)(20 - r)$$

$$-100r = -400$$

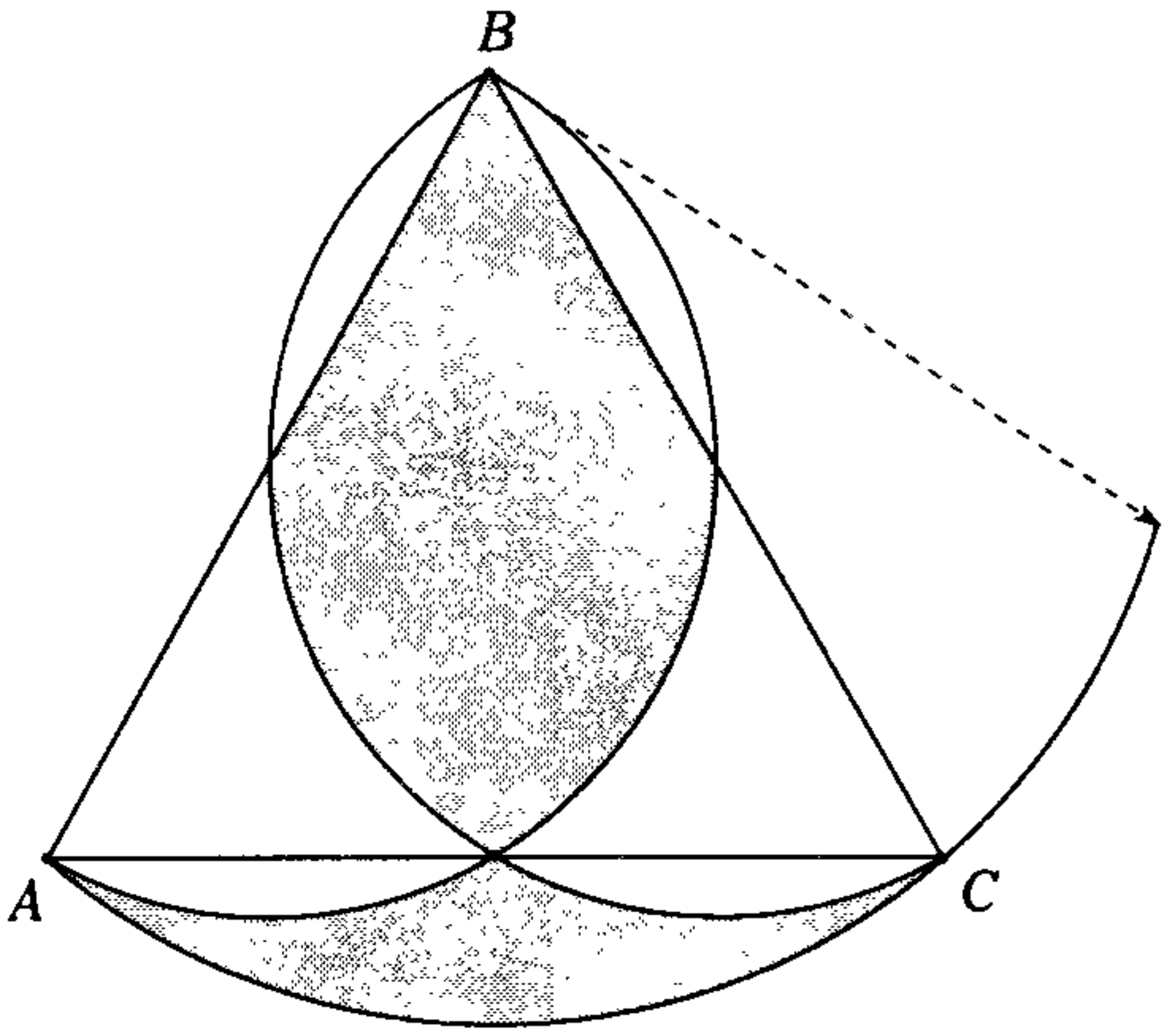
$$\rightarrow r = 4$$

$$\therefore \mathbb{A}_{\bullet} = 16\pi$$

CLAVE C

Problema 15

Se muestra En la figura el triángulo equilátero ABC. Si AB y BC son diámetros, calcule la suma de las áreas de las regiones sombreadas. Considere que $AC = a$.



A) $a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

B) $a^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C) $a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D) $a^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

E) $a^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{4}}{4}\right)$

Resolución

Piden suma de áreas de las regiones sombreada = $\mathbb{A}$

Por $\measuredangle$ inscrito

$$m\widehat{NH} = 60°, \ m\widehat{MH} = 60°$$

$$m\widehat{HMB} = 120°, m\widehat{HNB} = 120°$$

→ Se observa que

$$HN = NB = HM = MB$$

luego se tiene que

$$HN = NC \ \text{ y } \ HM = MA$$

por lo cual, M y N son centros de las semicircunferencias.

Aplicando transposición de regiones

$$\mathbb{A}_{\frown NH} = \mathbb{A}_{\frown HC}, \mathbb{A}_{\frown MH} = \mathbb{A}_{\frown HA}$$

Ahora podemos decir

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\blacktriangleleft ABC} - \mathbb{A}_{\blacktriangle ABC} + \mathbb{A}_{\blacklozenge MBNH}$$

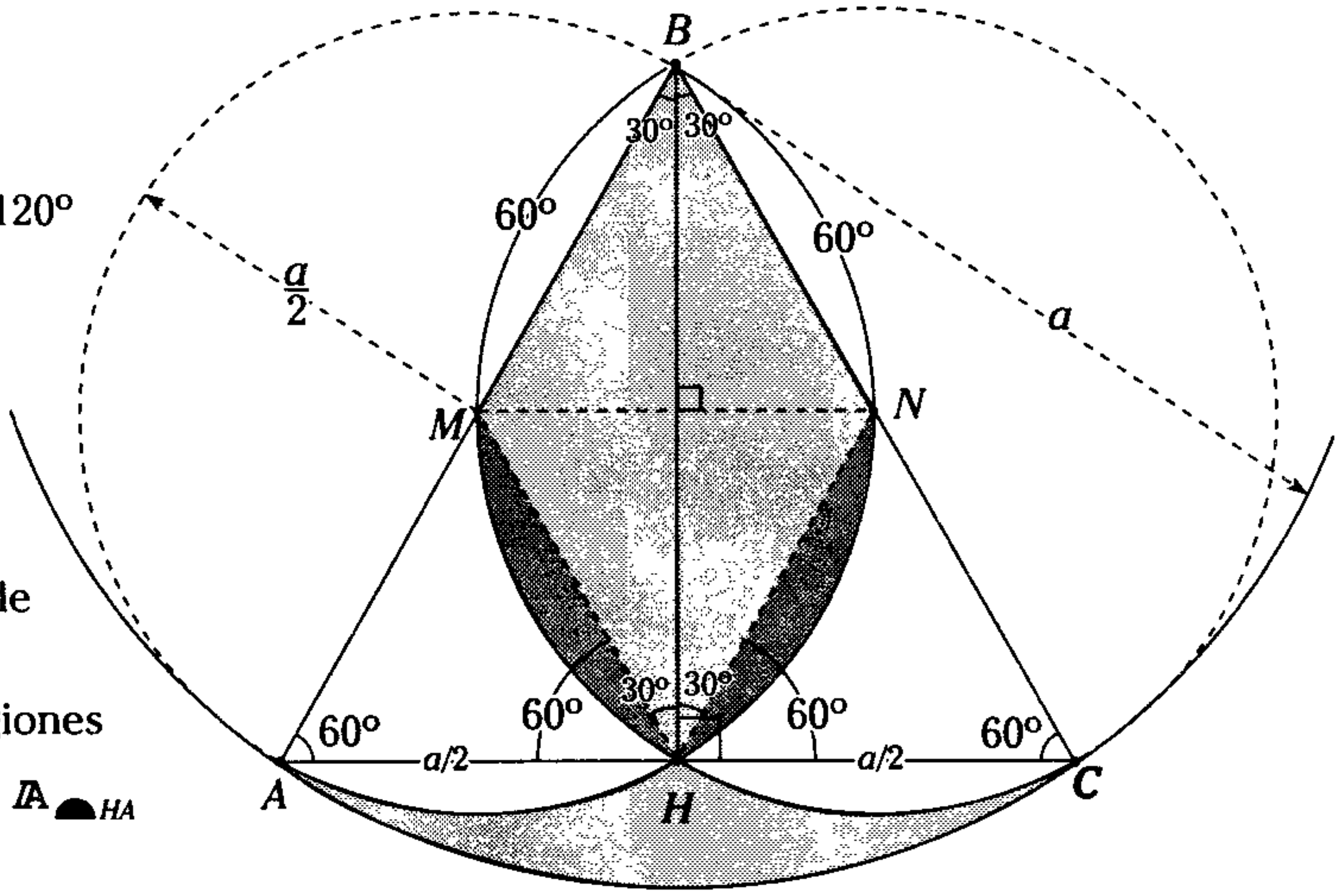


Figura 18.151

$$\mathbb{A} = \pi a^2 \frac{60°}{360°} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{a}{2}\right)\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \ \mathbb{A} = a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

CLAVE A

Problema 16

En la figura mostrado, $\dfrac{AQ}{CM} = \dfrac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ y $AP = 4\sqrt{3}$.

Halle el área de la región sombreada.

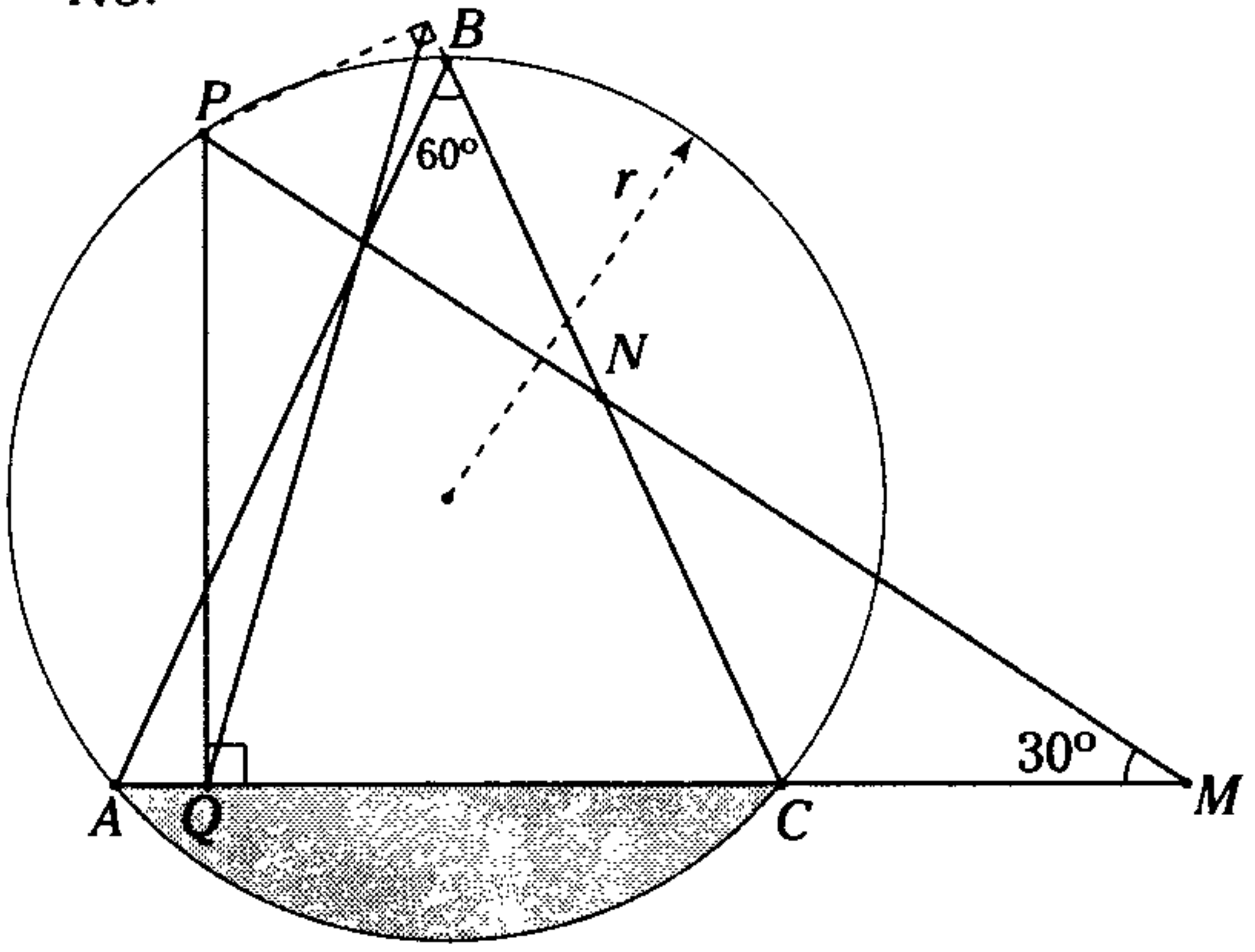
A) $12(4\pi - \sqrt{3})$

B) $\frac{50}{3}(3\pi - \sqrt{3})$

C) $\frac{50}{3}(4\pi - \sqrt{3})$

D) $\frac{25}{3}(3\pi - \sqrt{3})$

E) $\frac{25}{3}(4\pi - \sqrt{3})$



Resolución

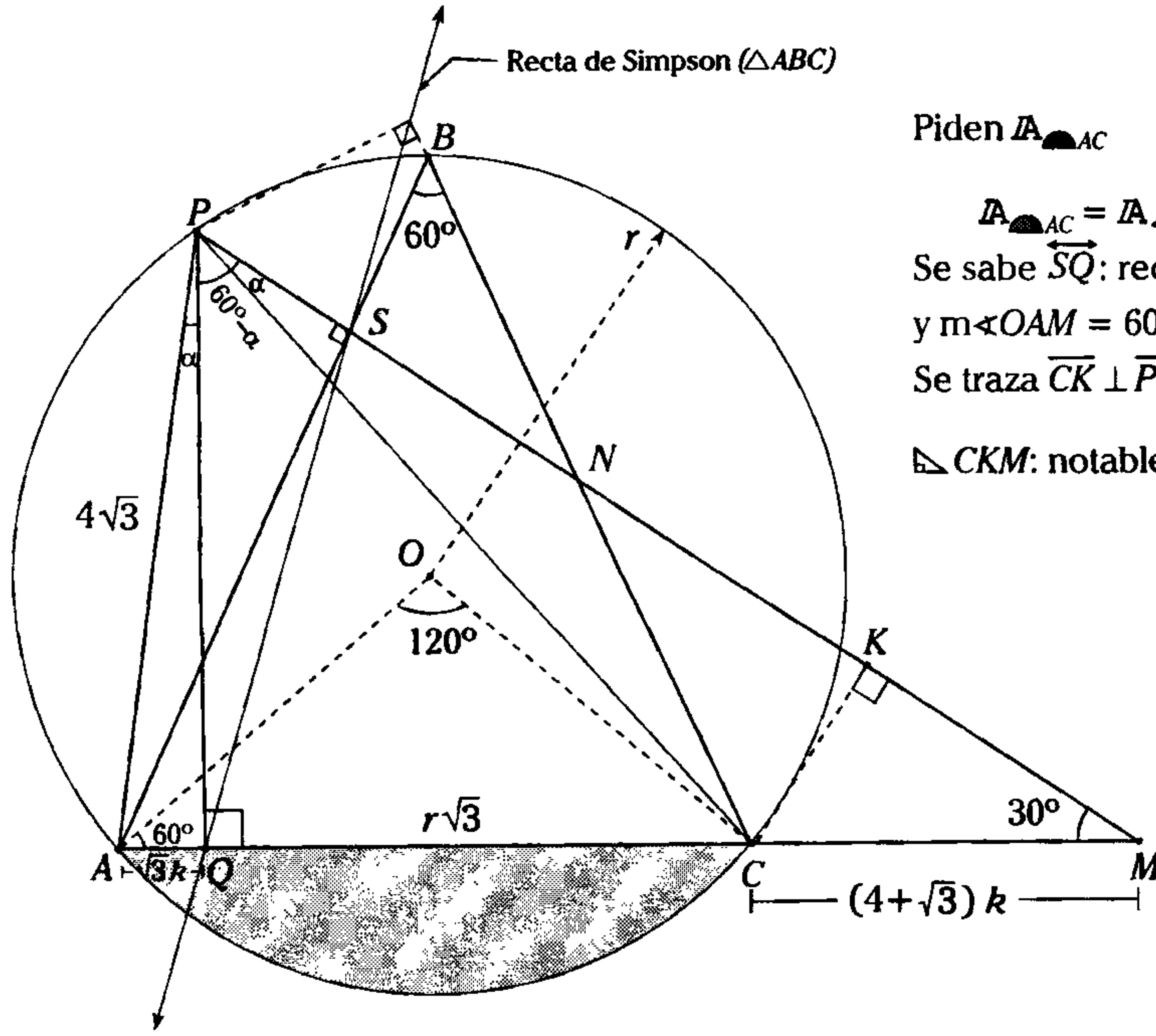


Figura 18.152

Piden $\mathbb{A}_{\frown AC}$

$$\mathbb{A}_{\frown AC} = \mathbb{A}_{\triangleleft AOC} - \mathbb{A}_{\triangle AOC}$$

Se sabe $\overleftrightarrow{SQ}$: recta de Simpson $\rightarrow$ $\overline{PM} \perp \overline{AB}$

y $m\measuredangle OAM = 60°$

Se traza $\overline{CK} \perp \overline{PM}$:

$\triangle CKM$: notable de 30° $\rightarrow$ $CK = \left(\dfrac{4+\sqrt{3}}{2}\right)k$

$\triangle PKC \sim \triangle PQA$ (A.A.A.)

$$\rightarrow \frac{PC}{4\sqrt{3}} = \frac{\frac{(4+\sqrt{3})k}{2}}{\sqrt{3}k} \rightarrow PC = 2(4+\sqrt{3})$$

Como $m\widehat{AC} = 120°$ $\rightarrow$ $AC = r\sqrt{3}$

$\triangle APC$: teorema de cosenos

$$(r\sqrt{3})^2 = (4\sqrt{3})^2 + (2(4+\sqrt{3}))^2 - 2(4+\sqrt{3})(2)(4+\sqrt{3}) . \cos 60°$$

$$3r^2 = 48 + 4(19+8\sqrt{3}) - (8\sqrt{3})(4+\sqrt{3})$$

$$3r^2 = 48 + 4(19) + 32\sqrt{3} - 32\sqrt{3} - 24$$

$$r^2 = \frac{100}{3}$$

En (I)

$$\mathbb{A}_{\frown AC} = \pi\left(\frac{100}{3}\right).\frac{120°}{360°} - \left(\frac{100}{3}\right).\frac{\text{sen}120°}{2}$$

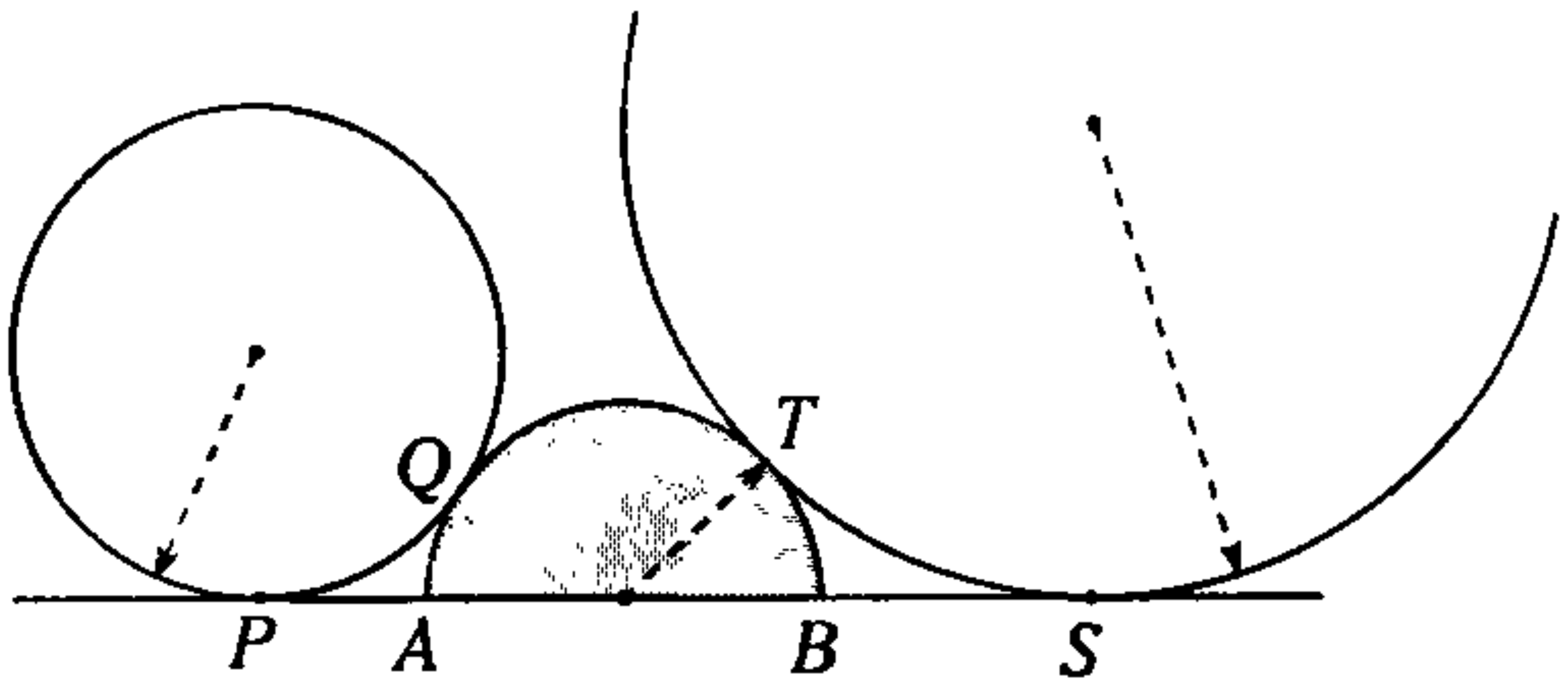
$$\mathbb{A}_{\frown AC} = \frac{25}{3}(4\pi - \sqrt{3})$$

CLAVE E

Problema 17

En la figura mostrada, P, Q, T y S son de tangencia. Si $PA=1$; $BS=2$ y $m\overset{\frown}{TQ}=90°$, señale el área de la región sombreada.

A) π
B) $\pi/2$
C) $\pi/4$
D) $\pi/9$
E) $\pi/8$



Resolución

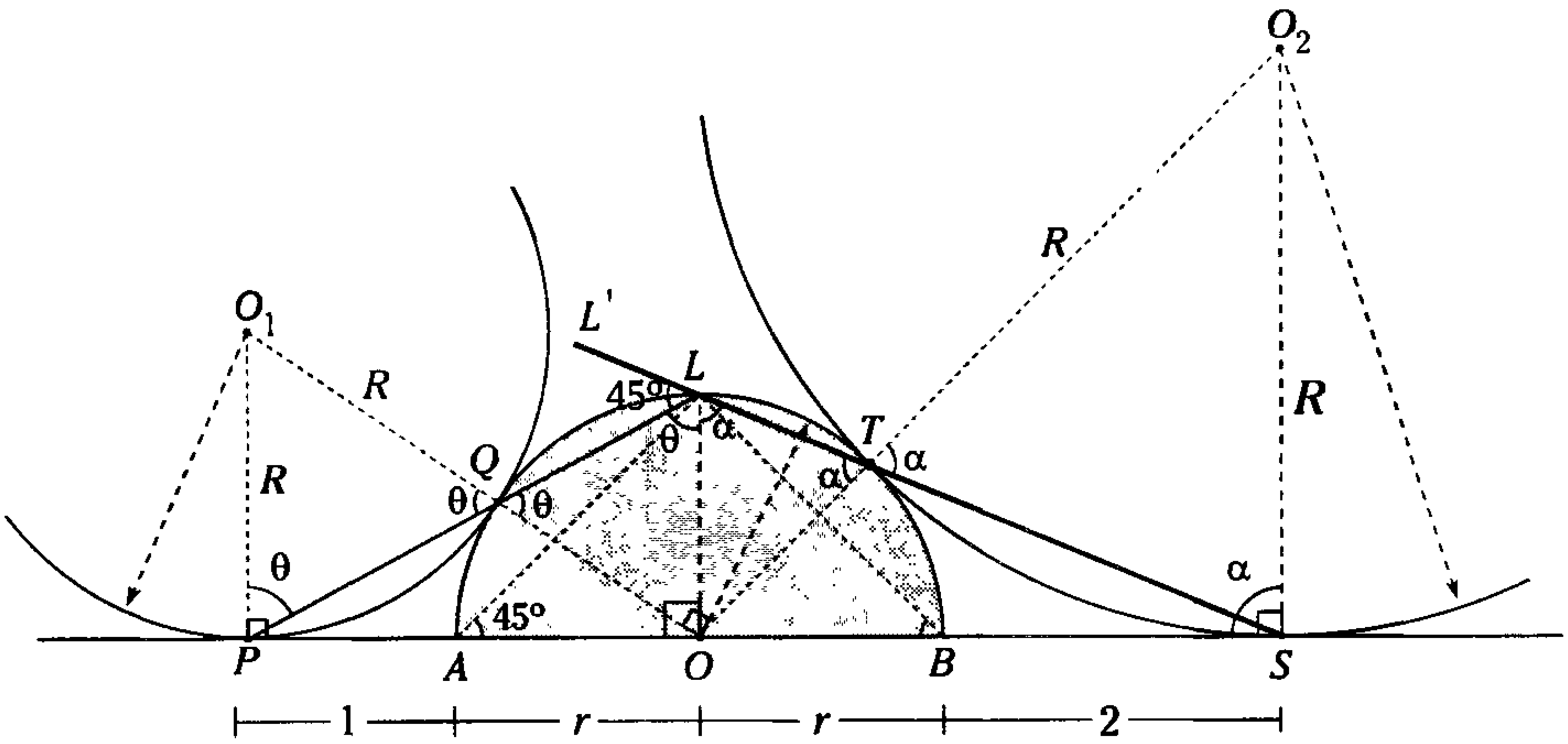


Figura 18.153

Piden $\mathbb{A}_{\frown}$

$$\mathbb{A}_{\frown AC}=\frac{\pi r^2}{2} \qquad \text{(I)}$$

Dato $m\overset{\frown}{QT}=90° \rightarrow m\sphericalangle QOT=90°$

En la figura 18.157, se observa $\overline{LO}\,//\,\overline{O_2S} \rightarrow \overline{LO}\perp\overline{AB}$

Como $\overline{PO_1}\,//\,\overline{LO}$ y $PO_1=QO_1$, $LO=QO$ $\rightarrow$ P, Q, L son colineales

Podemos notar que $m\sphericalangle L'LQ=45°$ y $m\overset{\frown}{TB}+m\overset{\frown}{AQ}=90° \rightarrow m\sphericalangle QLA+m\sphericalangle BLT=45°$

$\triangle PAL \sim \triangle LBS$ (A.A.A)

$$\frac{r\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{r\sqrt{2}} \rightarrow r=1$$

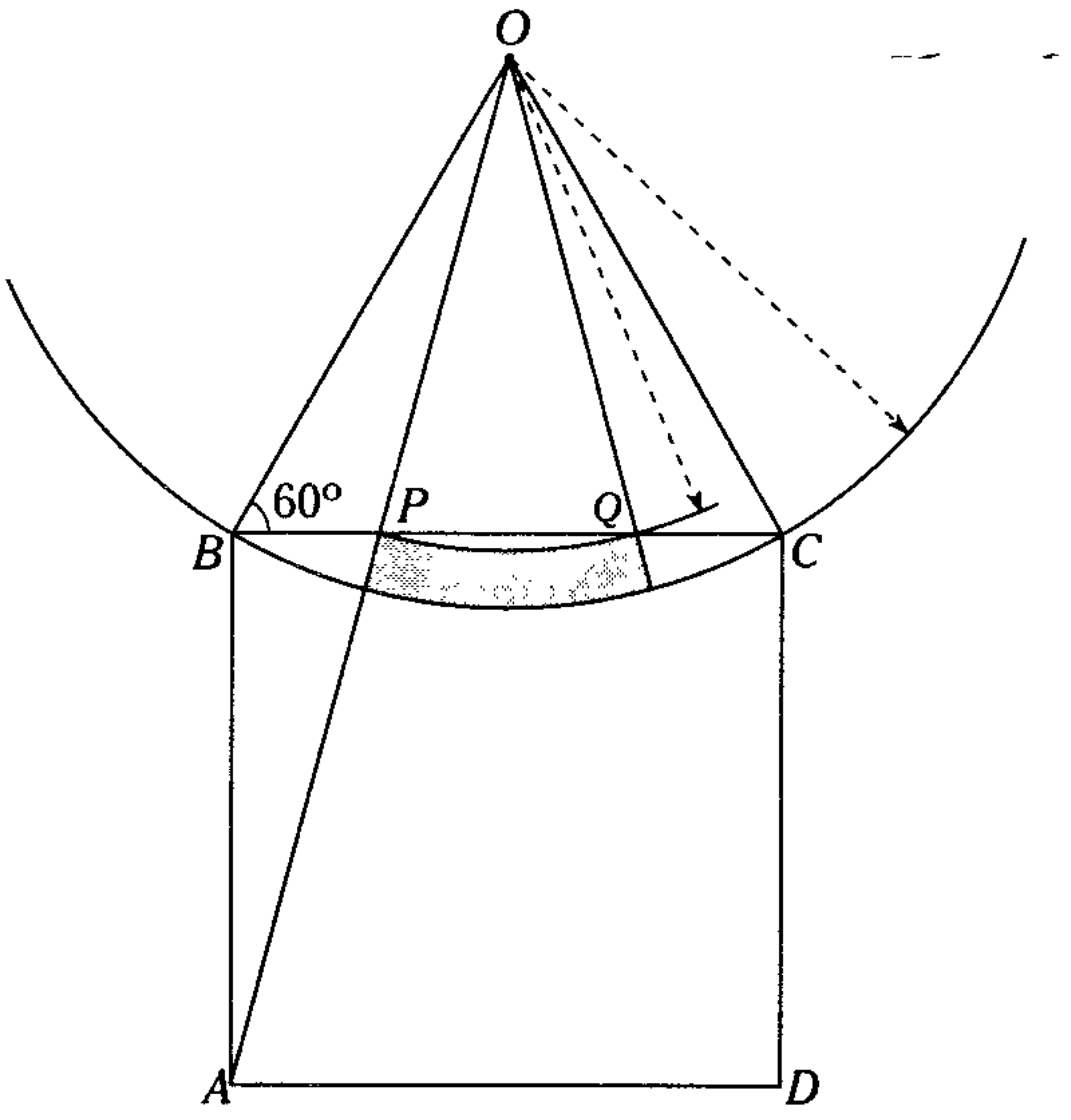
Reemplazando en (I)

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\frown}=\frac{\pi}{2}$$

CLAVE B

Problema 18

En la figura, $ABCD$ es un cuadrado. Si $PQ = 2a$, calcule el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{3}+2)}{6}$

B) $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{3}-1)}{12}$

C) $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{3}-1)}{9}$

D) $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{3}+1)}{9}$

E) $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{3}+4)}{9}$

Resolución

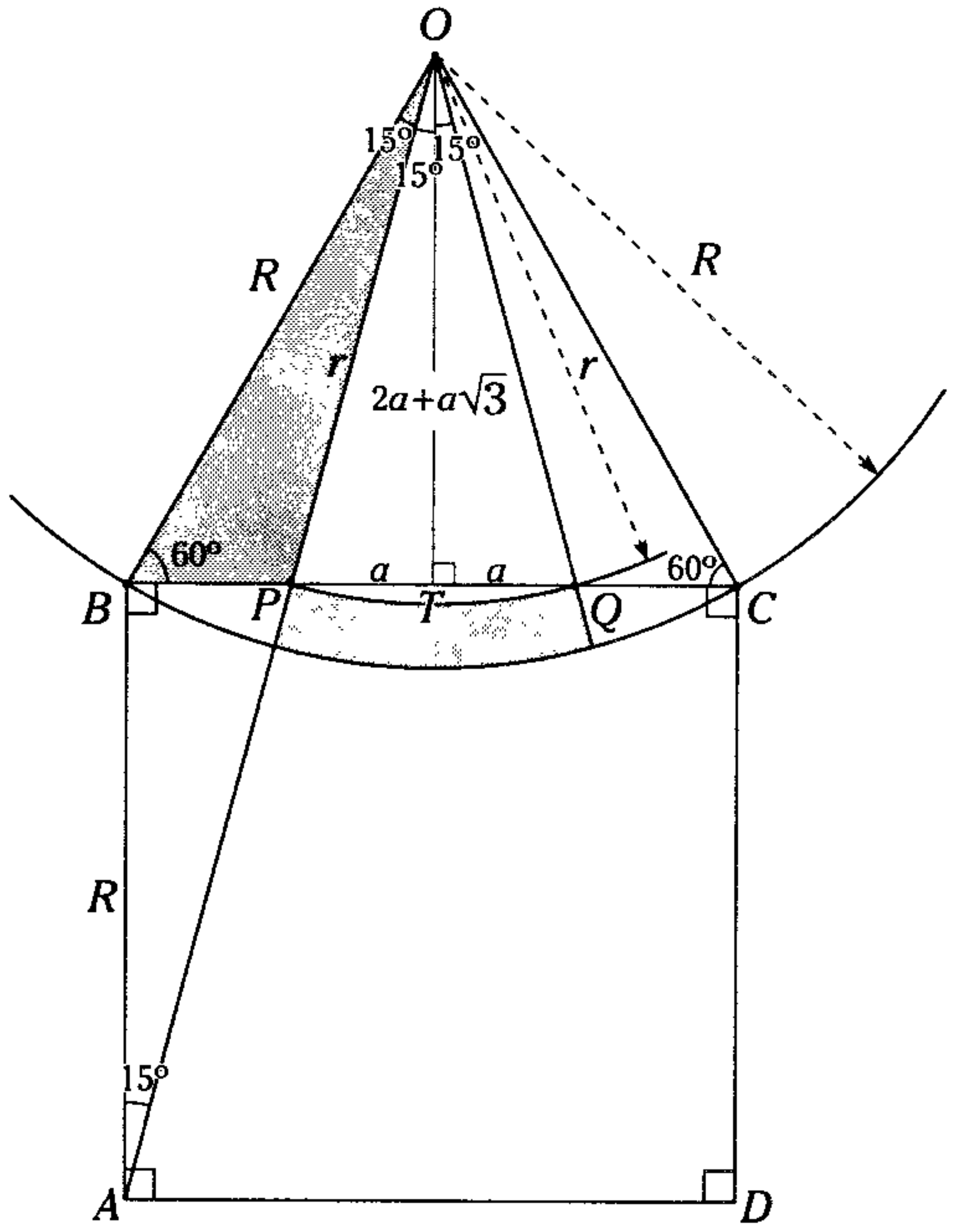


Figura 18.154

Piden $\mathbb{A}_{\frown}$

$$\mathbb{A}_{\frown} = \pi(R^2 - r^2).\frac{(m\sphericalangle POQ)}{360°} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle ABO$: es isósceles $\rightarrow$ m$\sphericalangle BAO$ = m$\sphericalangle BOA$ = 15°

Se traza $\overline{OT} \perp \overline{BC} \rightarrow PT = TQ = a$

$\triangle BOP$: m$\sphericalangle OPQ$=75° ($\sphericalangle$ exterior)

$\triangle OTP$: Not. 15° y 75°: $OT = 2a + a\sqrt{3}$

$\triangle OTB$: Not. 30° y 60°

$$BT = (2a + a\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\triangle BOP$: por teorema de proyecciones

$$R^2 - r^2 = \left[(2+\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{3}a\right]^2 - a^2$$

$$R^2 - r^2 = \frac{4}{3}(a^2)(\sqrt{3}+1)$$

Reemplazando en (I)

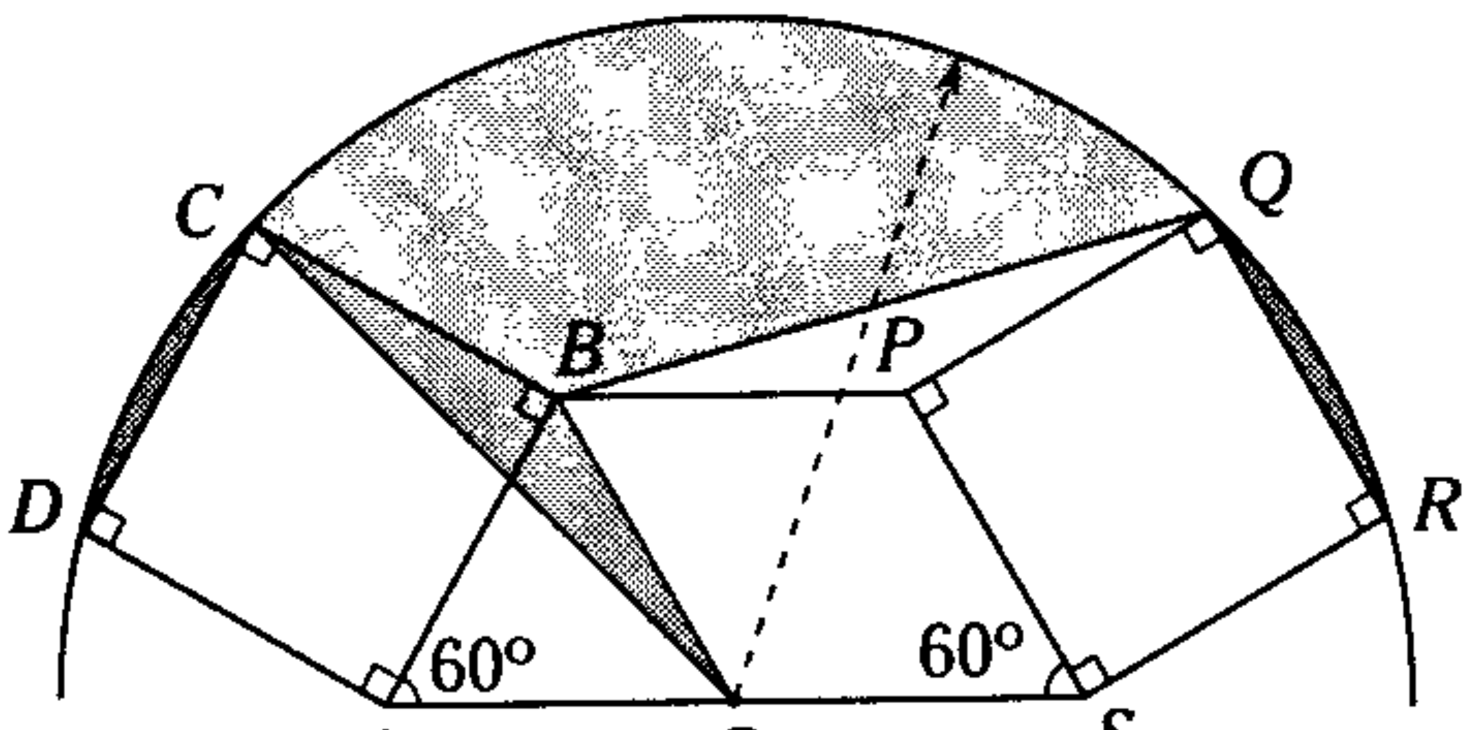
$$\mathbb{A}_{\frown} = \pi\left(\frac{4}{3}a^2(\sqrt{3}+1)\right)\left(\frac{30°}{360°}\right)$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\frown}=\frac{\pi a^2(\sqrt{3}+1)}{9}$$

CLAVE D

Problema 19

De la figura, $AO=OS=AB=PS=2$. Si $ABCD$ y $SPQR$ son cuadrados. Calcule la suma de las áreas de las regiones sombreadas.



A) $\frac{1}{3}(2+\sqrt{3})(2\pi-6)$

B) $\frac{1}{3}(\sqrt{3}-1)(2\pi-3)$

C) $\frac{1}{3}(2+\sqrt{3})(\pi+9)$

D) $\frac{1}{3}(2+\sqrt{3})(5\pi-9)$

E) $\frac{1}{3}(2+\sqrt{3})(5\pi+9)$

Resolución

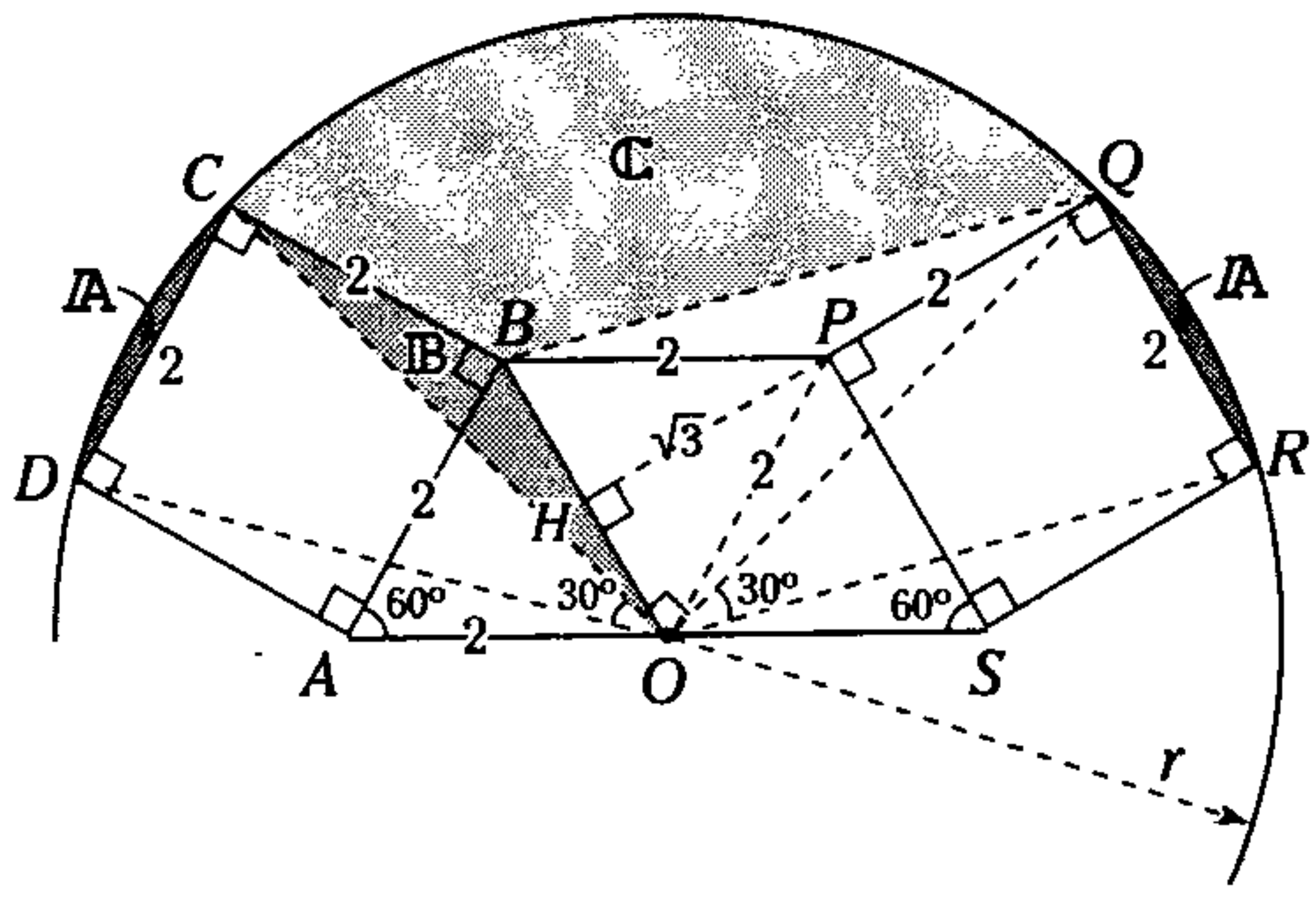


Figura 18.155

Piden área de la región sombreada = $\mathbb{A}_S$

sean

$\mathbb{A}=A_{\frown CD}$

$\mathbb{B}=A_{\triangle CBO}$

$\mathbb{C}=A_{CBQ}$

$\rightarrow\ \mathbb{A}_S=2\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}$

de la figura 18.155,

$$2\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}=\mathbb{A}_{ROD}-3\mathbb{A}_{\triangle COD}$$

$$\rightarrow\ \mathbb{A}_S=\mathbb{A}_{ROD}-3\mathbb{A}_{\triangle COD} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle QHO$: Teorema de Pitágoras

$$r^2=1^2+(\sqrt{3}+2)^2$$

$$\rightarrow\ r=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\mathbb{A}_{ROD}=\frac{\pi r^2.150^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi(2\sqrt{2+\sqrt{3}})^2.150^\circ}{360^\circ}$$

$$\rightarrow\ \mathbb{A}_{ROD}=\frac{5}{3}(2+\sqrt{3})\pi$$

Además $\mathbb{A}_{\triangle COD}=\dfrac{2(2+\sqrt{3})}{2}=2+\sqrt{3}$

finalmente en (I)

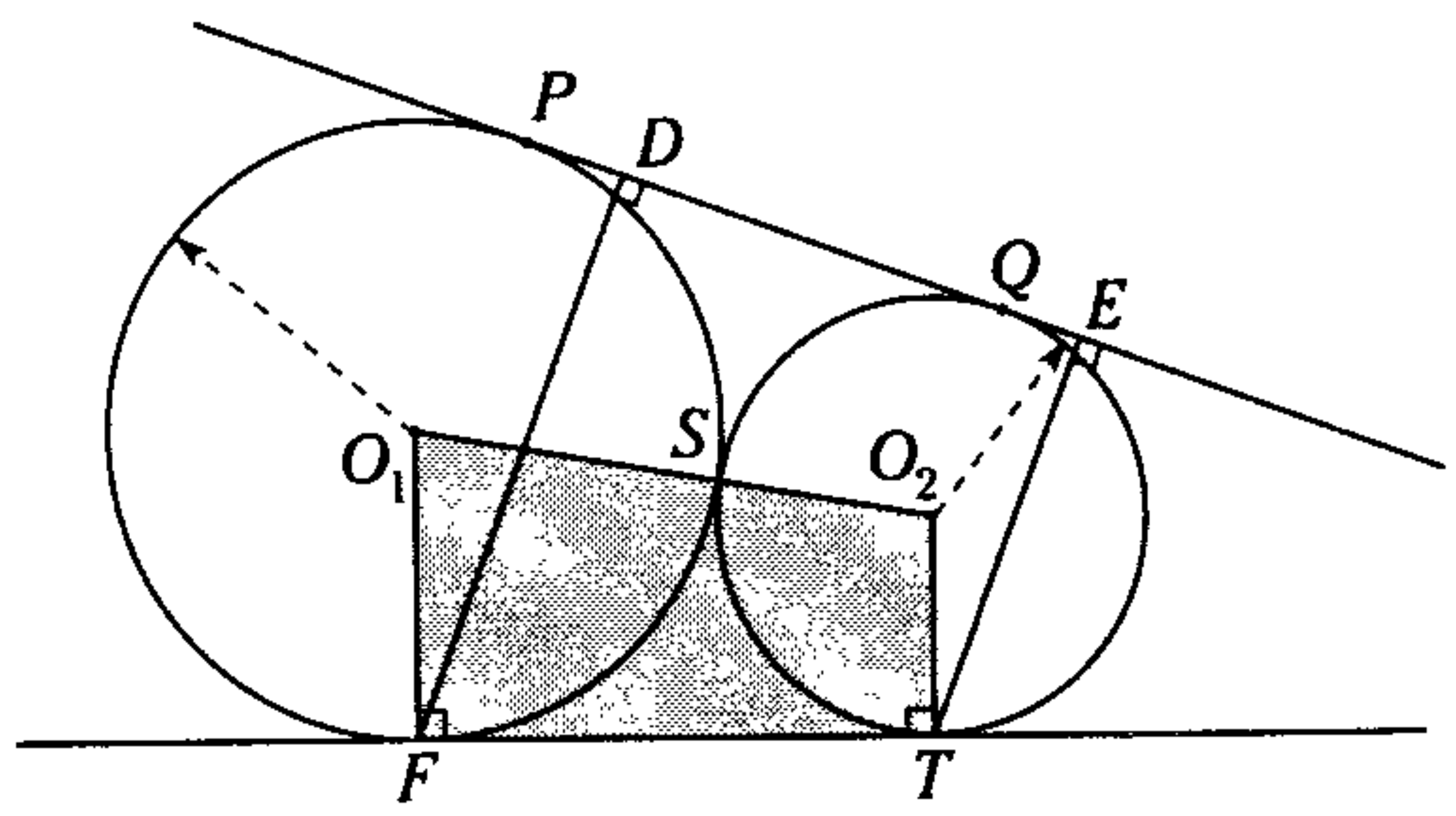
$$\mathbb{A}_S=\frac{5}{3}(2+\sqrt{3})\pi-3(2+\sqrt{3})$$

$$\mathbb{A}_S=\frac{1}{3}(2+\sqrt{3})(5\pi-9)$$

CLAVE D

Problema 20

En la figura mostrado, P, Q, T y F son puntos de tangencia. Si $FD=a$ y $TE=b$, calcule el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{(a+b)^5}{\sqrt{(ab)^3}}$ B) $\dfrac{(a+b)^5}{64\sqrt{(ab)^3}}$ C) $\dfrac{(a+b)^5}{32\sqrt{(ab)^3}}$

D) $\dfrac{(a+b)^5}{\sqrt{2(ab)^3}}$ E) $\dfrac{(a+b)^5}{8\sqrt{(ab)^3}}$

Resolución

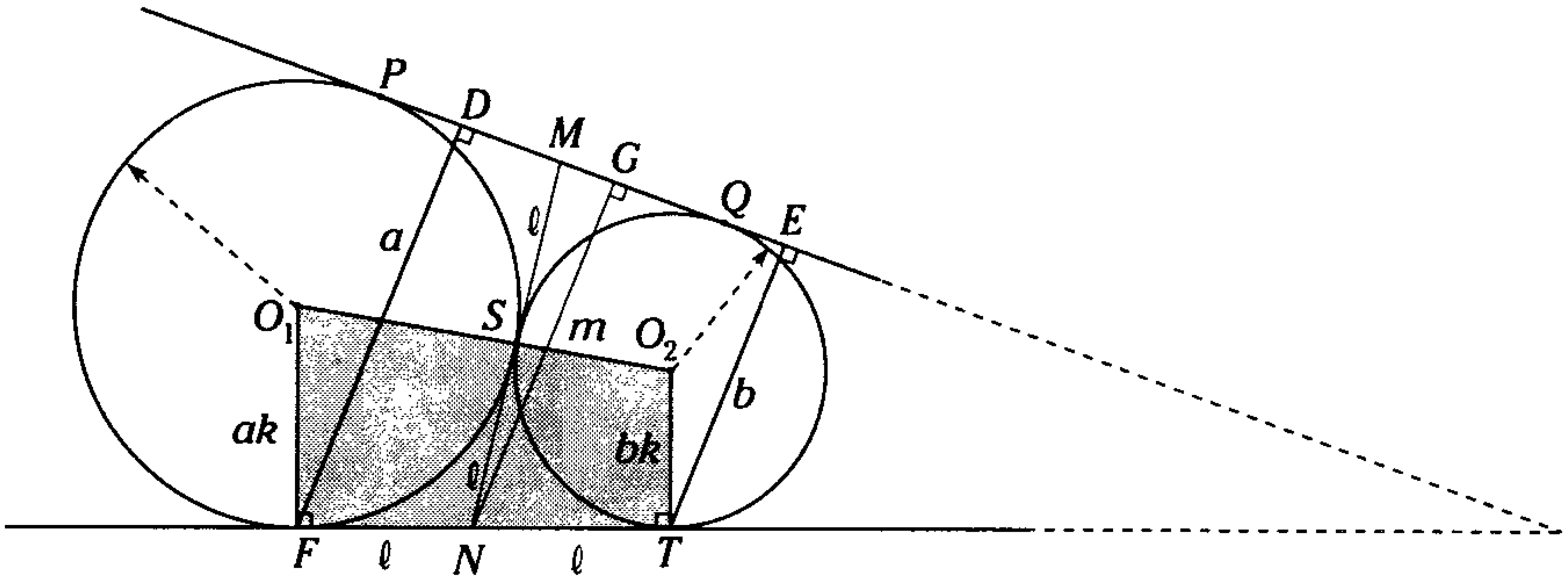


Figura 18.156

Piden $A_{\blacksquare O_1O_2TF}$

$A_{\blacksquare O_1O_2TF} =$ (long. base media) (FT) (I)

Se traza $\overline{MN}$ tangente en S.

Se sabe $FN = NT = NS$

En el trapecio $ETFD$: se traza la base media $\overline{NG}$: $NG = m = \dfrac{a+b}{2}$ (II)

La distancia de S a $\overline{PQ}$ a FT es $\left(\dfrac{m}{2}\right)$, por $\sim\triangle$: $\dfrac{O_1F}{O_2T} = \dfrac{a}{b}$; $O_1F = ak$, $O_2T = bk$

En el trapecio $O_1O_2\,TF$. Por propiedad: $\dfrac{m}{2} = \dfrac{(ak)(bk)+(bk)(ak)}{ak+bk} = \dfrac{2abk}{a+b}$ (III)

De (II) y (III) $\dfrac{a+b}{4} = \dfrac{2abk}{a+b} \rightarrow k = \dfrac{(a+b)^2}{8ab}$ (IV)

Por propiedad: $FT = 2\sqrt{(ak)(bk)}$ (V)

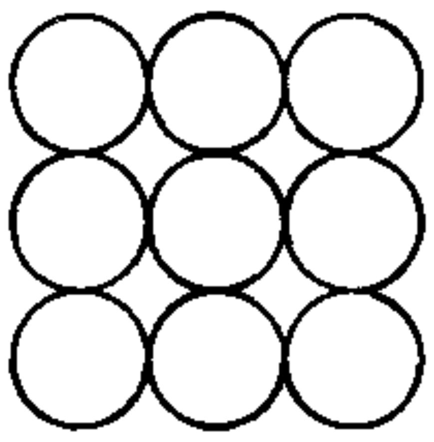
Reemplazando en (I)

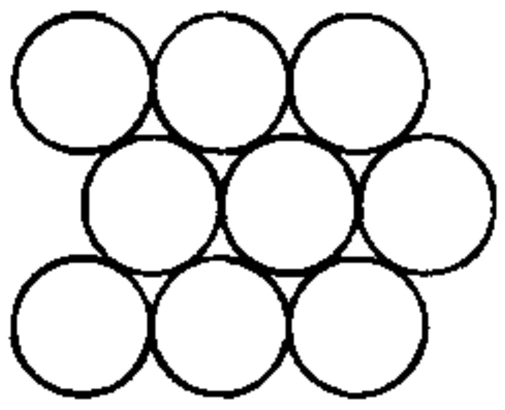
$$A_{\blacksquare O_1O_2TF} = \left(\frac{ak+bk}{2}\right)2\sqrt{abk^2} = (a+b)\sqrt{ab}\,k^2$$

$$\therefore\ A_{\blacksquare O_1O_2TF} = \frac{(a+b)^5}{64\sqrt{(ab)^3}}$$

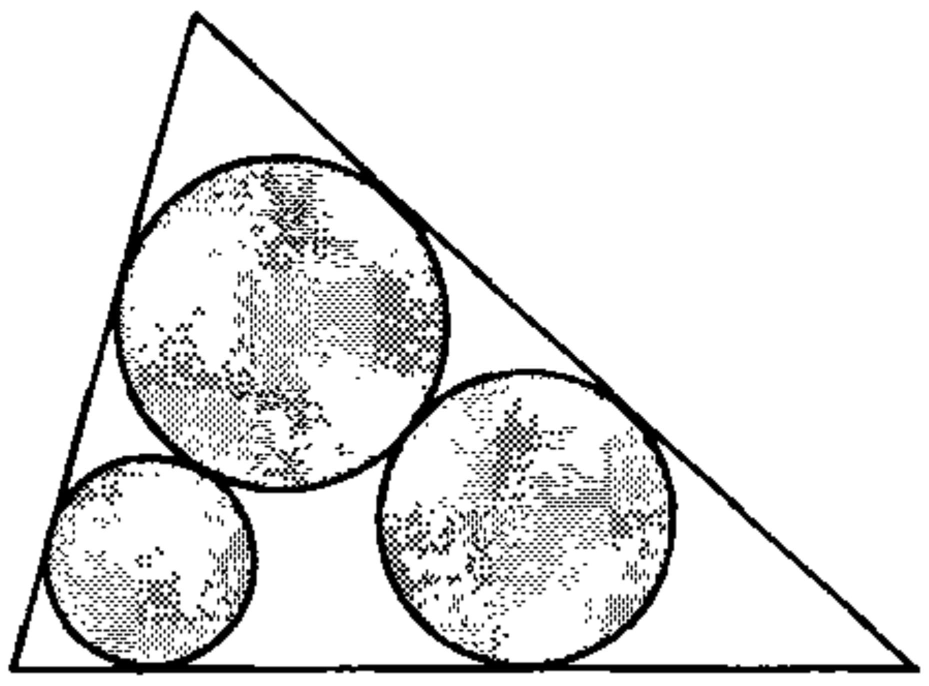
CLAVE B

1. **Locetas circulares.** Un arquitecto ha previsto un recubrimiento de locetas circulares para una cierta pared. Si todas las locetas son iguales, ¿cuál es el máximo porcentaje de área de la pared que puede ser cubierto con dichas locetas?



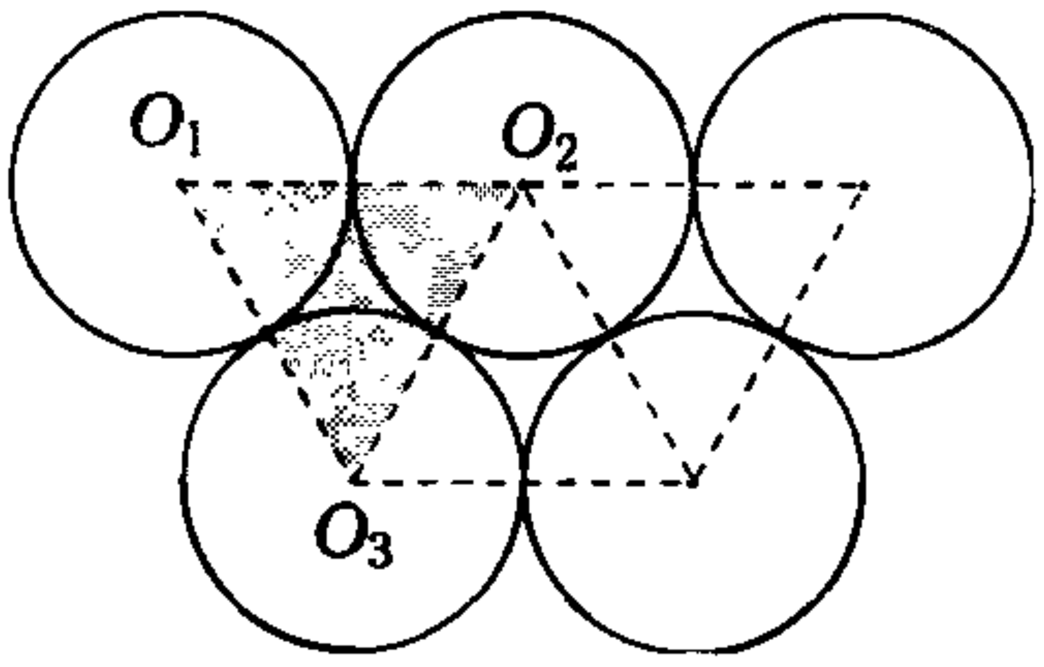


2. **El problema de Malfatti.** Giovani Francesco Malfatti (1731-1807) de la universidad de Ferrara, Italia propuso, en 1803, el siguiente problema: *Dado un pedazo de mármol en forma de prisma triangular, ¿cómo se puede obtener 3 columnas cilíndricas desperdiciando la menor cantidad posible de mármol?*
El problema es equivalente a inscribir tres círculos en un triángulo dado, de manera que la suma de las áreas de los círculos sea máxima.



Encuentre una solución para los casos de:
a. Un triángulo equilátero.
b. Un triángulo isósceles.

Resolución 1



El plano al poder ser recubierto por triángulos equiláteros similares a $O_1O_2O_3$, el porcentaje de área cubierta por las locetas circulares es equivalente a la razón de la suma de áreas de los sectores circulares respecto del triángulo equilátero multiplicado por 100.
Podemos observar que los tres sectores circulares completan un semicírculo. Así,

$$\% = \frac{A_{\text{semicírculo}}}{A_{\blacktriangle}} \cdot 100 = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{(2r)^2\frac{\sqrt{3}}{4}} \cdot 100 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot 100$$

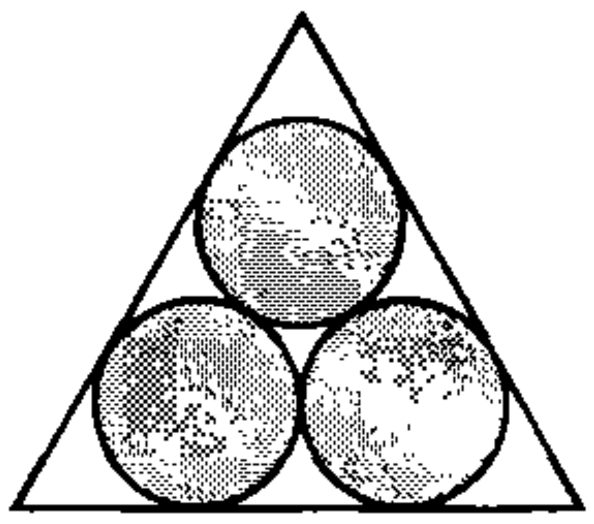
$$\% = 91{,}47$$

Resolución 2

a. Cuando un triángulo es equilátero, la configuración que usualmente podríamos plantear es la siguente figura (a), mas al encontrar la razón (r).

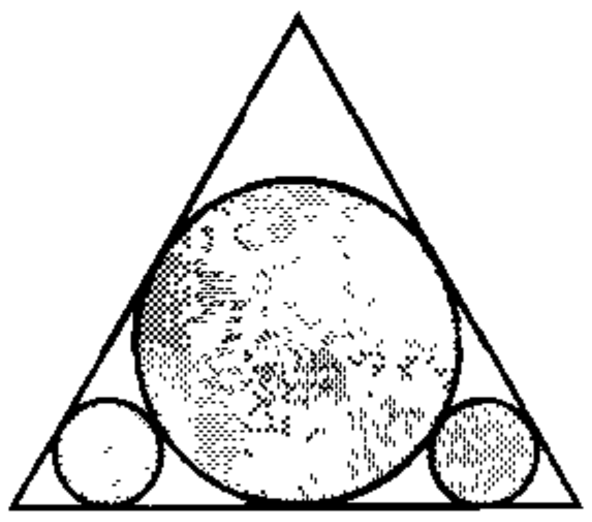
$$r = \frac{A_{\blacktriangle}}{\Sigma A_{\bullet s}} = 1{,}37$$

Se supone que esta debe ser la más pequeña posible, puesto que queremos que la suma de las áreas de los círculos sea máxima.



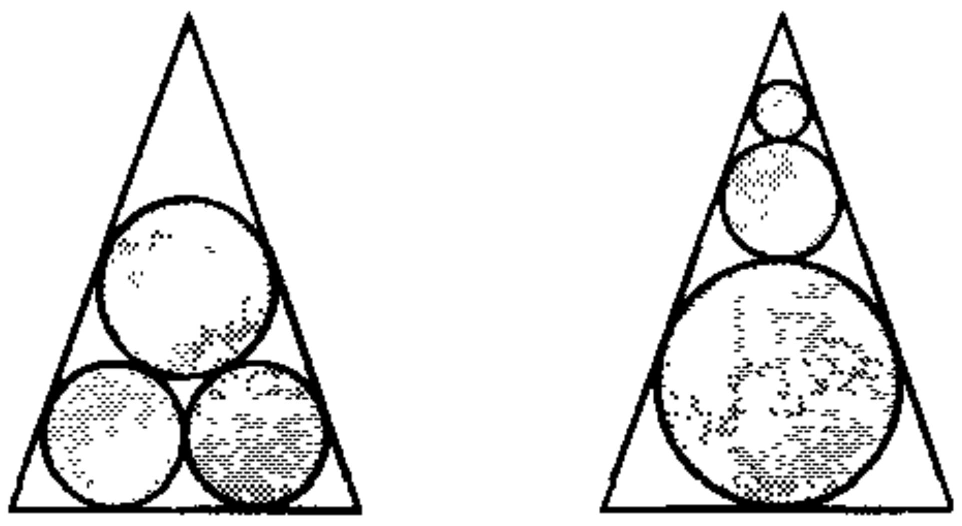
(a)

Sin embargo, la configuración en la siguiente figura (b) arroja un valor para $r = 1{,}36$; esta es la solución al problema.



(b)

b. Si un triángulo es isósceles, dependerá si es acutángulo, obtusángulo o rectángulo.
Analizaremos solo el primer caso quedando para el lector los otros dos casos.
Aquí también mostramos dos disposiciones.

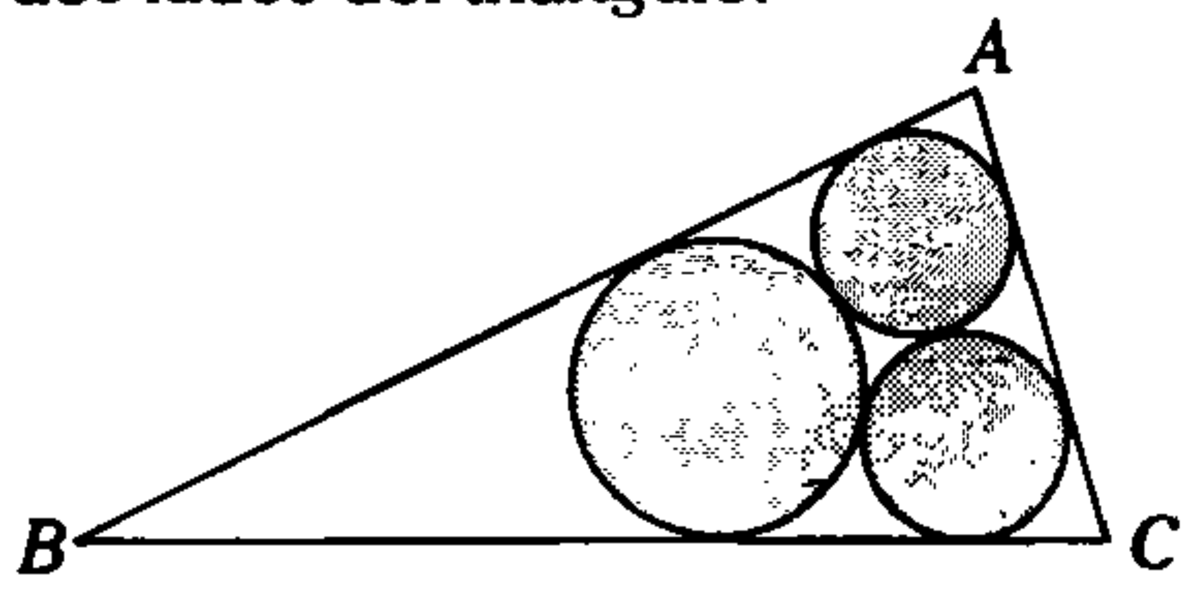


(a) (b)

En la disposición de los círculos en la figura (a), la suma de las áreas de los círculos es mayor que en la figura (b).

Lo cierto es que el problema general (para cualquier triángulo) no está resuelto todavía, a pesar de las muchas interesantes tentativas.

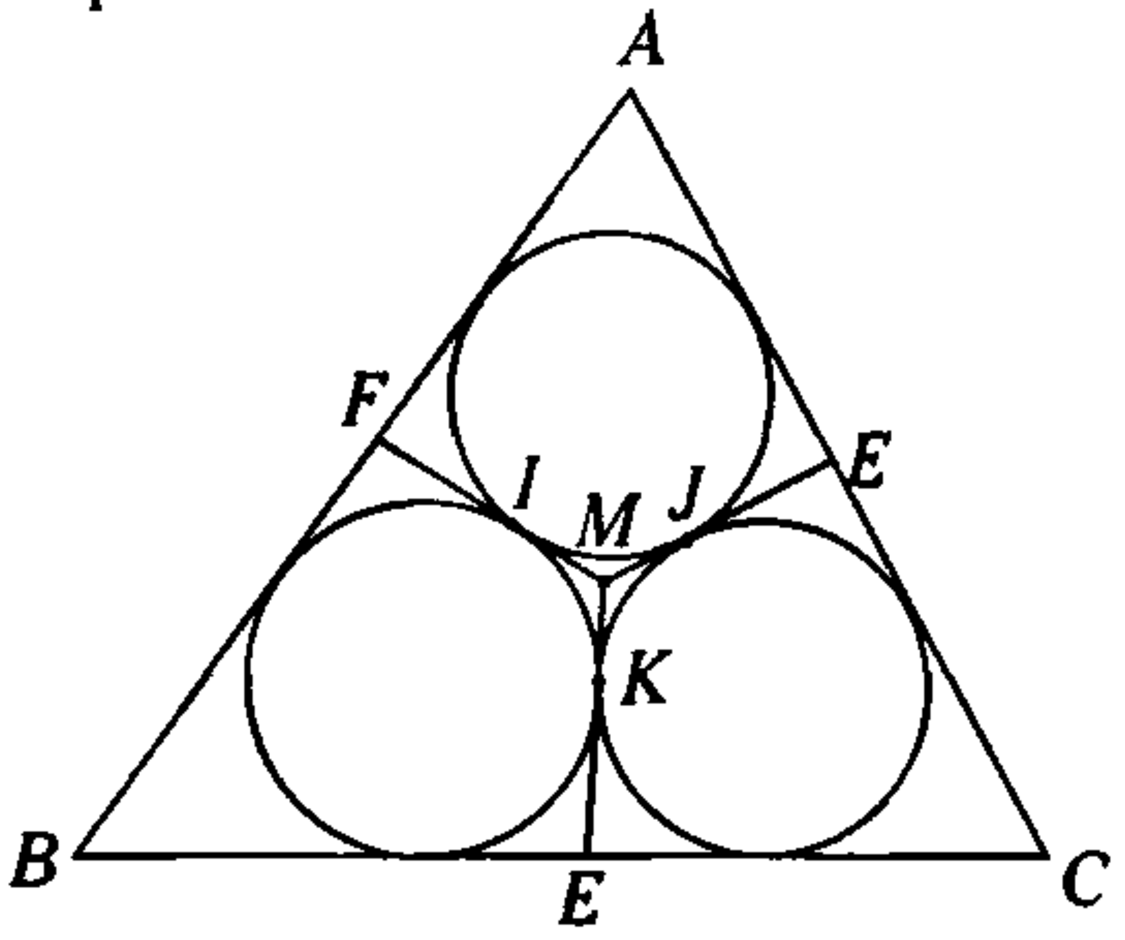
Es conocido también como el problema de Malfatti aquel que consiste en inscribir tres círculos en un triángulo, de manera que los círculos sean todos tangentes entre sí y, también, sean tangentes, cada uno de ellos, a dos lados del triángulo.



El problema fue propuesto por Gian Francesco Malfatti (1731-1807) y resuelto en el décimo volumen de Memorie di Matematica edi Fisica della Societa italiana delle Scienze.

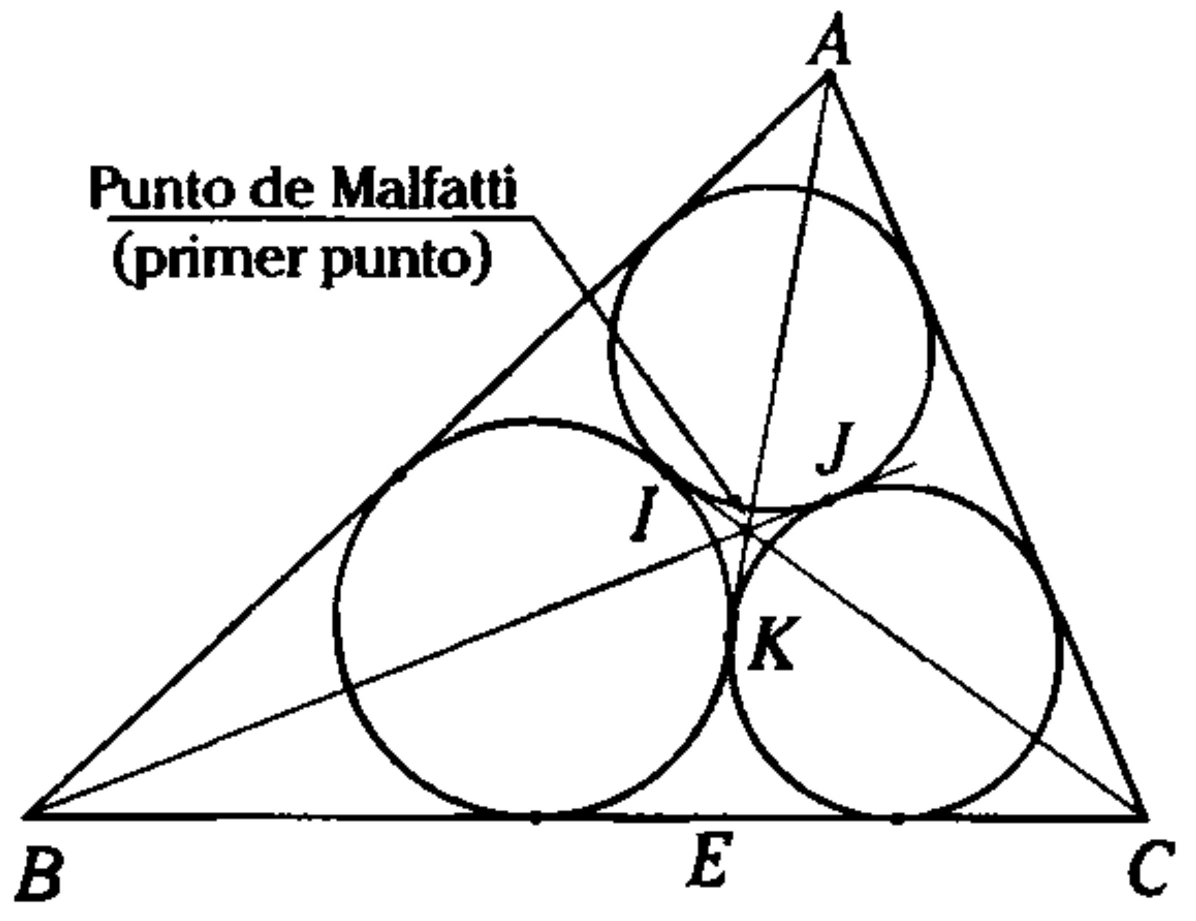
La solución algo complicada del problema de Malfatti se reduce a que en todo triángulo es posible ubicar un punto en la región interior y en cada lado un punto que determine cuadriláteros circunscriptibles, dado que éstos tienen la propiedad de poder inscribir círculos en cada uno de ellos y significa así que son los círculos que buscamos y denominaremos círculos de Malfatti.

AFME, *BFMD* y *DMEC* son cuadriláteros circunscriptibles.



Los círculos de Malfatti cumplen la siguiente propiedad:

Las rectas que unen los vértices con los puntos de tangencia de los círculos concurren en un punto llamado punto de Malfatti.



así tambien, si unimos los puntos de tangencia de los tres círculos de Malfatti, con los excentros del triángulo original, se obtienen rectas que son concurrentes. A esto se denomina segundo punto de Malfatti.

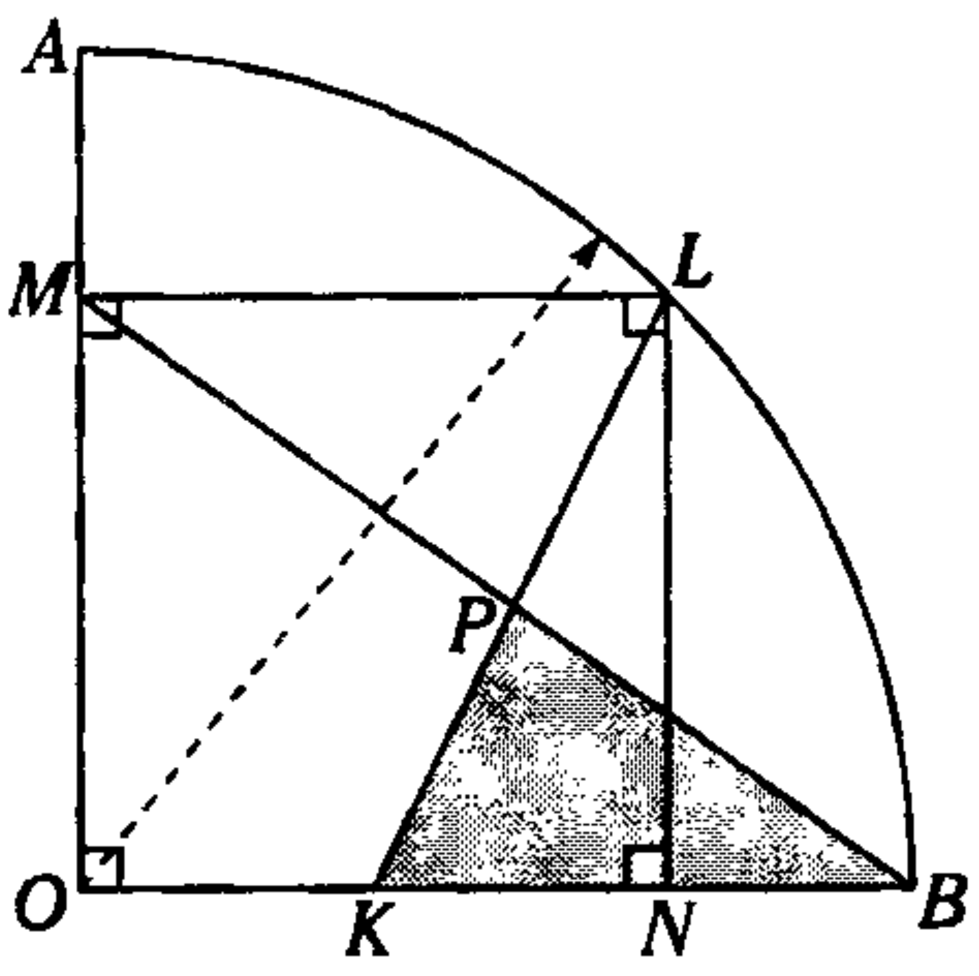
Problemas Propuestos

Áreas de regiones triangulares

1. En un cuadrado $ABCD$, se ubica el punto medio M de $\overline{CD}$, luego se traza $\overline{CP} \perp \overline{BM}$ ($P \in \overline{BM}$). Si $AB = 2\sqrt{5}$, calcule el área de la región triangular APM.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

2. De la figura mostrada, $OK = KN = 2$ y $OM = 3$. Calcule el área de la región sombreada.



A) $\frac{9}{7}$ B) $\frac{27}{14}$ C) $\frac{27}{8}$

D) $\frac{9}{14}$ E) $\frac{18}{7}$

3. En un triángulo ABC, $AB = 4$; $BC = 5$ y $AC = 6$. Se traza una semicircunferencia en diámetro en $\overline{AC}$ y tangente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N. Halle el radio de la semicircunferencia.

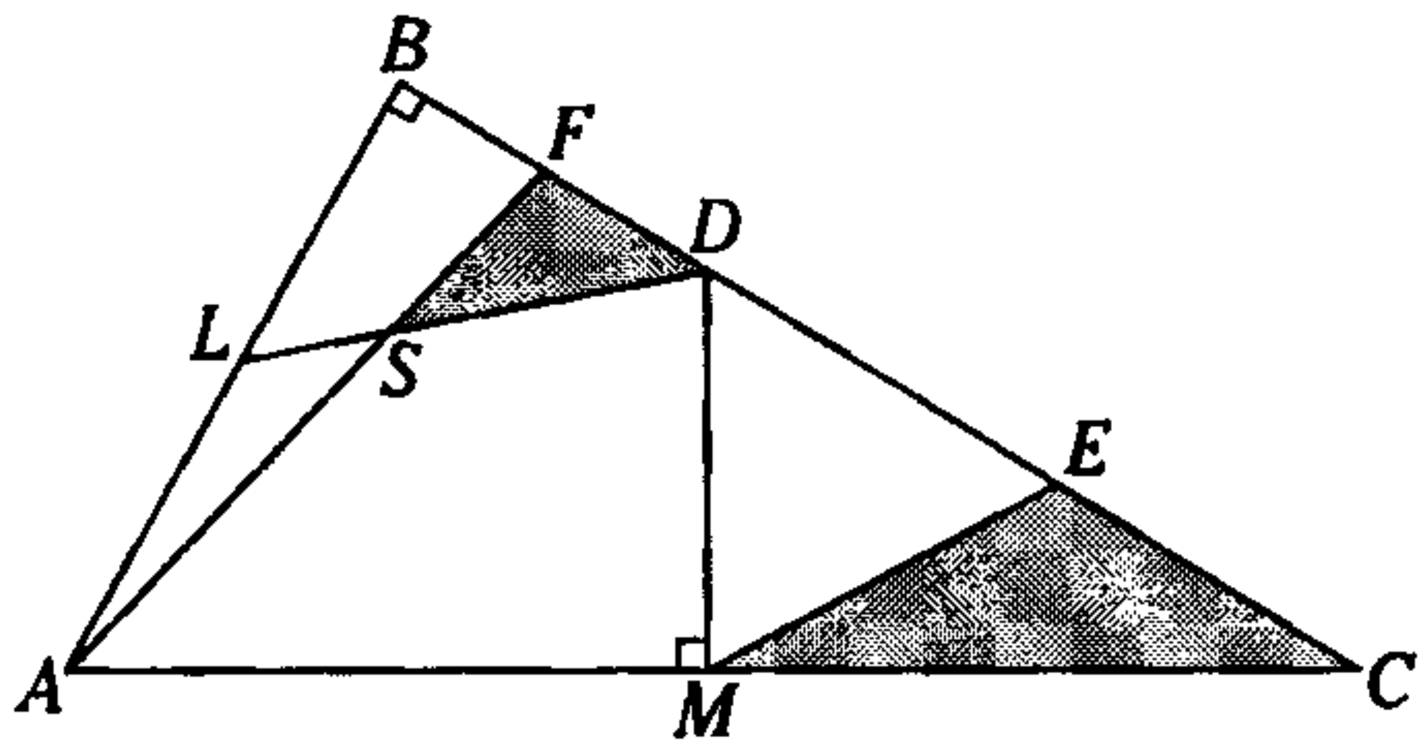
A) $\frac{4\sqrt{7}}{5}$ B) $\frac{6\sqrt{8}}{7}$ C) $\frac{5\sqrt{7}}{6}$

D) $\frac{5\sqrt{7}}{3}$ E) $\frac{3\sqrt{7}}{4}$

4. En un triángulo ABC, se ubica D en $\overline{AC}$, tal que $DB = AD + 8$, $AC = 19$ y $BC = 15$. Si el área de la región triangular DBC es 84, calcule AD.

A) 5 B) 4 C) 6
D) 8 E) 7

5. De la figura, $AL = LB$, $AM = MC$, $DM = ME$ y $BF = FD$. Si el área de la región SFD es 7, indique el área de la región MEC.



A) 14 B) 21 C) 24
D) 28 E) 35

6. En un triángulo ABC, se trazan la mediana AN y la ceviana interior CM. ($\overline{AN} \cap \overline{CM} = \{T\}$), tal que $BM = 2(AM)$, $(AN)(CM) = K$ y $m\sphericalangle NTC = \beta$. Calcule el área de la región ABC.

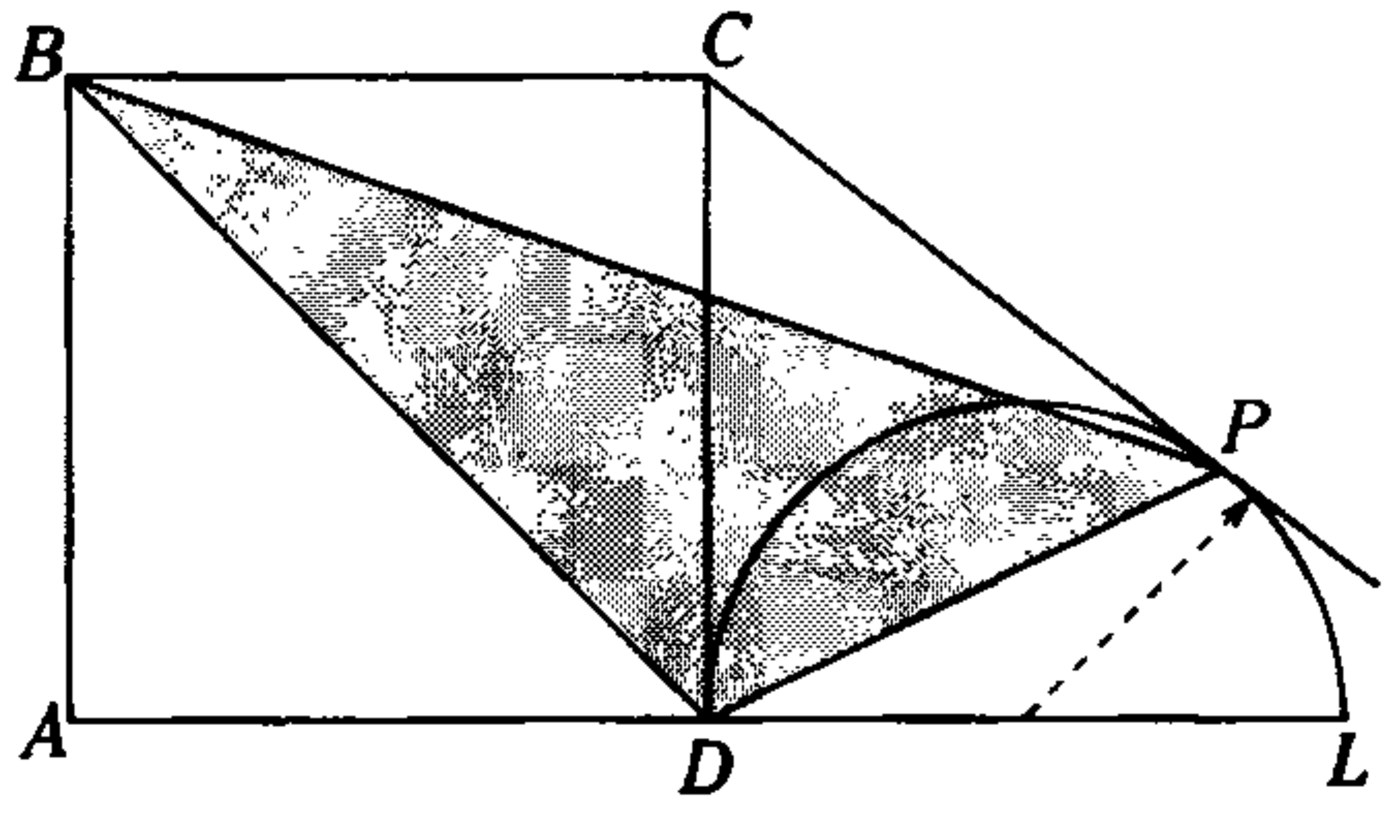
A) $\frac{K}{2}\text{sen}\beta$ B) $6K\text{sen}\beta$ C) $\frac{3}{4}K\text{sen}\beta$

D) $\frac{3}{5}K\text{sen}\beta$ E) $K\text{sen}\beta$

7. Dado un triángulo ABC, se ubica P en el plano del triángulo, tal que las regiones triangulares APC, APB y BPC sean equivalentes. ¿Cuántos puntos P cumplen dicha condición?

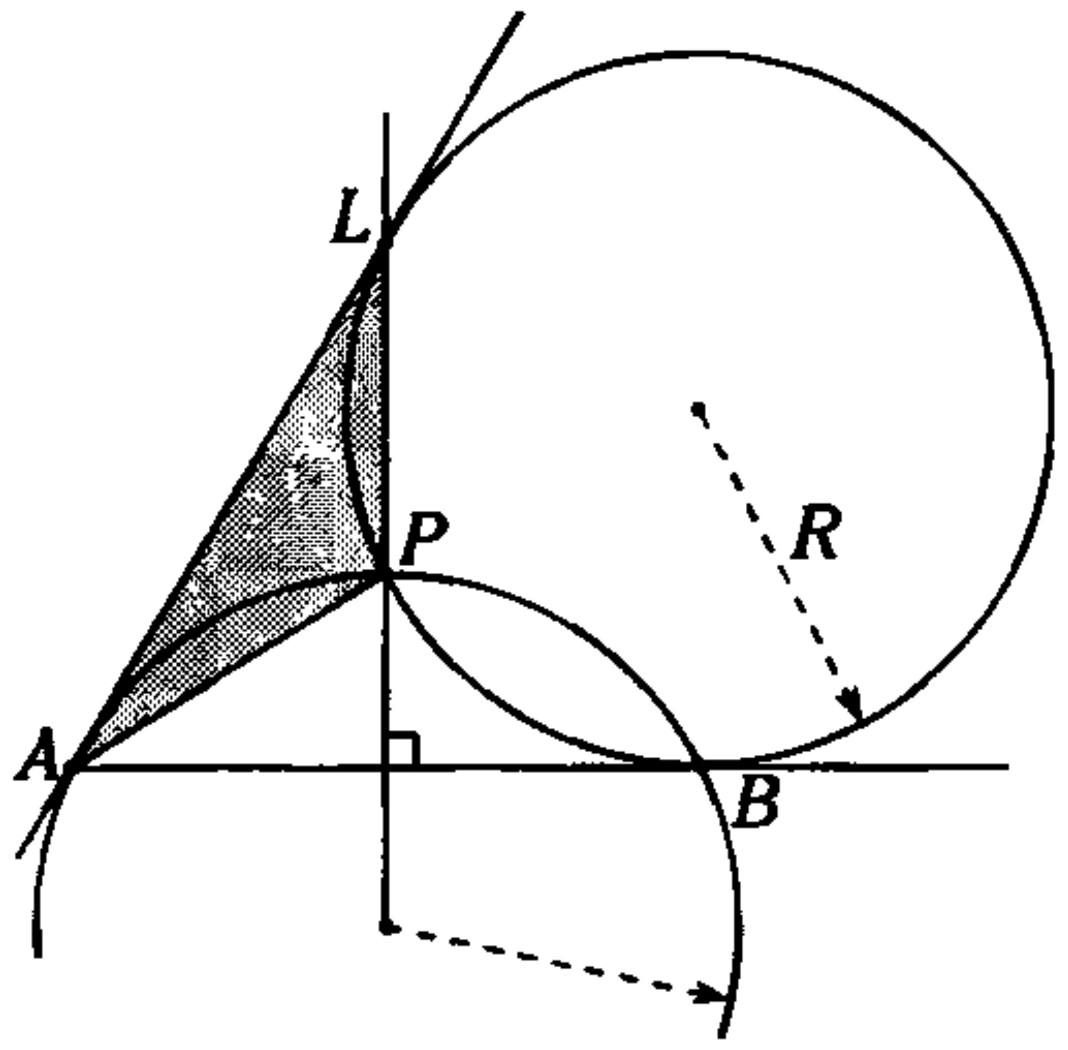
A) 1 B) 2 C) 3
D) infinitos E) 4

8. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado. Si P es punto de tangencia; $m\widehat{PL} = 30°$ y $AB = 2$, calcule el área de la región sombreada.



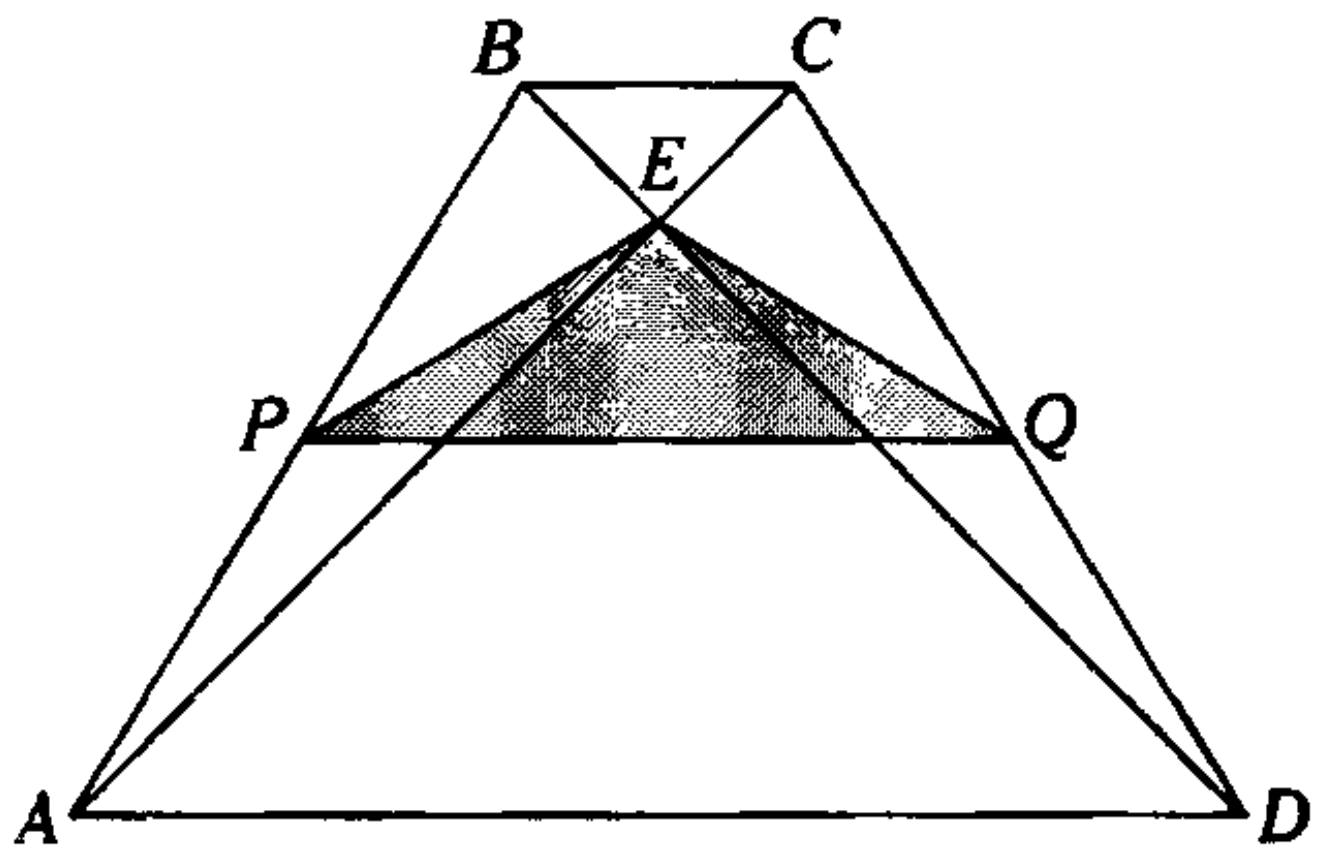
A) $2\sqrt{12-3\sqrt{3}}$ B) $2\sqrt{12-4\sqrt{3}}$
C) $2\sqrt{12-6\sqrt{3}}$
D) $2\sqrt{12-5\sqrt{3}}$ E) $2\sqrt{12-7\sqrt{3}}$

9. De la figura, A, B y L son puntos de tangencia. Si $R = 4$, señale el área de la región triangular APL.



A) $4\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$
C) $6\sqrt{3}$
D) 9 E) 8

10. En la figura mostrada, $ABCD$ es un trapecio isósceles. Si $AP = PB = CQ = QD = 2$ y $m\sphericalangle BPE = 30°$, determine el área de la región triangular el área de la región triangular PEQ.

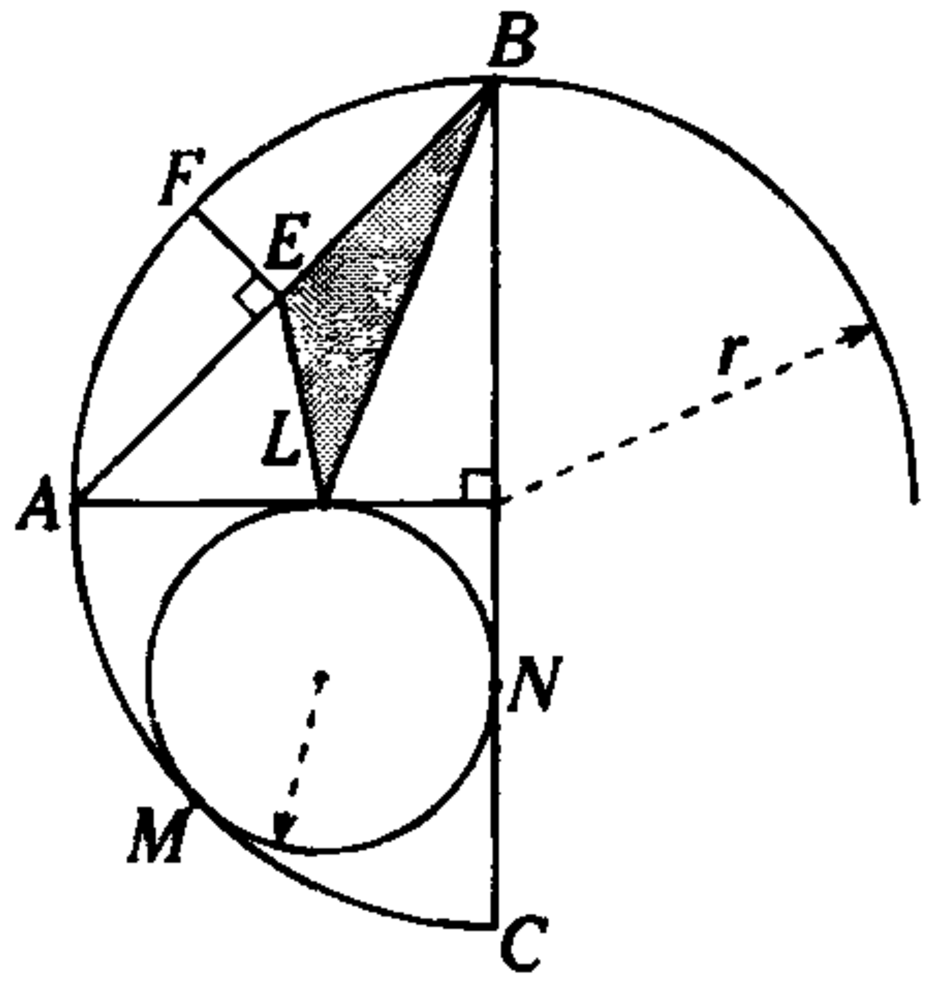


A) 4 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) 3

11. En un triángulo ABC, se ubican los puntos P y Q en las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tal que $\overline{PC} \cap \overline{BQ} = \{R\}$. Si las regiones triangulares PRB y CRQ son equivalentes; $AC = a$, $CQ = b$ y $PB = c$, determine AB.

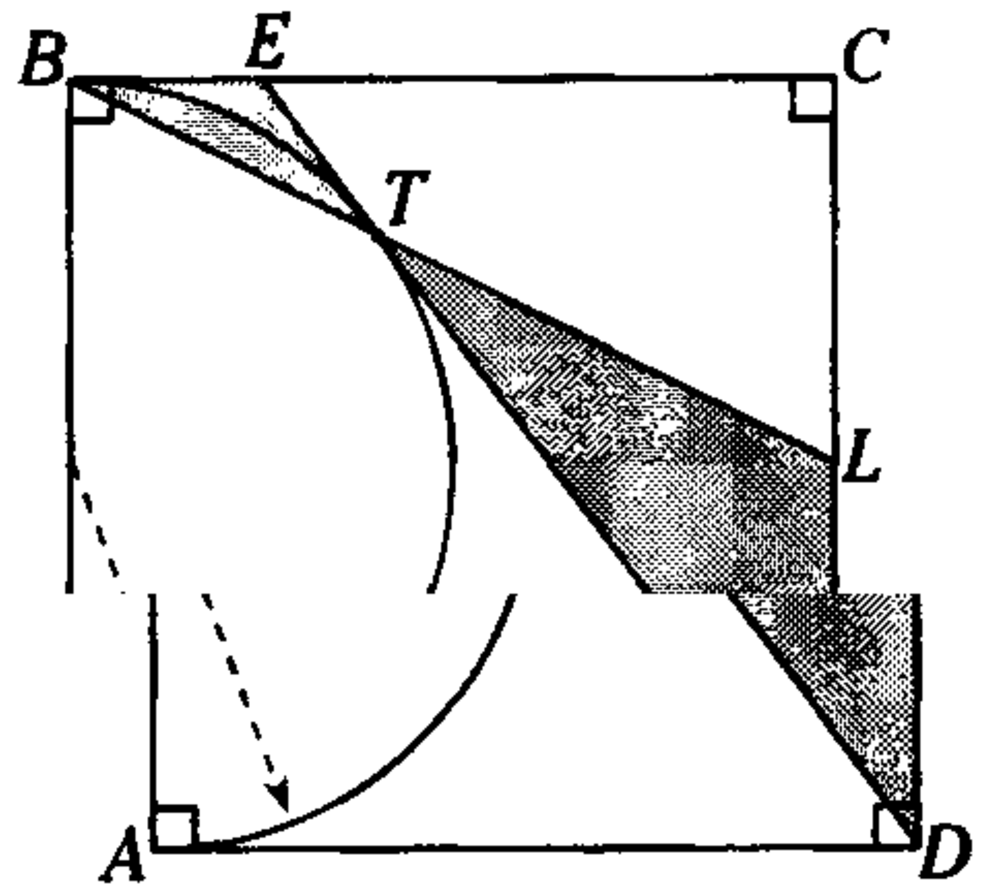
A) $\dfrac{a.c}{b}$ B) $\dfrac{a.b}{c}$ C) $\dfrac{b.c}{a}$
D) $\dfrac{b.c}{a+c}$ E) $\dfrac{a.b}{b+c}$

12. De la figura, $\overline{FE}$ es la flecha de $\overline{AB}$, $r = 5\sqrt{2\sqrt{2}+2}$. Indique el área de la región sombreada. (M, N y L son puntos de tangencia)



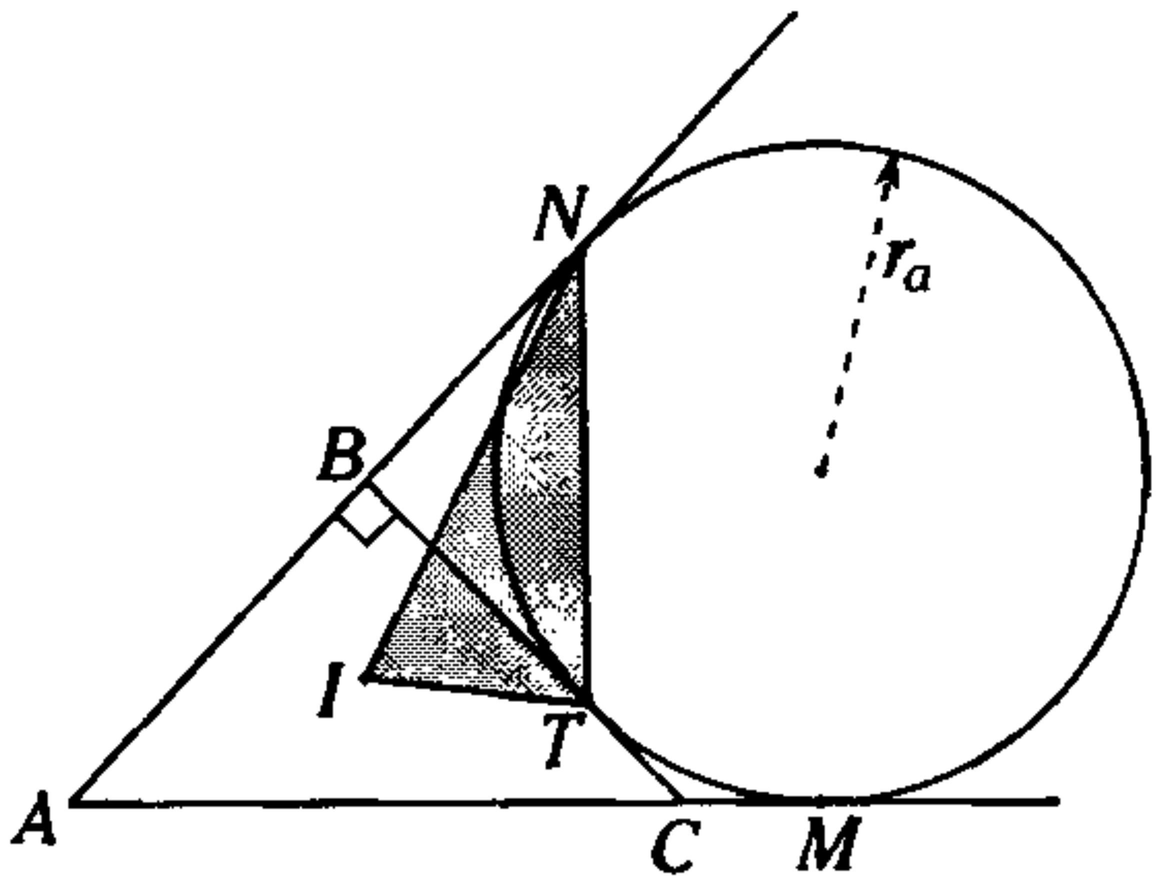
A) 20 B) 25 C) 30
D) 40 E) 50

13. De la figura, $ABCD$ es un cuadrado y T es punto de tangencia. Calcule la razón de las áreas de las regiones sombreadas.



A) 1/4 B) 1/5 C) 1/3
D) 1/6 E) 1/8

14. En la figura, M, N y T son puntos de tangencia. Si I es el incentro del triángulo ABC, señale el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{(r_a)^2}{2}$ B) $(r_a)^2$ C) $2(r_a)^2$
D) $\dfrac{(r_a)^2}{3}$ E) $\dfrac{2(r_a)^2}{3}$

15. En un triángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O, las áreas de las regiones AOH, BOH y COH son, respectivamente $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_2$ y $\mathbb{S}_3$. Si la recta de Euler es secante a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, halle la relación entre $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_2$ y $\mathbb{S}_3$.

A) $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 = \mathbb{S}_3$

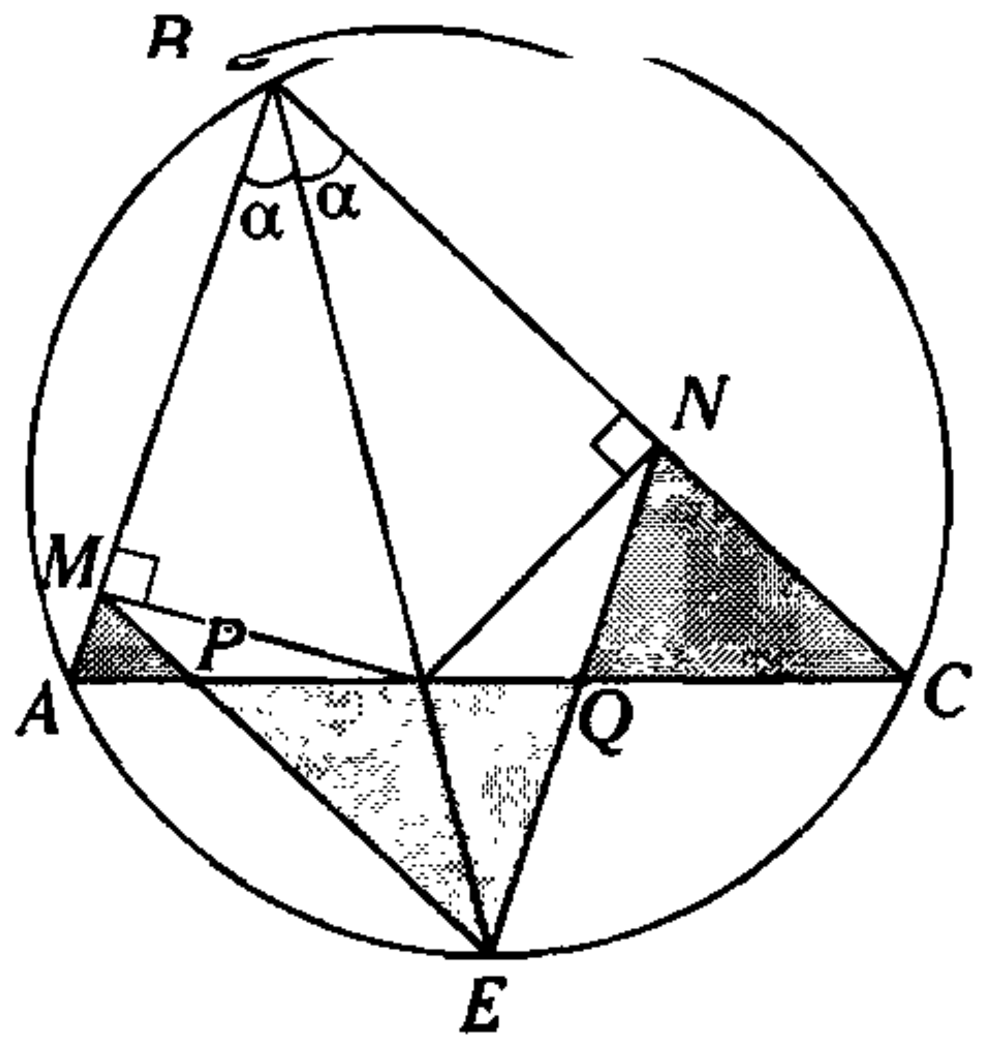
B) $\mathbb{S}_2 = \dfrac{\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_3}{2}$

C) $\mathbb{S}_2 = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_3$

D) $\mathbb{S}_3 = \sqrt{\mathbb{S}_1 . \mathbb{S}_2}$

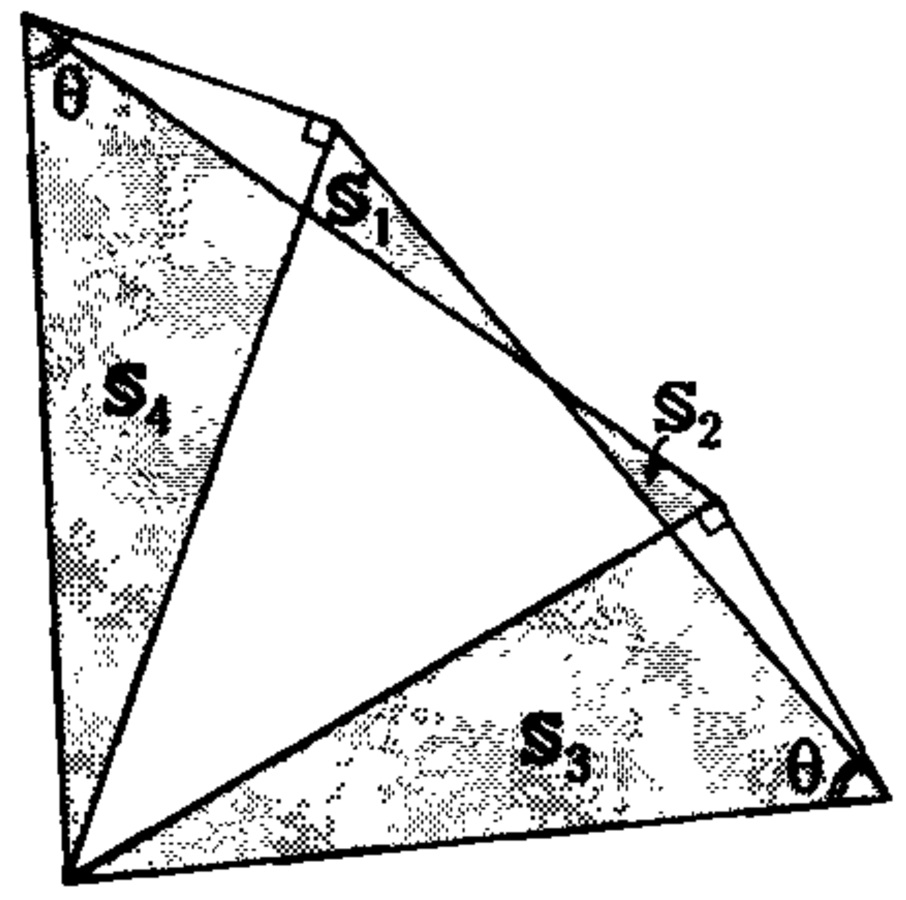
E) $\mathbb{S}_2 = \dfrac{2\mathbb{S}_1\,\mathbb{S}_3}{\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_3}$

16. Calcule el área de la región PQE, si las áreas de las regiones AMP y QNC son $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$.



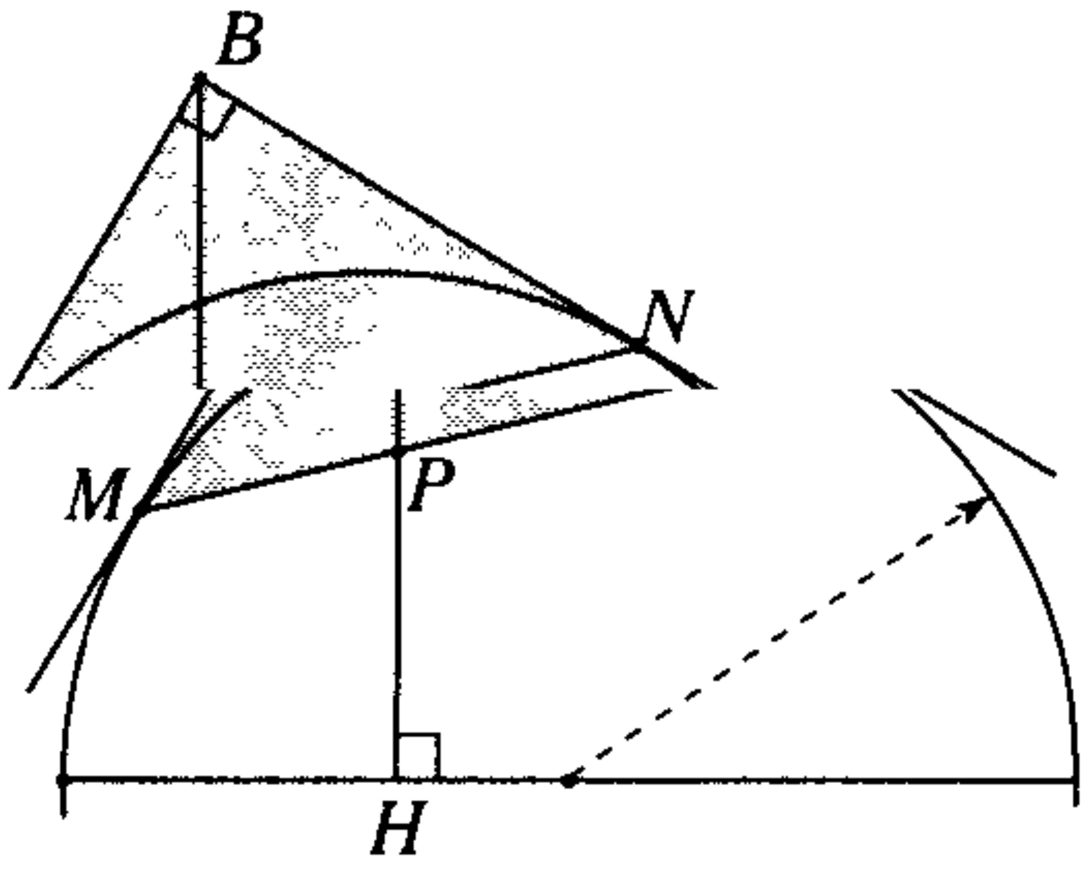
A) $\sqrt{A_1.A_2}$ B) $A_1 + A_2$ C) $2(A_1 + A_2)$
D) $2(A_1 - A_2)$ E) $\dfrac{2A_1A_2}{A_1 + A_2}$

17. Halle la relación correcta, si $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_2$, $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$ son áreas de las regiones sombreadas que se muestran.



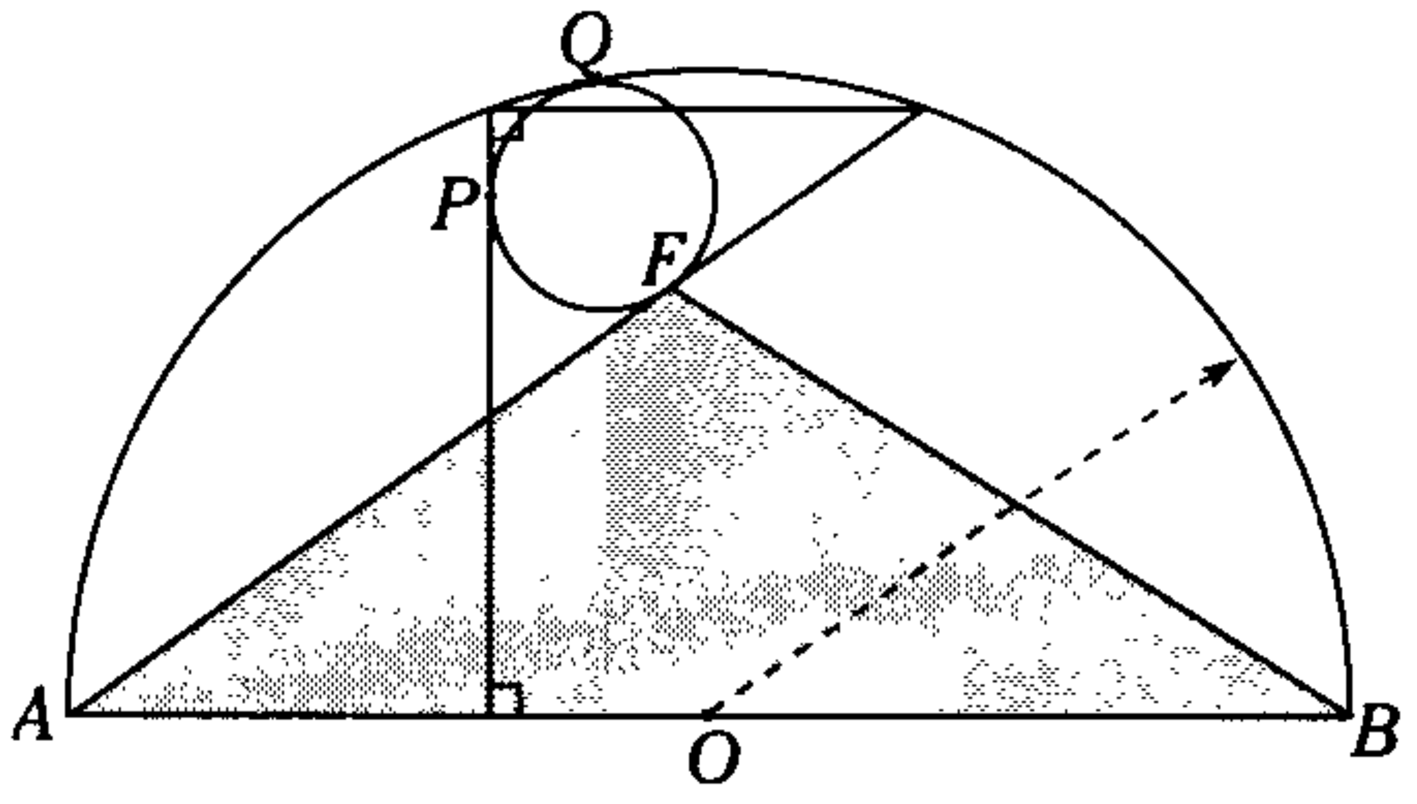
A) $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_4 = \mathbb{S}_2 + \mathbb{S}_3$
B) $\mathbb{S}_4 + \mathbb{S}_3 = 4(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2)$
C) $\mathbb{S}_4 - \mathbb{S}_3 = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$
D) $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_3 = \mathbb{S}_4 + \mathbb{S}_2$
E) $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_3 = \mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_4$

18. En la figura, M y N son puntos de tangencia. Calcule el área de la región MBN, si $BP = 4$ y $PH = 5$.



A) 12 B) 16 C) 18
D) 24 E) 36

19. En la figura, P, Q y F son puntos de tangencia. Si $AF = 2$, señale el área de la región AFB.



A) 1 B) 2 C) 3
D) $2\sqrt{2}$ E) 4

20. En un rombo $ABCD$, circunscrito a una circunferencia $\mathscr{C}$, se traza una recta $\mathscr{L}$ tangente a $\mathscr{C}$ que interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ en M y N, respectivamente. Si m$\sphericalangle BAD = 60°$, halle el área de la región MCN. (R: radio de $\mathscr{C}$)

A) R^2 B) $R^2\sqrt{2}$ C) $R^2\sqrt{3}$
D) $R^2\sqrt{6}$ E) $3R^2$

Áreas de regiones cuadrangulares

21. Sobre los lados AB y BC de un triángulo ABC, se construyen los cuadrados $ABFL$ y $BCQR$, tal que $AR = a$. Calcule el área de la región cuadrilátera $AFRC$.

A) $a^2/4$ B) $a^2/2$ C) $a^2/8$
D) $a^2/6$ E) $a^2/3$

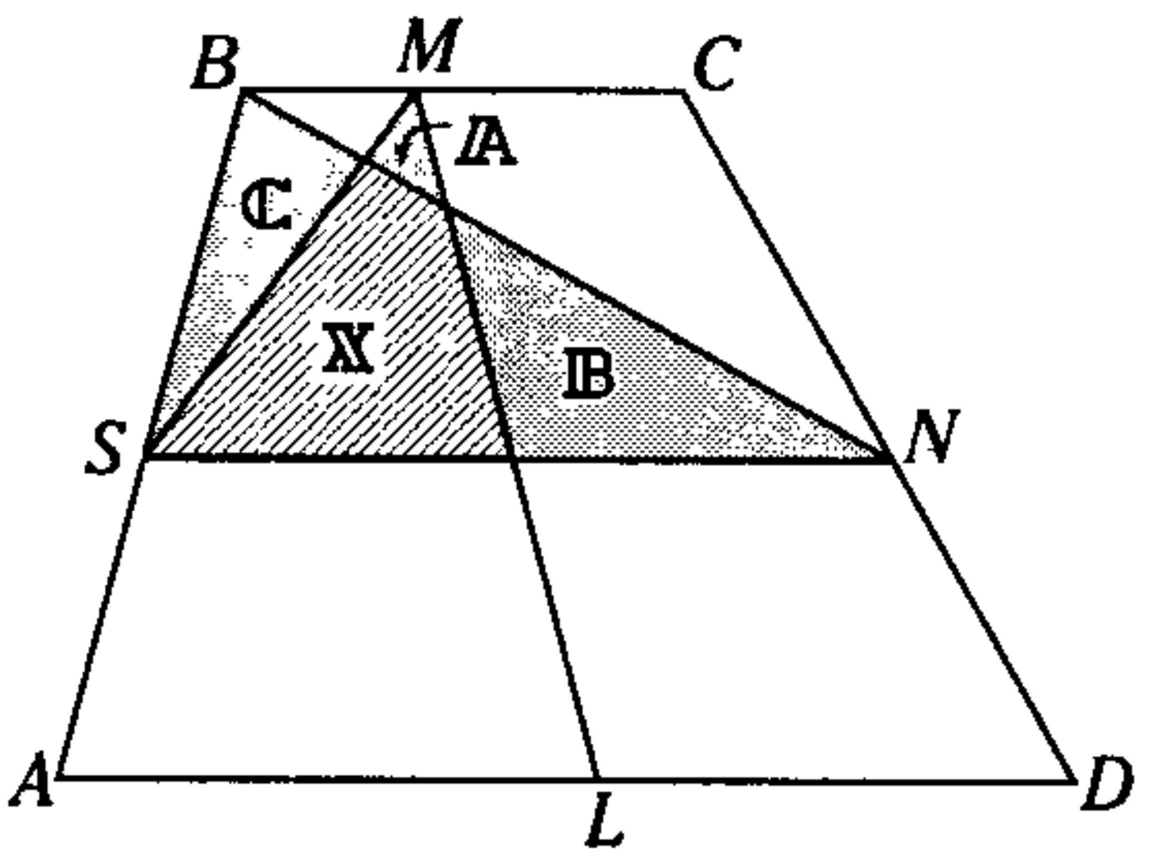
22. En un paralelogramo $ABCD$, se ubica F en $\overline{BC}$ y $\overline{BD} \cap \overline{AF} = \{O\}$. Si las áreas de las regiones BOF y AOD son 4 y 25, respectivamente, calcule el área de la región cuadrangular $OFCD$.

A) 24 B) 28 C) 30
D) 27 E) 25

23. Desde un punto P exterior a una circunferencia de centro O, se trazan las tangentes PA y PB (A y B son puntos de tangencia). Si m$\sphericalangle AOB = 150°$ y $PO = 8$, halle el área de la región cuadrangular $PAOB$.

A) 8 B) 10 C) 12
D) 16 E) 14

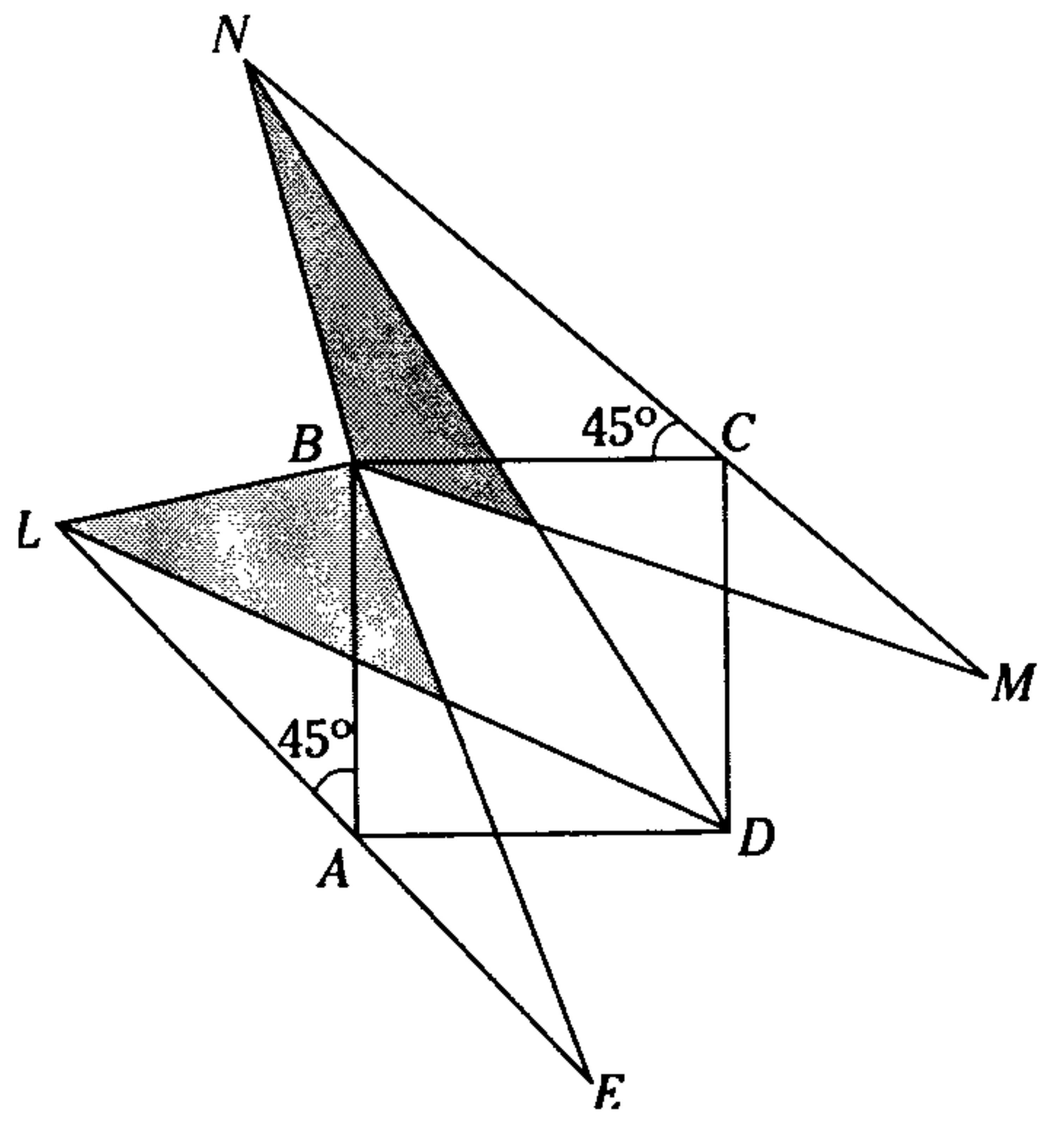
24. De la figura, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$; M, N, L y S son puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ y $\overline{AB}$. Si $\mathbb{C} + \mathbb{B} = 18\mathbb{A}$, calcule $\mathbb{X}$ ($\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{X}$ son áreas de las regiones sombreadas).



A) 10 $\mathbb{A}$ B) 12 $\mathbb{A}$ C) 14 $\mathbb{A}$
D) 15 $\mathbb{A}$ E) 16 $\mathbb{A}$

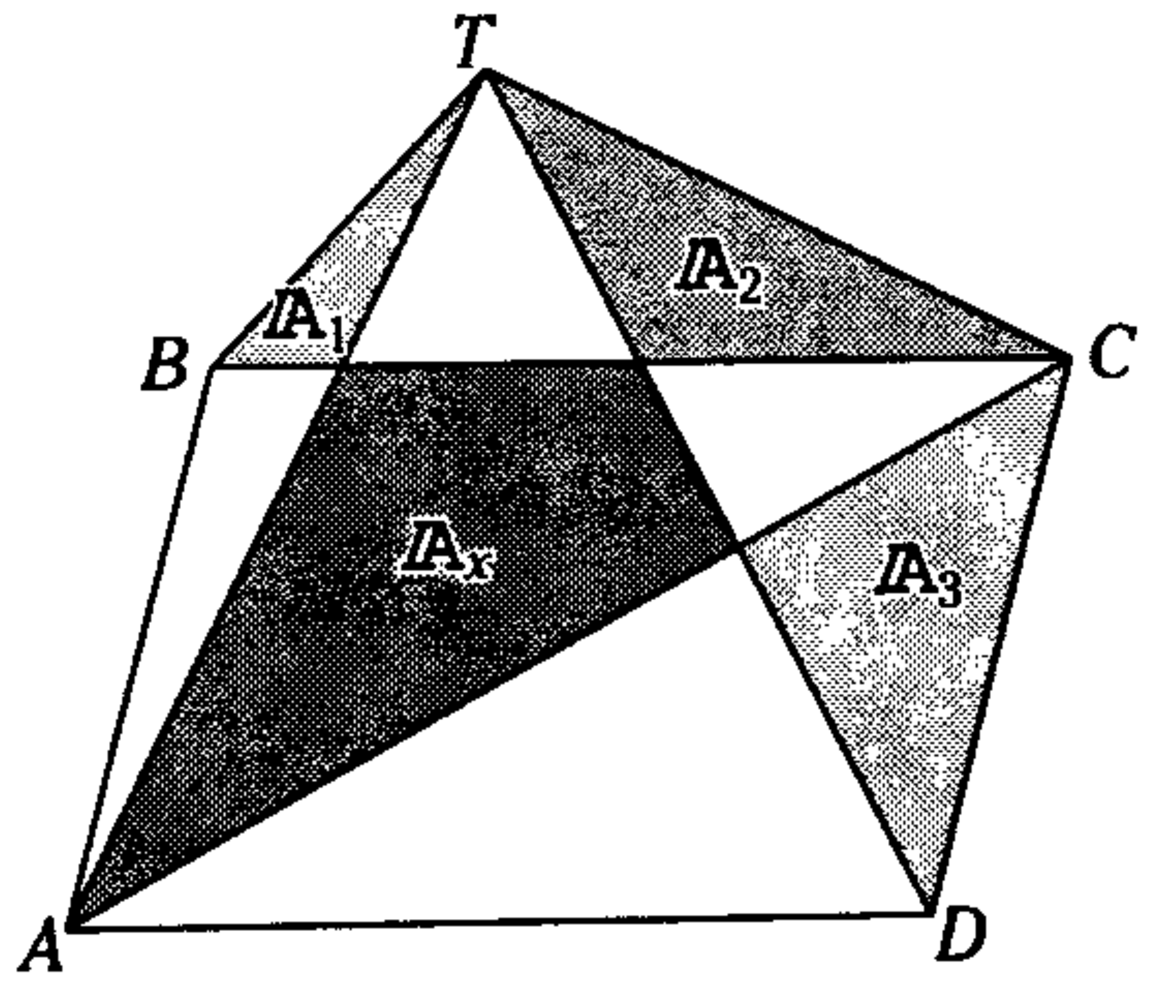
25. De la figura, *ABCD* es un cuadrado, $\frac{NM}{4}=\frac{AC}{2}=\frac{LE}{3}$.

Calcule la razón de las áreas de las regiones sombreadas.



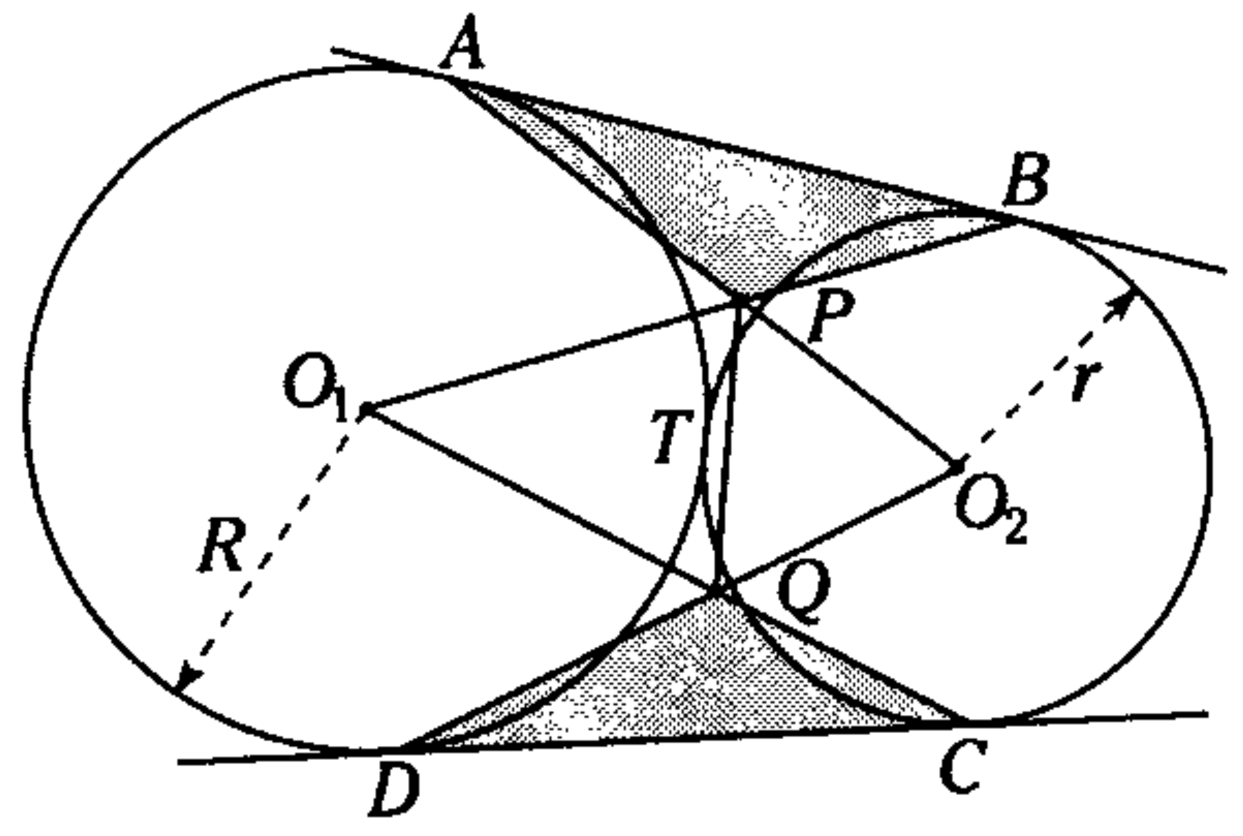
A) 11/7 B) 5/3 C) 10/9
D) 7/2 E) 2

26. De la figura, *ABCD* es un romboide y $\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2+\mathbb{A}_3=\mathbb{A}$. Indique $\mathbb{A}x$, si $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$ y $\mathbb{A}_x$ son áreas de las regiones sombreadas.



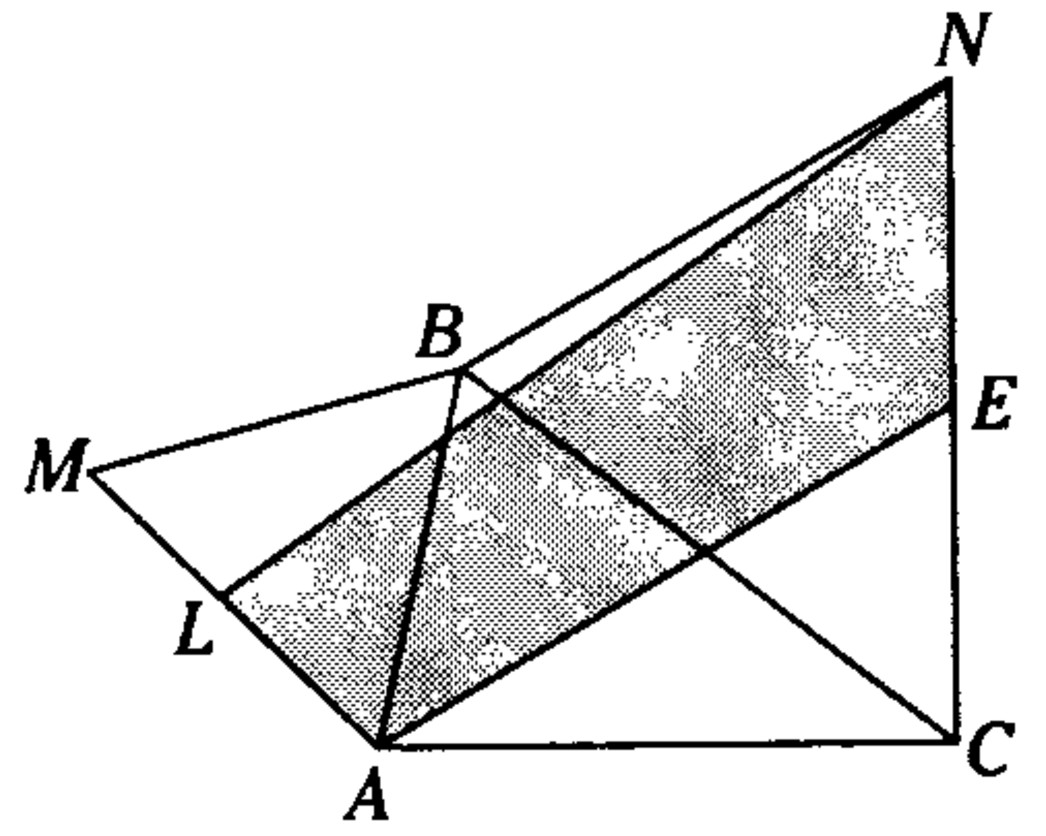
A) $\mathbb{A}/2$ B) $3\mathbb{A}/4$ C) $3\mathbb{A}/5$
D) $2\mathbb{A}/3$ E) $\mathbb{A}$

27. De la figura, *A*, *B*, *C*, *D* y *T* son puntos de tangencia. Si $(PQ)(R+r)=18$ cm^2, halle la suma entre las áreas de las regiones triangulares *ABP* y *CDQ*.



A) 6 cm^2 B) 9cm^2 C) 12cm^2
D) 15cm^2 E) 18cm^2

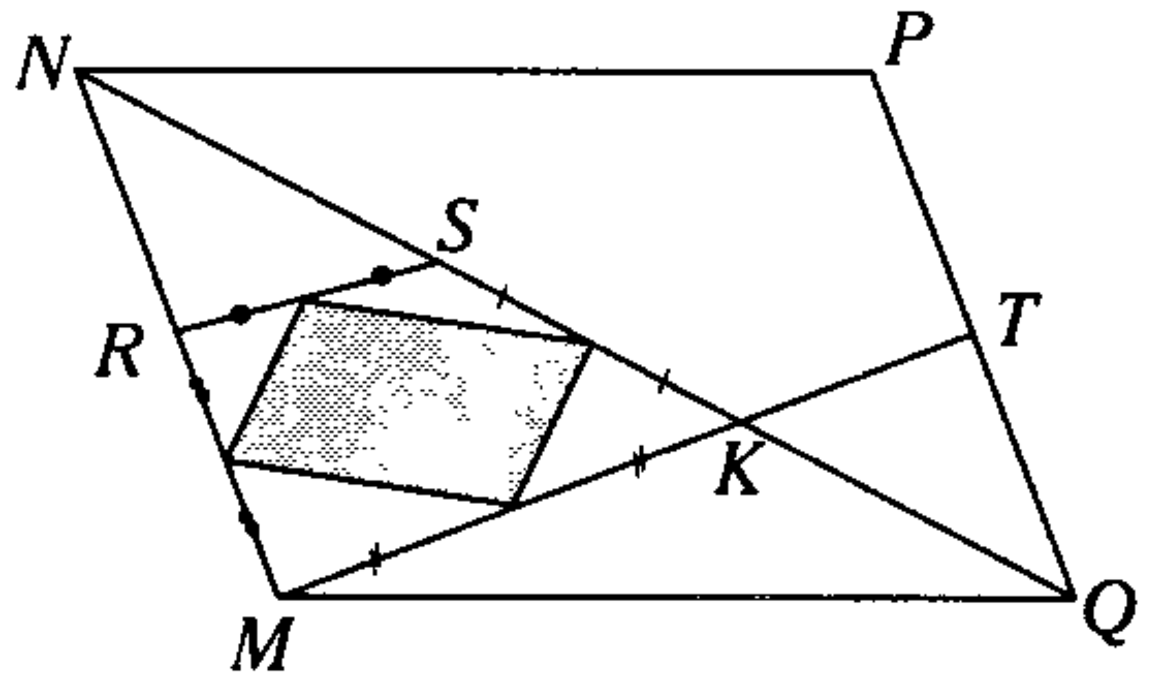
28. Según la figura, los triángulos *ABM* y *BCN* son equiláteros. Si $ML=LA$, $NE=EC$ y $LE=a$, determine el área de la región cuadrangular *LNEA*.



A) $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$ B) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

29. De la figura, el área de la región paralográmica $PQMN$ es $\mathbb{L}$. Si R, S y T son puntos medios de $\overline{MN}$, $\overline{NK}$ y $\overline{PQ}$, señale el área de la región sombreada.

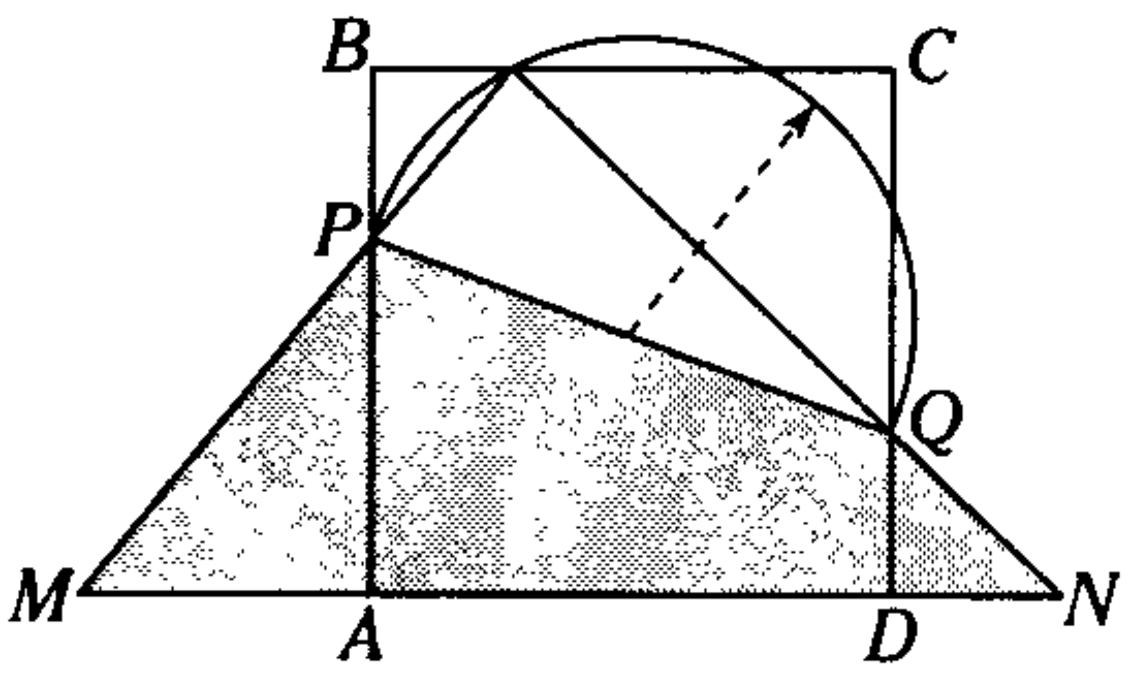


A) $\mathbb{L}/2$ B) $\mathbb{L}/3$ C) $\mathbb{L}/4$
D) $\mathbb{L}/6$ E) $\mathbb{L}/8$

30. En un cuadrado ABC, se ubican lo puntos N y M en $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, tal que $AN=NB$, $AM=3(MD)$, $\overline{BM}\cap\overline{AC}=\{P\}$ y $\overline{NM}\cap\overline{AC}=\{Q\}$. Si el área de la región cuadrada es 560 u^2, indique la suma de áreas de las regiones BCP y NPQ.

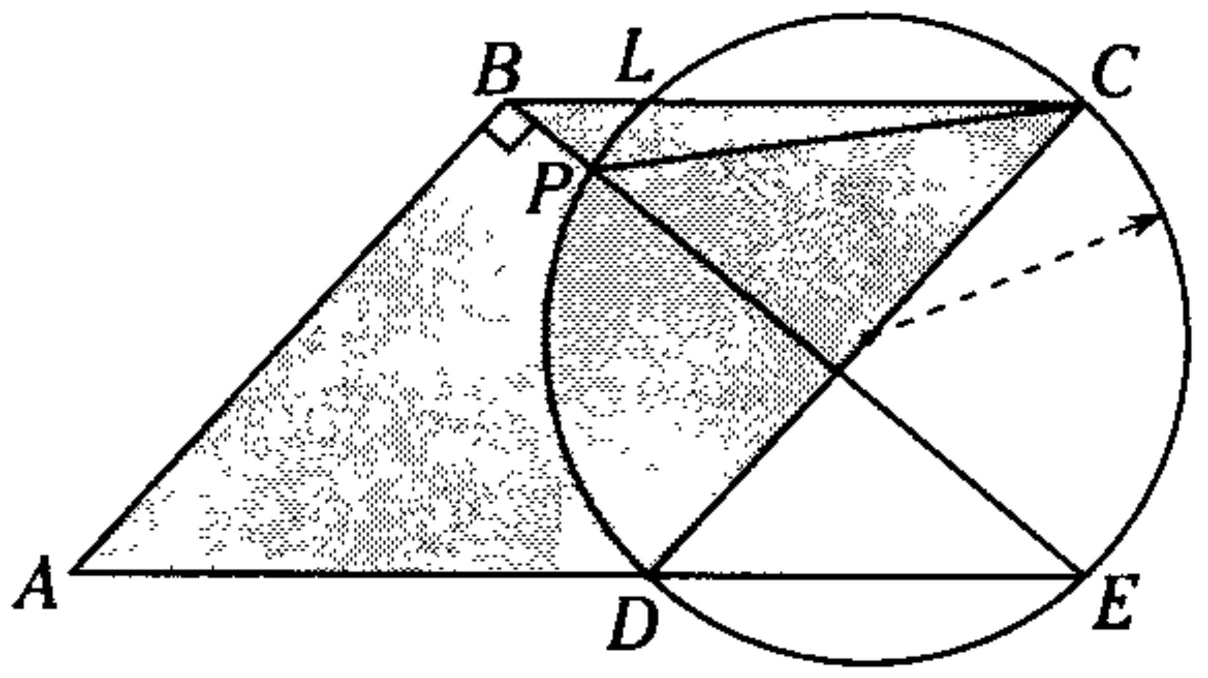
A) 257 u^2 B) 202 u^2 C) 215 u^2
D) 197 u^2 E) 178 u^2

31. En la figura, se tiene el cuadrado $ABCD$. Si $QD=2(BP)=2$ y $PQ=\sqrt{17}$, indique el área de la región sombreada.



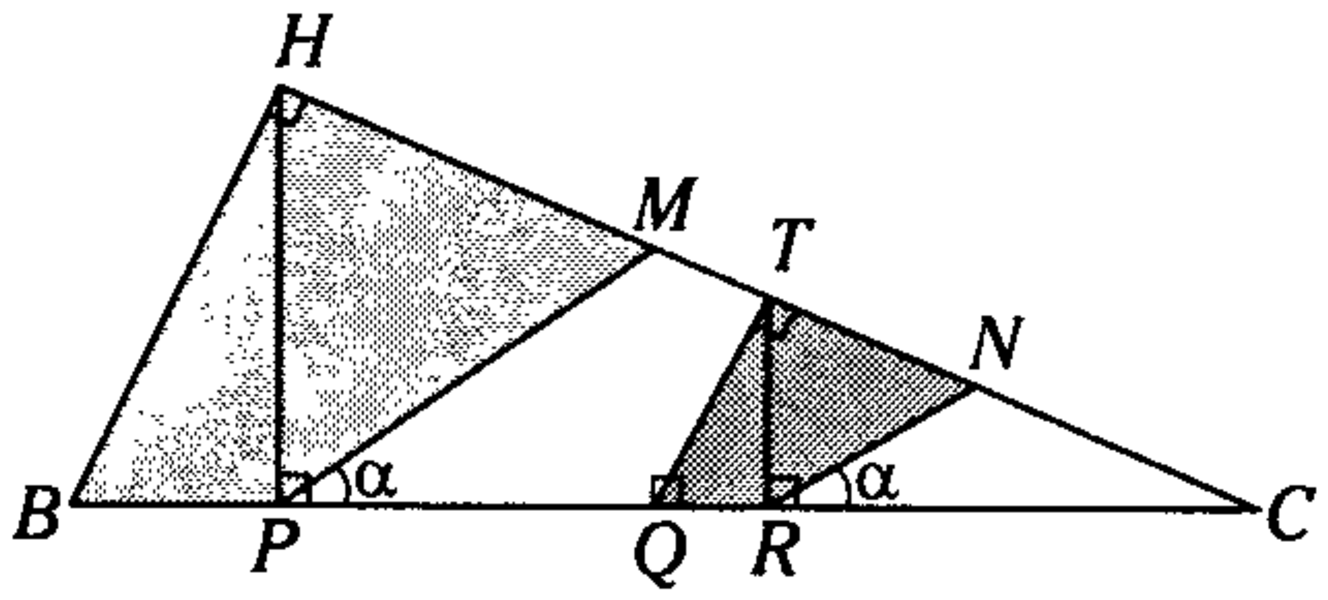
A) $\frac{9}{2}(8-\sqrt{2})$ B) $\frac{7}{2}(6-\sqrt{2})$ C) $\frac{7}{2}(9-\sqrt{2})$
D) $\frac{5}{2}(4-\sqrt{2})$ E) $\frac{5}{2}(6-\sqrt{2})$

32. Según la figura, $(PC)(CL)=n$ y $(AB)(BP)=\ell$. Calcule el área de la región romboidal $ABCD$.



A) $2\ell-n$ B) $2(\ell+n)$ C) $\ell+n$
D) $4(\ell+n)$ E) $2(2\ell-n)$

33. De la figura, $PH=2(TR)$. Halle la relación de áreas de las regiones sombreadas.



A) 4/3 B) 9/4 C) 2
D) 4 E) 16/9

34. En un paralelogramo $ABCD$, se ubican los puntos L y S que pertenecen a $\overline{BC}$. Si K y E pertenece a $\overline{AD}$, tal que $LS=2(BL)=2(SC)$ y $AK=KE=ED$, y el área de la región paralográmica es $\mathbb{L}$, calcule el área de la región triangular KTE. ($\overline{KS}\cap\overline{LE}=\{T\}$)

A) $\mathbb{L}/8$ B) $\mathbb{L}/15$ C) $\mathbb{L}/10$
D) $\mathbb{L}/12$ E) $\mathbb{L}/20$

35. Dado un paralelogramo $ABCD$, en $\overline{BC}$ se ubica T, tal que las áreas de las regiones TCD y ABD están en la razón de uno a tres. Si $AB = 10$ y el cuadrilátero $ABTD$ es bicéntrico, determine el área de la región $ABTD$.

A) $37\sqrt{6}$ B) $40\sqrt{6}$ C) $39\sqrt{6}$
D) $42\sqrt{6}$ E) $32\sqrt{6}$

36. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo de lados $\overline{AB}$ ($AB = a$) y $\overline{CD}$ ($CD = b$), donde la medida del ángulo que forman las prolongaciones de dichos lados es 60°. Calcule el área de la región cuyo perímetro es el lugar geométrico, de todos los puntos medios de los segmentos cuyos extremos estén en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente.

A) $\dfrac{ab\sqrt{3}}{4}$ B) $\dfrac{ab\sqrt{6}}{8}$ C) $\dfrac{ab\sqrt{3}}{8}$
D) $\dfrac{ab\sqrt{2}}{8}$ E) $ab\sqrt{3}$

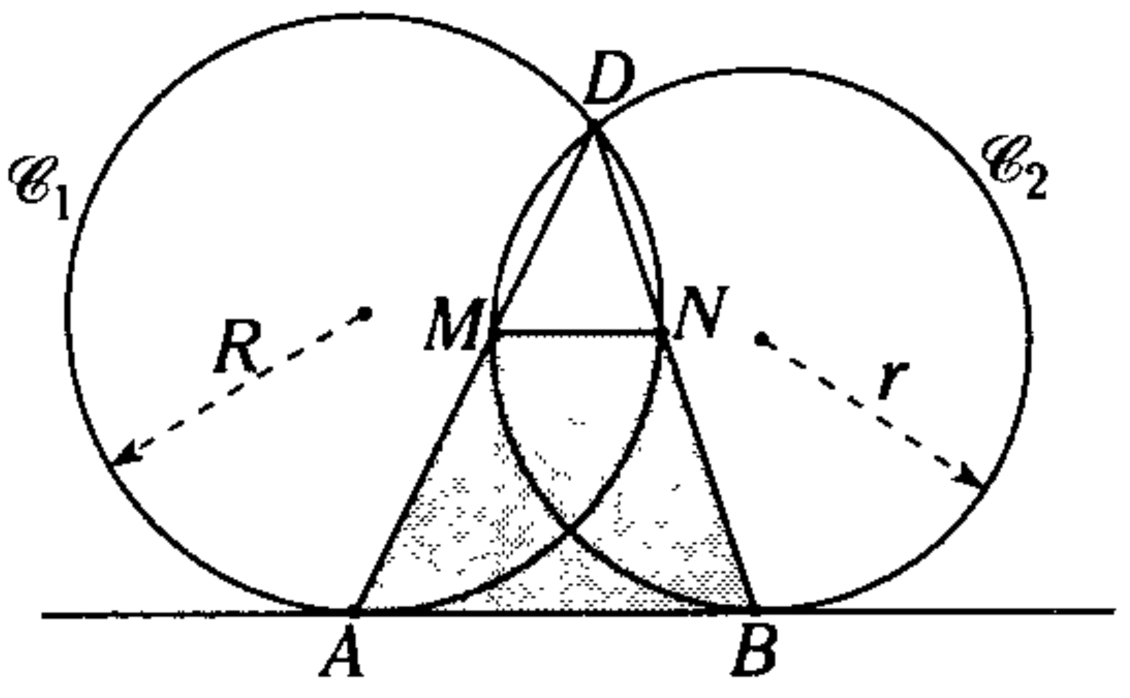
37. Dado un cuadrilátero convexo $ABCD$, en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos L y M, respectivamente. Si $\overline{LD}$ y $\overline{LC}$ intersecan a $\overline{MA}$ y $\overline{MB}$ en K y N donde

$$\frac{CM}{MD} = \frac{AL}{LB},$$

calcule el área de la región $KMNL$.
Considere que $\mathbb{A}_{\blacktriangle ADK} + \mathbb{A}_{\blacktriangle BCN} = 10\ u^2$.

A) $5\ u^2$ B) $8\ u^2$ C) $5\sqrt{2}\ u^2$
D) $5\sqrt{3}\ u^2$ E) $10\ u^2$

38. En la figura mostrada, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son dos circunferencias ortogonales. Si A y B son puntos de tangencia, determine el área de la región $AMNB$.

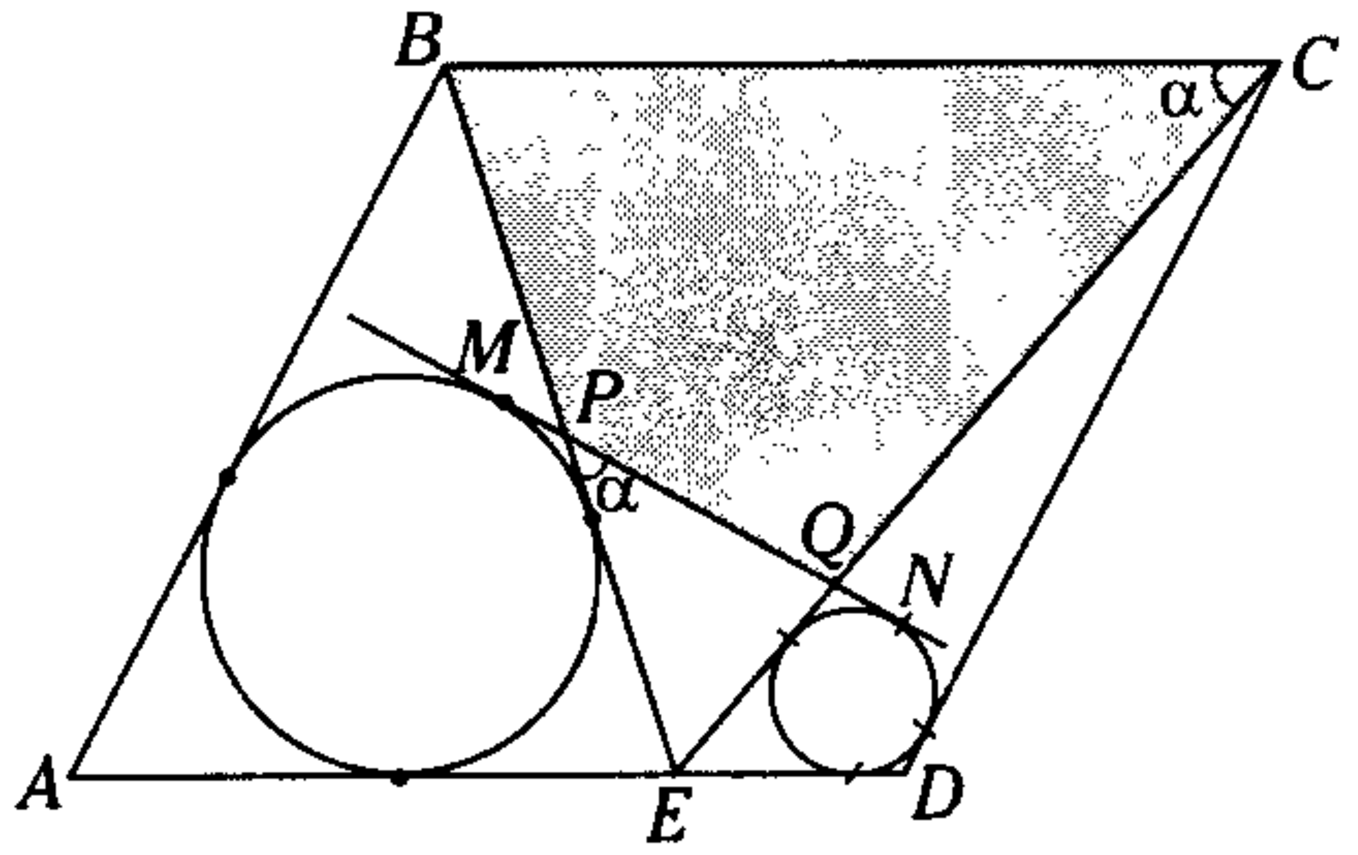


A) $R.r$ B) $2Rr$ C) $R.r\sqrt{2}$
D) $R.r\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $R.r\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

39. En un cuadrado $ABCD$, M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Luego, de C se traza $\overline{CH}$ perpendicular a $\overline{DM}$ (H en $\overline{MD}$). Calcule el área de la región $AHND$, si $AB = \ell$.

A) $\dfrac{\ell^2}{4}$ B) $\dfrac{\ell^2}{3}$ C) $\dfrac{\ell^2}{6}$
D) $\dfrac{\ell^2}{2}$ E) $\dfrac{3}{4}\ell^2$

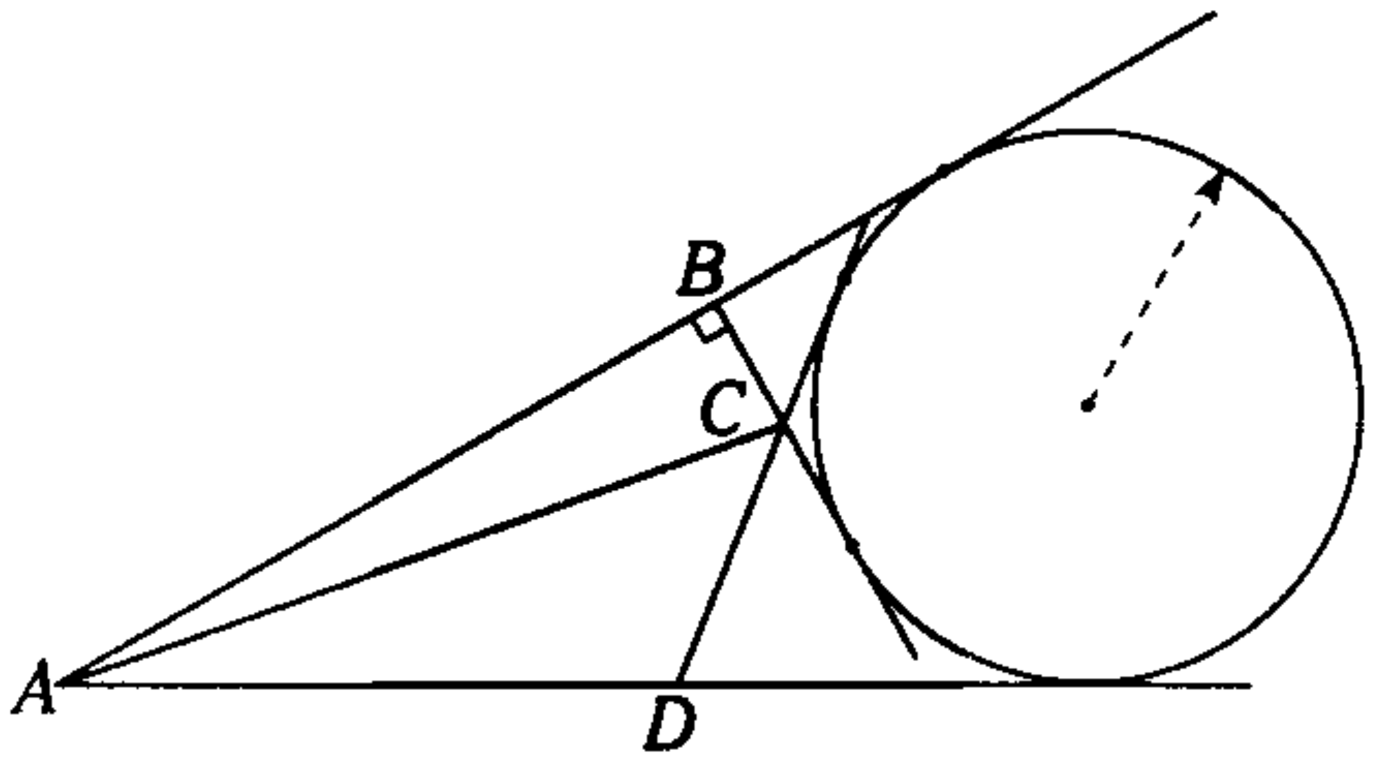
40. En la figura mostrada, $ABCD$ es un rombo, mientras que M y N son puntos de tangencia. Si $AD = 8$, $PQ = 3$ y $CQ = 6$, indique el área de la región $PBCQ$.



A) $9\sqrt{6}$ B) $5\sqrt{3}$ C) $10\sqrt{3}$
D) $9\sqrt{5}$ E) $12\sqrt{5}$

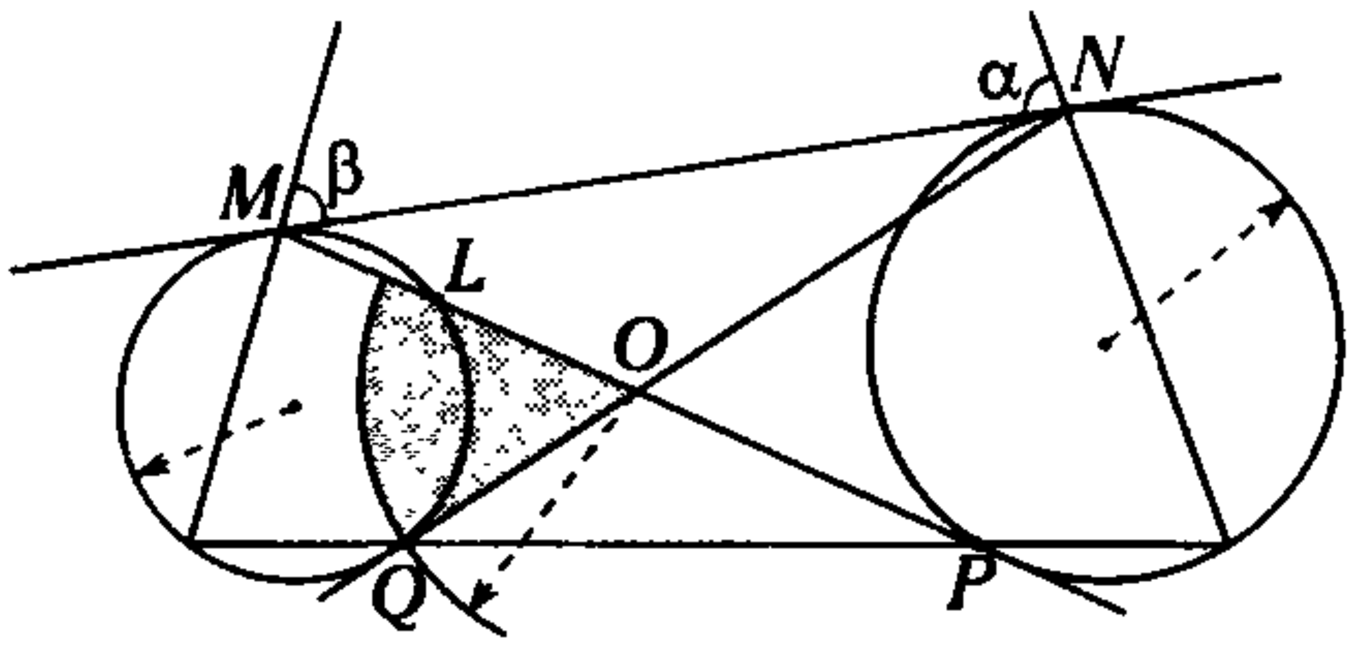
Áreas de regiones circulares

41. De la figura, $ABCD$ es un cuadrilátero exinscriptible, tal que $AD = 5$, $BC = 2$ y $CD = 2$. Señale el área del círculo inscrito en el triángulo ABC.



A) π B) 4π
C) 2π
D) $\pi/2$ E) $\pi/4$

42. De la figura, M, N, P y Q son puntos de tangencia. Si $\alpha + \beta = 145°$, $2(ML) = 3(LO) = 6$ cm, halle el área de la región sombreada.

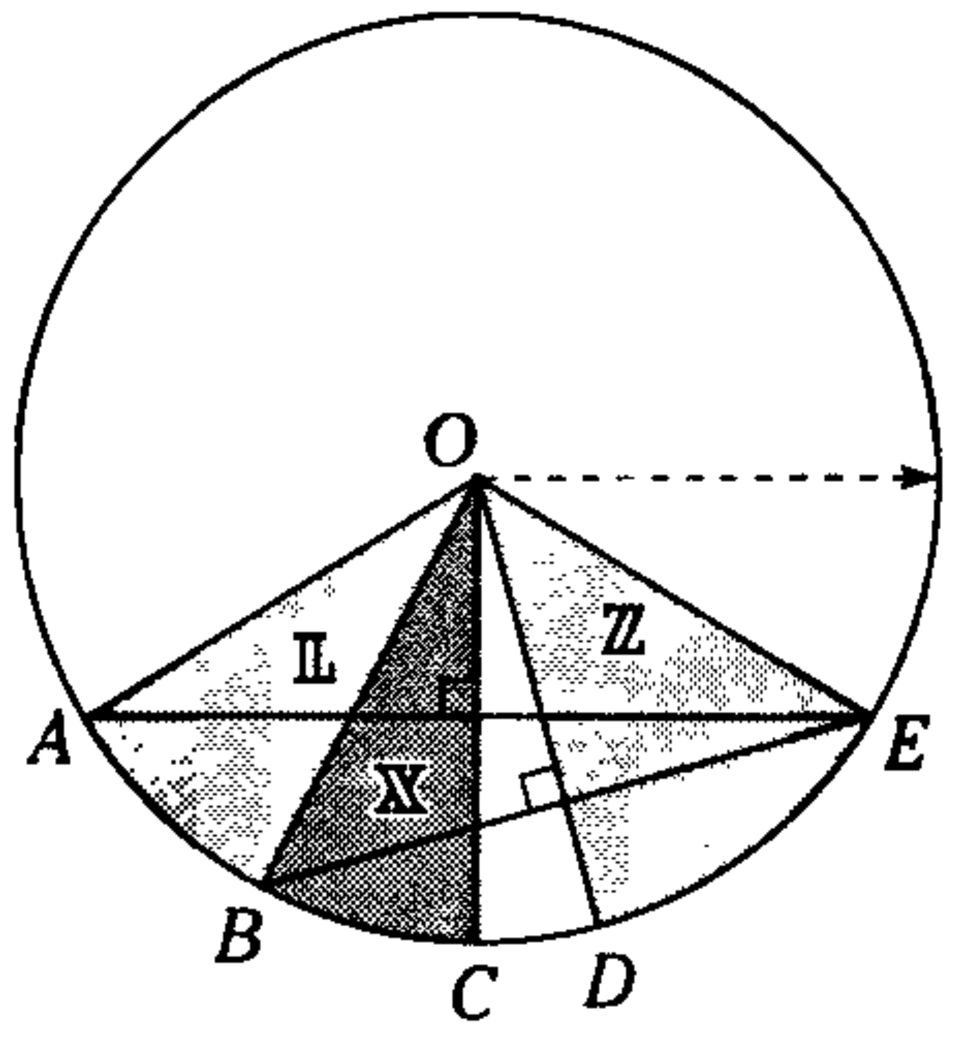


A) 2π cm^2 B) $11\pi/9$ cm^2
C) $35\pi/18$ cm^2
D) $37\pi/18$ cm^2 E) $39\pi/16$ cm^2

43. Se tiene una circunferencia de diámetro AB. Se consideran los puntos C y R en los arcos AB y CB, luego, la prolongación de $\overline{BR}$ interseca a la perpendicular al diámetro trazado por C en K. Si $BR=a$ y $RK=b$, indique el área del círculo de diámetro $\overline{BC}$.

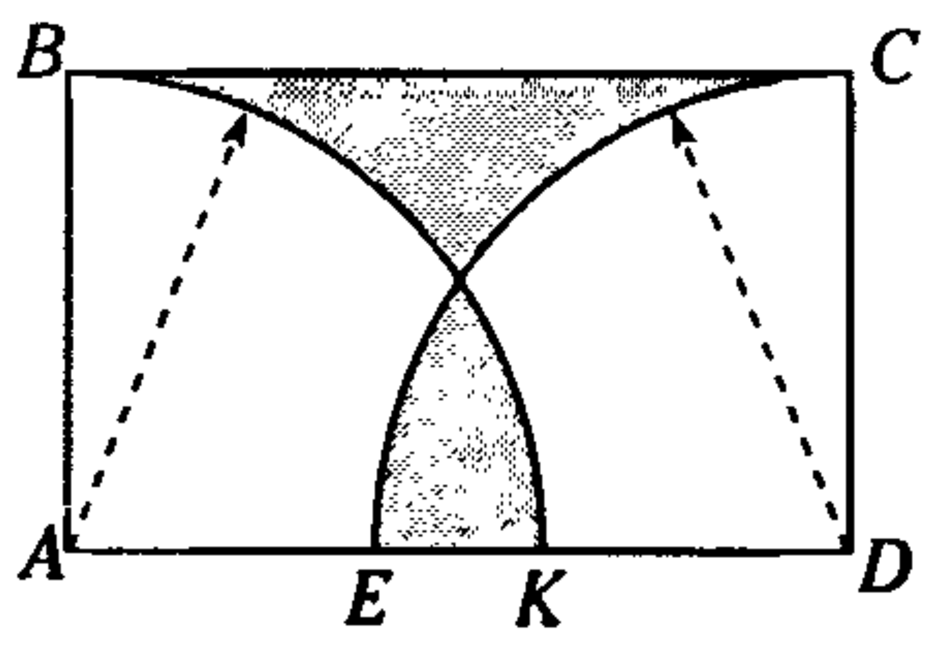
A) $\pi\, b(b-a)$ B) $\pi\, b(a+b)$
C) $\pi\, a(b-a)$
D) $\pi\, a(a+b)$ E) $2\pi a(a+b)$

44. De la figura, $\mathbb{Z}-\mathbb{X}=\mathbb{A}$. Calcule $\mathbb{L}$ ($\mathbb{X}$, $\mathbb{L}$ y $\mathbb{Z}$ son áreas de las regiones sombreadas).



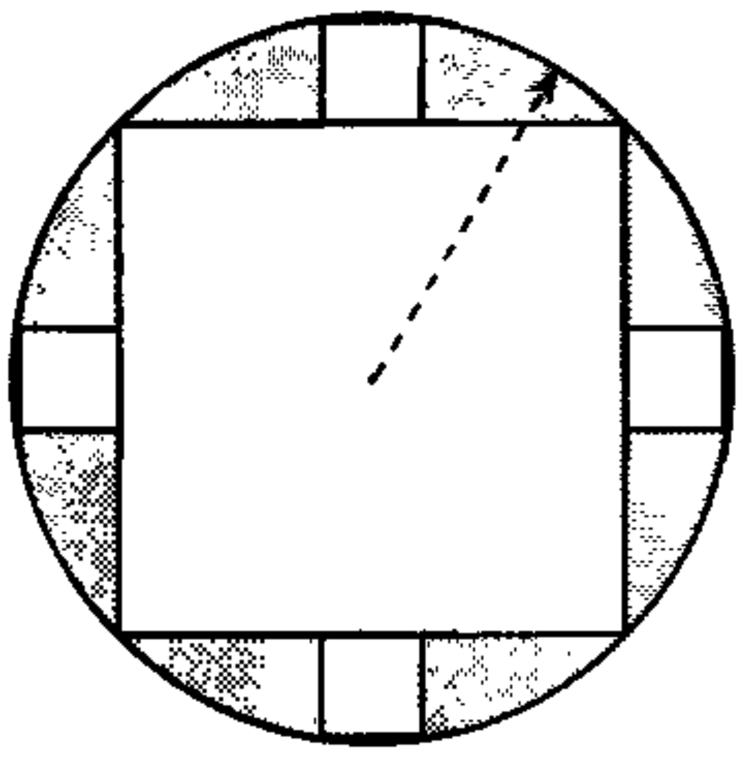
A) $\mathbb{A}/2$ B) $\mathbb{A}$
C) $2\mathbb{A}$
D) $\mathbb{A}/3$ E) $3\mathbb{A}$

45. En la figura, $ABCD$ es un rectángulo, mientras que BAK y CDE son cuadrantes. Si $BC = 3\sqrt{2}$ y $CD = \sqrt{6}$, calcule la suma de las áreas de las regiones sombreadas.



A) $3\sqrt{3} - \pi$ B) $3\sqrt{3} + \pi$
C) $4\sqrt{3} - \pi$
D) $2\sqrt{3} - \pi$ E) $2\sqrt{3} + \pi$

46. En la figura, los cuadriláteros son cuadrados. Si la longitud del cuadrado mayor mide ℓ metros, halle el área de la región sombreada en metros cuadros.

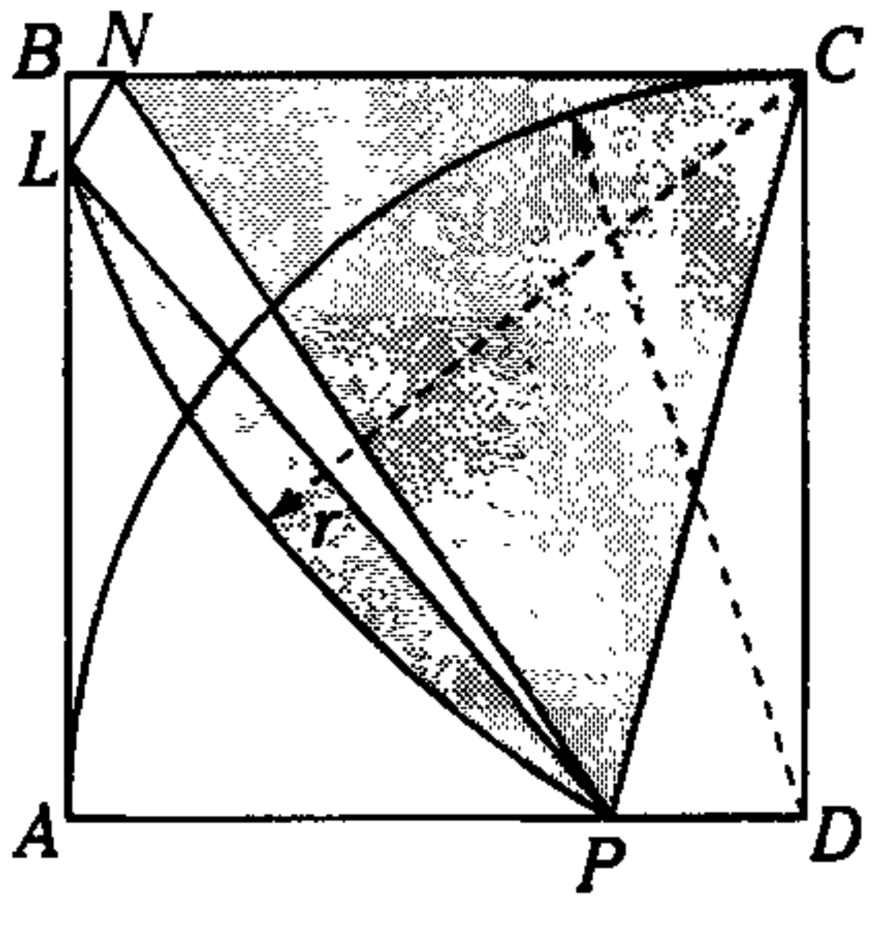


A) $\ell^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{29}{24}\right)$ B) $\ell^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{29}{25}\right)$

C) $\ell^2\left(\pi-\frac{29}{50}\right)$

D) $\ell^2\left(\pi-\frac{27}{24}\right)$ E) $\ell^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{25}{24}\right)$

47. De la figura, $\overline{CP}//\overline{NL}$, $m\sphericalangle PCD=14°$ y $ABCD$ es un cuadrado. Calcule el área de la región sombreada.

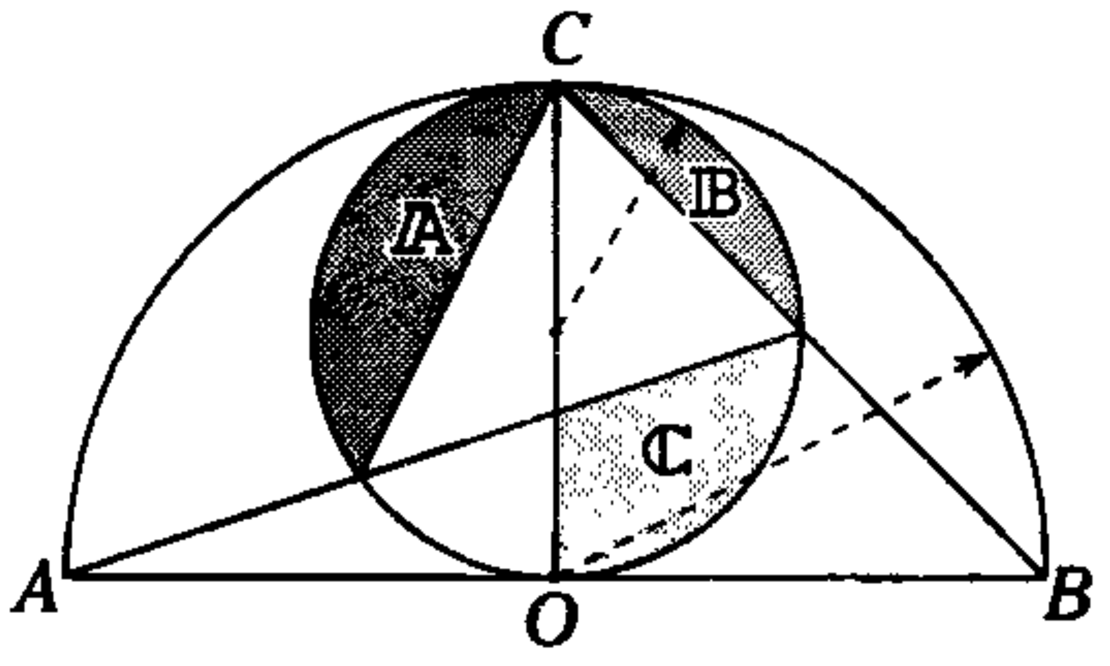


A) $\frac{\pi r^2}{6}$ B) $\frac{13\pi r^2}{90}$

C) $\frac{31\pi r^2}{180}$

D) $\frac{17\pi r^2}{90}$ E) $\frac{8\pi r^2}{45}$

48. De la figura, $OB=12\sqrt{10}$. Calcule $\mathbb{A}+\mathbb{B}-\mathbb{C}$, si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ representan las áreas de las regiones sombreadas.

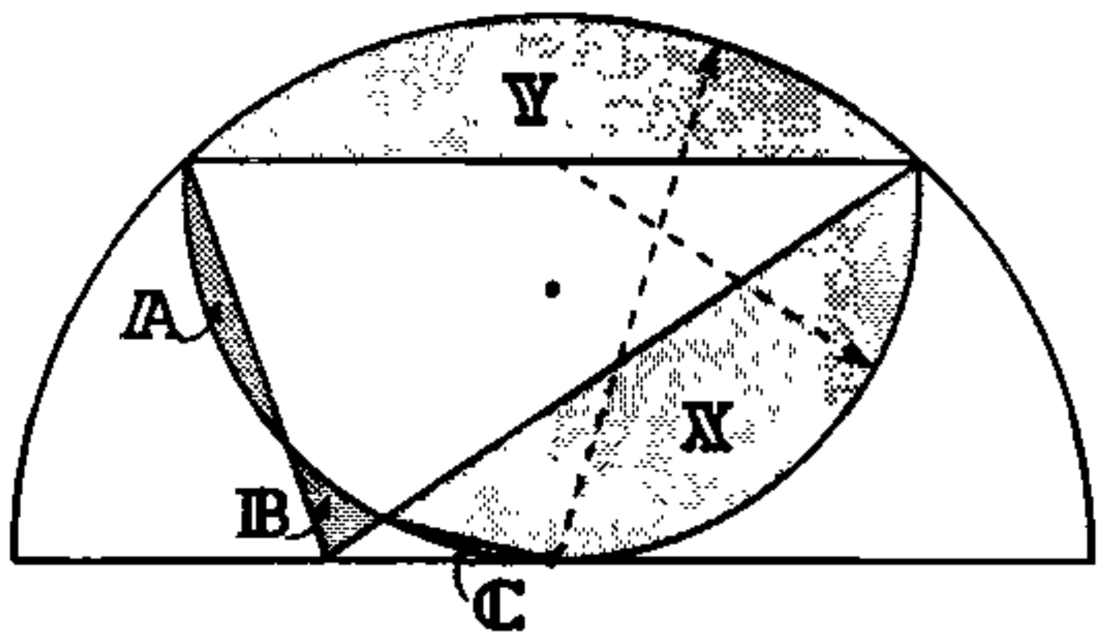


A) $2(127\pi-66)$ B) $4(127\pi-66)$

C) $3(143\pi-36)$

D) $3(143\pi-53)$ E) $4(143\pi-66)$

49. De la figura, $\mathbb{A}+\mathbb{C}=\mathbb{B}$. Calcule $\mathbb{X}/\mathbb{Y}$, Si $\mathbb{A}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{X}$ son áreas de las regiones sombreadas.



A) 1 B) 2/1

C) 1/2

D) 3/2 E) 4/3

50. De la figura, las regiones mostradas son equivalentes. Determine x.

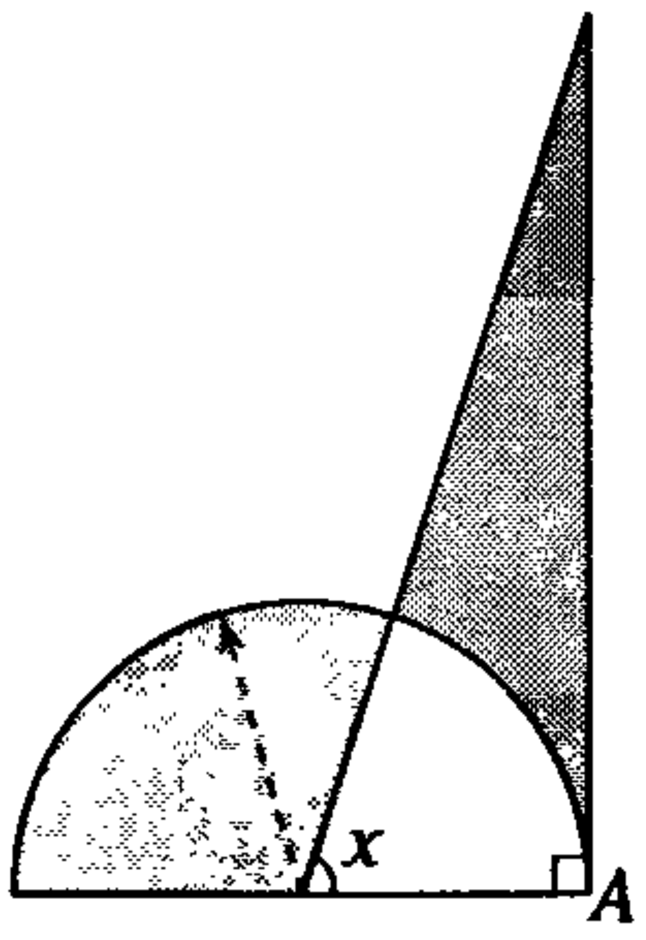
A) $\arctan(2\pi)$

B) $\arctan(4\pi)$

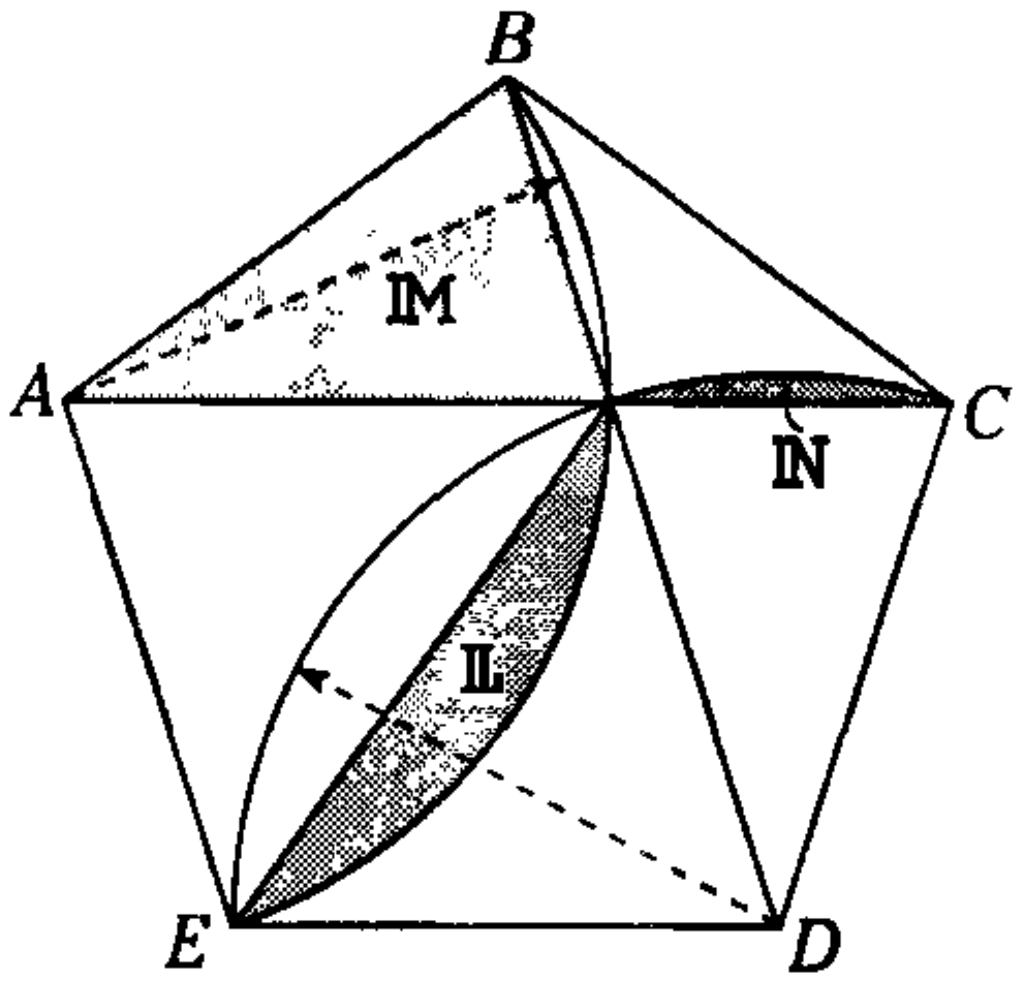
C) $\text{arccot}(\pi)$

D) $143°/2$

E) $\arctan(\pi)$

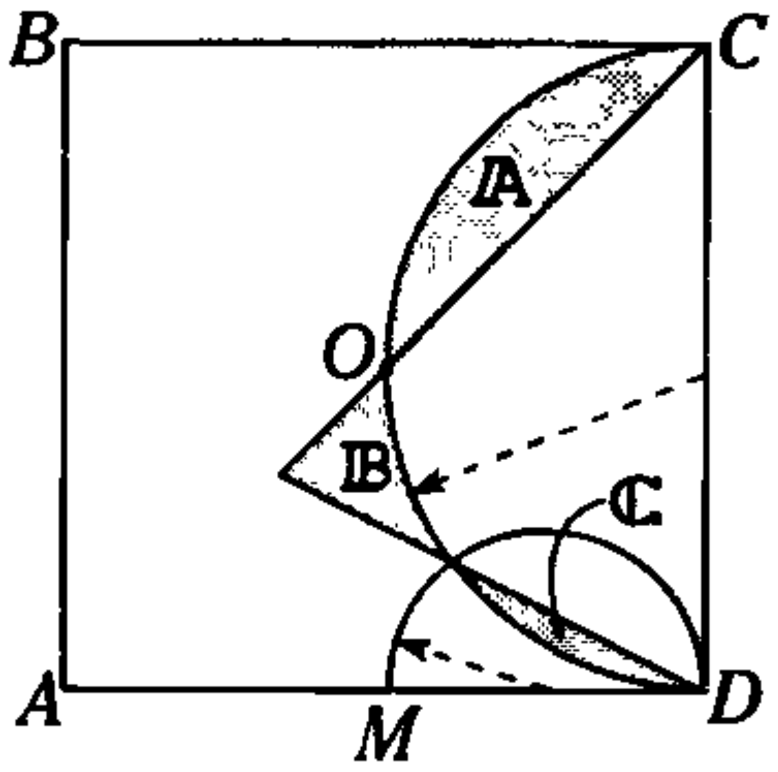


51. En la figura, se muestra un pentágono regular, *ABCDE*. Si $2(\mathbb{M}+\mathbb{N})-\mathbb{L}=18\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ u^2 ($\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{L}$ representan las áreas de las regiones mostradas), calcule el área del círculo cuyo radio es *AB*.



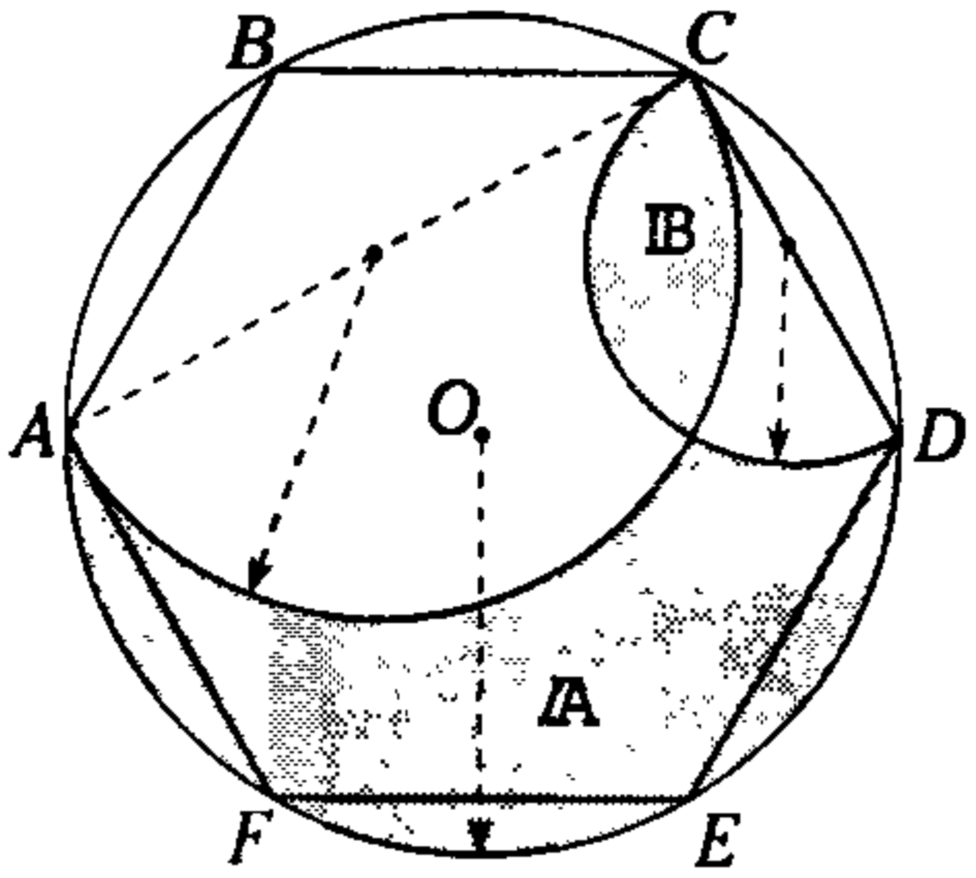
A) 36π u^2 B) 72π u^2 C) 108π u^2
D) 144π u^2 E) 169π u^2

52. Sea *ABCD* un cuadrado de centro *O* y lado 6 cm, *AM* = *MD*. Si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ son áreas de las regiones sombreadas, halle $\mathbb{A}+\mathbb{B}-\mathbb{C}$.



A) 3 cm^2 B) 4 cm^2 C) 6 cm^2
D) $3\sqrt{2}$ cm^2 E) 8 cm^2

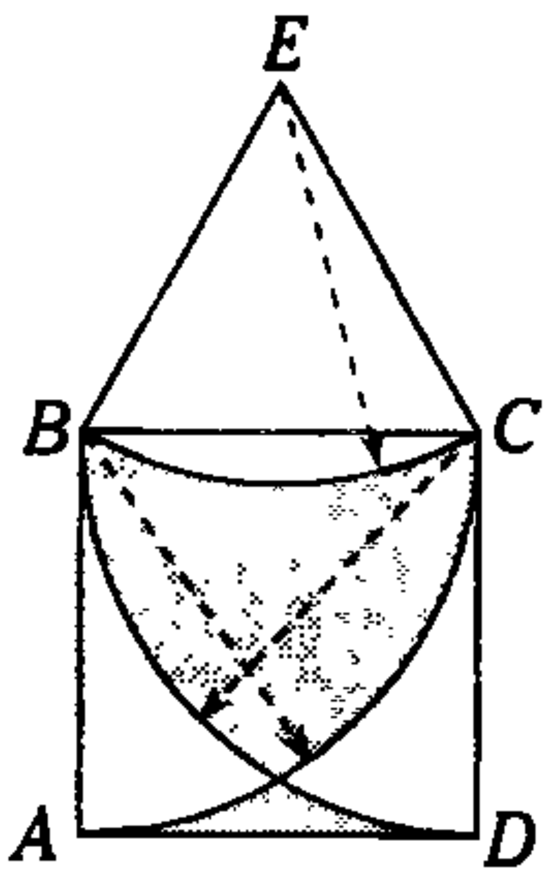
53. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ áreas de las regiones sombreadas, calcule el área de la región exagonal regular *ABCDEF*. Considere que $\mathbb{A}-\mathbb{B}=4\pi$ u^2.



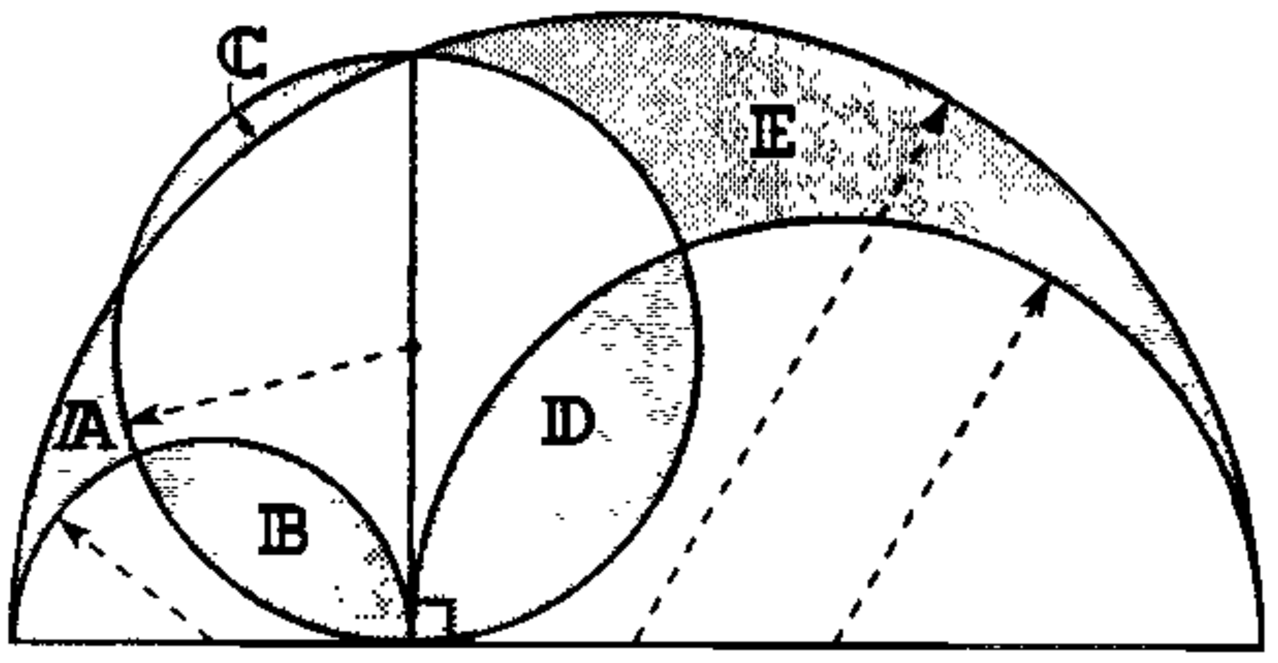
A) 4 u^2 B) 9 u^2 C) 16 u^2
D) 8 u^2 E) 12 u^2

54. En la figura mostrada, indique el área de la región sombreada. Considere que *ABCD* es un cuadrado de lado 6 m y *BEC* un triángulo equilátero.

A) $(36-8\sqrt{3})$ m^2
B) $(36-9\sqrt{3})$ m^2
C) $(36-18\sqrt{3})$ m^2
D) $(36-2\pi\sqrt{3})$ m^2
E) $(36-6\pi-9\sqrt{3})$ m^2

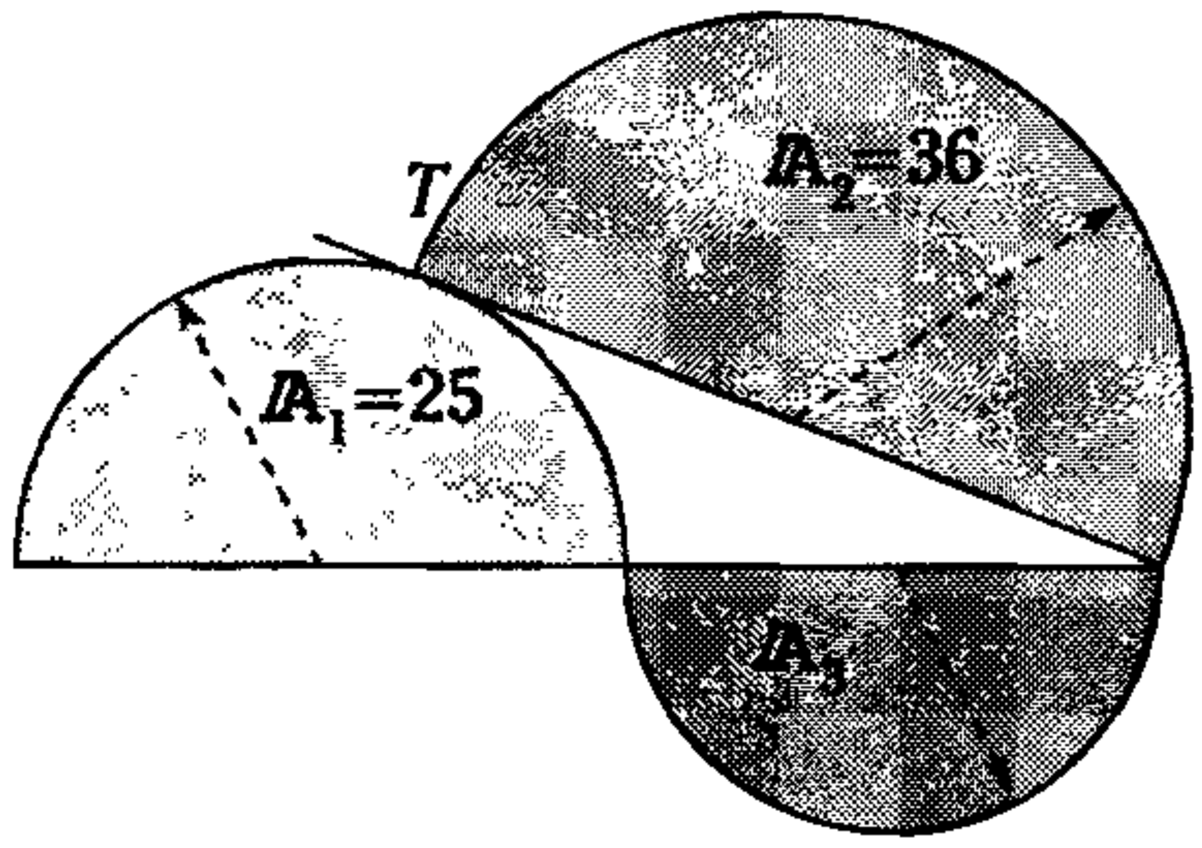


55. Indique la relación correcta, si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ y $\mathbb{E}$ son áreas de las regiones sombreadas.



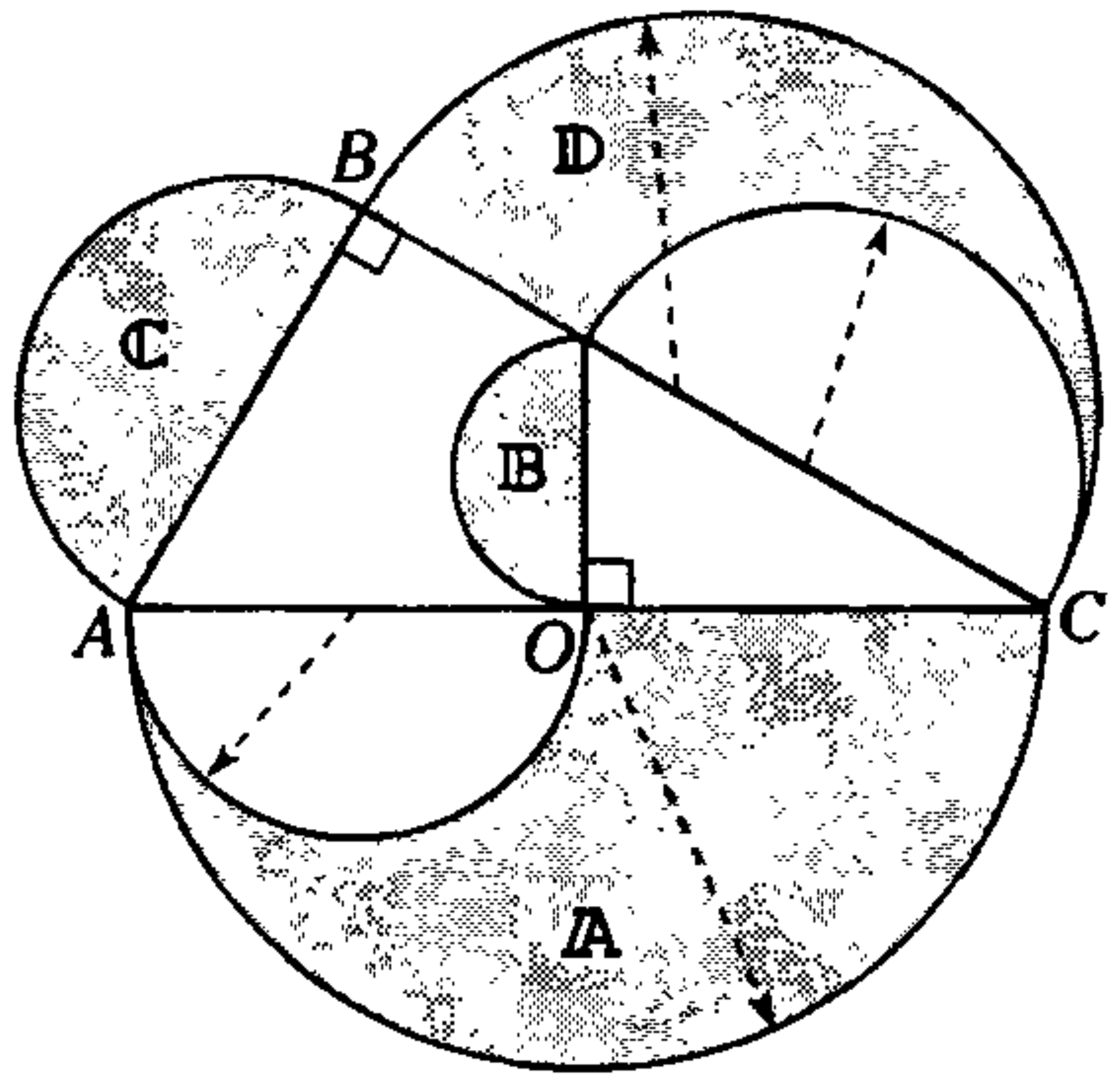
A) $\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}=\mathbb{D}+\mathbb{E}$
B) $\mathbb{B}+\mathbb{D}=\mathbb{A}+\mathbb{C}+\mathbb{E}$
C) $\mathbb{A}+\mathbb{E}=\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}$
D) $\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{D}=\mathbb{E}+\mathbb{C}$
E) $\mathbb{E}=\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}$

56. En la figura mostrada, calcule $\mathbb{A}_3$, si $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ y $\mathbb{A}_3$ son las áreas de las regiones sombreadas.



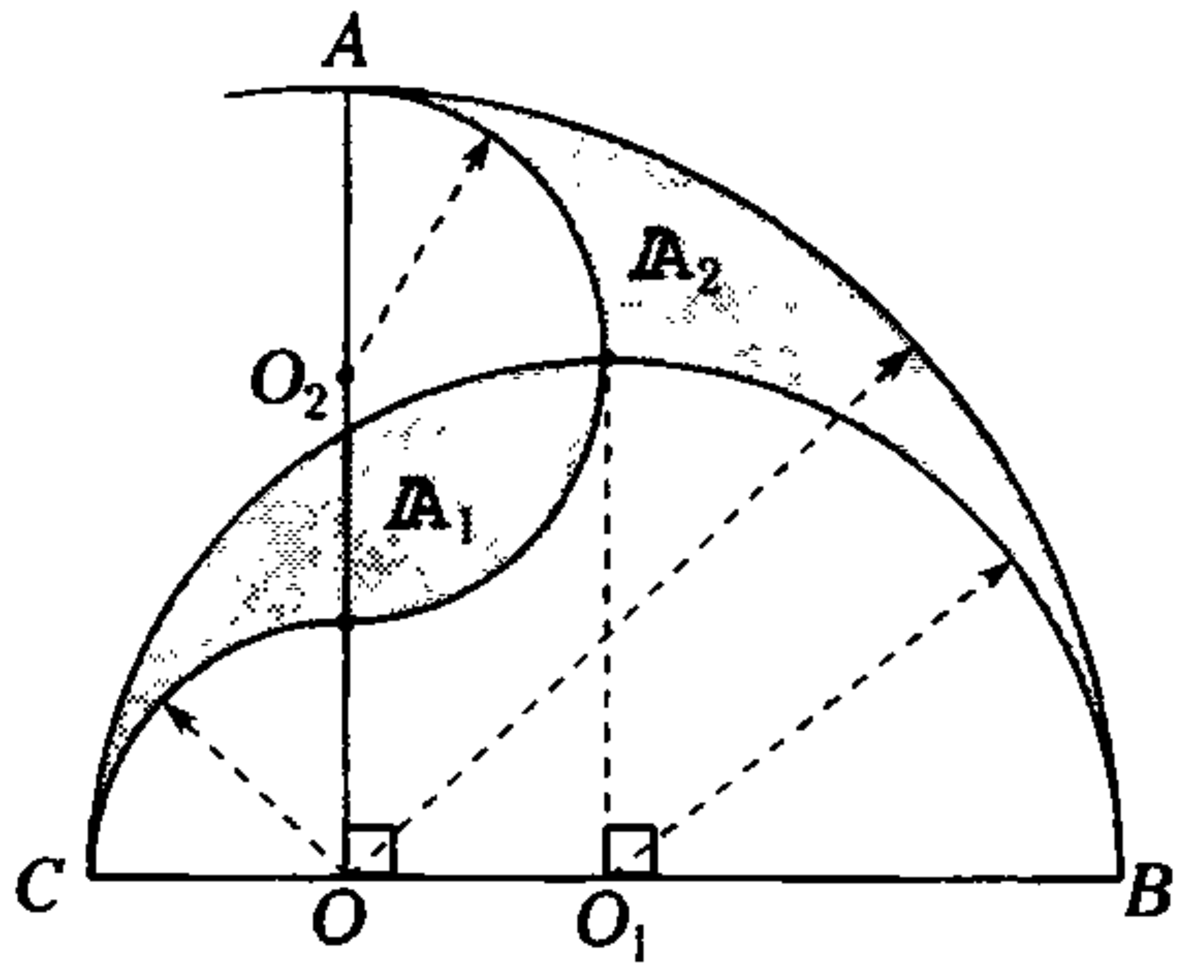
A) 11 u² B) 16 u² C) 9 u²
D) 10 u² E) 18 u²

57. En la figura mostrada, $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ son las áreas de las regiones sombreadas. Si $\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}=10\pi$ u², indique $\mathbb{A}$.



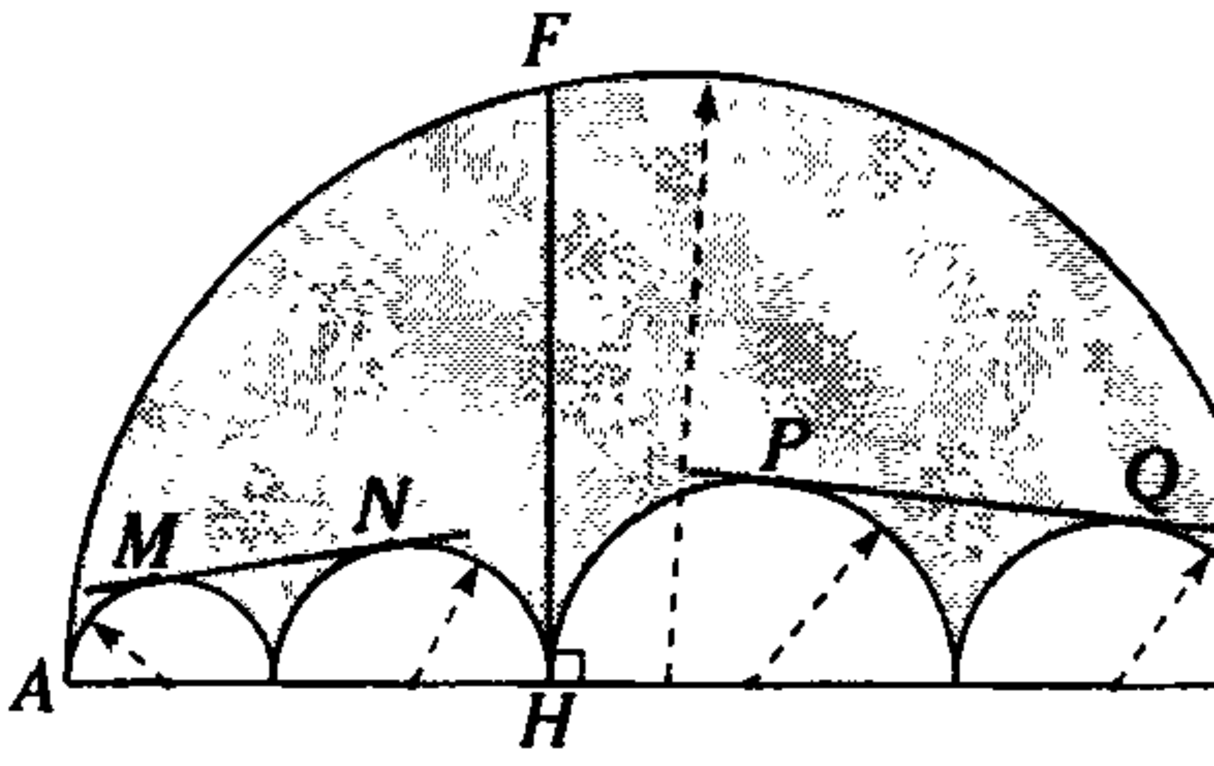
A) 5π B) 8π C) 9π
D) 10π E) 15π

58. En la figura, calcule el área $\mathbb{A}_1$, si el área $\mathbb{B}_2$ es 16 u². Considere que $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{B}_2$ son las áreas de las regiones sombreadas.



A) 8 u² B) 12 u² C) 16 u²
D) 18 u² E) 24 u²

59. Determine el área de la región sombreada, si $a^2+b^2+c^2=16$; $MN=a$, $FH=b$ y $PQ=c$. Considere que A, M, N, H, P, Q y B son puntos de tangencia.



A) 16π B) 8π C) 4π
D) 9π E) 5π

60. En un triángulo equilátero ABC, de lado $4\sqrt{3}$ m, se traza la altura AM. Luego, con centro en A y radio AM, se traza un arco que interseca a $\overline{AC}$ en R. Si después, con centro en C y radio CM, se traza un arco que interseca a $\overline{AC}$ en S, halle el área de la región (mixtilínea) MSR.

A) $(5\pi-3\sqrt{3})$ m²
B) $(5\pi-4\sqrt{3})$ m²
C) $(5\pi-6\sqrt{3})$ m²
D) $(6\pi-5\sqrt{3})$ m²
E) $(6\pi-4\sqrt{3})$ m²

1	***B***	11	***A***	21	***B***
2	***B***	12	***B***	22	***A***
3	***C***	13	***D***	23	***D***
4	***A***	14	***A***	24	***E***
5	***B***	15	***C***	25	***B***
6	***C***	16	***A***	26	***E***
7	***E***	17	***D***	27	***B***
8	***C***	18	***C***	28	***D***
9	***A***	19	***B***	29	***E***
10	***C***	20	***C***	30	***E***

Claves

31	B	41	A	51	D
32	C	42	C	52	A
33	D	43	D	53	E
34	B	44	C	54	B
35	B	45	A	55	C
36	C	46	B	56	B
37	E	47	C	57	D
38	A	48	B	58	C
39	D	49	A	59	C
40	E	50	E	60	C

Claves